

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

کتاب کار دانش آموز

ریاضی ۳ (پودمانی)

کلیه رشته‌های زمینه صنعت

و

رشته کامپیوتر زمینه خدمات

شاخه آموزش فنی و حرفه‌ای

شماره درس ۱۵۱۵

عنوان و نام پدیدآور	: کتاب کار دانش آموز ریاضی ۳ (پودمانی) کلیه رشته‌های زمینه صنعت و رشته کامپیوتر، زمینه خدمات، شاخه فنی و حرفه‌ای [کتاب‌های درسی]؛ شماره درس ۱۵۱۵/ برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کار دانش؛ وزارت آموزش و پرورش، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی؛ مؤلفان: سیداحمد سادات حسینی، سیدمرتضی رضوی.
مشخصات نشر	: تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۹۵.
مشخصات ظاهری	: ۲۷۱ص.
شابک	: ۹۶۴-۰۵-۱۳۷۷-۶
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیبا
موضوع	: ریاضیات
شناسه افزوده	: ۱- سادات حسینی، سیداحمد، ۱۳۴۷. ۲- رضوی، سیدمرتضی
شناسه افزوده	: الف- سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. ب- دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کار دانش. ج- اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی. د- شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
رده‌بندی کنگره	: ۱۳۹۲ ۲۲۴۴ ک/۱۳۹ QA
رده‌بندی دیویی	: ۱۳۹۳ ۱۵۱۵ ک ۳۷۳
شماره کتاب‌شناسی ملی	: ۳۱۱۹۹۲۹

همکاران محترم و دانش آموزان عزیز :

پیشنهادات و نظرات خود را درباره محتوای این کتاب به نشانی
تهران - صندوق پستی شماره ۴۸۷۴/۱۵ دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و
حرفه‌ای و کاردانش، ارسال فرمایند.

troccd@roshd.ir

پیام‌نگار (ایمیل)

www.troccd.medu.ir

وب‌گاه (وب سایت)

محتوای این کتاب براساس نظرهای دریافت شده در همایش دبیران محترم و سرگروه‌های آموزش استان‌های کشور، در محل
آموزشکده انقلاب اسلامی (مردادماه ۱۳۸۵)، توسط کارشناس رشته ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و
کاردانش اصلاح و بازسازی شده است.

وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش

نام کتاب : کتاب کار دانش آموز ریاضی ۳ (پودمانی) - ۴۵۰/۷

مؤلفان : سیداحمد سادات حسینی، سیدمرتضی رضوی

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وب‌سایت : www.chap.sch.ir

رسام : مریم دهقان‌زاده

صفحه‌آرا : طرّفه سهانی

طراح جلد : علیرضا رضائی‌کُر

ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش)

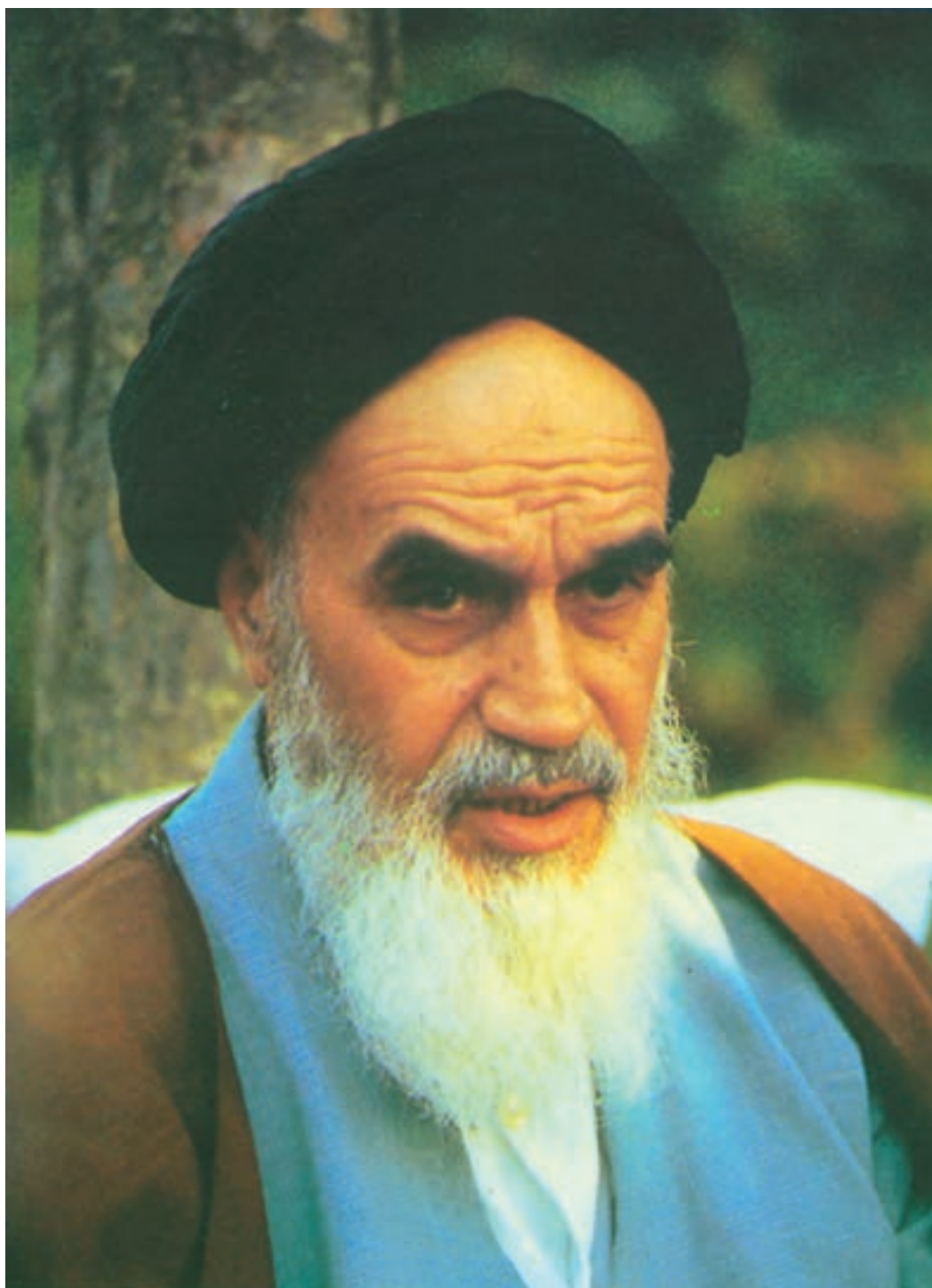
تلفن : ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۳۷۵۱۵-۱۳۹

چاپخانه : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ : چاپ یازدهم ۱۳۹۵

حَقّ چاپ محفوظ است.

شابک ۶-۱۳۷۷-۰۵-۹۶۴-ISBN 964-05-1377-6



شما عزیزان کوشش کنید که از این وابستگی بیرون آید و احتیاجات کشور خودتان را برآورده
سازید، از نیروی انسانی ایمانی خودتان غافل نباشید و از اتکای به اجانب بپرهیزید.
امام خمینی «قدّس سرّه الشّریف»

فهرست مطالب

۷۱	۲-۲- بازه		بخش اول : یادآوری و تکمیل
۸۲	آزمون پایانی (۲)		
			پیشگفتار
۸۳	فصل سوم : تابع	۳	فصل اول : حل معادله
۸۴	پیش‌آزمون (۳)	۴	پیش‌آزمون (۱)
۸۵	۲-۳- تابع	۵	۱-۱- حل معادله
۸۵	۱-۳-۲- تابع با ضابطه (فرمول)	۵	۱-۱-۱- متغیر
۹۱	۲-۳-۲- تابع با جدول	۵	۱-۱-۲- معادله
۹۳	۲-۳-۳- تابع با زوج مرتب	۶	۱-۱-۳- درجه‌ی معادله
۹۶	۲-۳-۴- نمایش نموداری تابع	۶	۱-۱-۴- دو معادله‌ی هم‌ارز
۱۰۰	آزمون پایانی (۳)	۶	۱-۱-۵- حل معادله‌ی درجه اول
		۱۴	۱-۱-۶- معادله‌ی درجه دوم
۱۰۱	فصل چهارم : دامنه‌ی تابع‌های حقیقی	۳۰	آزمون پایانی (۱)
۱۰۲	پیش‌آزمون (۴)		
۱۰۳	۲-۴- دامنه‌ی تابع با ضابطه	۳۱	فصل دوم : تعیین علامت، حل نامعادله و قدرمطلق
۱۰۳	۱-۴-۲- دامنه‌ی توابع چند جمله‌ای	۳۲	پیش‌آزمون (۲)
۱۰۳	۲-۴-۲- دامنه‌ی توابع کسری	۳۳	۱-۲- تعیین علامت
۱۰۴	۲-۴-۳- دامنه‌ی تابع‌های شامل رادیکال	۳۳	۱-۲-۱- تعیین علامت دو جمله‌ای درجه اول
۱۱۴	آزمون پایانی (۴)	۳۶	۱-۲-۲- تعیین علامت سه جمله‌ای درجه دوم
		۴۲	۱-۲-۳- نامعادله
۱۱۵	فصل پنجم : چند تابع ویژه	۴۴	۱-۲-۴- قدرمطلق
۱۱۶	پیش‌آزمون (۵)	۵۱	آزمون پایانی (۲)
۱۱۷	۲-۵- چند تابع ویژه		
۱۱۷	۱-۵-۲- تابع ثابت		
۱۱۸	۲-۵-۲- تابع همانی		
۱۲۰	۳-۵-۲- مثلثات	۵۳	بخش دوم : تابع و مفاهیم آن
۱۵۱	۴-۵-۲- تساوی دو تابع	۵۴	فصل اول : محور اعداد
۱۵۳	آزمون پایانی (۵)	۵۶	پیش‌آزمون (۱)
		۶۸	۲-۱- محور اعداد
			آزمون پایانی (۱)
۱۵۴	فصل ششم : عملیات روی تابع‌ها		
۱۵۵	پیش‌آزمون (۶)	۶۹	فصل دوم : بازه
۱۵۶	۶-۲- عملیات روی تابع‌ها (+, -, ×, ÷)	۷۰	پیش‌آزمون (۲)

۲۱۸	۱-۳-۳- حد در بی نهایت	۱۵۶	۱-۶-۲- جمع دو تابع f و g
۲۲۳	آزمون پایانی (۳)	۱۵۶	۲-۶-۲- تفریق دو تابع f و g
	بخش چهارم : مشتق و کاربردهای آن	۱۵۶	۳-۶-۲- حاصل ضرب دو تابع f و g
		۱۵۷	۴-۶-۲- خارج قسمت دو تابع
		۱۶۲	آزمون پایانی (۶)
۲۲۵	فصل اول : مشتق		فصل هفتم : ترکیب دو تابع
۲۲۶	پیش آزمون (۱)	۱۶۳	پیش آزمون (۷)
۲۲۷	۱-۴- نمو متغیر	۱۶۴	۲-۷- ترکیب دو تابع
۲۲۸	۱-۴-۱- تعریف و محاسبه ی مشتق	۱۶۵	آزمون پایانی (۷)
۲۳۳	۲-۴-۱- برخی از رابطه های مشتق	۱۷۰	
۲۳۷	۳-۴-۱- تعبیر هندسی مشتق		بخش سوم : حد و پیوستگی
۲۳۹	۴-۴-۱- قضیه های مشتق		
۲۴۵	۵-۴-۱- مشتق دوم یک تابع		
۲۴۷	آزمون پایانی (۱)	۱۷۲	فصل اول : حد
		۱۷۳	پیش آزمون (۱)
۲۴۸	فصل دوم : کاربرد مشتق (۱)	۱۷۴	۱-۳- حد
۲۴۹	پیش آزمون (۲)	۱۸۴	۱-۳-۱- بخش پذیری چند جمله ای ها بر $x - a$
۲۵۰	۲-۴- کاربردهای مشتق (۱)	۱۹۱	آزمون پایانی (۱)
	۱-۴-۲- شیب خط مماس و عمود بر یک منحنی		
۲۵۰	(ضریب زاویه)	۱۹۲	فصل دوم : پیوستگی
۲۵۲	۲-۴-۲- تعیین معادله ی خط مماس و خط عمود	۱۹۳	پیش آزمون (۲)
۲۵۵	۳-۴-۲- مشتق و رفتار تابع	۱۹۵	۲-۳- پیوستگی
۲۶۱	۴-۴-۲- تغییرات تابع	۱۹۸	۱-۳-۲- قضیه های پیوستگی
۲۶۳	۵-۴-۲- ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع	۲۰۴	آزمون پایانی (۲)
۲۷۰	آزمون پایانی (۲)		
		۲۰۵	فصل سوم : تعمیم حد
۲۷۱	منابع و مأخذ	۲۰۶	پیش آزمون (۳)
		۲۰۷	۳-۳- حد بی نهایت

پیشگفتار

یکی از گران‌بهارترین دست‌آوردهای بشری که عمری به درازای عمر بشر دارد ریاضیات است. این علم در ابتدا جنبه‌ی کاملاً عملی داشت. مطالعه در سرگذشت تمدن‌های قدیمی نظیر مصر و سومر مؤید این سخن است. اما بعدها بشر به جنبه نظری آن نیز توجه کرد. به طور مثال یونانی‌ها جنبه‌ی نظری ریاضی را بر جنبه‌های عملی ترجیح می‌دادند. امروزه ریاضیات در تمام علوم نظری و عملی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

برای درک بیش‌تر مفاهیم ریاضی، روش حل مسئله می‌تواند بسیار راهگشا باشد. از این رو کتاب حاضر در راستای کتاب ریاضی ۳ پودمانی تهیه شده است، با توجه به تجربه‌ای که مؤلفان طی سال‌ها تدریس در هنرستان‌های فنی و حرفه‌ای اندوخته‌اند، برای یادآوری مهارت‌های لازم جهت درک بهتر مسایل که همواره فراروی دانش‌آموزان است. بخش اول با عنوان «یادآوری و تکمیل» نگارش شده است.

به دانش‌آموزان گرامی توصیه می‌شود قبل از مطالعه‌ی کتاب ریاضی ۳ پودمانی این بخش را مطالعه نمایند. سپس بعد از خواندن هر مبحث و موضوع از کتاب ریاضی ۳ پودمانی موضوع نظیر آن را در این کتاب مطالعه نمایند.

از دبیران و هنرآموزان عزیز و سایر صاحب‌نظران درس ریاضی تقاضا داریم نظرات اصلاحی خود را جهت رفع اشکالات و هرچه بهتر شدن محتوای داخلی این کتاب در چاپ‌های بعدی به نشانی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش (صندوق پستی ۴۸۷۴، ۱۵) ارسال نمایند.

در خاتمه بر خود لازم می‌دانیم که از همکاری آقایان ابوالقاسم جاریانی، عبدالمجید خاکی صدیق، جمشید علی محمدی و احمدرضا دورانیش به خاطر راهنمایی‌های سازنده‌شان نهایت تشکر را داشته باشیم.

مؤلفان

هدف کلی کتاب

- تشریح مفاهیم تابع، حد، پیوستگی، مشتق و کاربردهای آن به منظور
- ۱- توانایی بخشیدن به هنرجویان در مدل‌سازی پدیده‌های ساده به زبان ریاضی؛
 - ۲- بررسی روش‌های پاسخ‌گویی به سؤال‌ها و مسائل مربوط.

جدول عناوین بخش‌ها

شماره‌ی بخش	عنوان بخش
بخش اول	یادآوری و تکمیل
بخش دوم	تابع و مفاهیم آن
بخش سوم	حد و پیوستگی
بخش چهارم	مشتق و کاربردهای آن

بخش اول

یادآوری و تکمیل

هدف کلی بخش

آشنایی با معادله، روش حل معادله، تعیین علامت معادله‌ها، حل نامعادله

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل
اول	حل معادله
دوم	تعیین علامت و حل نامعادله و قدرمطلق

بخش اول

فصل اول

حل معادله

هدف کلی

بیان مفاهیم مربوط به معادله و روش‌های حل آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

- ۱- معادله و متغیر آن را تعریف کند؛
- ۲- درجه‌ی معادله را تشخیص دهد؛
- ۳- معادله‌های هم‌ارز را تعریف کند؛
- ۴- معادلات درجه اول و دوم را حل کند.

پیش‌آزمون (۱)

محل پاسخ به سوالات پیش‌آزمون (۱)

$$f(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

۱- اگر $A = \dots 1, 2, 5$ دامنه‌ی متغیر x باشد مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 5x = 0$ را بیابید.
۲- در خط D به معادله‌ی $5 - 3x = y$ ، الف) کدام یک از دو نقطه‌ی $(0, 5)$ و $(-1, 2)$ روی خط D قرار دارد؟
ب) خط D را رسم کنید.

۳- درجه‌ی معادله‌های زیر را تعیین کنید:
الف) $5x^2 - 2x^2 - 7x = 0$
ب) $4x^5 = 0$

۴- معادله‌های زیر را حل کنید:
الف) $4x - 5 = 0$
ب) $4x - 5x^2 = 0$

۵- نمودار تابع روبه‌رو را رسم کنید.

۱-۱-۱ حل معادله

بسیاری از مسایل روزمره را می‌توان به کمک زبان ریاضی به صورت ساده بیان کرد. یکی از ابزارهای این زبان معادله است. در این بخش به بیان بعضی مفاهیم اولیه پیرامون معادله و روش‌های حل برخی مسایل به کمک معادله می‌پردازیم.

۱-۱-۱-۱ متغیر: هر نماد یا حرف که جانشین اعضای

مجموعه‌ی مشخصی می‌گردد متغیر نامیده می‌شود.

دامنه‌ی متغیر: اعضای مجموعه‌ی مشخص فوق را

دامنه‌ی متغیر می‌نامند.

هرگاه در یک عبارت چند جمله‌ای دامنه‌ی متغیر بیان

نشده باشد، مجموعه‌ی اعداد حقیقی دامنه‌ی آن خواهد بود (جدول ۱-۱).

جدول ۱-۱

عبارت	متغیر	دامنه‌ی متغیر
$5x$	x	\mathbb{R}
$2n-1$	n	\mathbb{R}
$3x^2 \cdot 6y$	x, y	\mathbb{R}
$2k$	k	\mathbb{R}

۱-۱-۲ معادله: اگر هر تساوی، شامل یک یا چند

متغیر، به ازای بعضی از مقادیر که جانشین متغیر شوند، درست و به ازای بقیه‌ی مقادیر نادرست باشد آن تساوی را معادله می‌گویند. مجموعه‌ی مقادیری از دامنه‌ی متغیر که معادله را به یک تساوی تبدیل می‌کند مجموعه‌ی جواب‌های معادله است.

مثال ۲: اگر $A = \{1, 0, -1\}$ ، دامنه‌ی متغیر x از معادله‌ی

$x^2 - 2x = 0$ باشد، مجموعه‌ی جواب‌های آن را بیابید.

مراحل حل:

اگر $x = 1$ باشد، داریم:

پس $x = 1$ جواب معادله نیست.

اگر $x = 0$ باشد، داریم:

پس $x = 0$ جواب معادله است.

اگر $x = -1$ باشد، داریم:

پس $x = -1$ جواب معادله نیست.

بنابراین $x = 0$ جواب معادله است، پس مجموعه جواب

است.

مثال ۱: $7z - 3z = 2z - 5z$ (ب) $3x = 3 \cdot 0$ (الف)

$6 \cdot 5z = z^2$ (د) $7x \cdot \frac{x}{3} = y$ (ج)

$\frac{x}{2} \cdot 1 - \frac{3x \cdot 7}{5} = 1$ (ه)

$\frac{5k \cdot 1}{4} - \frac{-7k \cdot 3}{5} = t^3 - 9t$ (ز)

$2x^2 = 5x = 8$ (ح)

$2 \sin x = 1$ (ط)

$3 \cdot 2 \cdot 1 - 2(-1) = (-1)^2$

$3 \cdot 0 = 0$

$0 - 2(0) = 0$

$0 = 0$

$2 - 2(1) = 1 - 2$

$0 = 1$

مراحل حل: جملات مجهول را به یک طرف و جملات

معلوم را به طرف دیگر معادله می‌بریم.

با تقسیم دو طرف معادله بر ۲ داریم:

$$\begin{aligned} 5x - 3x &= 5 - 7 & (5-3)x &= -2 \\ 2x &= -2 \\ 2x - 2 &= x - 1 \end{aligned}$$

مثال ۴: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

مراحل حل: مجهول‌ها را به یک طرف و معلوم‌ها را به

طرف دیگر انتقال می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \frac{2x}{3} + \frac{1}{2} - \frac{x-1}{5} &= \dots \\ \frac{x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{x}{5} &= \dots \\ (\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5})x &= \frac{-1}{5} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

از دو طرف مخرج مشترک می‌گیریم

$$\begin{aligned} (\frac{20}{30} + \frac{15}{30} - \frac{6}{30})x &= \frac{-3}{15} - \frac{5}{15} \\ \frac{29}{30}x - \frac{1}{15} &= x - \frac{\frac{8}{15}}{\frac{29}{30}} = \frac{-8 \cdot 30}{15 \cdot 29} \end{aligned}$$

با تقسیم دو طرف تساوی بر $\frac{29}{30}$ داریم:

$$x = \frac{-16}{29}$$

مثال ۵: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

مراحل حل: به کمک اتحاد مربع، معادله را ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} (x+3)^2 - (x-5)^2 &= 0 \\ x^2 + 2(x)(3) + 3^2 - (x^2 - 2(x)(5) + 5^2) &= 0 \\ x^2 + 6x + 9 - x^2 + 10x - 25 &= 0 \\ 16x - 16 &= 0 \end{aligned}$$

یادآوری

اتحاد مربع

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$x^2 + 7x + 4 = x^2 + 4x$$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

مراحل حل: از دو طرف معادله جمله‌های مساوی را حذف

می‌کنیم:

معلوم‌ها را به یک طرف و مجهول‌ها را به طرف دیگر

انتقال می‌دهیم:

$$7x + 4 = 4x$$

$$7x - 4x = -4 \quad 3x = -4 \quad x = \frac{-4}{3}$$

فعالیت ۱-۱

الف) معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$1) \quad \frac{-\frac{8}{3} - \frac{4}{9} - 2}{\frac{5}{7} - \frac{1}{3}} \cdot \frac{9}{7} \cdot x = \frac{-\frac{7}{5} - \frac{1}{6} - \frac{4}{3} - 1}{\frac{11}{5} - \frac{1}{6} - \frac{5}{2}}$$

ب) مربع‌های خالی روبه‌رو را تکمیل کنید.

$$\frac{-\frac{8}{3} \square}{\frac{5}{7} \square} \cdot \frac{9}{6} \cdot x = \frac{\frac{3}{5} \square}{\frac{11}{5} \square} \cdot \frac{3}{6}$$

ج) با جایگذاری عدد مناسب، معادله روبه‌رو را کامل

کنید.

$$\Rightarrow \frac{\bigcirc}{\bigcirc} \cdot \frac{\bigcirc}{\bigcirc} \cdot x = \frac{\bigcirc}{\bigcirc} \cdot \frac{\bigcirc}{\bigcirc}$$

د) با جایگذاری عدد مناسب به جای مثلث و مستطیل‌ها

جواب نهایی را بیابید.

$$\Rightarrow \triangle x \cdot \square \Rightarrow x \cdot \square$$

$$2) \quad \frac{\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3}}{-4 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{2} \cdot x = \frac{\frac{3}{7} - \frac{2}{5} - 1}{\frac{3}{2} - \frac{4}{7} - 1}$$

مستطیل‌ها، دایره و مثلث خالی را تکمیل کنید.

$$\frac{\square}{6} \cdot \frac{\square}{4} \cdot x = \frac{35}{14} \cdot \bigcirc \cdot \triangle$$

به جای مستطیل عدد مناسب بگذارید.

$$\Rightarrow x \cdot \square$$

نکته: برای حل معادلات کسری نخست بهتر است با ضرب کردن تمامی جملات در کوچک‌ترین مضرب مشترک تمامی مخرج‌ها، مخرج کسرها را از بین ببریم و سپس معادله را حل کنیم.

مثال ۶: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$\frac{2x-1}{5} - \frac{x-2}{3} = \frac{x \cdot 1}{2}$$

حل: ابتدا دو طرف معادله را در کوچک‌ترین مضرب

مشترک اعداد ۲، ۳ و ۵، یعنی عدد ۳۰ ضرب می‌کنیم.

$$30 \left(\frac{2x-1}{5} - \frac{x-2}{3} = \frac{x \cdot 1}{2} \right)$$

حل

$$\cdot 6(2x-1) - 10(x-2) = 15(x \cdot 1)$$

$$\cdot (12x - 6) - 10x + 20 = 15x$$

$$\cdot 2x - 14 = 15x - 15$$

دو طرف تساوی را بر عدد ۱۳- تقسیم می کنیم، پس :

$$\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{x-3}{6}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} = \frac{x-3}{6}$$

$$6\left(\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3}\right) = 6\left(\frac{x-3}{6}\right)$$

$$3x - (x-1) = x-3$$

$$3x - x + 1 = x - 3$$

$$2x + 1 = x - 3$$

$$\Rightarrow \square x = \square \Rightarrow \bigcirc x = \triangle$$

$$\Rightarrow x = \square$$

مثال ۷: معادله ی روبه رو را حل کنید.

با ضرب کردن دو طرف تساوی در کوچک ترین مضرب

مشترک (ک،م،م) اعداد ۲، ۳ و ۶ یعنی ۶ داریم :

چون تساوی روبه رو غیرممکن است، پس معادله ی اولیه

نیز غیرممکن یا ممتنع می باشد.

تمرین

۱- با تکمیل جاهای خالی معادله ی روبه رو را حل کنید.

(راهنمایی : همواره داریم $a \in R$ ، $a \neq 0$)

۲- معادلات زیر را حل کنید.

$$1) \frac{2-x}{11} = \frac{x-3}{11} + 7x$$

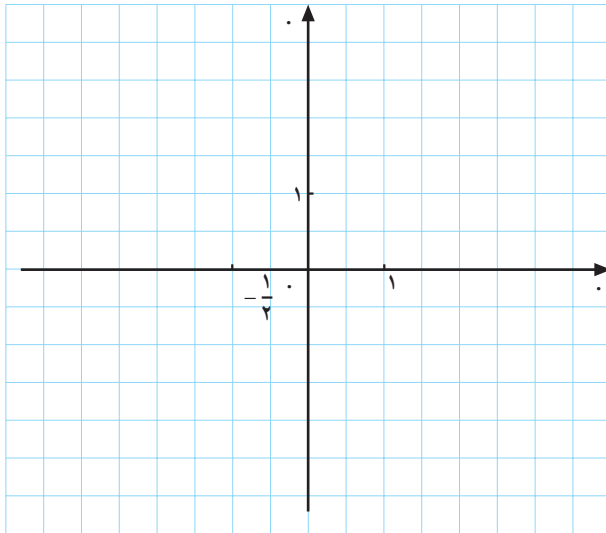
$$2) \frac{x-7}{5} = 2 - \frac{1-x}{3}$$

$$3) \frac{z-1}{2} = \frac{-z-1}{3}$$

$$4) (2t-3)^2 - 4t^2 = 8$$

جدول ۱-۲

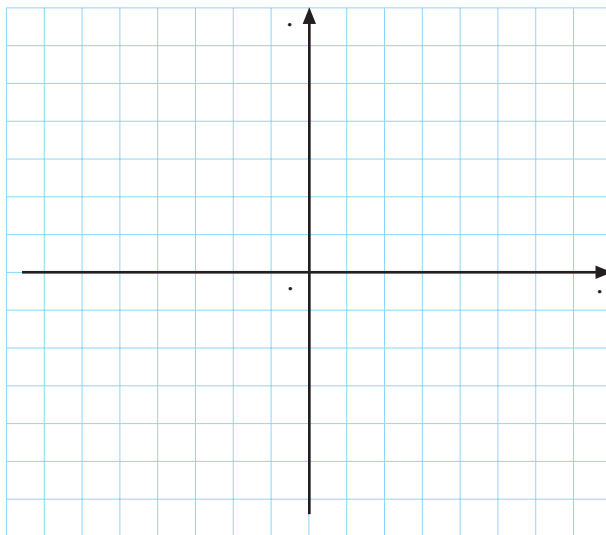
x	°	<input type="checkbox"/>
y	<input type="checkbox"/>	°



نمودار ۱-۱

جدول ۱-۳

x	°	<input type="checkbox"/>
y	<input type="checkbox"/>	°



نمودار ۱-۲

فعالیت ۱-۲

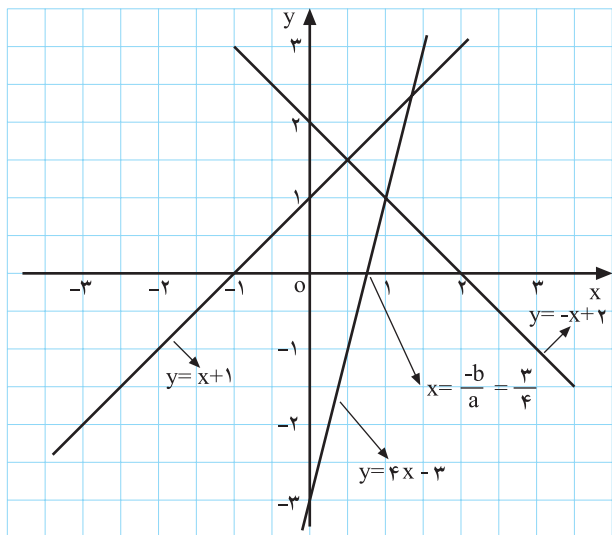
با تکمیل جدول ۱-۲ نمودار خط $y = 2x - 1$ را رسم کنید.

- الف) برای رسم خط، حداقل چند نقطه نیاز داریم؟
 ب) طول نقطه‌ی برخورد خط با محور x ها چند می‌باشد؟
 ج) آیا نقطه‌ی برخورد خط با محور x ها، جواب معادله‌ی $2x - 1 = 0$ می‌باشد؟

فعالیت ۱-۳

با تکمیل جدول ۱-۳ نمودار خط $y = 3x - 2$ را رسم کنید.

- الف) با توجه به شکل، جواب معادله‌ی $3x - 2 = 0$ را بیابید.
 ب) آیا نقطه‌ی $(-1, 5)$ بر روی خط $y = 3x - 2$ قرار دارد؟ چرا؟



نمودار ۱-۳



شکل ۱-۴

نتیجه: هر معادله که پس از ساده کردن به صورت $ax + b = 0$ ،
 $ax + b = 0$ تبدیل شود، معادله‌ی درجه اول نامیده می‌شود.
 ریشه‌ی این معادله طول محل تلاقی خط $y = ax + b$ با محور
 x ها می‌باشد $(x = -\frac{b}{a})$ (شکل ۱-۳).

کاربرد معادله‌ی درجه اول در حل مسائل: معمولاً برای
 حل مسائل ابتدا یک حرف به عنوان متغیر برای مجهول مسئله
 در نظر می‌گیریم و سپس صورت مسئله را به شکل معادله
 می‌نویسیم، به نحوی که ریشه‌ی آن معادله جواب مسئله است.
 مثال ۱: عددی به دست آورید که مربع آن از مربع عدد
 بعدی ۲۱ واحد کم‌تر باشد.

مراحل حل: اگر عدد مورد نظر را x بگیریم عدد بعدی
 ۱. x خواهد بود؛ پس مربع آن‌ها برابر است با:
 بنابراین:

$$x^2 \text{ و } (x + 1)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 21$$

$$2x + 1 = 21$$

$$2x = 20 \Rightarrow x = 10$$

مثال ۲: ۴۷۰۰۰ ریال را بین سه نفر چنان تقسیم کنید که
 اولی ۱۰۰۰۰ ریال بیش‌تر از دومی و دومی ۸۰۰۰ ریال بیش‌تر
 از سومی داشته باشد.

مراحل حل: اگر پول سومی را x ریال بگیریم پول دومی
 ۸۰۰۰ ریال و پول اولی برابر با:

$$x + 8000 + 10000 = 47000$$

$$x + 18000 = 47000$$

$$x = 47000 - 18000 = 29000$$

نخست مسئله را به صورت معادله می‌نویسیم:

با حل این معادله‌ی درجه‌ی اول داریم:

$$3x + 47000 - 26000 = 21000 \Rightarrow 3x = 20000 \Rightarrow x = 6666.67$$

سه نفر سوم؛

۷۰۰۰. ۸۰۰۰. ۱۵۰۰۰

۱۵۰۰۰. ۱۰۰۰۰۰. ۲۵۰۰۰

– سهم نفر دوم ؛

– سهم نفر اول ؛

مثال ۳: سن پدری ۲۴ سال است. سن او شش برابر سن فرزندش می باشد. چند سال دیگر سن پدر سه برابر سن فرزندش می شود؟

۲۴. x

مراحل حل: سال مورد نظر را x می گیریم. سن پدر بعد

از x سال :

سن پدر ۲۴ سال

۴. x

سن فرزند ۴ . $\frac{24}{6}$ سال

۲۴. x. ۳(۴. x). ۲۴. x. ۱۲. ۳x

– سن فرزند بعد از x سال

. x - ۳x. ۱۲ - ۲۴ - . ۲x - . ۱۲

بنابر صورت مسئله داریم :

. x . ۶

حل:

x تعداد موفقیت :

پس از ۶ سال سن پدر ۳ برابر سن فرزندش می شود (سن پدر ۳۰ سال و سن فرزند ۱۰ سال است).

۸۰۰۰x کل امتیاز به دست آمده :

مثال ۴: پدری با فرزندش قرار گذاشت که اگر در هر نوبت بیش از ۱۰۰ بار بدون توقف طناب بزند ۸۰۰۰ امتیاز پاداش بگیرد، و در غیر این صورت ۵۰۰۰ امتیاز از وی کسر شود. پس از گذراندن ۸ مرحله فرزند ۳۸۰۰۰ امتیاز دریافت کرد، مشخص کنید که در چند نوبت موفق بوده است.

۵۰۰۰(۸-x) امتیاز از دست داده :

– بیان مسئله به صورت معادله :

با توجه به صورت مسئله داریم :

با حل معادله، معلوم می شود که

۳۸۰۰۰ . مجموع امتیاز از دست داده . مجموع امتیاز

او ۶ بار موفق بوده و ۲ بار ناموفق.

به دست آمده

۸۰۰۰x . ۵۰۰۰(۸-x) . ۳۸۰۰۰

. ۸۰۰۰x . ۴۰۰۰۰ - ۵۰۰۰x . ۳۸۰۰۰

..... x x

. ۱۳۰۰۰x . ۷۸۰۰۰ . x . ۶

مثال ۵: مجموع سه عدد طبیعی متوالی برابر ۲۴۳ می باشد
آن اعداد را بیابید.

حل: اولین عدد را x ، دومین عدد را $x + 1$ و سومین عدد
را $x + 2$ فرض می کنیم. بنابراین مجموع آن ها برابر با:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 243$$

– با حل معادله اولین عدد برابر با:

$$x = 80$$

– در نتیجه سه عدد برابر با:

$$80, 81, 82$$

تمرین

۱– فردی برای پرداخت ۴۹ ریال، روی هم ۱۴ قطعه سکه
۵ ریالی و ۲ ریالی داده است. از هر کدام چند سکه داده است؟
۲– مجموع سه عدد زوج متوالی برابر ۶۰۶ است. آن
اعداد را بیابید.

۳– طول مستطیلی سه برابر عرض آن است. اگر محیط
مستطیل ۴۴ متر باشد مساحت آن را حساب کنید.

راهنمایی: (طول . عرض) . ۲ . محیط

عرض . طول . مساحت

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$



شکل ۱-۵



شکل ۱-۶

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

۱-۱-۶ معادله‌ی درجه دوم: هرگاه پس از ساده کردن یک معادله، بزرگ‌ترین توان متغیر آن، عدد ۲ باشد، آن یک معادله درجه دوم است. فرم کلی معادله‌ی درجه دوم به صورت روبه‌رو است.

مثال ۱: کدام یک از عبارات زیر، معادله‌ی درجه دوم است؟

حل:

الف) درجه دوم است، زیرا بزرگ‌ترین توان x ، برابر دو است.

ب) درجه دوم نیست زیرا بزرگ‌ترین توان متغیر t ، سه است.

الف) $3x^2 + 7x = 0$

ب) $t^3 + 5t + 1 = 0$

ج) $(x+2)^3 - (x-2)^3 = 0$

– حاصل عبارات $(x \dots)$ و $(x - \dots)$ را به دست می آوریم:

– عبارت را ساده می کنیم.

پس معادله ی ج درجه دوم است.

$$d) (4x - 3)^2 - 4(2x - 1)^2 = 0$$

– عبارت را ساده می کنیم. پس معادله درجه ی اول است

زیرا:

$$x^3 \cdot 3(x^2)(2) \cdot 3(x)(2)^2 \cdot 2^3 \quad \text{ج}$$

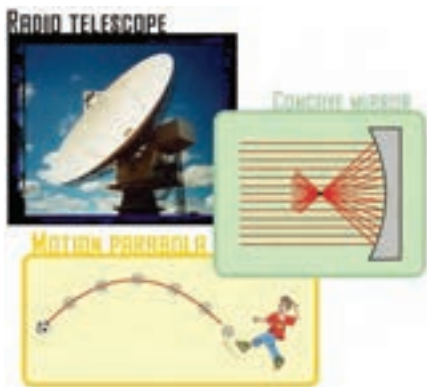
$$-(x^3 - \dots)(x^2) \dots (x)(\dots) - \dots$$

$$\cancel{x^3} \dots \cancel{x^2} \dots \cancel{x} \dots \dots \dots$$

$$\cancel{16x^4} \cdot 24x \cdot 9 - \cancel{16x^2} \cdot 16x - 4 = 0$$

$$40x = 5 = 0$$

$$\dots x - \dots x - \dots - \dots - \dots$$



شکل ۱-۷

حل معادله ی درجه دوم: منظور از حل معادله ی درجه دوم پیدا کردن مجموعه جواب های معادله است. برای این منظور در سال های گذشته با روش هایی آشنا شده اید که در این جا به بعضی از آنها اشاره می کنیم.

حل معادله ی درجه دوم به روش تجزیه: از این روش زمانی استفاده می کنیم که بتوانیم معادله ی درجه دوم را به عامل های اول تجزیه کنیم و آن را به صورت حاصل ضرب دو چند جمله ای درجه اول بنویسیم، سپس با استفاده از ویژگی اعداد که:

$$x^2 + (a + b)x + ab = \dots$$

$$(x + a)(x + b) = 0$$

«اگر حاصل ضرب دو عدد برابر صفر شود، حداقل یکی از آنها مساوی صفر است»

$$x \cdot y = 0 \quad \text{یا} \quad x = 0 \quad \text{یا} \quad y = 0$$

هریک از دو جمله ای ها را مساوی صفر قرار داده و مانند معادله ی درجه اول آن را حل و ریشه های معادله درجه دوم را می یابیم.

$$x + a = 0 \quad \text{یا} \quad x + b = 0$$

$$x = -a \quad \text{یا} \quad x = -b$$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$x^2 - 3x = 0$$

حل: در هر دو جمله x مشترک است، بنابراین از x فاکتور

می‌گیریم:

$$x^2 - 3x = x(x - 3) = 0$$

$$x = 0$$

یا

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

مجموعه‌ی جواب $\{0, 3\}$ است.

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$4x^2 - (x + 2)^2 = 0$$

حل: با استفاده از اتحاد مزدوج $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

داریم:

$$4x^2 - (x + 2)^2 = (2x)^2 - (x + 2)^2$$

$$= (2x - (x + 2))(2x + (x + 2)) = 0$$

$$= (2x - x - 2)(3x + 2) = (x - 2)(3x + 2) = 0$$

با استفاده از $x = 0$ یا $y = 0$ بنابراین

خواهیم داشت:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

یا

$$3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

مجموعه‌ی جواب برابر با:

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$x^2 - x - 6 = 0$$

حل: اتحاد جمله‌ی مشترک به صورت روبه‌رو است:

$$x^2 - x - 6 = (x + a)(x + b)$$

پس با توجه به اتحاد جمله‌ی مشترک داریم:

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$(x + 2)(x - 3) = 0$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

مجموعه‌ی جواب معادله برابر است با:

$$\{-2, 3\}$$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$y^2 - y - 30 = 0$$

حل: دو عدد ۵ و ۶- که حاصل ضربشان ۳۰- و

حاصل جمع آن‌ها ۱- است، پس:

$$y^2 - y - 30 = (y - 6)(y + 5)$$

– هر یک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} y - 6 &= 0 & \text{یا} & & y + 5 &= 0 \\ y &= 6 & & & y &= -5 \end{aligned}$$

مجموعه‌ی جواب‌های معادله برابر است با:

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

حل: در این قسمت جمله مشترک مربع کامل نیست، بنابراین

لازم است که به صورت مربع کامل نوشته شود.

$$3x^2 - 5x - 2 = \frac{1}{3}(3^2x^2 - 5(3x) - 6)$$

$$= \frac{1}{3}((3x)^2 - 5(3x) - 6)$$

حاصل ضرب دو عدد ۲ و ۳ برابر ۶ و حاصل جمع آن‌ها

۵ است؛ پس داریم:

$$= \frac{1}{3}((3x - 6)(3x + 1))$$

اکنون هر یک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} 3x - 6 &= 0 & \text{یا} & & 3x + 1 &= 0 \\ 3x &= 6 & & & 3x &= -1 \end{aligned}$$

$$: 3x = 2 \quad : 3x = -\frac{1}{3}$$

– مجموعه‌ی جواب‌های معادله برابر است با:

مثال: معادله روبه‌رو را حل کنید.

$$5x^2 - 3x - 2 = 0$$

حل: جمله‌ی مشترک مربع کامل نیست، لازم است که

به صورت مربع کامل نوشته شود.

$$5x^2 - 3x - 2 = \frac{1}{5}(5^2x^2 - 3(5x) - 10)$$

$$= \frac{1}{5}((5x)^2 - 3(5x) - 10)$$

حاصل ضرب دو عدد ۲- و ۵ برابر ۱۰- و حاصل جمع

آن‌ها برابر ۳ است، پس:

حال هریک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} & \therefore (x-5)(x-2) = 0 \\ & \therefore x-5 = 0 \quad \text{یا} \quad x-2 = 0 \\ & \therefore x = 5 \quad \text{یا} \quad x = 2 \\ & \therefore \text{مجموعه جواب} = \left\{ 2, 5 \right\} \end{aligned}$$

- مجموعه‌ی جواب برابر است با:

تمرین

۱- ریشه‌های معادله‌های زیر را بیابید.

۱) $5x^2 - 7x = 0$

۲) $t^3 - 25t = 0$

۳) $4z^2 - 9 = 0$

۴) $y^3 - 15y^2 = 56y = 0$

۲- با تکمیل جاهای خالی ریشه‌های معادله‌های زیر را بیابید.

۱) $x^2 - 7x + 12 = 0$

$(x - \square)(x - \square) = 0$

$\Rightarrow x = \square$ یا $x = \square$

۲) $y^2 - 14y + 13 = 0$

$(y - \square)(y - \square) = 0$

$\Rightarrow y = \square$ یا $y = \square$

۳) $(2x + 1)^2 - (5 - x)^2 = 0$

$(\square - \square)(\square + \square) = 0$

$\Rightarrow (3x - \square)(x + \square) = 0$

$\Rightarrow x = \square$ یا $x = \square$

۴) $7x^2 - 8x + 1 = 0$

$\frac{1}{7}(7x^2 - 8x + 1) = 0$

$\frac{1}{7}(\square - \square)(\square - \square) = 0$

$\Rightarrow \square = 0$ یا $\square = 0$

$\Rightarrow \square = 0$ یا $\square = 0$

۵) $5 - x^2 = 0$

$(\sqrt{5} - \square)(\sqrt{5} + \square) = 0$

$\Rightarrow \square = \sqrt{5}$ یا $\square = -\sqrt{5}$

$\Rightarrow \square = \sqrt{5}$ یا $\square = -\sqrt{5}$

– با توجه به معادله‌ی درجه دوم روبه رو نکات زیر را
می‌توان برای حل معادله‌های درجه دوم به کار گرفت:

نکته‌ی ۱: هرگاه مجموع ضرایب معادله‌ی درجه دوم برابر صفر باشد، یعنی: $a + b + c = 0$ ،
آن‌گاه ریشه‌های معادله عبارتند از: $x_1 = \frac{c}{a}$ و $x_2 = \frac{c}{a}$

مثال ۱: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.
 $5x^2 + 7x - 12 = 0$
حل: مجموع ضرایب برابر صفر است، زیرا: $a = 5$ و $b = 7$ و $c = -12$ و $a + b + c = 0$

– پس ریشه‌های معادله برابر با: $x_1 = 1$ و $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-12}{5}$

نکته‌ی ۲: هرگاه در معادله‌ی درجه دوم داشته باشیم: $a + c = b$
آن‌گاه ریشه‌های معادله برابر خواهد بود با: $x_1 = -1$ و $x_2 = \frac{-c}{a}$

مثال ۲: ریشه‌های معادله‌ی روبه‌رو را به دست آورید.
 $5x^2 + 7x + 2 = 0$
حل: با توجه به رابطه‌ی $a + c = b$ ، ریشه‌ها برابر است با: $x_1 = -1$ و $x_2 = \frac{-2}{5}$ و $a = 5$ و $b = 7$ و $c = 2$

نکته‌ی ۳: هرگاه معادله‌ی درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، داریم: $x_1 = \frac{-b}{a}$ و $x_2 = \frac{-c}{a}$

مثال ۳: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.
 $5x^2 + 7x + 2 = 0$
حل: در این معادله ضریب c برابر صفر است، پس: $x_1 = 0$ و $x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{5}$

نکته ۴: هرگاه معادله‌ی درجه‌ی دوم به صورت روبه‌رو باشد: $ax^2 + c = 0$
 در صورتی معادله دارای جواب حقیقی خواهد بود که a و c دارای علامت‌های مختلف باشند (یعنی $ac < 0$)
 که در آن صورت جواب‌های معادله عبارتند از:

$$x_1, x_2 = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

مثال ۴: معادله‌های الف و ب را حل کنید.

الف) $7x^2 - 2 = 0$

x_1 و $x_2 = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$

ب) $5x^2 + 4 = 0$

حل: (الف) چون $ac < 0$ ، پس ریشه‌های معادله برابر است

با:

(ب) چون $ac > 0$! پس معادله جواب حقیقی ندارد.

$a = 5$ و $c = 4$!

تمرین

۱- معادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $5x^2 - 8x - 3 = 0$

۲) $4x^2 + 5x - 1 = 0$

۳) $-7x^2 + 4x - 3 = 0$

۴) $x^2 - 9 = 0$

۵) $4x^2 - 36 = 0$

۶) $x^2 - 5x - 4 = 0$



$$۷) ۱۱x^2 \cdot 9x - 2 \cdot 0$$

$$۸) ۷x^2 \cdot ۱0x \cdot 3 \cdot 0$$

$$۹) x^3 - ۱۶x \cdot 0$$

$$۱۰) (x-1)^2 - 5(x-1) \cdot 0$$

$$۱۱) (t \dots) - \dots (t \dots)$$

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\# \dots x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\dots}}{2a}$$

حل معادله‌ی درجه دوم به روش مربع کامل: گاهی اوقات

جواب‌های معادله‌ی درجه دوم اعداد صحیح نیستند بنابراین از روش تجزیه نمی‌توانیم به راحتی آن‌ها را حدس بزنیم. برای حل این نوع معادله‌ها هرگاه ضریب درجه دوم، یک نباشد آن را با تقسیم معادله بر عدد a به یک تبدیل می‌کنیم. سپس با افزودن مربع نصف ضریب جمله‌ی درجه اول به دو طرف، سمت چپ را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم، و با جذرگیری ریشه‌های معادله را می‌یابیم.



شکل ۸-۱

$$x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$x^2 - 6x = -2$$

$$x^2 - 6x + 9 = -2 + 9 \Rightarrow (x - 3)^2 = 7$$

$$\Rightarrow x - 3 = \sqrt{7}, \quad x - 3 = -\sqrt{7}$$

یا

$$x_1 = \sqrt{7} + 3, \quad x_2 = -\sqrt{7} + 3$$

$$x^2 + 10x = 11$$

$$x^2 + 10x + 25 = 11 + 25 \Rightarrow (x + 5)^2 = 36$$

$$\begin{aligned} x + 5 &= 6 & x + 5 &= -6 \\ \frac{x}{2} & & \frac{x}{2} & \\ x_1 &= 1 & x_2 &= -11 \end{aligned}$$

مثال ۱: معادله‌ی روبه‌رو را به روش مربع کامل حل کنید.
حل: جملات شامل مجهول (x) را در یک طرف معادله

قرار می‌دهیم.

– مربع نصف ضریب x یعنی $(\frac{-6}{2})^2 = 9$ را به دو طرف

معادله اضافه می‌کنیم، یعنی:

چون سمت راست معادله مثبت است می‌توان از دو طرف

جذر گرفت و نوشت:

مثال ۲: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

حل: به دو طرف معادله مربع نصف ضریب x یعنی

$$= 25 = (\frac{10}{2})^2 \text{ را اضافه می‌کنیم:}$$

چون سمت راست معادله مثبت است می‌توان از دو طرف

معادله جذر گرفت و نوشت:

تمرین

۱- ریشه‌های معادله‌ی زیر را با تکمیل جاهای خالی حل

کنید.

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x = \square$$

$$x^2 + x + \bigcirc = 1 + \bigcirc \Rightarrow (x + \square)^2 = \triangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \square = \sqrt{\triangle} & \textcircled{1} \\ x + \square = -\sqrt{\triangle} & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow x = \sqrt{\triangle} - \square$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow x = -\sqrt{\triangle} - \square$$

بنابراین ریشه‌های معادله عبارتند از: $x_1 =$ و $x_2 =$

۲- ریشه‌های معادله‌های روبه‌رو را بیابید (به روش مربع کامل).

الف) $x^2 - 16x + 3 = 0$ ب) $t^2 = -8t + 1$

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

دستور کلی حل معادله‌ی درجه دوم (روش .)

در این قسمت به چگونگی حل معادله‌ی درجه دوم به روش مربع کامل می‌پردازیم.

$$ax^2 + bx = -c$$

– ابتدا عدد ثابت (c) را به طرف دیگر می‌بریم :

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

– چون $a \neq 0$ دو طرف تساوی را بر a تقسیم می‌کنیم :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

– سپس مربع نصف ضریب x یعنی $\frac{b^2}{4a^2}$ را

به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم ؛ داریم :

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

– طرف اول را به صورت مربع کامل می‌نویسیم و در طرف

دوم مخرج مشترک می‌گیریم، پس :

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

– با فرض این که $b^2 - 4ac > 0$ از طرفین جذر می‌گیریم،

خواهیم داشت :

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

– مقادیر x_1 و x_2 برابر خواهند بود با :

$$= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

– عبارت $b^2 - 4ac$ را مَبین معادله‌ی درجه دوم می‌گویند

و با علامت یونانی دلتا (Δ) نشان می‌دهند، بنابراین در حالت کلی

داریم :

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

داریم :

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

نکته: اگر $\Delta = 0$ باشد معادله ریشه‌ی مضاعف دارد که برابر است با :

و اگر $\Delta < 0$ باشد معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال: ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم روبه‌رو را با استفاده

از فرمول به دست آورید.

$$6x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$a = 6, b = 5, c = -1$$

حل: مقدار a و b و c را تعیین می‌کنیم :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(6)(-1) = 25 + 24 = 49$$

– را محاسبه می‌کنیم :

– مقدار x_1 و x_2 را با استفاده از رابطه‌ی روبه‌رو پیدا می‌کنیم:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{-5 + 7}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{-5 - 7}{12} \Rightarrow x_2 = -1$$

– ریشه‌های معادله‌ی x_1 و x_2 ، به‌دست می‌آید.

مثال: ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{\lambda}x + 1 = 0$ را با استفاده از . به‌دست آورید.

حل: مقادیر a ، b و c را تعیین می‌کنیم.

$$a = 2, \quad b = \sqrt{\lambda}, \quad c = +1$$

– مبین معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{\lambda})^2 - 4(2)(+1) = \lambda - 8 = 0$$

چون $\Delta = 0$. است معادله، ریشه‌ی مضاعف دارد:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-\sqrt{\lambda}}{2 \times 2} = \frac{-\sqrt{4 \times 2}}{4} = \frac{-2\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ریشه مضاعف}$$

مثال: ریشه‌های معادله‌ی روبه‌رو را با استفاده از . به‌دست آورید.

حل: مقادیر a ، b و c را تعیین می‌کنیم:

$$a = -5, \quad b = 3, \quad c = -4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(-5)(-4) = 9 - 80 = -71$$

– مقدار . را حساب می‌کنیم.

چون $\Delta < 0$. است پس معادله دارای ریشه‌ی حقیقی نیست.

نتیجه: در معادله‌ی درجه دوم همواره برای . سه حالت زیر را داریم:

حالت ۱: $\Delta > 0$. در این حالت معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد که آن‌ها را از رابطه‌ی مقابل پیدا می‌کنیم:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

حالت ۲: $\Delta = 0$. معادله ریشه‌ی مضاعف دارد که آن را از فرمول مقابل به‌دست می‌آوریم:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

حالت ۳: $\Delta < 0$ ، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.
 مثال: مقدار m را در معادله‌ی روبه‌رو چنان بیابید که
 معادله ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$mx^2 + 5x + 4 = 0$$

حل: مبین معادله را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow \text{شرط ریشه‌ی مضاعف}$$

با حل معادله‌ی درجه اول m را به دست می‌آوریم.

$$25 - 4(m)(4) = 0 \Rightarrow 25 - 16m = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{25}{16}$$

تمرین

۱- معادله‌های زیر را به روش (۰) حل کنید.

۱) $x^2 - 3x = -1$

۲) $-x^2 + 3x + 2 = 0$

۳) $8x^2 + 4\sqrt{2}x + 1 = 0$

۴) $-6x^2 + 5x - 4 = 0$

۲- حدود m را در معادله‌ی زیر چنان بیابید که:

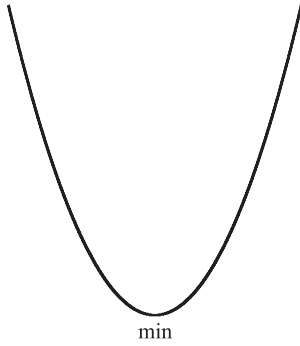
$$7x^2 + 5x + m = 0$$

الف: دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

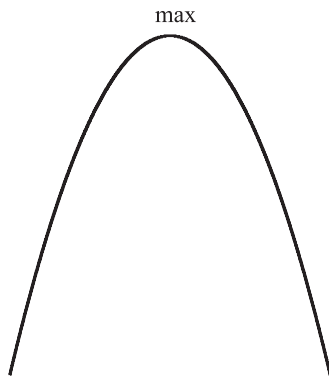
ب: ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.

تعبیر هندسی حل معادله‌ی درجه دوم

از سال اول به یاد داریم که منحنی هر معادله که پس از ساده کردن به صورت $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) تبدیل شود، سهمی یا منحنی درجه دوم نامیده می‌شود. حال باید دانست که: هرگاه $a > 0$ باشد، نمودار سهمی به صورت شکل ۱-۹ و هرگاه $a < 0$ باشد نمودار سهمی به صورت شکل ۱-۱۰ می‌باشد. خط $x = \frac{-b}{2a}$ را محور تقارن سهمی و نقطه‌ی x را طول نقطه‌ی ماکسیم یا مینیمم می‌نامند.



شکل ۱-۹



شکل ۱-۱۰

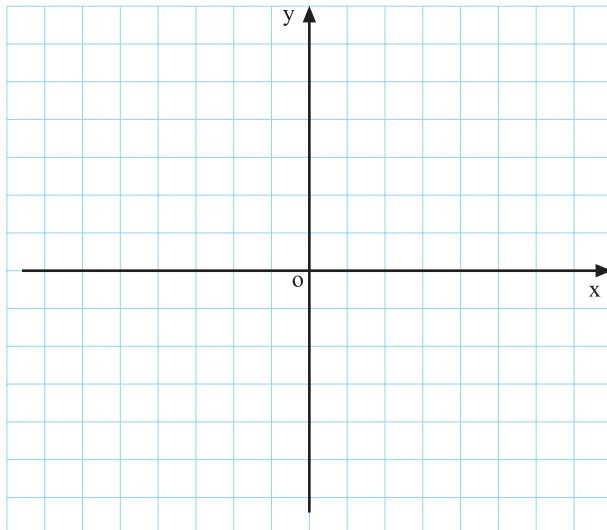
فعالیت ۱-۴

سهمی به معادله‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$y = -x^2 + 3x + 4$$

جدول ۱-۴

x	۰	۱	$\frac{3}{2}$	۲	<input type="text"/>	۴
y	<input type="text"/>	۶	<input type="text"/>	<input type="text"/>	۴	<input type="text"/>



الف: آیا سهمی ماکسیمم دارد یا مینیمم؟ چرا؟

ب: طول نقطه‌ی ماکسیمم یا مینیمم را به دست آورید.

ج: سهمی را با تکمیل جدول ۱-۴ رسم کنید.

د: با توجه به نمودار سهمی، ریشه‌های معادله‌ی

$$-x^2 + 3x + 4 = 0$$

را به دست آورید.

نمودار ۱-۱۱

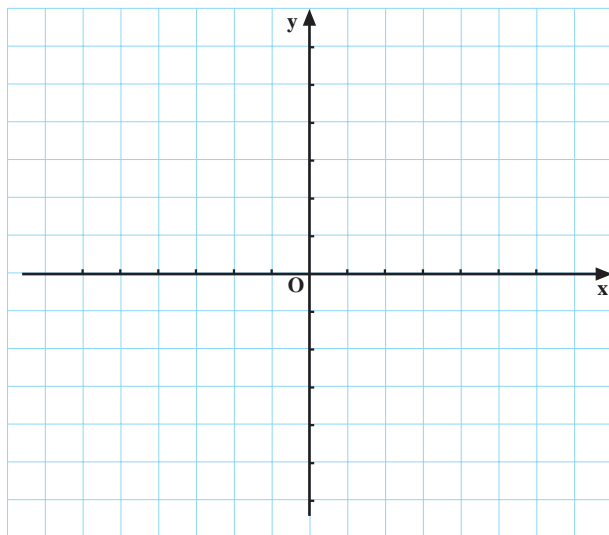
فعالیت ۱-۵

$$y = x^2 - 6x + 5$$

یک سهمی به معادله‌ی روبه‌رو مفروض است.

جدول ۱-۵

x	۰	۲	۳	۴	۵
y					



شکل ۱-۱۲

- الف: آیا سهمی ماکسیمم دارد یا مینیمم؟ چرا؟
 ب: طول نقطه‌ی ماکسیمم یا مینیمم سهمی را پیدا کنید.
 ج: با تکمیل جدول ۱-۵ سهمی را رسم کنید.
 د: محل برخورد سهمی با محور xها را بیابید. چه نتیجه‌ای

می‌گیرید؟

کاربرد معادله‌ی درجه دوم در حل مسائل

مثال ۱: عدد صحیحی بیابید که مربع آن پنج برابر خودش باشد.

حل ۱:

— عدد را x فرض می‌کنیم، داریم:

$$x^2 = 5x \Rightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x = x(x - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

— از x فاکتور می‌گیریم:

— هر یک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم:

مثال ۲: عددی طبیعی بیابید که حاصل جمع آن با مربعش

برابر ۶ باشد.

حل: عدد را x فرض می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$x + x^2 = 6$$

— با توجه به اتحاد جمله مشترک خواهیم داشت:

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0$$

– هریک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ \text{یا} \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

– با توجه به این که $-3 \notin \mathbb{N}$ ، این جواب قابل قبول نیست و تنها جواب ۲ قابل قبول است.

مثال ۳: عددی بیابید که مجموع مجذور و مکعب آن مساوی ۴ برابر عدد بعد از خودش باشد.

حل: عدد را x ، مربع آن را x^2 و مکعبش را x^3 می‌نامیم.

– بنابر صورت مسئله چنین خواهد بود :

$$x^2 + x^3 = 4(x+1) \Rightarrow x^2(x+1) - 4(x+1) = 0$$

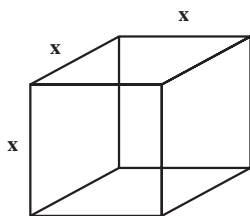
$$\Rightarrow (x+1)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2)(x+2) = 0$$

– از $x+1$ فاکتور می‌گیریم :

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

– هر عامل را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های معادله

را مشخص می‌کنیم.



شکل ۱۳-۱

مثال ۴: طول ضلع مکعبی را بیابید که عدد مربوط به

حجم آن ۹ برابر عدد مربوط به محیط یک وجه آن باشد.

مراحل حل: طول یک ضلع را x می‌نامیم. محیط یک

وجه آن برابر $4x$ و حجم مکعب x^3 می‌باشد.

$$x^3 = 9(4x) \Rightarrow x^3 = 36x$$

طبق صورت مسئله داریم :

$$x^3 - 36x = 0$$

– کلیه‌ی جملات را به یک طرف انتقال می‌دهیم :

– از x فاکتور گرفته و همه‌ی عوامل را برابر صفر قرار

می‌دهیم :

$$x(x^2 - 36) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm 6 \end{cases}$$

با فرض مثبت بودن طول ضلع ابعاد مکعب، جواب منفی

قابل قبول نیست؛ بنابراین داریم :

$$x = 6, \quad x = \cancel{0}, \quad x = \cancel{-6}$$

تنها جواب ۶ قابل قبول است.

تمرین

۱- مجموع ۵ عدد صحیح متوالی برابر ۸۵ است، این اعداد را مشخص کنید.

۲- مجموع مربع یک عدد با خودش برابر ۱۲ است، این عدد را بیابید.

آزمون پایانی (۱)

محل پاسخ به سوالات آزمون پایانی (۱)

$$kx^2 + 5x - 4 = 0$$

۱- نمودارهای زیر را رسم کنید :

۱) $3x + 5y = -15$

۲) $y = 2x^2 - 5x + 4$

۲- معادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $\frac{3x+1}{2} - \frac{5x-3}{4} = 1$

۲) $2x^2 + 7x + 4 = 0$

۳) $(-3x+1)^2 - 4(-3x+1) = 0$

۳- مجموع پنج عدد صحیح متوالی برابر

۴۵ است آن اعداد را بیابید.

۴- حدود k را در معادله‌ی روبه‌رو چنان

بیابید که همواره دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

بخش اول

فصل دوم

تعیین علامت، حل نامعادله و قدرمطلق

هدف کلی

یادآوری مطالب مربوط به تعیین علامت، حل نامعادله و قدرمطلق و خواص آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

- ۱- عبارت‌های درجه اول و درجه دوم را تعیین علامت کند؛
- ۲- نامعادله‌های مختلف را حل کند و حدود جواب هر یک را مشخص سازد؛
- ۳- قدرمطلق را تعریف کند و از خواص قدرمطلق برای حل نامعادلات قدرمطلق استفاده کند.

پیش‌آزمون (۲)

محل پاسخ به سوالات پیش‌آزمون (۲)

۱- عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید :

۱) $P = -2x + 3$

۲) $P = \frac{2x-1}{5-3x}$

۳) $P = -2x^2 + 5x$

۲- نامعادله‌های زیر را حل کنید :

۱) $x^2 > x$

۲) $\frac{1}{x} + 3 > 0$

۳) $|\frac{1}{5}x + 3| < 7$

۴) $|-2x + 3| > 4$

۱-۲- تعیین علامت

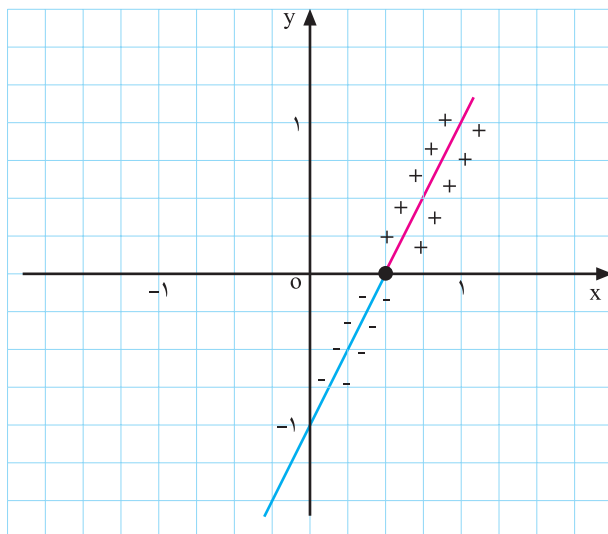
منظور از تعیین علامت یک عبارت جبری آن است که تعیین کنیم آن عبارت به ازای چه اعدادی منفی، مثبت و یا صفر می باشد.

$$P = ax + b, a \neq 0$$

$$y = 2x + 1$$

جدول ۱-۶

x	°	$\frac{1}{2}$
y	-1	°



نمودار ۱-۱۴

جدول ۱-۷

x	$x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
$2x - 1$	مخالف علامت ضرب x	°	موافق با علامت ضرب x

۱-۲-۱- تعیین علامت دو جمله ای درجه اول
مثال ۱: معادله ی خط روبه رو مفروض است:

با توجه به جدول ۱-۶ نمودار ۱-۱۴ رسم شده است. خط محور xها را در نقطه ای با $x = \frac{1}{2}$ قطع نموده است. بنابراین به ازای $x = \frac{1}{2}$ عبارت $2x - 1$ صفر می باشد، یعنی $x = \frac{1}{2}$ جواب معادله ی $2x - 1 = 0$ است. با توجه به نمودار ۱-۱۴ می بینیم که به ازای اعداد بزرگ تر از $\frac{1}{2}$ ($x > \frac{1}{2}$) نمودار خط بالای محور xها است بنابراین علامت دو جمله ای مثبت می باشد؛ و به ازای اعداد کمتر از $\frac{1}{2}$ ($x < \frac{1}{2}$) نمودار خط، زیر محور xها واقع است، بنابراین دو جمله ای منفی می شود. نتایج به دست آمده را می توان در جدول ۱-۷ خلاصه کرد.

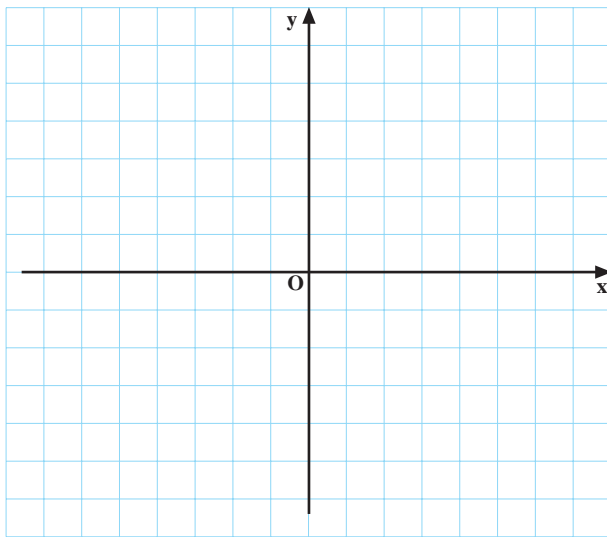
فعالیت ۱-۶

$$y = -\frac{1}{3}x + 3$$

جدول ۱-۸

x	°	<input type="checkbox"/>
y	<input type="checkbox"/>	°

نمودار خطی به معادله ی روبه رو را با تکمیل جدول ۱-۸ رسم کنید، سپس به سؤال های زیر پاسخ دهید:
الف: در چه نقطه ای دو جمله ای صفر است؟ ج:
ب: به ازای اعداد بیش تر از ۶ نمودار خط زیر محور xها



واقع شده است علامت دو جمله‌ای در این بازه چگونه می‌باشد؟ ج:

ج: به ازای اعداد کمتر از ۶ نمودار خط بالای محور xها قرار گرفته است، در این بازه علامت دو جمله‌ای را تعیین کنید. ج:

نمودار ۱-۱۵

جدول ۱-۹

x	$x < 6$	6	$x > 6$
y	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

د: با توجه به قسمت‌های بالا جدول ۱-۹ را تکمیل کنید.

$$\begin{cases} ax + b = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

جدول ۱-۱۰

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$P = ax + b$	مخالف علامت a	<input type="checkbox"/>	موافق علامت a

نتیجه: هر عبارت که پس از ساده کردن به صورت $a \neq 0$ ، $P = ax + b$ باشد یک دو جمله‌ای درجه اول نامیده می‌شود. برای تعیین علامت دو جمله‌ای درجه اول، ریشه‌ی آن $(x = -\frac{b}{a})$ را به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از جدول ۱-۱۰ تعیین علامت می‌کنیم.

$$P = 7 - 3x$$

$$P = 0 \Rightarrow 7 - 3x = 0 \Rightarrow -3x = -7$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{3}$$

جدول ۱-۱۱

x	$x < \frac{7}{3}$	$\frac{7}{3}$	$x > \frac{7}{3}$
$P = 7 - 3x$	+	<input type="checkbox"/>	-

مثال ۱: عبارت مقابل را تعیین علامت کنید.

حل: عبارت را برابر صفر قرار می‌دهیم:

– ریشه‌ی معادله برابر است با:

با توجه به جدول ۱-۱۱ به ازای $x > \frac{7}{3}$ علامت

دو جمله‌ای منفی و به ازای $x < \frac{7}{3}$ علامت آن مثبت و به ازای $x = \frac{7}{3}$ مقدار دو جمله‌ای صفر می‌باشد.

$$P = \frac{(x-a)(x-b)}{x-c}$$

$$x-a=0 \Rightarrow x=a$$

$$x-b=0 \Rightarrow x=b$$

$$x-c=0 \Rightarrow x=c$$

(با فرض $a < b < c$)

جدول ۱۲-۱

x	a	b	c
x-a	-	+	+
x-b	-	-	+
x-c	-	-	-
P	-	+	-

تعریف نشده

نکته: هرگاه عبارت جبری به صورت حاصل ضرب یا تقسیم چند دوجمله‌ای درجه اول باشد (مثال: عبارت P) برای تعیین علامت مراحل زیر را انجام می‌دهیم.
۱- هر یک از عامل‌ها را برابر صفر قرار داده و ریشه‌ی آن را پیدا می‌کنیم:

و

۲- جدولی رسم می‌کنیم و در سطر اول آن ریشه‌های به‌دست آمده را به ترتیب صعودی از چپ به راست می‌نویسیم و در سطرهای دیگر به ترتیب عبارت مربوط به هر ریشه را که به‌ازای ریشه صفر می‌شود می‌نویسیم و تعیین علامت می‌کنیم.
۳- علامت‌های واقع در هر ستون عمودی را در هم ضرب می‌کنیم و نتیجه را در سطر آخر به‌دست می‌آوریم. علامت‌های به‌دست آمده در سطر آخر علامت عبارت (P) را مشخص می‌کند.

نکته: باید توجه داشت که عبارات جبری به‌ازای هر یک از جواب‌های صورت، صفر و به‌ازای هر یک از ریشه‌های مخرج تعریف نشده (نامعین) است.

$$P = \frac{x(2x-1)}{3-2x}$$

$$P=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$3-2x=0 \Rightarrow -2x=-3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

مثال ۲: عبارت روبه‌رو را تعیین علامت کنید.

مراحل حل: ریشه‌های صورت و مخرج را به‌دست می‌آوریم:

$$x = \frac{3}{2} \text{ ریشه‌ی مخرج است، لذا به‌ازای آن عبارت (P)}$$

تعریف نشده است.

جدول ۱۳-۱

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x	-	+	+
2x-1	-	-	+
3-2x	+	+	-
P	+	-	-

تعریف نشده

ریشه‌ها را به ترتیب صعودی در سطر اول جدول ۱۳-۱

می‌نویسیم.

هر یک از عبارات را به ترتیب ریشه‌های مربوط در سطر

بعدی می‌نویسیم.

عبارات را تعیین علامت می‌کنیم.

از ضرب علامت‌های ستون عمودی علامت عبارت P

را در فواصل ریشه‌ها به‌دست می‌آوریم.

۲-۲-۱- تعیین علامت سه جمله ای درجه دوم

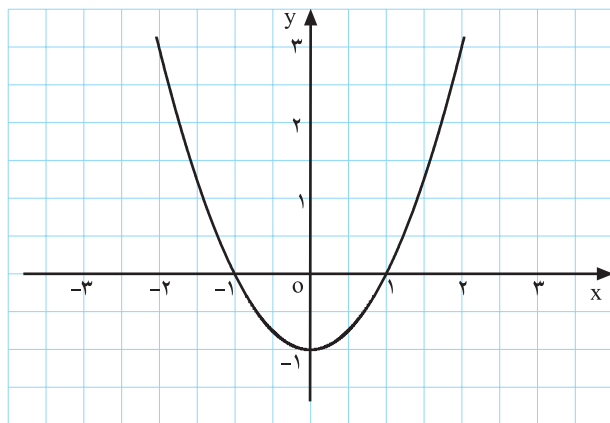
$$P = ax^2 + bx + c \text{ و } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

مثال ۱: یک سهمی با ضابطه مقابل رسم کنید.

$$y = x^2 - 1$$

جدول ۱-۱۴

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۳	۰	-۱	۰	۳



نمودار ۱-۱۶

مراحل حل: طول نقطه ی رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ است.

با توجه به نمودار ۱-۱۶ مشاهده می کنیم که اگر $x > 1$ یا $x < -1$ باشد نمودار سهمی بالای محور xها واقع می باشد. بنابراین سه جمله ای درجه دوم مثبت (موافق با علامت ضریب x^2) و اگر $-1 < x < 1$ باشد نمودار زیر محور xها قرار دارد؛ بنابراین سه جمله ای درجه دوم منفی است.

جدول ۱-۱۵

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$x > 1$
$x^2 - 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

تمرین

با توجه به مثال ۱ و نمودار $y = x^2 - 1$ جدول ۱-۱۵ را

کامل کنید.

فعالیت ۱-۷

نمودار سهمی روبه رو را با تکمیل جدول ۱-۱۶ رسم

کنید.

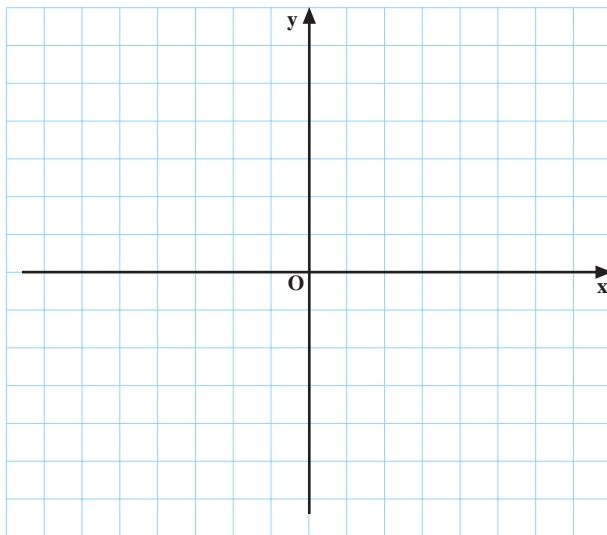
$$y = -(x+1)^2 + 1$$

جدول ۱-۱۶

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱
y	-۳	<input type="checkbox"/>	۱	۰	<input type="checkbox"/>

۱- به ازای $x > 0$ یا $x < -2$ سهمی زیر محور xها قرار

گرفته است، علامت سه جمله ای چیست؟ ج:



نمودار ۱-۱۷

جدول ۱-۱۷

x	$x < -2$	-2	$-2 < x < 0$	0	$x > 0$
y	□	○	○	○	□

جدول ۱-۱۸

x	$x < x_1$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x > x_2$
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	○	مخالف علامت a	○	موافق با علامت a

۲- در بازه‌ی $-2 < x < 0$ علامت سه جمله‌ای چگونه است؟ ج: □
 ۳- با توجه به نمودار ۱-۱۷، جدول ۱-۱۷ را کامل کنید.

نکته: با نتیجه‌گیری از مثال و فعالیت ۱-۷ می‌توان گفت هرگاه سه جمله‌ای درجه دوم دارای دو ریشه‌ی x_1 و x_2 ($x_1 < x_2$) باشد، مطابق جدول ۱-۱۸ تعیین علامت می‌شود.

$$P = 7x^2 - 5x - 2$$

مثال ۲: سه جمله‌ای مقابل را تعیین علامت کنید.

$$P = 0 \Rightarrow 7x^2 - 5x - 2 = 0$$

حل:

- عبارت P را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{7}$$

- جمع ضرایب صفر است ($a + b + c = 0$)، پس:

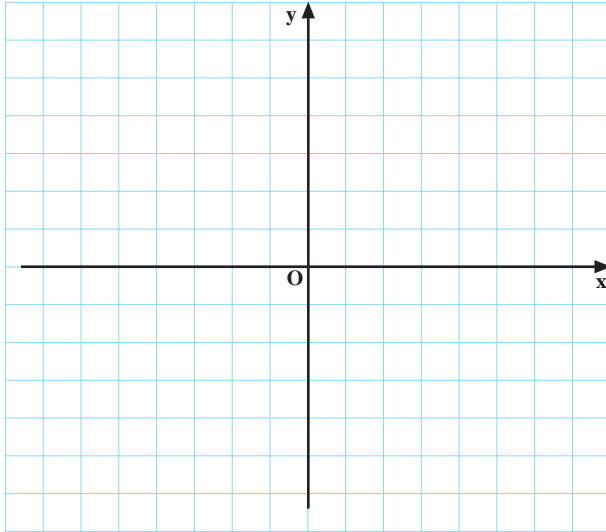
جدول ۱-۱۹

x	$x < -\frac{2}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{2}{7} < x < 1$	1	$x > 1$
P	+	○	-	○	+

چون ضریب x^2 ($a = 7$) مثبت است دو طرف ریشه‌ها مثبت و مابین دو ریشه منفی است.

جدول ۲۰-۱

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	<input type="checkbox"/>	۱	۰	<input type="checkbox"/>	۴



نمودار ۱۸-۱

جدول ۲۱-۱

x	$x < 1$	۱	$x > 1$
P	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

جدول ۲۲-۱

x	$-\infty$	$x < x_1$	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	$x > x_2$
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a		موافق علامت a	موافق علامت a

$$P = -4 + 4x - x^2$$

$$P = 0 \Rightarrow -4 + 4x - x^2 = 0$$

$$= . \quad b^2 - 4ac = 4^2 - 4(-1)(-4) = 16 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow . = 0$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

الف) با تکمیل جدول ۲۰-۱ نمودار سهمی $y = x^2 - 2x + 1$ را رسم کنید.

ب) x نقطه‌ی رأس، $\frac{-b}{2a}$ ، برابر چه عددی است؟
ج) علامت نمودار در تمام دامنه به جز $x = 1$ چیست؟
چرا؟

د) با توجه به شکل ۱۸-۱ علامت جدول ۲۱-۱ را مشخص کنید.

نتیجه: هرگاه سه جمله‌ای درجه دوم دارای ریشه‌ی مضاعف (دو ریشه‌ی یکسان) باشد. همواره علامت سه جمله‌ای موافق ضریب x^2 یعنی علامت a می‌باشد.

مثال ۳: عبارت مقابل را تعیین علامت کنید.

حل: عبارت P را برابر صفر قرار می‌دهیم:

- . را پیدا می‌کنیم:

- معادله ریشه‌ی مضاعف دارد (زیرا $= 0$).

- ریشه‌ی معادله برابر است با:

جدول ۱-۲۳

x	$x < 2$	۲	$x > 2$
	$-4 + 4x - x^2$	-	-

چون ضریب x^2 منفی است علامت سه جمله‌ای همواره منفی می‌شود، مگر در $x = 2$ که برابر صفر است.

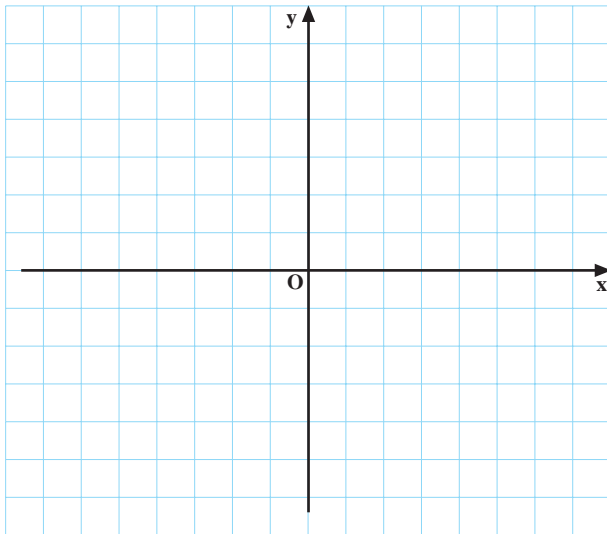
فعالیت ۱-۹

الف: نمودار سهمی $y = x^2 + 2$ را با تکمیل جدول ۱-۲۴ رسم کنید.

ب: از این که نمودار سهمی بالای محور x ها قرار می‌گیرد چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

جدول ۱-۲۴

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۶	<input type="checkbox"/>	۲	۳	<input type="checkbox"/>



نمودار ۱-۱۹

ج: با توجه به نمودار ۱-۱۹ علامت جدول ۱-۲۵ را تعیین کنید.

جدول ۱-۲۵

x	به‌ازای هر مقدار x
$x^2 + 2$	

نتیجه: هرگاه در سه جمله‌ای درجه دوم < 0 ، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد و علامت معادله همواره موافق علامت a خواهد بود.

جدول ۱-۲۶

x	به‌ازای هر مقدار x
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت ضریب x^2

$$P = -7x^2 + x - 1$$

مثال ۴: معادله‌ی مقابل را تعیین علامت کنید.

$$P = 0 \Rightarrow -7x^2 + x - 1 = 0$$

حل: عبارت را برابر صفر قرار می‌دهیم.

– مقادیر a ، b و c را مشخص می‌کنیم: $a = -7$ ، $b = 1$ و $c = -1$

– . یا مبین معادله را به دست می‌آوریم: $= b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-7)(-1) = 1 - 28 = -27$

چون $\Delta < 0$. است پس علامت چندجمله‌ای موافق a است.

جدول ۱-۲۷

x	به‌ازای هر مقدار x
$-7x^2 + x - 1$	- - -

خلاصه‌ی بحث

$$ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

در تعیین علامت عبارت درجه‌ی دوم

الف: اگر معادله دارای دو ریشه باشد طبق جدول ۱-۲۸ تعیین علامت می‌شود.

جدول ۱-۲۸

x	x_1	x_2
P	موافق علامت a	مخالف علامت a

$>>>$

ب: اگر معادله دو جواب یکسان (ریشه مضاعف) داشته باشد مطابق جدول ۱-۲۹ تعیین علامت می‌شود.

جدول ۱-۲۹

x	$x_1 = x_2$
P	موافق علامت a

$= = >$

پ: اگر معادله ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد طبق جدول ۱-۳۰ تعیین علامت می‌شود.

جدول ۱-۳۰

x	به‌ازای هر مقدار x
P	موافق علامت a

$<<<$

تمرین

عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

$$۱) P = -۶x^۲ - x + ۱$$

$$۲) P = \frac{۴ - x^۲}{x - ۱}$$

$$۳) P = -(x + ۲)^۲ + ۱$$

$$۴) P = \frac{x^۲ - ۵x + ۶}{x - x^۲}$$

$$۵) P = (-۳x + ۴)^۲(-۴x^۲ + ۷x)$$



شکل ۲۰-۱

۳-۲-۱ نامعادله: هر نامساوی را که شامل یک یا چند متغیر باشد نامعادله می نامند. برای حل نامعادلات، یعنی برای پیدا کردن اعدادی که با جایگزین کردن آن‌ها به جای متغیرها نامعادله تبدیل به نامساوی درست گردد.

مثال ۱: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کنید:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 3} < 0$$

حل: ابتدا هریک از عبارات جبری $x^2 - 1$ و $x + 3$ را تعیین علامت می‌کنیم، سپس برای هریک از بازه‌های $x < -3$ و $-3 < x < -1$ و $-1 < x < 1$ و $x > 1$ علامت‌های $x^2 - 1$ و $x + 3$ را در هم ضرب می‌کنیم.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

جدول ۳۱-۱

x	-3	-1	1
$x^2 - 1$	+	+	-
$x + 3$	-	+	+
$\frac{x^2 - 1}{x + 3}$	-	+	-

$$\{x | x \in \mathbb{R} \text{ و } x < -3 \text{ یا } -1 < x < 1\}$$

بنابراین مجموعه جواب برابر است با:

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x} < 1$$

مثال ۲: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x} - 1 < 0$$

حل: همه‌ی جملات را به طرف چپ می‌آوریم:

$$\frac{x^2 - 2x + 2 - x}{x} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x} < 0$$

- مخرج مشترک می‌گیریم:

— با مساوی صفر قرار دادن صورت و مخرج کسر

ریشه‌های آن‌ها را می‌یابیم :

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \text{ و } x=0 \end{cases}$$

جدول ۳۲-۱

x	0	1	2	
$x^2 - 3x + 2$	+	+	-	+
x	-	+	+	+
$\frac{x^2 - 3x + 2}{x}$	-	+	-	+

جواب : $\{x | x \in \mathbb{R}, x < 0 \text{ یا } 1 < x < 2\}$

$$\frac{x+5}{x-3} > \frac{x-3}{x+5}$$

$$\frac{x+5}{x-3} - \frac{x-3}{x+5} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)^2 - (x-3)^2}{(x-3)(x+5)} > 0$$

$$\frac{(x+5+x-3)(x+5-(x-3))}{(x-3)(x+5)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(2x+2)(8)}{(x-3)(x+5)} > 0$$

$$2x+2=0 \Rightarrow x=-1$$

$$(x-3)(x+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ \text{یا} \\ x+5=0 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$

جدول ۳۳-۱

x	-5	-1	3	
$8(2x+2)$	-	-	+	+
$x-3$	-	-	-	+
$x+5$	-	+	+	+
$\frac{8(2x+2)}{(x-3)(x+5)}$	-	+	-	+

نامعین

نامعین

پس از رسم جدول، صورت و مخرج کسرها را تعیین علامت

کرده و با ضرب کردن علامت $x^2 - 3x + 2$ و x در هریک از

بازه‌های $x < 0$ و $0 < x < 1$ ، $1 < x < 2$ و $x > 2$ علامت کل

نامعادله را تعیین می‌کنیم و در آخر با توجه به علامت نامعادله،

مقادیر منفی را به عنوان جواب می‌پذیریم.

مثال ۳: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

حل: همه‌ی جملات را به طرف چپ معادله می‌آوریم :

— مخرج مشترک می‌گیریم :

— صورت کسر را به کمک اتحاد مزدوج و یا مربع دو

جمله‌ای ساده می‌کنیم :

— با مساوی صفر قرار دادن صورت و مخرج، ریشه‌های

عبارت را می‌یابیم :

پس از رسم جدول صورت و مخرج کسر را تعیین علامت

کرده و با ضرب کردن علامت صورت و مخرج در هریک از

بازه‌های $x < -5$ ، $-5 < x < -1$ ، $-1 < x < 3$ و $x > 3$

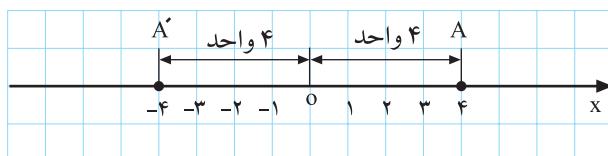
علامت عبارت را در هر یک از این بازه‌ها مشخص می‌نمایم و در ستون آخر با توجه به علامت نامعادله ریشه‌هایی که در فواصل علائم مثبت قرار دارد به عنوان جواب می‌پذیریم.

جواب : $\{x | x \in \mathbb{R} \dots -5 < x < -1 \text{ یا } x > 3\}$

تمرین

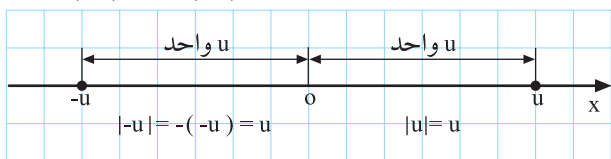
نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$5x^2 + x < +6$$

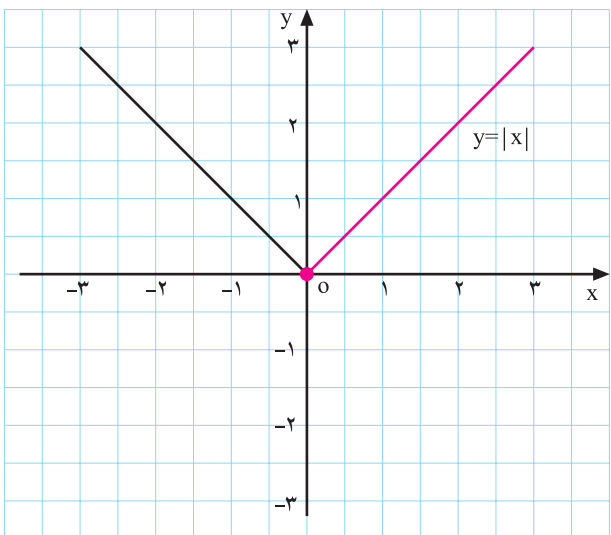


شکل ۱-۲۱

$$|-4| = 4 \text{ و } |-4| = -(-4) = 4$$



شکل ۱-۲۲



شکل ۱-۲۳

۱-۲-۴ قدر مطلق: بر روی شکل ۱-۲۱ دو نقطه‌ی

A و A' را به مختصات 4 و -4 مشاهده می‌کنید.

- فاصله‌ی این دو نقطه از مبدأ (نقطه‌ی O) قدر مطلق این

اعداد نامیده می‌شود که برابر با عدد 4 است.

- این مطلب را به زبان ریاضی می‌توان به صورت شکل

۱-۲۲ نوشت.

به طور کلی برای نمایش فاصله‌ی یک نقطه از صفر که در

آن جهت مهم نمی‌باشد از قدر مطلق استفاده می‌کنیم. قدر مطلق

عدد x را که با علامت |x| نمایش می‌دهند به صورت زیر تعریف

می‌کنیم:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال ۱: قدرمطلق عبارت روبه‌رو را بیابید.

$$|\sqrt{2}-1|$$

حل: $\sqrt{2}$ بزرگ‌تر از یک است، پس می‌نویسیم:

$$\sqrt{2} > 1$$

– $\sqrt{2}-1$ عددی مثبت است، یعنی:

$$\sqrt{2}-1 > 0$$

– بنابراین قدرمطلق آن $(\sqrt{2}-1)$ خودش می‌باشد.

$$|\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$$

$x > 0$ x

مثال ۲: قدرمطلق عبارت روبه‌رو را بیابید.

$$|\sqrt{5}-3|$$

حل: عدد $\sqrt{5}$ از عدد ۳ کوچک‌تر است، یعنی:

$$\sqrt{5} < 3$$

– حاصل عبارت $\sqrt{5}-3$ منفی است، پس داریم:

$$\sqrt{5}-3 < 0$$

$\sqrt{5}-3$ عدد منفی است بنابراین برای یافتن قدرمطلق آن

باید در عدد منفی یک ضرب شود.

$$|\sqrt{5}-3| = -(\sqrt{5}-3) = 3-\sqrt{5}$$

$x < 0$ x

مثال ۳: اگر $x > 3$ باشد قدرمطلق عبارت روبه‌رو را به

دست آورید.

$$|x-3|$$

حل: چون $x > 3$ می‌باشد، پس:

$$x-3 > 0$$

بنابراین قدرمطلق آن برابر خودش می‌باشد:

$$|x-3| = x-3$$

مثال ۴: اگر $x < -1$ باشد قدرمطلق عبارت مقابل را به

دست آورید.

$$|x+1|, \quad x < -1$$

حل: چون $x < -1$ است، داریم:

$$x+1 < 0$$

– برای محاسبه‌ی قدرمطلق عبارت داخل آن قرینه می‌گردد:

$$|x+1| = -(x+1) = -x-1$$

$$\Rightarrow |x+1| = -x-1, x < -1$$

مثال ۵: اگر $x < 2$ باشد حاصل عبارت مقابل را بیابید:

$$|2-x| - |x-3|$$

حل: چون $x > 2$ بنابراین $2-x > 0$ ، که پس از بیرون

$$|2-x| = 2-x$$

آمدن از قدرمطلق تغییر نمی‌کند.

– عبارت $x-3$ منفی است، پس از بیرون آمدن از

$$|x-3| = -(x-3) = -x+3$$

قدرمطلق در منفی ضرب می‌شود.

– حاصل عبارت برابر است با:

$$|2-x| - |x-3| = 2-x+x-3 = -1$$

بعضی خواص قدرمطلق اعداد حقیقی

خاصیت اول قدر مطلق:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5, \sqrt{3^2} = |3| = 3$$

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} + |x-1|, -1 < x < 1$$

مثال ۶: حاصل عبارت‌های روبه‌رو را بیابید.

$$\sqrt{(x+1)^2} + |x-1| = |x+1| + |x-1|$$

حل: چون $-1 < x < 1$ ، $x+1$ مثبت و $x-1$ منفی است.

$$= x+1 - (x-1) = x+1-x+1 = 2$$

آنگاه داریم:

$$|x|^2 = x^2$$

نکته‌ی ۱: همواره برای هر عدد حقیقی x داریم:

مثال ۷: نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$|x-2| < 3$$

$$(|x-2|)^2 = (x-2)^2$$

حل: با استفاده از نکته‌ی ۱ می‌توان نوشت:

– دو طرف نامعادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(|x-2|)^2 < 3^2 \Rightarrow (x-2)^2 < 3^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 - 3^2 < 0$$

$$\Rightarrow (x-2-3)(x-2+3) < 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+1) < 0$$

– همه‌ی جملات نامعادله را به یک طرف انتقال می‌دهیم:

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

– نامعادله به دو عامل ضرب تبدیل می‌شود.

– هر یک از عامل‌های نامعادله را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x-5=0 \Rightarrow x=5$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

– ریشه را به دست می‌آوریم:

– ریشه‌ها را به ترتیب نزولی به صعودی در جدول ۱-۳۴

جدول ۱-۳۴

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 5$	5	$x > 5$
x+1	-	o	+		+
x-5	-		-	o	+
(x-5)(x+1)	+	o	-	o	+

جواب

می‌نویسیم.

– عوامل مربوط به دو ریشه را تعیین علامت می‌کنیم.

– علامت کلی نامعادله را از ضرب علامت‌های هر یک از

ستون عمودی به دست می‌آوریم.

– با توجه به شرط نامعادله، مجموعه جواب برابر با:

$$\{x | x \in \mathbb{R} \text{ و } -1 < x < 5\} = (-1, 5)$$

$$|2x-1| > |x+2|$$

مثال ۸: نامعادله‌ی مقابل را حل کنید:

$$(2x-1)^2 > (x+2)^2$$

حل: دو طرف نامعادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$\Rightarrow (2x-1)^2 - (x+2)^2 > 0$$

– همه‌ی عبارات را به یک طرف انتقال می‌دهیم:

$$\Rightarrow (2x-1-(x+2))(2x-1+x+2) > 0$$

– با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\Rightarrow (x-3)(3x+1) > 0$$

– نامعادله را به حاصل ضرب دو عامل تبدیل می‌کنیم:

– ریشه‌های هر یک از عامل‌های نامعادله را به دست

می‌آوریم.

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

جدول ۳۵-۱

x	$-\frac{1}{3}$	3	
$x-3$	-	-	+
$3x+1$	-	+	+
$(x-3)(3x+1)$	جواب	-	جواب

– ریشه را به ترتیب صعودی در جدول ۳۵-۱ می‌نویسیم:

– تک تک عوامل را تعیین علامت می‌کنیم.

– علامت کلی نامعادله را از ضرب علامت‌های هر یک از

ستون‌های عمودی به دست می‌آوریم:

– با توجه به جهت علامت نامعادله مجموعه جواب برابر

است با:

$$ج.م = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, x < -\frac{1}{3} \text{ یا } x > 3 \right\}$$

خاصیت دوم قدرمطلق

$$۲) |x| = |-x| \text{ یا } |a-b| = |b-a|$$

مثال ۹: معادله‌ی مقابل را حل کنید:

$$|x+3|=4$$

حل: فاصله‌ی $x+3$ از صفر برابر ۴ واحد می‌باشد،

بنابراین $x+3$ می‌تواند ۴ یا -۴ باشد.

$$|x+3|=4 \Rightarrow x+3 = \pm 4 \Rightarrow$$

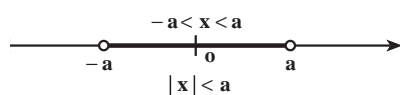
$$\begin{cases} x+3=4 \Rightarrow x=4-3 \Rightarrow x=1 \\ \text{یا} \\ x+3=-4 \Rightarrow x=-4-3 \Rightarrow x=-7 \end{cases}$$

– مجموعه‌ی جواب‌ها برابر است با:

$$\{-7, 1\}$$

خاصیت سوم قدرمطلق:

(a عدد حقیقی و مثبت) $-a < x < a$. $|x| < a$



شکل ۲۴-۱

$$|x-2| < 1$$

مثال ۱۰: نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$|x-2| < 1$$

حل: فاصله $x-2$ از صفر، کوچک‌تر از ۱ می‌باشد.

$x-2$ کوچک‌تر از ۱ و بزرگ‌تر از -1 می‌باشد (طبق

$$-1 < x-2 < 1$$

خاصیت سوم قدرمطلق)

$$\Rightarrow -1+2 < x-2+2 < 1+2$$

به همه طرف‌های نامعادله عدد ۲ را اضافه می‌کنیم:

$$\Rightarrow 1 < x < 3$$

پس جواب نامعادله برابر است، با:

نکته‌ی ۲: $|a-b|$ فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی a و b را روی محور نشان می‌دهد، بدون آن که مشخص کند کدام بزرگ‌تر می‌باشد. مثلاً فاصله‌ی دو نقطه‌ی ۱ و ۷ برابر ۶ است.

$$|1-7| = 6$$

فاصله‌ی دو نقطه‌ی ۲ و ۵ برابر ۳ است.

$$|5-2| = 3$$

الف) $|x-2| < 1$

مثال ۱۱: نامعادله‌های روبه‌رو را در قالب یک جمله‌ی

ب) $|x-10| > 5$

کوتاه بنویسید.

جواب الف: مجموعه‌ی همه‌ی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها

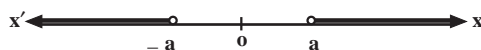
از ۲ کمتر از ۱ می‌باشد.

جواب ب: همه‌ی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها از ۱۰ از ۵

بیش‌تر است.

$|x| > a$ 4 $x > a$ یا $x < -a$ (a عدد حقیقی و مثبت)

خاصیت چهارم قدرمطلق:



شکل ۱-۲۵

$$|x-3| > 2$$

مثال ۱۲: نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$\Rightarrow x-3 > 2 \text{ یا } x-3 < -2$$

2

حل: در این مثال می‌خواهیم همه‌ی اعدادی را که فاصله‌ی

آن‌ها از ۳ بیش‌تر از ۲ است مشخص کنیم؛ بنابراین خاصیت چهارم

قدرمطلق:

$$x > 5 \text{ یا } x < 1$$

بنابر این مجموعه جواب معادله برابر است با:

$$M = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ و } x > 5 \text{ یا } x < 1\}$$

تمرین

۱- حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\sqrt{(4-\sqrt{5})^2} + |2-\sqrt{5}| - |-3| = ?$$

۲- نامعادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $|5x - 7| > 4$

۲) $|3x - 1| < |x + 2|$

۳) $|1 - 7x| < 3$

۳- عبارات زیر را با قدرمطلق نشان دهید.

الف : مجموعه‌ی اعدادی که فاصله‌ی آن‌ها از ۲- بیش‌تر از ۳ باشد.

جواب $|x + 2| > 3$

ب : مجموعه‌ی اعدادی که فاصله‌ی آن‌ها از ۱ کمتر از ۷ باشد.

ج : مجموعه‌ی اعدادی که فاصله‌ی آن‌ها از ۱- برابر با ۲ باشد.

۴- اگر $0 \leq x < 1$ باشد حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$|x| + |x - 1| = ?$$

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سوالات آزمون پایانی (۲)

۱- عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.
(الف)

$$p = \frac{2x+1}{3x-2} + 4$$

(ب)

$$p = 4x^2 - 7x + 3$$

۲- نامعادله‌های زیر را حل کنید.

$$۱) \frac{3}{2x-5} > 4$$

$$۲) x^2 < +1 \cdot x - 9$$

$$۳) 2 \leq \frac{5}{4}x - 1 < 7$$

$$۴) |3x - 1| \geq 4$$

$$۵) |-5x + 1| < 2$$

بخش دوم

تابع و مفاهیم آن

هدف کلی بخش

آشنایی با ویژگی‌ها و شیوه‌های مختلف نمایش یک تابع، عملیات روی تابع‌ها و کاربردهای آن در زمینه‌های مختلف

جدول عناوین فصل‌ها

عنوان فصل	شماره‌ی فصل
محور اعداد	اول
بازه	دوم
تابع	سوم
دامنه‌ی توابع	چهارم
چند تابع ویژه	پنجم
عملیات روی تابع‌ها	ششم
ترکیب دو تابع	هفتم

بخش دوم

فصل اول

محور اعداد

هدف کلی

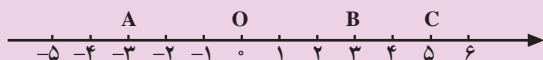
مطالبی مربوط به محور اعداد و محور مختصات

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

- ۱- محور اعداد را تعریف کند؛
- ۲- دستگاه مختصات را رسم کند؛
- ۳- طول پاره‌خط را با استفاده از مختصات محاسبه کند؛
- ۴- قرینه‌ی یک نقطه را نسبت به محور x ها، y ها و مبدأ مختصات پیدا کند.

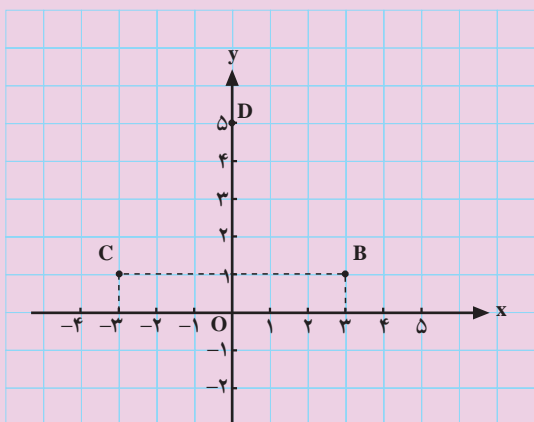
پیش‌آزمون (۱)

محل پاسخ به سوالات پیش‌آزمون (۱)



شکل ۲-۱

$x_A =$ $x_B =$ $x_C =$



شکل ۲-۲

۱- x نقطه‌های روی محور را تعیین کنید. (شکل ۲-۱).

۲- اگر $x_A = 5$ و $x_B = -3$ باشد، \overline{AB} و \overline{BA} را

حساب کنید و بگویید چه رابطه‌ای بین آن‌ها وجود دارد؟

۳- الف) مختصات B، C و D را مشخص کنید (شکل

۲-۲).

ب) طول پاره‌خط‌های DB، CD و CB را به دست

آورید.

ج) مساحت مثلث DBC را محاسبه کنید.

۴- هرگاه $A \begin{vmatrix} -4 \\ 3 \end{vmatrix}$ ، $B \begin{vmatrix} -4 \\ 0 \end{vmatrix}$ ، $C \begin{vmatrix} -3 \\ -3 \end{vmatrix}$ و $D \begin{vmatrix} -4 \\ 4 \end{vmatrix}$ ،

الف) کدام یک از نقاط داده شده روی محور x ها و کدام

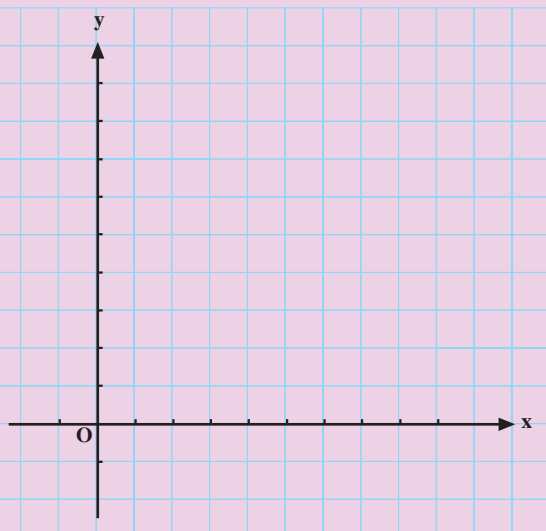
یک روی محور y ها قرار دارد؟

ب) کدام یک از نقاط روی نیمساز ربع دوم و چهارم و

کدام یک روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد؟

ج) طول پاره خط CD را حساب کنید.

محل پاسخ به سوالات پیش‌آزمون (۱)



شکل ۲-۳

$A(a-b, 7)$ و $B(3, a+b)$

۵- الف) نقطه‌های $A\left(\frac{2}{8}\right)$ و $B\left(\frac{8}{4}\right)$ را روی دستگاه محورهای

مختصات (شکل ۲-۳) مشخص کنید.

ب) مختصات نقطه‌ی M ، وسط پاره خط AB را بنویسید.

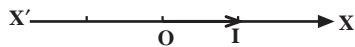
ج) طول پاره خط OM را محاسبه کنید.

۶- مختصات دو نقطه‌ی A و B در مقابل مفروض است.

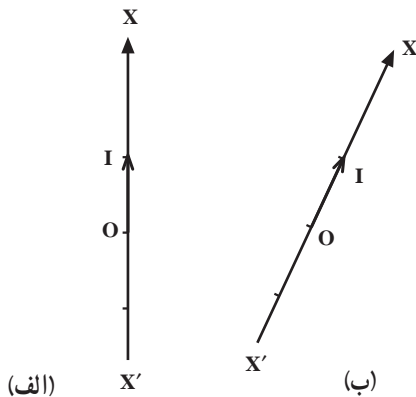
هرگاه $A = B$ مطلوب است مقدار $2a + 3b$.



شکل ۴-۲- دکارت



محور ۵-۲



محور ۶-۲



محور ۷-۲

$$\overline{AB} = X_B - X_A \quad (*)$$

اثبات فرمول (*):

محور ۸-۲

با توجه به شکل ۸-۲ داریم:

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

$$\overline{OB} = X_B \text{ و } \overline{OA} = X_A$$

۱-۲- محور اعداد

از سال‌های گذشته به یاد دارید که محور عبارت است از «یک خط راست جهت‌دار که روی آن نقطه‌ای به عنوان مبدأ و طولی به عنوان واحد اندازه‌گیری تعیین شده باشد». جهت محور را نسبت به مبدأ از طرف چپ به راست مثبت و از طرف راست به چپ منفی فرض می‌کنند.

هر عدد حقیقی را با یک نقطه از محور و هر نقطه از محور را با یک عدد حقیقی متناظر می‌کنیم. مثلاً مبدأ O متناظر با عدد صفر و نقطه‌ی واحد (I) متناظر با عدد یک است (شکل ۵-۲).

نکته: محور اعداد به صورت افقی، عمودی و مایل نیز

می‌تواند باشد (شکل ۶-۲).

هرگاه محوری افقی باشد، در سمت راست مبدأ آن اعداد

مثبت و در سمت چپ اعداد منفی است.

مثال ۱: در شکل ۷-۲ نقطه‌ی A برابر ۲ و X نقطه‌ی

B برابر -۳ را مشاهده می‌کنید.

۱-۱-۲- طول پاره‌خط از یک محور: اگر X_A و

X_B مختص نقاط A و B بر روی محور $X'OX$ باشد. اندازه‌ی

جبری پاره‌خط \overline{AB} برابر است با:

- از طرفی مقدار OA و OB برابر است با:

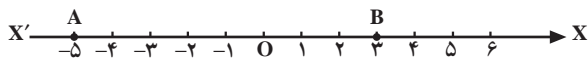
$$\overline{AB} = X_B - X_A$$

– طول پاره خط \overline{AB} از فرمول مقابل به دست می آید:

مثال ۱: اگر $X_A = -5$ و $X_B = 3$:

الف) نقاط A و B را روی محور ۹-۲ نشان دهید.

جواب الف)

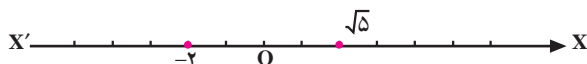


محور ۹-۲

جواب ب) $\overline{AB} = X_B - X_A = 3 - (-5) = 3 + 5$

$\Rightarrow \overline{AB} = 8$

حل ۲:



محور ۱۰-۲

حل ۳:

$\overline{AB} = X_B - X_A \Rightarrow 11 = X_B - 5$

$\Rightarrow X_B = 11 + 5 \Rightarrow X_B = 16$

حل ۴:

$\overline{BA} = X_A - X_B = 4 - (-7) \Rightarrow \overline{BA} = 11$

ب) اندازه ی جبری \overline{AB} را حساب کنید:

مثال ۲: نقاط نظیر $\sqrt{5}$ و -2 را روی محور اعداد

۱-۲ نشان دهید.

حل: مقدار $\sqrt{5}$ را از سمت راست صفر و مقدار -2 را

از سمت چپ صفر روی محور جدا می کنیم.

مثال ۳: هرگاه $\overline{AB} = 11$ و $X_A = 5$ باشد مقدار X_B

را بیابید.

مثال ۴: هرگاه $X_A = 4$ و $X_B = -7$ باشد \overline{BA} چه قدر

است؟

تمرین

۱- نقاط نظیر $5, -7, 3, \frac{11}{3}$ و $\sqrt{7}$ را روی محور

اعداد حقیقی (۱۱-۲) نمایش دهید.

۲- هرگاه $\overline{AB} = 7$ و $X_B = 3$ باشد X_A را به دست

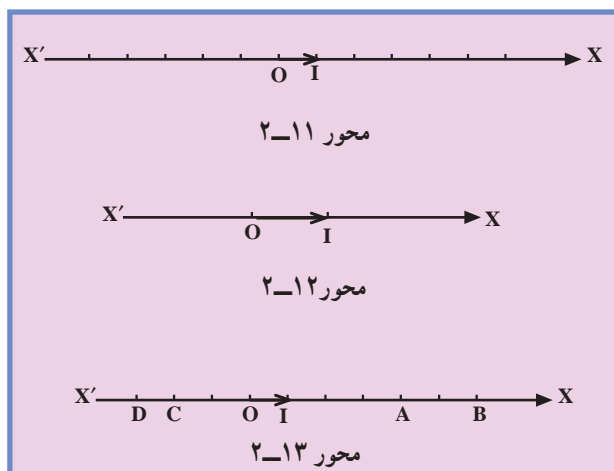
آوردید و نقطه های A و B را روی محور $X'OX$ (۱۲-۲) نشان دهید.

۳- آیا محور اعداد حقیقی همواره به صورت افقی است؟

مثال بزنید.

۴- نقاط A، B، C و D روی محور $X'OX$ (۱۳-۲)

مشخص شده است. به سؤال های ذیل پاسخ دهید.



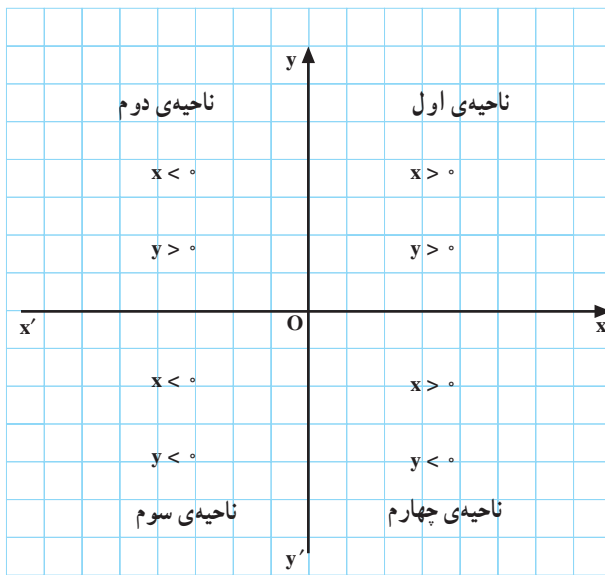


- الف) X_D را به دست آورید.
 ب) اندازه‌ی جبری پاره خط \overline{DA} را حساب کنید.
 ج) طول پاره خط \overline{AB} و \overline{BA} را به دست آورید.
 د) آیا همواره می‌توان گفت: $\overline{BA} + \overline{AB} = 0$ ؟

۲-۱-۲- محورهاى مختصات قائم: هرگاه از نقطه‌ی

O بر محور $x'Ox$ ، محور $y'Oy$ را عمود رسم کنیم این دو محور و نقطه‌ی O را دستگاه مختصات قائم می‌گویند (شکل ۲-۱۴). دستگاه مختصات صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کند (شکل ۲-۱۴).

محور $x'Ox$ را محور x ها و محور $y'Oy$ را محور y ها می‌نامیم.



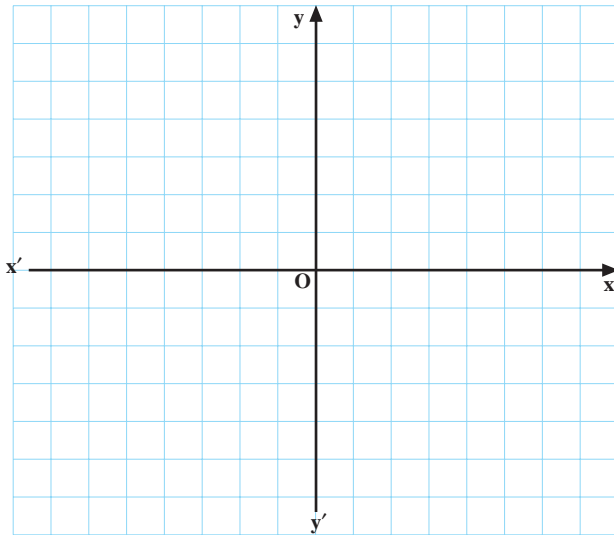
شکل ۲-۱۴



شکل ۲-۱۵

فعالیت ۲-۱

اگر $A(3, 3)$ و $B(-3, 3)$ و $C(-3, -3)$ و $D(3, -3)$ رأس‌های یک مستطیل باشند،
 الف) مستطیل $ABCD$ را در دستگاه محورهای مختصات
 (۲-۱۶) مشخص کنید.
 ب) ناحیه‌ای را که در ربع سوم قرار دارد با رنگ قرمز
 سایه بزنید.
 ج) قرینه‌ی A نسبت به محور y ها کدام یک از رأس‌های
 مستطیل است؟



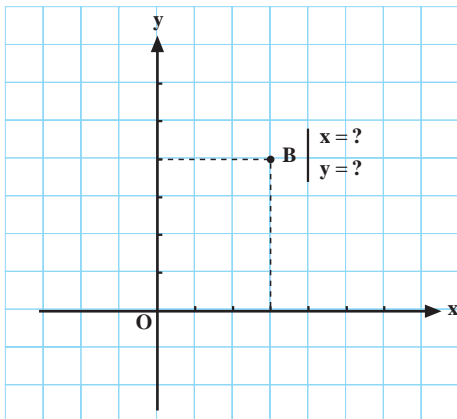
شکل ۲-۱۶

فعالیت ۲-۲

الف) مختصات نقطه‌ی B را در دستگاه مختصات ۲-۱۷
 پیدا کنید.
 ب) نقطه‌ی B را به O (مبدأ) وصل کرده به اندازه‌ی خود
 امتداد دهید. انتهای آن را نقطه‌ی B' بنامید و مختصات آن را
 به دست آورید.

جواب: B'

B و B' نسبت به مبدأ مختصات چه رابطه‌ای دارند؟



شکل ۲-۱۷

فعالیت ۲-۳



شکل ۲-۱۸

الف) نقطه‌ی $A(-2, 3)$ را روی محور مختصات ۲-۱۹

نشان دهید.

ب) قرینه‌ی A را نسبت به محور x ها روی محور مختصات

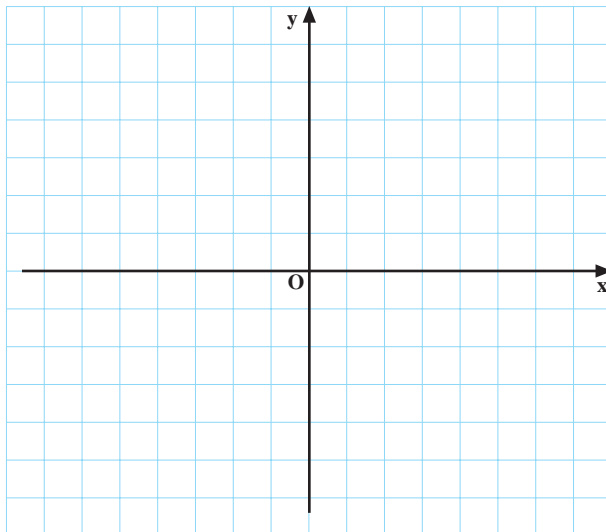
۲-۱۹ نشان دهید و آن را A' بنامید.

ج) آیا مختصات نقطه‌ی A' ، $(-2, -3)$ خواهد شد؟

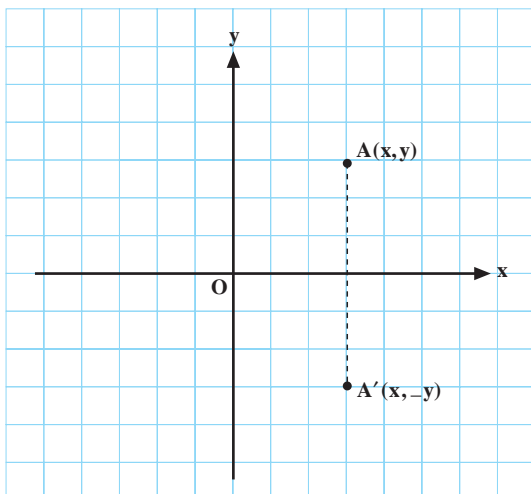
بلی خیر

آیا نقطه‌ی A' را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به محور x ها

می‌نامیم. بلی خیر



شکل ۲-۱۹



شکل ۲-۲۰

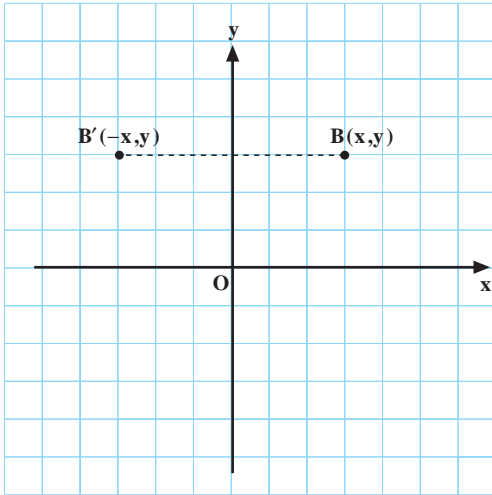
نتیجه: با توجه به سه فعالیت ۲-۱، ۲-۲ و ۲-۳ سه

نتیجه‌ی زیر را می‌گیریم.

۱- قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x, y)$ نسبت به محور x ها نقطه‌ی

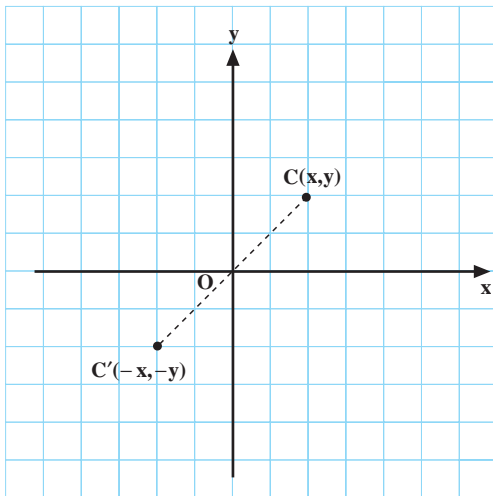
$A'(x, -y)$ است (شکل ۲-۲۰).

۲- قرینه‌ی نقطه‌ی $B(x,y)$ نسبت به محور y ها، نقطه‌ی $B'(-x,y)$ است (شکل ۲-۲۱).



شکل ۲-۲۱

۳- قرینه‌ی نقطه‌ی $C(x,y)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطه‌ی $C(-x,-y)$ است (شکل ۲-۲۲).



شکل ۲-۲۲

مثال ۱: قرینه‌ی نقطه‌ی $B(7,-3)$ را نسبت به مبدأ مختصات پیدا کنید.

حل ۱:

$$B(7,-3) \xrightarrow{\text{نسبت به مبدأ}} \dots \dots B'(-7,3)$$

مثال ۲: الف) قرینه‌ی نقطه‌ی $A(-8,-4)$ را نسبت به محور x ها پیدا کنید.

حل ۲:

$$A(-8,-4) \xrightarrow{\text{نسبت به } x \text{ها}} \dots \dots A'(-8,4)$$

ب) قرینه‌ی نقطه‌ی $C(-8,-4)$ را نسبت به محور y ها پیدا کنید.

$$C(-8,-4) \xrightarrow{\text{نسبت به } y \text{ها}} \dots \dots C'(8,-4)$$

مثال ۳: عدد m را چنان به دست آورید که نقطه‌ی $B(2m-3, 5)$ روی محور $y'Oy$ باشد.

حل ۳: $B(x, y) \Rightarrow x = 0$ بر محور y ها قرار دارد

$$\Rightarrow 2m - 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

مثال ۴: عدد C را چنان به دست آورید که نقطه‌ی $D(5, 2C-1)$ روی محور $x'Ox$ باشد.

حل ۴: $C(x, y) \Rightarrow y = 0$ بر محور x ها قرار دارد

$$\Rightarrow 2C - 1 = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

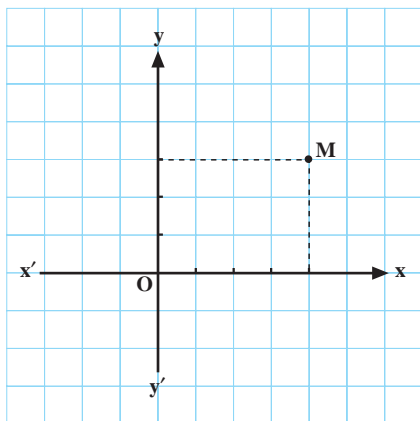
تمرین

۱- با توجه به محور مختصات شکل ۲۳-۲ کارهای زیر را انجام دهید.

الف) قرینه‌ی نقطه‌ی M نسبت به محور x ها را روی شکل نشان دهید.

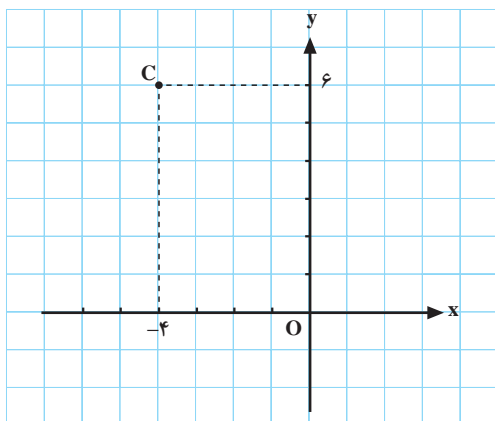
ب) قرینه‌ی نقطه‌ی M را نسبت به محور y ها روی شکل نشان دهید.

ج) قرینه‌ی نقطه‌ی M را نسبت به مبدأ مختصات روی شکل ۲۳-۲ نشان دهید.



شکل ۲۳-۲

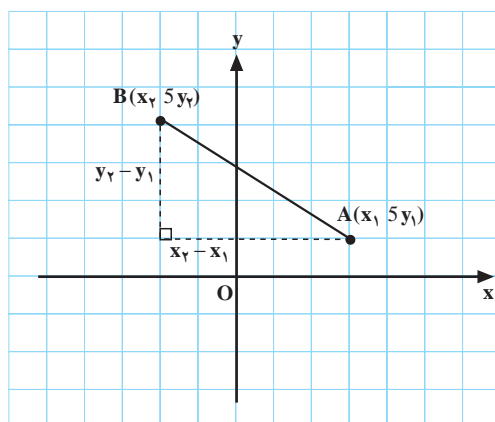
۲- با توجه به شکل ۲۴-۲، مقدار s و t را در شکل $C(2t-3, 5s+2)$ به دست آورید.



شکل ۲۴-۲

۳-۱-۲ طول پاره خط در صفحه: اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه‌ی دلخواه باشند، طول پاره خط AB (شکل ۲۵-۲) از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



شکل ۲۵-۲

مثال ۱: نقاط A و B در مقابل مفروض است. طول پاره خط AB و OB را بیابید.

$A(3, -4)$ و $B(2, 5)$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

حل: از رابطه‌ی طول پاره خط داریم:

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(3 - 2)^2 + (-4 - 5)^2} = \sqrt{1^2 + (-9)^2}$$

x و y ، نقاط A و B را در رابطه قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow AB = \sqrt{1 + 81} \Rightarrow AB = \sqrt{82}$$

طول پاره خط AB برابر است با:

$$OB = \sqrt{x_B^2 + y_B^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25}$$

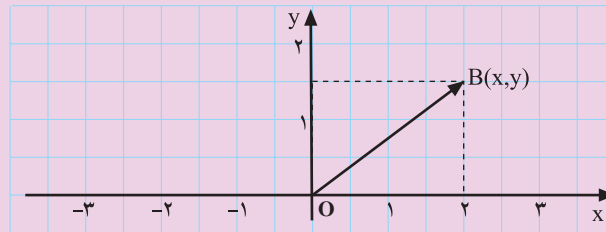
– طول پاره خط OB از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید.

– طول OB برابر است با:

$$\Rightarrow OB = \sqrt{29}$$

نتیجه: فاصله‌ی یک نقطه‌ی دلخواه مانند $B(x, y)$ در شکل ۲۶-۲ تا مبدأ مختصات برابر است با:

$$OB = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$$

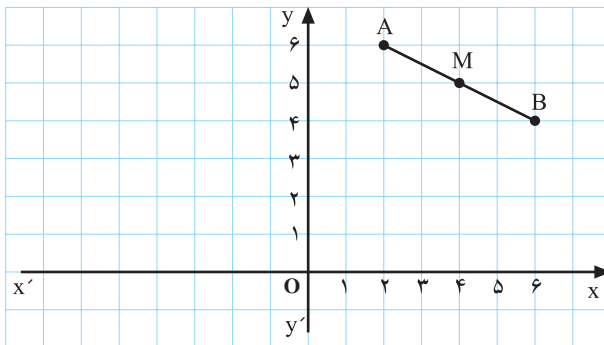


شکل ۲۶-۲

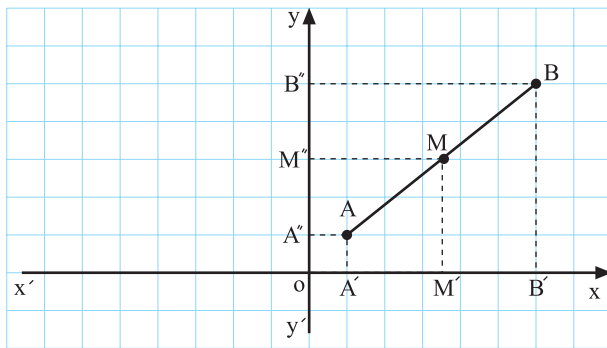
۴-۱-۲- مختصات وسط یک پاره خط در صفحه

فعالیت ۴-۲

الف) مختصات نقاط A و B را پیدا کنید.
 ب) هرگاه نقطه‌ی M وسط پاره خط AB باشد مقدار x_M و y_M را پیدا کنید (شکل ۲۷-۲).



شکل ۲۷-۲



شکل ۲-۲۸

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

حل الف)

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5 + 7}{2} = 6 \\ y_M &= \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{6 + (-2)}{2} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow M(6, 2)$$

$$\begin{aligned} OM &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{36 + 4} \Rightarrow OM = \sqrt{40} \end{aligned} \quad \text{حل ب)}$$

حل ۲)

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow 2 = \frac{2m + 8}{2} \Rightarrow 4 = 2m + 8$$

$$\Rightarrow 2m = -8 + 4 \Rightarrow 2m = -4 \Rightarrow m = -2$$

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \Rightarrow -3 = \frac{5 + 3n - 1}{2} \Rightarrow -6 = 3n + 4$$

$$\Rightarrow 3n = -6 - 4 = -10 \Rightarrow n = \frac{-10}{3}$$

ج) چه ارتباطی بین مختصات A و B با نقطه‌ی M وجود دارد؟

نتیجه: هرگاه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه در صفحه باشند مختصات نقطه‌ی M وسط پاره خط AB از دو رابطه‌ی روبه‌رو به‌دست می‌آید (شکل ۲-۲۸).

از تساوی $\overline{A'M'} = \overline{M'B'}$ و $\overline{A''M''} = \overline{M''B''}$ چه نتیجه می‌گیرید؟ چرا؟

مثال ۱:

الف) اگر داشته باشیم $A(5, 6)$ و $B(7, -2)$ ، مختصات نقطه‌ی M، وسط پاره خط AB را محاسبه کنید.

ب) فاصله‌ی وسط AB تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

مثال ۲: هرگاه داشته باشیم $A(2m, 5)$ و $B(8, 3n - 1)$

و نقطه‌ی $M(2, -3)$ وسط پاره خط AB باشد مقادیر m و n را به‌دست آورید.

مقدار m برابر است با:

مقدار n برابر است با:

تمرین

۱- هرگاه $A(-3, 6)$ و $B(3, 5)$ باشد :
الف) طول پاره خط AB را محاسبه کنید.
ب) فاصله‌ی وسط AB تا مبدأ مختصات را بیابید.

۲- دو نقطه‌ی A و B به مختصات مقابل مفروض اند. اگر طول پاره خط AB برابر 200 واحد باشد مقدار m را محاسبه کنید.

۳- دو نقطه‌ی C و D در مقابل مفروض است.

اگر طول پاره خط CD برابر $10\sqrt{5}$ واحد باشد مقدار m را محاسبه کنید.

۵-۱-۲- تساوی دو زوج مرتب

دو زوج مرتب (x, y) و (z, t) با هم برابرند هرگاه مختص اول آن‌ها با هم برابر باشند و نیز مختص دوم آن‌ها نیز مساوی باشند و برعکس.

مثال ۱: دو زوج مرتب A و B به مختصات $(7, 2a+10)$ و $(2a-b, 3a+4)$ با شرط روبرو مفروض اند، a و b را پیدا کنید.

حل: از برابر بودن مختصات A و B خواهیم داشت :

$$A(4m, m) \text{ و } B(-m, m)$$

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\Rightarrow 200 = \sqrt{(4m - (-m))^2 + (m - m)^2}$$

$$\Rightarrow 200 = \sqrt{(4m + m)^2 + (0)^2} = \sqrt{(5m)^2} = |5m|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5m = 200 \Rightarrow m = 40 \\ -5m = 200 \Rightarrow m = -40 \end{cases}$$

$$C(m, 2m) \text{ و } D(2m, 4m)$$

$$(x, y) = (z, t) \Leftrightarrow x = z, y = t$$

$$(2a - b, 3a + 4) = (7, 2a + 10)$$

$$\begin{cases} x_A = x_B \Rightarrow 2a - b = 7 \\ y_A = y_B \Rightarrow 3a + 4 = 2a + 10 \Rightarrow \end{cases}$$

$$3a - 2a = 10 - 4 \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

$$2a - b = 7 \xrightarrow{a=6} 2 \times 6 - b = 7 \Rightarrow b = 12 - 7 = 5$$

- با حل معادله مقدار a به دست می‌آید.

- با قرار دادن a در معادله b را حساب می‌کنیم :

مثال ۲: مقدار a را چنان پیدا کنید که نقطه‌ی

$B(2a+1, 3a-4)$ روی نیمساز ربع اول و سوم باشد.

حل: بنا به خاصیت نیمساز ربع اول و سوم خواهیم داشت:

$$x_B = y_B \Rightarrow 2a+1 = 3a-4$$

$$3a - 2a = 1 + 4 \Rightarrow a = 5$$

— با حل معادله مقدار a برابر با:

تمرین

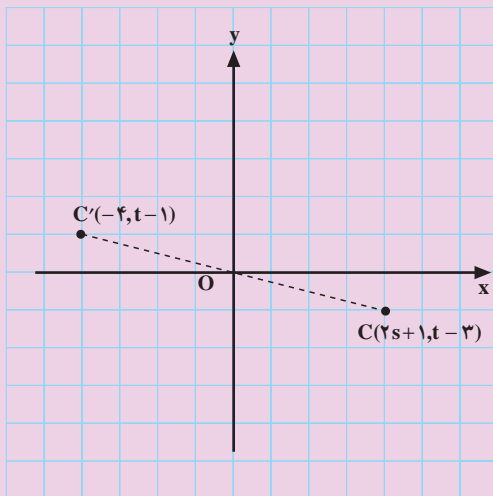
۱- هرگاه مختصات A و B در مقابل مفروض باشد مقدار

a و b را چنان بیابید که دوزوج مرتب A و B برابر باشند؛ سپس

قرینه‌ی A را نسبت به مبدأ مختصات پیدا کنید.

$A(3a+b, 7)$ و $B(1, 4a-5)$

$C(3b-5, 7b+1)$



شکل ۲-۲۹

۲- مقدار b را چنان بیابید که نقطه‌ی C به مختصات

روبه‌رو روی نیمساز ربع دوم و چهارم باشد.

(راهنمایی: نیمساز ربع دوم و چهارم خط $y = -x$

می‌باشد)

۳- اگر C' و C نسبت به مبدأ مختصات قرینه باشند مقدار

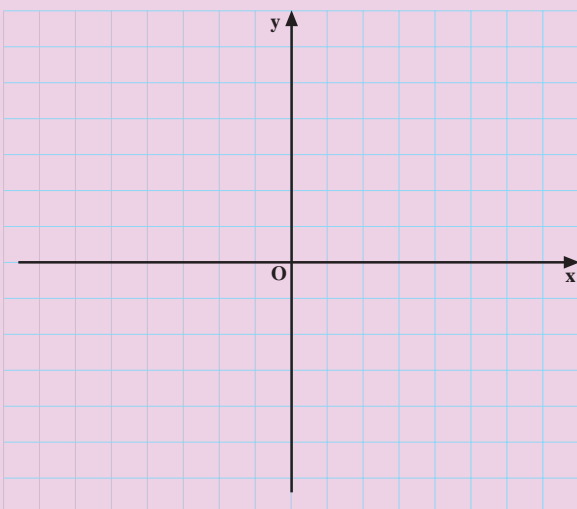
t و s را بیابید (با توجه به شکل ۲-۲۹).

۴- هرگاه ABC یک مثلث باشد که $A(3, 5)$ و B قرینه‌ی

نقطه A نسبت به محور x ها و C قرینه‌ی A نسبت به محور y ها

باشد، مثلث ABC را روی محورهای مختصات رسم کنید و

سپس طول ضلع BC را محاسبه کنید.



شکل ۲-۳۰

۵- اگر $A(3, 5)$ و $B(-8, 5)$ باشند:

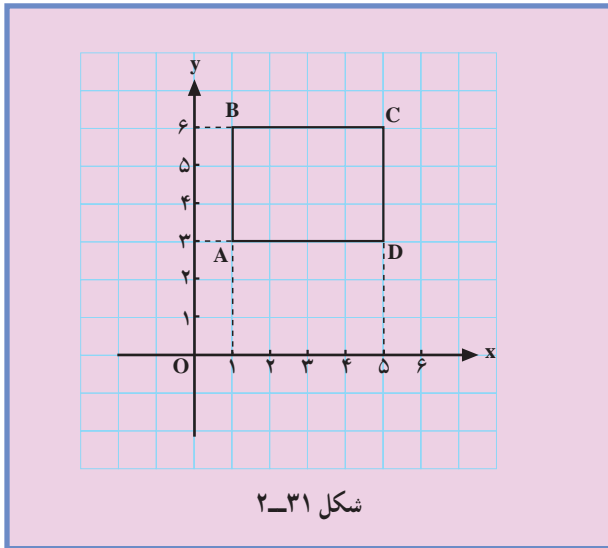
الف) نقاط A و B را روی دستگاه مختصات ۲-۳۰

مشخص کنید.

ب) مختصات وسط پاره خط AB را پیدا کنید.

پ) نقاط A و B را به مبدأ مختصات وصل کنید، سپس

محیط مثلث OAB را محاسبه کنید.



۶- الف) مختصات رأس‌های A و C ، D ، B را در شکل ۲-۳۱ بیابید.

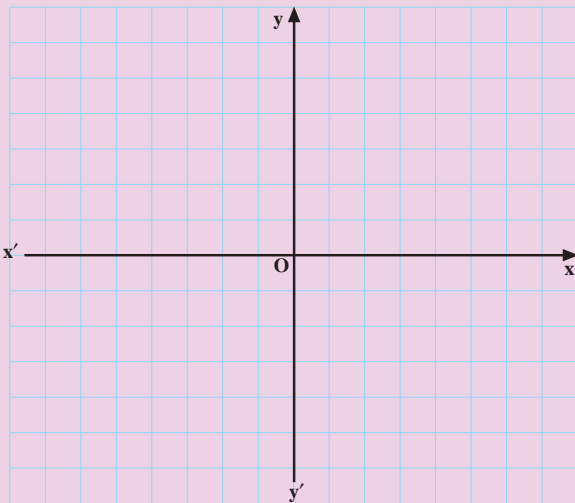
ب) قرینه‌ی چهارضلعی $ABCD$ را نسبت به محور x ها به دست آورید.

پ) قرینه‌ی چهارضلعی $ABCD$ را نسبت به محور y ها بیابید.

ت) قرینه‌ی چهارضلعی $ABCD$ را نسبت به مبدأ مختصات به دست آورید.

آزمون پایانی (۱)

محل پاسخ به سوالات آزمون پایانی (۱)



محور ۲-۳۲

$$A(-2a \text{ و } 2a+1)$$

$$A \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ و } B \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

۱- اگر $x_A = 5$ و $x_B = -6$ و $\overline{AB} = 2\overline{AC}$ باشد مقدار \overline{AC} را بیابید.

۲- نقاط $A \begin{vmatrix} 6 \\ 2 \end{vmatrix}$ ، $B \begin{vmatrix} -6 \\ 2 \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} 8 \\ 8 \end{vmatrix}$ رأس‌های مثلث ABC

می‌باشد.

الف) نقاط A، B و C را روی محور مختصات ۲-۳۲

مشخص کنید.

ب) مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

۳- هرگاه نقطه‌ی A به مختصات روبه‌رو، روی خط $y = x$

واقع باشد مختصات A را بیابید.

۴- نقاط A و B به مختصات روبه‌رو مفروض است.

الف) طول پاره خط AB را محاسبه کنید.

ب) مختصات وسط پاره خط AB را بیابید.

بخش دوم

فصل دوم

بازه

هدف کلی

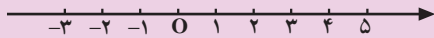
یادآوری و تکمیل مفهوم بازه و مفهوم‌های وابسته به آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

- ۱- بازه را تعریف کند؛
- ۲- انواع بازه را به صورت مجموعه بنویسد؛
- ۳- انواع بازه را روی محور اعداد نمایش دهد؛
- ۴- اعمال بر روی بازه‌ها را انجام دهد.

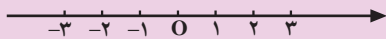
پیش‌آزمون (۲)

محل پاسخ به سوالات پیش‌آزمون (۲)



شکل ۲-۳۳

$$A = \{x | x \in \mathbb{R} \text{ و } x > -1\} \text{ و } B = [-4, 5)$$



شکل ۲-۳۴

الف) $-3 \leq \frac{3x}{4} + 5 < 7$

ب) $(x - 5)(3x + 4) \geq 0$

۱- بازه‌های $A = [-2, 3)$ و $B = (2, +\infty)$ را روی محور ۲-۳۳ نشان دهید.

۲- بازه‌های A و B در مقابل مفروض‌اند. بازه‌های زیر را به دست آورید.

الف) $A \cap B$

ب) $A \cup B$

ج) $A - B$

د) متمم A را روی محور ۲-۳۴ نشان دهید.

۳- جواب نامعادله‌ی مقابل را به دست آورید و سپس آن را به صورت بازه بنویسید.

۴- جواب نامعادله‌ی مقابل را به صورت بازه نمایش دهید.

۲-۲ بازه

دمای آب در شرایط متعارف بیش تر از صفر و کم تر از 100° درجه ی سانتی گراد می باشد. بازه ی تغییرات دمای آب را می توان با $(0, 100)$ نمایش داد. این بازه ها را بازه ی باز 0 و 100 (صفر و صد) می نامند.



شکل ۲-۳۵- نمایش تغییرات دمای آب به صورت نمودار

$$\{x | x \in \mathbb{R}, 0 < x < 100\}$$

نمایش تغییرات دمای آب به صورت مجموعه (علائم ریاضی)

$$(a, b) \text{ یا }]a, b[$$



شکل ۲-۳۶- نمایش نموداری بازه (a, b)

$$\{x | x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

$$-x^2 + 4x > 0$$

$$-x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x + 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 4$$

جدول ۲-۱

x	0	4
$-x^2 + 4x > 0$	/	+
	/	/

جواب

$$(0, 4) = \{x | x \in \mathbb{R}, 0 < x < 4\}$$



شکل ۲-۳۷

بازه ها جزء مهم ترین زیر مجموعه های اعداد حقیقی می باشند و به شکل های زیر نمایش داده می شوند.

۲-۲-۱ بازه ی باز a و b: بازه ی باز a و b به طوری

که $a < b$ را مجموعه ی همه ی اعداد حقیقی بین a و b تعریف می نمایند که نمایش نموداری آن به صورت شکل ۲-۳۶ می باشد. نمایش مجموعه ای با علائم ریاضی به صورت روبه رو است.

مثال ۱: نامعادله ی روبه رو را حل کرده و جواب آن را

به صورت بازه و مجموعه بنویسید و روی محور مشخص کنید.

حل: نامعادله را مساوی صفر قرار می دهیم.

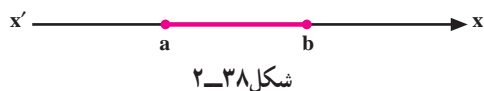
ریشه های معادله را پیدا می کنیم.

معادله ی $-x^2 + 4x$ را تعیین علامت می کنیم.

با توجه به جدول ۲-۱ جواب نامعادله برابر است با:

نمایش نموداری بازه (شکل ۲-۳۷).

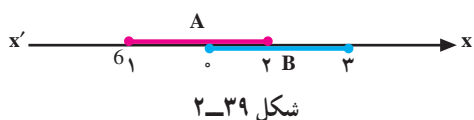
$[a, b]$



$$\{x | x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

$$B = [0, 3] \text{ و } A = [-1, 2]$$

حل الف



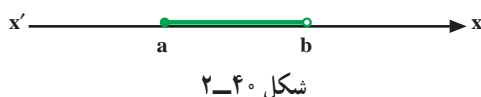
$$A \cap B = [0, 2]$$

(حل ب)

$$A \cup B = [-1, 3]$$

(حل ج)

$[a, b[$ یا $[a, b)$



$$\{x | x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$$

$$-\frac{3}{x} \geq 2$$

۲-۲-۲ بازه‌ی بسته‌ی a و b : اگر $a \leq b$ بازه‌ای که

علاوه بر نقاط بازه‌ی باز (a, b) شامل نقاط a و b باشد بازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$ نامیده می‌شود و نمایش نموداری آن شکل ۲-۳۸ است.

- نمایش به صورت مجموعه با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو است.

مثال ۲: بازه‌های A و B در مقابل مفروض است.

الف) نمودار دو بازه‌ی A و B را بر روی محور ۲-۳۹ رسم کنید.

ب) بازه $A \cap B$ را به دست آورید.

قسمتی که در هر دو بازه مشترک می‌باشد برابر است با:

ج) $A \cup B$ را به دست آورید.

اجتماع دو بازه از نقطه‌ی شروع بازه‌ها یعنی عدد ۱- تا انتهای آن‌ها یعنی عدد ۳ می‌باشد.

۲-۲-۳ بازه‌ی بسته‌ی a و بازه‌ی بسته‌ی b :

و باز b به شرط $(a < b)$ را مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین a و b ، به انضمام عدد a تعریف می‌کنند و نمایش نموداری آن به شکل ۲-۴۰ است.

- نمایش مجموعه‌ای بازه‌ی $[a, b)$ با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو است.

مثال ۳: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کرده و مجموعه‌ی

جواب آن را به صورت بازه و مجموعه بنویسید.

حل: همه‌ی جمله‌ها را به یک طرف آورده و مخرج مشترک

می‌گیریم.

– ریشه‌های صورت و مخرج نامعادله را پیدا می‌کنیم:

$$-\frac{3}{x} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{-3 - 2x}{x} \geq 0 \Rightarrow$$

$$x = 0, -3 - 2x = 0 \Rightarrow -3 = 2x \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

– نامعادله را تعیین علامت می‌کنیم.

جدول ۲-۲

x		$-\frac{3}{2}$	0	
$-3-2x$	+		-	-
x	-	-		+
$\frac{-3-2x}{x}$	-		+	-

تعریف تندو+
جواب

$$\left[-\frac{3}{2}, 0\right) = \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, -\frac{3}{2} \leq x < 0\right\}$$

مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله به صورت بازه یا مجموعه

به صورت روبه‌رو است:

$[a, b]$ یا $(a, b]$



نمودار ۲-۴۱

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$

۲-۲-۴ بازه‌ی باز a و بسته‌ی b : بازه‌ی باز a و

بسته‌ی b به شرط $(a < b)$ را مجموعه‌ی همه اعداد حقیقی بین a و

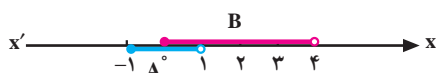
b ، به انضمام نقطه‌ی b تعریف می‌کنند و نمایش نموداری آن به

شکل ۲-۴۱ است. نمایش مجموعه‌ای آن با علائم ریاضی

به صورت روبه‌رو است.

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 1\}$$
 و

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < 4\}$$



نمودار ۲-۴۲

$$A = [-1, 1) \text{ و } B = [0, 4)$$

$$A \cap B = [0, 1)$$

مثال ۴: بازه‌های A و B در مقابل مفروض است. به

سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

– بازه‌های A و B را روی نمودار ۲-۴ مشاهده می‌کنید.

(الف) $A \cap B$ را به دست آورید.

– ناحیه‌ای که در هر دو بازه مشترک است.

(ب) $A \cup B$ را به دست آورید.

– از ابتدای A یعنی ۱- تا انتهای B را شامل می‌شود.

$$A - B = [-1, 4)$$

(ج) $A - B$ را به دست آورید.

از بازه‌ی A بازه‌ی مشترک با B یعنی $[0, 1)$ را حذف

می‌کنیم، پس:

$$A - B = [-1, 0)$$

(د) $B - A$ را محاسبه کنید.

از بازه‌ی B بازه‌ی مشترک با A یعنی $[0, 1)$ را بیرون

می‌آوریم؛ یعنی:

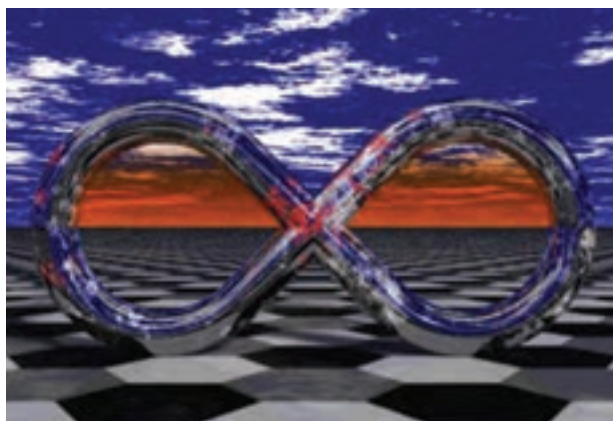
$$B - A = [1, 4)$$

معرفی بینهایت:

– تعداد ستارگان در آسمان چند عدد است؟

– در بازه‌ی $(2, 3)$ چند عدد حقیقی وجود دارد؟

– چند عدد طبیعی وجود دارد؟



شکل ۲-۴۳

ریاضی‌دان‌ها برای نمایش چیزی که از هر عدد حقیقی

بزرگ‌تر است از نماد $+\infty$ استفاده می‌کنند.

به طور مشابه برای نمایش چیزی که از هر عدد منفی

کوچک‌تر است از نماد $-\infty$ استفاده می‌کنیم. پس اگر x عددی

دلخواه و حقیقی باشد، داریم:

نکته: $-\infty, +\infty$ عدد نیستند.

۵-۲-۲ بازه‌ی باز a و $+\infty$: بازه‌ی باز a و $+\infty$

را مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی بیش‌تر از a تعریف می‌کنند و

نمایش نموداری آن به شکل ۲-۴۴ می‌باشد.

$$-\infty < x < +\infty$$

$$(a, +\infty)$$



شکل ۲-۴۴

$$\{x | x \in \mathbb{R}, x > a\}$$

نمایش مجموعه‌ای آن با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو

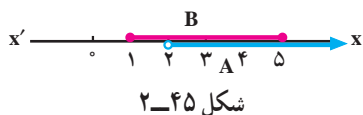
است:

مثال ۵: بازه‌های A و B در مقابل مفروض‌اند. بازه‌های

زیر را تعیین کنید.

$$A = (2, +\infty) \text{ و } B = [1, 5]$$

$$A \cap B \quad (۱)$$



$$A \cap B = (2, 5]$$

$$A \cap B = [1, +\infty)$$

$$B' = \mathbb{R} - B = (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$$

$$A - B = (5, +\infty)$$

$$[a, +\infty)$$



شکل ۲-۴۶

$$\{x | x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$$

$$\text{بازه } [100, +\infty)$$

$$\text{مجموعه } \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 100\}$$



شکل ۲-۴۷

$$[2, +\infty) - (0, 4)$$

حل: بازه‌های A و B را در نمودار ۲-۴۵ مشاهده می‌کنید.

– با توجه به نمودار ۲-۴۵ اشتراک A و B برابر است با:

$$A \cap B \quad (۲)$$

(۳) B' متمم B را به دست آورید.

حل: از مجموعه‌ی \mathbb{R} (اعداد حقیقی) B را حذف می‌کنیم،

پس:

$$A - B \quad (۴)$$

– هرگاه از اعضای A، عضوهای مشترک B را بیرون

آوریم داریم:

۶-۲-۲ – بازه‌ی بسته‌ی a و باز مثبت بی‌نهایت:

بازه‌ای که علاوه بر نقاط بازه‌ی باز $(a, +\infty)$ شامل نقطه‌ی a

باشد بازه‌ی بسته‌ی $[a, +\infty)$ نامیده می‌شود که نمودار آن به

شکل ۲-۴۶ می‌باشد.

نمایش مجموعه‌ای آن با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو

است:

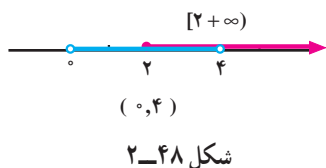
مثال ۶: می‌دانیم اگر آب در شرایط متعارف تحت دمای

۱۰۰ درجه‌ی سانتی‌گراد یا بیش‌تر قرار گیرد به بخار تبدیل

می‌شود. بازه‌ی تغییرات دمای بخار آب به صورت بازه،

مجموعه و نمودار آن به صورت روبه‌رو است.

مثال ۷: حاصل عبارت مقابل را تعیین کنید.



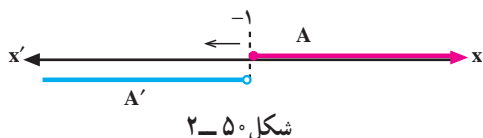
$$[2, +\infty) - (0, 4) = [2, 4)$$

$$]-\infty, a[\text{ یا } (-\infty, a)$$



$$\{x | x \in \mathbb{R}, x < a\}$$

$$A = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq -1\}$$



$$A' = \mathbb{R} - A = (-\infty, -1)$$

$$\frac{x+1}{x} < 3$$

$$\frac{x+1}{x} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{x+1-3x}{x} < 0 \Rightarrow \frac{-2x+1}{x} < 0$$

$$-2x+1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ و } x=0$$

جدول ۲-۳

x	$-\infty$	۰	$\frac{1}{2}$	۲
$-2x+1$	+	+	۰	-
x	-	۰	+	+
$\frac{-2x+1}{x} < 0$	نامعین	جواب	جواب	جواب

حل: نمایش نموداری $[2, +\infty)$ و $(0, 4)$ را در شکل

۲-۴۸ می بینیم.

اگر قسمت مشترک را از $[2, +\infty)$ حذف کنیم، داریم:

۲-۲-۷ بازه‌ی باز $-\infty$ و a : بازه‌ی باز $-\infty$ و a

را مجموعه‌ی اعداد حقیقی کم‌تر از a تعریف می‌کنیم و نمودار آن به شکل ۲-۴۹ است.

مجموعه با علائم ریاضی

مثال ۸: مجموعه‌ی A مفروض است. متمم آن را به

صورت بازه نمایش دهید.

حل: با توجه به نمودار ۲-۵۰ اگر از محور اعداد حقیقی

مجموعه‌ی A را برش دهیم داریم:

مثال ۹: مجموعه جواب نامعادله‌ی مقابل را به صورت

مجموعه و بازه نمایش دهید.

حل: همه‌ی جمله‌ها را به یک طرف انتقال می‌دهیم و

مخرج مشترک می‌گیریم.

- ریشه‌های صورت و مخرج را به دست می‌آوریم.

- طبق جدول ۲-۳ نامعادله را تعیین علامت می‌کنیم چون

نامعادله کوچک‌تر از صفر است منفی‌ها را به عنوان جواب قابل

قبول می‌پذیریم.

مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $\frac{x+1}{x} < 3$ به صورت

بازه و مجموعه :

$$(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

یا

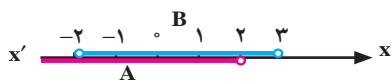
$$\left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 0 \text{ یا } x > \frac{1}{4}\right\}$$

مثال ۱۰: بازه‌های A، B و C در مقابل مفروض است.

حاصل عبارت روبه‌رو را به صورت بازه نمایش دهید.

$$A = (-\infty, 2), B = (-2, 3), C = [2, +\infty)$$

$$(A \cap B) \cap C$$



شکل ۵۱-۲

حل: نمودار A و B را روی محور مشخص می‌کنیم

(شکل ۵۱-۲).

– اشتراک A و B برابر است با:

$$A \cap B = (-2, 2)$$



شکل ۵۲-۲

– بازه‌ی C و A و B را روی محور مشخص می‌کنیم

(شکل ۵۲-۲).

با توجه به نمودار ۵۲-۲ داریم:

$$(A \cap B) \cap C = (-2, 2) \cap [2, +\infty)$$

۸-۲-۲ – بازه‌ی باز منفی بی‌نهایت و بسته‌ی a:

هرگاه بازه‌ی باز $-\infty$ و a، a را نیز شامل شود بازه‌ی باز $-\infty$ و

بسته‌ی a به دست می‌آید که در نمودار ۵۳-۲ نمایش داده شده

است.

– نمایش مجموعه‌ای $(-\infty, a]$ به صورت روبه‌رو است.

$$(-\infty, a] \text{ یا }]-\infty, a]$$



شکل ۵۳-۲

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$$

مثال ۱۱: مجموعه‌ی مقابل را به صورت نمودار و بازه

نمایش دهید.

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 2\}$$



شکل ۵۴-۲

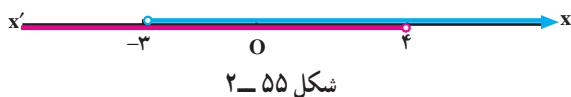
حل: نمایش نموداری به صورت شکل ۵۴-۲ است.

– نمایش به شکل بازه به صورت روبه‌رو است.

$$A = (-\infty, 2]$$

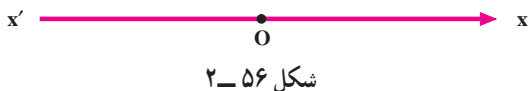
$$(-3, +\infty) \cup (-\infty, 4)$$

مثال ۱۲: حاصل عبارت مقابل را به صورت بازه بنویسید.



$$(-3, +\infty) \cap (-\infty, 4) = (-3, 4)$$

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$



$$\{x | x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$$

$$B = [2, +\infty)$$

$$\mathbb{R} - B = B$$

$$\mathbb{R} - B = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} - B = (-\infty, 2)$$

$$\mathbb{R}' = \mathbb{R} - \mathbb{R} = \emptyset$$

$$B' = \mathbb{R} - B = (-\infty, 2)$$

$$-2 < 2x + 1 \leq 5$$

$$\Rightarrow -3 < 2x < 4$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} < x \leq 2$$

$$+\frac{3}{2}, 2\% , \&$$

$$5 \leq \frac{x}{4} - 1 < 7$$

$$\Rightarrow 6 \leq \frac{x}{4} < 8$$

$$\Rightarrow 24 \leq x < 32$$

$$\Rightarrow [24, 32)$$

حل: هر کدام از بازه‌ها را روی محور مشخص می‌کنیم. با توجه به شکل ۵۵-۲ حاصل اشتراک دو بازه‌ی

$(-3, +\infty)$ و $(-\infty, 4)$ برابر با:

۹-۲-۲- مجموعه‌ی اعداد حقیقی: بازه‌ی باز $-\infty$

و $+\infty$ را مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی می‌نامند و نمایش نموداری آن به صورت شکل ۵۶-۲ و نمایش مجموعه‌ای آن به صورت روبه‌رو است.

مثال ۱۳: با توجه به بازه‌ی B مقابل، مقادیر زیر را به دست

آورید.

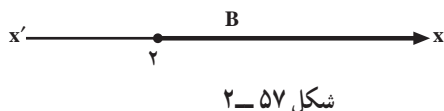
الف) B

ب) $\mathbb{R} - B$

ج) $\mathbb{R} - B$

د) \mathbb{R}'

ه) B'



مثال ۱۴: مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی مقابل را

به صورت بازه بنویسید.

حل: از دو طرف عدد ۱ را کم می‌کنیم، داریم:

- دو طرف نامعادله را بر عدد ۲ تقسیم می‌کنیم.

- مجموعه‌ی جواب‌ها برابر است با:

مثال ۱۵: مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی مقابل را به

صورت بازه بنویسید.

حل: به دو طرف عدد ۱ را اضافه می‌کنیم؛

- دو طرف را در عدد ۴ ضرب می‌کنیم؛

- مجموعه‌ی جواب‌ها به صورت بازه برابر است با:

تمرین

۱- هرگاه بازه‌های A ، B و C در مقابل مفروض‌اند، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $C - A$

ب) A'

ج) $A \cap B$

د) $B \cap C$

۲- جواب هر یک از نامعادله‌های زیر را تعیین کنید و آن‌ها را روی محور $x'Ox$ (محور اعداد حقیقی) نمایش دهید، سپس به صورت بازه بنویسید.

۱) $-3x + 5 \geq 7$

۲) $\frac{2x+4}{3} < \frac{3x-2}{2}$

۳) $5 < \frac{x}{3} + 2 < 7$

۴) $x^2 < 5x - 4$

۵) $2x^2 \geq 3x - 1$

۶) $x^2 \leq +7x - 12$

۳- نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب را به صورت بازه بنویسید و بر روی نمودار نمایش دهید.

الف) $\frac{x+3}{x+2} \leq 0$

ب) $\frac{x+2}{2x-5} \geq 2$

۴- هرگاه $A = (-5, 8]$ و $B = [-2, 10)$ باشد، جاهای خالی را با عدد و نماد مناسب پر کنید.

۱) $B \square A = (-5, 10)$

۲) $A \cap B = [\dots, \dots]$

۳) $A - B = (\dots, \dots)$

۵- هرگاه حسن بین ساعت ۹ و ۱۱، حسین بین ساعت ۱۳ و ۱۷ و محمود بین ساعت ۸ و ۱۹ در کتابخانه حضور داشته باشند:

الف) ساعت حضور هر ۳ نفر را به صورت بازه بنویسید.
ب) کدام یک از این افراد می‌توانند در کتابخانه همدیگر را ملاقات کنند و در چه بازه‌ی زمانی؟

$A(-3, 5)$, $B=(-7, 2)$, $C[3, 7]$

۶- بازه‌های زیر را با مجموعه نمایش دهید و نمودار آن را رسم کنید.

الف) $(-3, 7] =$

ب) $[8, 9) =$

ج) $(-\infty, 3) =$

۷- مجموعه‌های زیر را به صورت بازه بنویسید.

۱) $\{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 3\}$

۲) $\{x | x \in \mathbb{R}, x \leq -5\}$

۳) $\{x | x \in \mathbb{R}, -5 < x < 5\}$

۴) $\{x | x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq \frac{3}{5}\}$

۵) $\{x | x \in \mathbb{R}, -\sqrt{5} \leq x < 8\}$

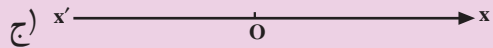
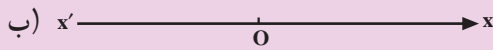
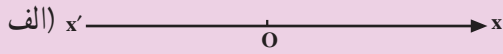
۸- هرگاه $-2 < x \leq 5$ باشد محدوده‌ی مقادیر زیر را

بنویسید.

۱) $2x + 3$

۲) $-3x + 4$

۳) $4x - 7$



شکل ۵۸-۲

۱)

۲)

۳)

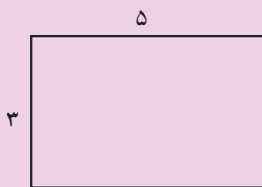
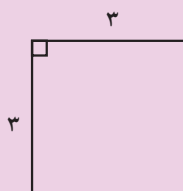
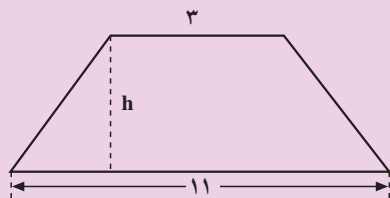
۴)

۵)

۱)

۲)

۳)



شکل ۵۹-۲

۹- در شکل ۵۹-۲ حدود h را چنان بیابید که مساحت

دو زنگه‌ی شکل (الف) از مساحت مربع شکل (ب) بزرگ‌تر و از مساحت مستطیل شکل (ج) کوچک‌تر باشد.

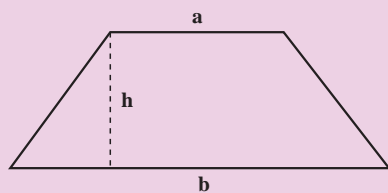
یادآوری

مساحت مربع برابر است با حاصل ضرب یک ضلع در خودش.

– مساحت مستطیل برابر است با طول \times عرض

– مساحت ذوزنقه‌ای با قاعده‌های a و b و ارتفاع h ,

شکل ۶۰-۲، برابر است با: $S = \frac{1}{2}h(a+b)$.



شکل ۶۰-۲

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۲)

$$A = \left(-\infty, +\frac{1}{6} \right) \cup [1, +\infty)$$

$$B = \left(-\infty, -\frac{2}{3} \right) \cup \left[\frac{1}{7}, +\infty \right)$$

$$C = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{7} \right)$$

$$D = \left[\frac{5}{-29}, +\infty \right)$$

۱- متمم $A = [-2, 1)$ را مشخص کرده و روی محور شکل ۲-۶۱ نشان دهید.

۲- هرگاه A مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x^2 < 1$ و B مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $3x + 1 \leq -2$ باشد مقادیر زیر را به صورت بازه بنویسید.

۱) $A \cap B$

۲) $A \cup B$

۳) $A - B$

۳- کدام یک از بازه‌های A, B, C و D ، جواب نامعادله‌های زیر است؟

۱) $\frac{-3x+1}{2} \leq \frac{7x+5}{5}$

۲) $6x^2 \geq 7x - 1$

۳) $\frac{-7x+1}{3x+2} \geq 0$

۴) $\frac{-7x+1}{3x+2} \leq 0$

بخش دوم

فصل سوم

تابع

هدف کلی

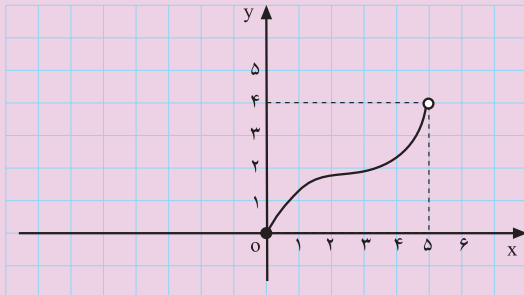
مفهوم تابع و ویژگی‌های مربوط به آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

- ۱- تابع را تعریف کند؛
- ۲- تابع با ضابطه را تعریف کند؛
- ۳- تابع را به صورت جدول نمایش دهد؛
- ۴- تابع را با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهد و دامنه و برد آن را مشخص کند؛
- ۵- تابع را از روی نمودار تشخیص دهد و دامنه و برد آن را مشخص کند.

پیش‌آزمون (۳)

محل پاسخ به سوالات پیش‌آزمون (۳)



نمودار ۲-۶۲

$f(-2) = ?$

۱- از رابطه‌های زیر کدام تابع است؟ چرا؟

الف) $3x + 5y^2 = 7$

ب) $|x| + |y| = 9$

۲- اگر $f(x) = -2x^2 + 3$ و $D_f = \{0, -1, 2, 3, 5\}$

باشد، تابع f را به صورت جدول و زوج مرتب بنویسید.

۳- تابع f به صورت زیر مفروض است. نمایش نموداری

آن را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & 1 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x < 5 \\ 2/5 & 5 \leq x < 9 \end{cases}$$

۴- دامنه و برد تابع f از نمودار ۲-۶۲ را بیابید.

$D_f = \dots\dots\dots$

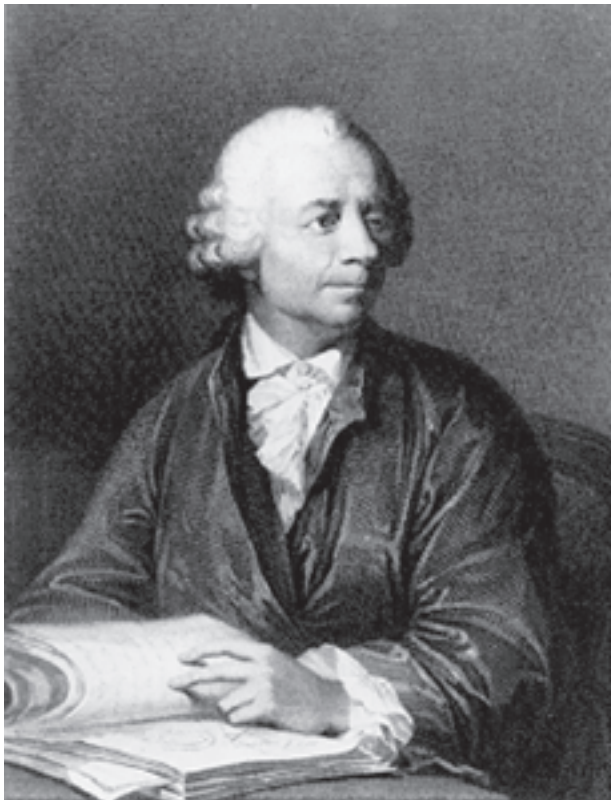
$R_f = \dots\dots\dots$

۵- هرگاه $f(x) = ax^2 + 3x + 7$ و $f(2) = 11$ باشد

$f(-2)$ را بیابید.



شکل ۲-۶۳ - لایب نیتز



شکل ۲-۶۴ - اویلر

۲-۳-۲ تابع

مقدمه: بیش تر مطالب علمی از آغاز پیدایش تاکنون دچار تغییر و تکامل بوده است، مفهوم تابع نیز از این امر مستثنی نبوده است.

کلمه‌ی تابع را در ریاضیات اولین بار لایب نیتز، در سال ۱۶۹۴ مطرح و سپس لئونارد اویلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) آن را به‌طور دقیق تعریف کرد. اما مفهوم کلی تابع که در آن مجموعه‌های دلخواهی به‌عنوان دامنه و برد در نظر گرفته می‌شود از طرف ریچارد ددکیند (۱۸۳۱-۱۹۱۶) بیان شد. به هر حال، یکی از مفاهیم اساسی ریاضی که در سایر علوم نیز نقش چشم‌گیری ایفا می‌کند تابع است. در این بخش ضمن معرفی چند تابع، مشخص نمودن تابع‌ها با ضابطه، جدول، نمودار و زوج مرتب را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲-۳-۱- تابع با ضابطه (فرمول): مقادیر یک متغیر غالباً به مقادیر متغیر دیگری بستگی دارد، مثلاً:
- مساحت دایره (S) به شعاع (r) آن بستگی دارد.

$$S(r) = \pi r^2$$

- حجم (V) مکعب با ابعاد (x) آن متناظر است.

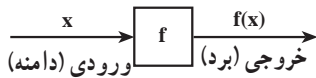
$$V(x) = x^3$$

- افزایش طول (L) فنر با وزنه‌ای (w) که به آن آویزان

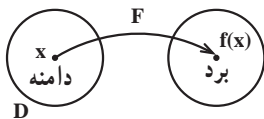
می شود متناظر است.

$$L = L_0 + KW$$

(L_0 طول اولیه فنر و K ضریب افزایش طول فنر)



شکل ۲-۶۵- نمودار عمل یک تابع f



شکل ۲-۶۶

$$y = f(x)$$

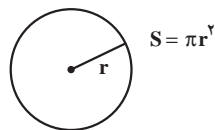
– میزان هزینه‌ی خانوار به درآمد خانوار بستگی دارد. با توجه به مثال‌های بالا می‌بینیم که تابع به هر عضو از مجموعه اول، عضوی از مجموعه‌ی دوم را نسبت می‌دهد. بنابراین، تابع f ماشینی است که به هر ورودی مجاز، یک خروجی نسبت دهد (شکل ۲-۶۵).

ورودی‌ها دامنه‌ی تابع (D_f) را تشکیل می‌دهند و خروجی‌ها برد آن را (R_f) .

تعریف: تابع f از مجموعه‌ی D به مجموعه‌ی R قاعده‌ای است که به هر عنصر از x از مجموعه‌ی D به نام دامنه، عنصر منحصر به فرد $f(x)$ از مجموعه‌ی R به نام برد را نظیر می‌کند. مقدار متناظر x را با $f(x)$ نشان می‌دهند و این وابستگی به صورت مقابل نوشته می‌شود (بخوانید: y مساوی f ایکس).

نکته: در مسائل مختلف ممکن است بر حسب نیاز متغیر x یا تابع y با نمادهای دیگری بیان شود.

مثال: شعاع دایره (r) متغیر و مساحت دایره (S) تابع است (شکل ۲-۶۷) و همواره داریم:



شکل ۲-۶۷

قرارداد: وقتی f یک تابع با دامنه‌ی D و برد R باشد،

می‌نویسیم:

$$f: D \rightarrow R$$

همچنین هرگاه، x عضو دلخواهی از دامنه باشد (ورودی) و $f(x)$ مقدار تابع، به ازای x داریم:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \text{ یا } y = f(x)$$

$$f: D \rightarrow R \text{ یا } f: D \rightarrow R$$

$$y = f(x) \quad x \rightarrow f(x)$$

به طور کلی می‌توان نوشت:



شکل ۲-۶۸

مثال: تابعی بنویسید که مساحت هر مربع را به طول ضلع آن وابسته کند.

$$S = x^2$$

حل: مساحت مربع با طول ضلع x برابر است با:

$$S: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow x^2$$

– طول ضلع x می‌تواند هر عدد حقیقی مثبت را اختیار کند.

$$S: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

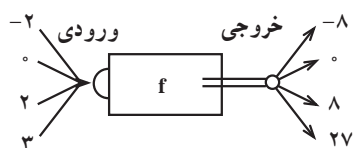
$$S(x) = x^2$$

$$-2 \xrightarrow{f} (-2)^2 = 4$$

$$0 \rightarrow 0$$

$$2 \rightarrow 4$$

$$3 \rightarrow 9$$

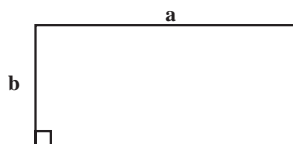


شکل ۲-۶۹

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^3$$

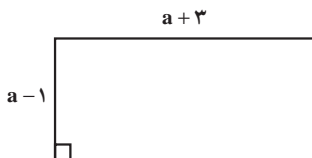
$$(برد) R_f = \{-8, 0, 8, 27\}$$



شکل ۲-۷۰

$$S = a \times b$$

$$P = 2(a + b)$$



شکل ۲-۷۱

پس :

مثال: اگر $D = \{-2, 0, 2, 3\}$ باشد، ماشین f را چنان

طراحی کنید که عضو دامنه (D) را به مکعب تبدیل کند، سپس ضابطه‌ی f و عضوهای برد آن را بنویسید.

حل: تابع f هر عضو (x) را به مکعبش (x^3) تبدیل

می‌کند، یعنی :

– در شکل ۲-۶۹ طراحی ماشین f را مشاهده می‌کنید.

با توجه به اعداد ورودی و خروجی خواهیم داشت :

با توجه به خروجی، برد آن برابر است با :

تذکر: اگر طول مستطیلی برابر a و عرض آن برابر b باشد :

– مساحت (S) مستطیل برابر است با :

– محیط (P) مستطیل برابر است با :

مثال : هرگاه ابعاد مستطیلی برابر $a-1$ و $a+3$ باشد،

محیط و مساحت آن را به صورت ضابطه بنویسید، سپس محیط و مساحت مستطیل را به ازای $a = 4$ متر حساب کنید (شکل

۲-۷۱).

حل: با توجه به فرمول محیط مستطیل داریم:

$$P(a) = 2(a - 1 + a + 3)$$

$$\Rightarrow P(a) = 2(2a + 2) = 2(2)(a + 1)$$

– ضابطه‌ی محیط بر حسب a :

$$\Rightarrow P(a) = 4(a + 1)$$

– به ازای متر $a = 4$ داریم:

$$P(4) = 4(4 + 1) = 20 \text{ متر}$$

– با توجه به فرمول مساحت (S) داریم:

$$S(a) = (a - 1)(a + 3)$$

– حاصل ضرب دو عامل:

$$\Rightarrow S(a) = a^2 + 3a - a - 3$$

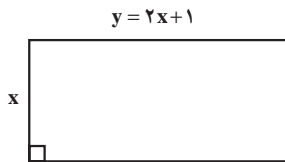
– ضابطه‌ی مساحت بر حسب a :

$$\Rightarrow S(a) = a^2 + 2a - 3$$

– به ازای متر $a = 4$ داریم:

$$S(4) = 4^2 + 2(4) - 3 = 16 + 8 - 3$$

$$\Rightarrow S(4) = 21 \text{ متر مربع}$$



شکل ۲-۷۲

الف) $P(x) =$

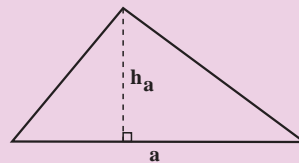
ب) $S(x) =$

فعالیت ۲-۵

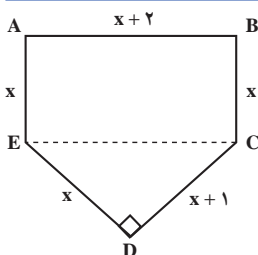
با توجه به شکل ۲-۷۲ اگر مساحت را با $S(x)$ و محیط را با $P(x)$ نشان دهیم محیط و مساحت را به صورت ضابطه بنویسید.

نکته: مساحت مثلث با ارتفاع h و قاعده‌ی a برابر است با حاصل ضرب نصف ارتفاع در قاعده‌ی آن، یعنی:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$



شکل ۲-۷۳



شکل ۲-۷۴

مثال:

الف) با توجه به شکل ۲-۷۴ ضابطه‌ای برای $p(x)$ و $S(x)$

بنویسید.

ب) به ازای $x = 3$ مقادیر $P(3)$ و $S(3)$ را محاسبه کنید.
 حل الف: محیط برابر است با مجموع اضلاع:

$$P(x) = x + x + 2 + x + x + 1 + x$$

$$\Rightarrow P(x) = 5x + 3$$

ضابطه ی محیط بر حسب متغیر x :

$$S(x) = x(x+2) + \frac{1}{2}(x)(x+1)$$

مساحت مستطیل ABCE + مساحت مثلث قائم الزاویه CDE = مساحت کل

$$\Rightarrow S(x) = x^2 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

– پس از عملیات ضرب داریم:

$$\Rightarrow S(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x$$

– با ساده کردن عبارت ضابطه ی مساحت بر حسب متغیر x

را به دست می آوریم.

$$P(3) = (5 \times 3) + 3 = 18$$

حل ب: به ازای $x = 3$ محیط برابر است با:

$$S(3) = \frac{3}{2}(3)^2 + \frac{5}{2}(3) = \frac{27}{2} + \frac{15}{2}$$

– به ازای $x = 3$ مساحت برابر است با:

$$\Rightarrow S(3) = \frac{27+15}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

مثال: نرخ کرایه ی اتومبیلی برای هر کیلومتر طی مسافت

250 تومان به اضافه ی ورودی ثابت 5000 تومان است. بنابراین کرایه ی اتومبیل تابعی از مسافت (x) طی شده بر حسب کیلومتر می باشد. ضابطه ی تابع را بنویسید. سپس کرایه اتومبیل را به ازای طی مسافت 60 کیلومتر حساب کنید.

حل: $f(x) =$ ضابطه ی تابع

مسافت طی شده \times قیمت + ورودی ثابت = $f(x)$

$$\Rightarrow f(x) = 5000 + 250x$$

– به ازای $x = 60$ داریم:

$$f(60) = 5000 + 250 \times 60 = 5000 + 15000$$

$$\Rightarrow f(60) = 20000 \text{ تومان}$$

مثال: ارتفاع استوانه ای 30 سانتی متر است و می دانیم

که حجم یک استوانه به ارتفاع h و شعاع قاعده R از رابطه ی $V = \pi R^2 h$ حساب می شود. اگر $10 \leq R \leq 20$ سانتی متر تغییر کند حجم استوانه بین چه مقادیری تغییر می کند؟

حل: $V(R) = \pi R^2 h$ ، $h = 30 \text{ cm}$

$$\left. \begin{aligned} V(10) &= \pi(10)^2(30) = 3000\pi \\ V(20) &= \pi(20)^2(30) = 12000\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

سانتی متر مکعب $3000\pi \leq V \leq 12000\pi$ سانتی متر مکعب

$P(x) =$
 $S(x) =$

خیر بله

$$x = 1 \Rightarrow |y| = 5 \times 1 + 2 = 7 \Rightarrow y = \pm 7$$

حل: ب) خیر، زیرا طبق قسمت الف) به ازای $x = 1$ دو مقدار برای y داریم.

تمرین

طول مستطیلی برابر $2x + 1$ و عرض آن برابر $x + 5$ است. محیط و مساحت آن را بر حسب x بنویسید.

فعالیت ۶-۲

اگر $x^2 + y^2 = 10$ باشد:

الف) به ازای $x = 1$ مقادیر y را بیابید.

ب) با توجه به مقادیر y ، آیا رابطه $x^2 + y^2 = 10$ ضابطه

یک تابع است؟

مثال: آیا رابطه $|y| = 5x + 2$ یک تابع را مشخص

می کند؟

الف) به ازای $x = 1$ مقادیر y را بیابید.

ب) آیا ضابطه $|y| = 5x + 2$ ، ضابطه y یک تابع است؟

تمرین

کدام یک از ضابطه های زیر، مربوط به یک تابع است؟

۱) $x^2 + 2y^3 = 54$

۲) $3x^2 - 5y = 8$

سؤال: چه موقع یک معادله با دو متغیر ضابطه y یک تابع

را مشخص می‌کند؟

جواب: برای این که یک رابطه‌ی بین x و y ضابطه‌ی یک تابع را مشخص کند باید برای هر داده x (ورودی) فقط یک مقدار برای y به دست آید.

مثال ۱: تعیین کنید معادله‌ی مقابل برحسب x ضابطه‌ی یک تابع است.

$$y^2 = x + 1$$

حل: به ازای $x = 0$ مقدار y را حساب می‌کنیم:

$$y^2 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

– بنابراین تابع نیست زیرا به ازای $x = 0$ دو مقدار برای y به دست آوردیم.

مثال ۲: تعیین کنید معادله‌ی مقابل برحسب x ضابطه‌ی یک تابع است.

$$-3x + 5y = 2$$

$$5y = 2 + 3x$$

حل: y را برحسب x مرتب می‌کنیم، یعنی:

$$\Rightarrow y = \frac{2 + 3x}{5}$$

– چون به ازای هر x دقیقاً یک y به دست می‌آید معادله ضابطه‌ی تابع است.

مثال ۳: آیا معادله‌ی مقابل برحسب x ضابطه‌ی تابع است؟ چرا؟

$$|y| + x^2 = 20$$

حل: به ازای $x = 2$ داریم:

$$|y| + 2^2 = 20 \Rightarrow |y| = 20 - 4 \Rightarrow |y| = 16$$

– بنابراین ضابطه‌ی تابع نیست، زیرا به ازای $x = 2$ دو مقدار برای y داریم:

$$\Rightarrow y = \pm 16$$

۲-۳-۲- تابع با جدول

مثال ۱: نمره‌ی ۵ نفر از دانش‌آموزان یک کلاس در امتحان ریاضی طبق جدول ۲-۴ داده شده است. به ازای هر شماره‌ی دانش‌آموزی یک نمره از آن درس داریم

جدول ۲-۴

شماره‌ی دانش‌آموز	۱	۲	۳	۴	۵
نمره‌ی دانش‌آموز	۱۸/۵	۱۵	۱۷	۱۲/۵	۱۹

مثال ۲: در جدول ۲-۵، x تعداد کارگرهای یک شرکت و

$f(x)$ هزینه‌ی این شرکت است:

جدول ۲-۵

x	۰	۱	۲	۳	۴
$f(x)$	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰

$$f(2) = 20$$

الف) هزینه‌ی شرکت به ازای ۲ کارگر را محاسبه کنید.

ب) $f(0)$ را بیابید ($f(0)$ هزینه‌ی شرکت بدون استخدام کردن

کارگر است)

$$f(0) = 10$$

مقدار ثابت هزینه

$$f(0) = 10$$

ج) آیا می‌توانید ضابطه‌ای برای هزینه‌ی این شرکت بنویسید؟

$$f(1) = 15 = 10 + 5 = 10 + 5 \times 1$$

حل: هزینه به ازای یک نفر

$$f(2) = 20 = 10 + 10 = 10 + 5 \times 2$$

– هزینه به ازای دو نفر

$$f(3) = 25 = 10 + 15 = 10 + 5 \times 3$$

– هزینه به ازای ۳ نفر

$$f(n) = 10 + 5n$$

– هزینه به ازای n نفر

در نتیجه ضابطه‌ی هزینه‌ی شرکت به ازای x کارگر برابر

است با:

$$f(x) = 10 + 5x$$

فعالیت ۲-۷

با توجه به جدول ۲-۶ هرگاه x مسافت طی شده‌ی یک

تاکسی تلفنی و $L(x)$ هزینه‌ی آن باشد:

الف) احمد برای رفتن مسافت ۳ کیلومتری چه هزینه‌ای را

می‌پردازد؟

ب) مقدار ثابت هزینه‌ی تاکسی تلفنی چقدر است؟

ج) میزان هزینه‌ی احمد به ازای ۷ کیلومتر چقدر است؟

جدول ۲-۶

x	۰	۱	۲	۳
$L(x)$	۷	۱۱	۱۵	۱۹

$$L(3) =$$

$$L(0) =$$

$$L(7) =$$

د) به ازای چه مسافتی احمد بایستی ۴۷ تومان بپردازد؟

ه) هرگاه ضابطه‌ی مقابل مفروض باشد، مراحل آن را

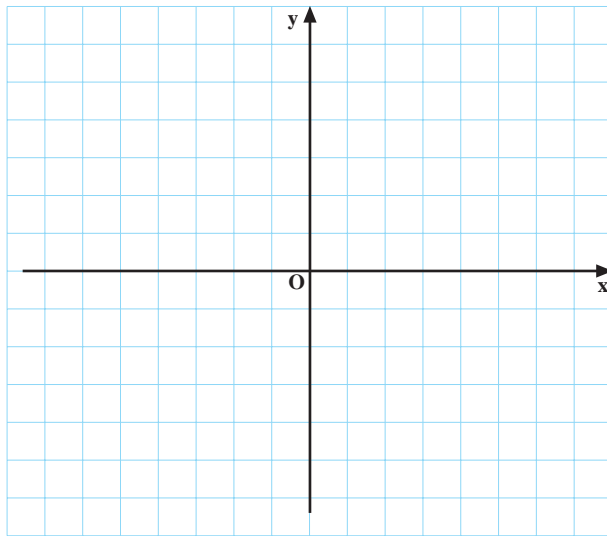
بنویسید.

$$L(x) = 47$$

$$L(x) = 7 + 4x$$

جدول ۲-۷

x	۰	۳	۵
y			



نمودار ۲-۷۵

بلی خیر

جدول ۲-۸

x	۱	۲	۳	۴	۵
f(x)	۱۸/۵	۱۵	۱۷	۱۲/۵	۱۹

$$f = \{(1, 18/5), (2, 15), (3, 17), (4, 12/5), (5, 19)\}$$

$$D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$R_f = \{18/5, 15, 17, 12/5, 19\}$$

۲-۳-۳-۲ تابع با زوج مرتب

فعالیت ۲-۸

معادله‌ی $y = x - 3$ مفروض است.

الف) وقتی x از مجموعه‌ی $A = \{0, 3, 5\}$ باشد، جدول

۲-۷ را کامل کنید و سپس نمودار $y = x - 3$ را رسم کنید.

ب) آیا می‌توان معادله‌ی $y = x - 3$ را به صورت

$$f = \{(x, x - 3) | x \in \mathbb{R}\}$$

ج) تابع f را به ازای $x \in A$ به صورت زوج‌های مرتب

بنویسید.

مثال ۱: نمره‌ی ۵ نفر از دانش‌آموزان یک کلاس با جدول

۲-۸ مشخص شده است.

الف) تابع f را به صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) دامنه‌ی تابع f را بنویسید.

ج) برد تابع f را بنویسید.

نتیجه: مجموعه‌ی مختص‌های اول یک تابع را دامنه و مجموعه‌ی مختص‌های دوم آن را برد می‌نامیم.

مثال ۲: دامنه و ضابطه‌ی تابع f مفروض است:

$$f(x) = 4x - 3, \quad D_f = \left\{-2, -\frac{1}{2}, 0, 1, 3\right\}$$

الف) f را با جدول ۹-۲ مشخص کنید.

جدول ۹-۲

x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	3
f(x)	-11	-5	-3	1	9

ب) R_f را به دست آورید.

$$R_f = \{-11, -5, -3, 1, 9\}$$

تعریف: مجموعه‌ی زوج‌های مرتب را تابع گوئیم هرگاه مؤلفه‌های اول (مختص اول) برابر نداشته باشند، اگر دو زوج مرتب، مؤلفه‌های اول برابر داشته باشند، مؤلفه‌های دوم (مختص دوم) نیز برابر باشند.

مثال ۳: از رابطه‌های t, s, f, g, h و k کدام یک تابع اند؟

$$t = \{(-1, 3)\}$$

حل: t تابع است زیرا مؤلفه‌ی اول برابر ندارد.

$$s = \{(0, 1), (-1, 1), (3, 1), (-7, 1)\}$$

s تابع است زیرا مؤلفه‌ی اول تکراری ندارد.

$$f = \{(3, 2), (4, 5), (8, 5)\}$$

f تابع است زیرا مختص اول برابر ندارد.

$$g = \{(-3, 5), (1, 5), (3, 5)\}$$

g تابع است زیرا مختص اول برابر ندارد.

$$h = \{(2, 3), (-5, 4), (3, 10), (-5, 9)\}$$

h تابع نیست زیرا مختص اول برابر دارد.

$$k = \{(5, 7), (5, 4), (5, 10), (5, 8)\}$$

k تابع نیست زیرا مختص اول برابر دارد.

مثال ۴: مقدار m را در رابطه‌ی مقابل چنان بیابید که f

$$f = \{(3, 3m - 5), (3, 7)\}$$

یک تابع شود.

حل: چون f یک تابع است و نیز مختص اول برابر دارد،

$$3m - 5 = 7 \Rightarrow 3m = 5 + 7 = 12$$

$$\Rightarrow m = \frac{12}{3} \Rightarrow \boxed{m = 4}$$

$$f(2) = 5 \quad f(3) = 4 \quad f(5) = -2$$

پس مختص دوم آن‌ها نیز برابر است، یعنی :

مثال ۵: هرگاه مقادیر مقابل داده شده باشد،

$$f = \{(2, 5), (3, 4), (5, -2)\} \quad \text{حل:}$$

$$D_f = \{2, 3, 5\}, \quad R_f = \{5, 4, -2\}$$

الف) تابع f را به صورت زوج مرتب بنویسید.
ب) دامنه و برد f را بیابید.

مثال ۶: تابع f در مقابل مفروض است.

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f = \{(x, 2x + 1) | x \in D, 2x + 1 \in \mathbb{R}\} \quad \text{حل:}$$

این تابع را به صورت زوج مرتب بنویسید.

$$X(t) = \frac{1}{2}gt^2 + 100, \quad D_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

مثال ۷: تابع X و دامنه‌ی آن در مقابل داده شده است.
($g = 9.8 \text{ m/s}^2$)

جدول ۱۰-۲

t	0	1	2	3	4
X(t)	100	105	120	145	180

حل:

$$X = \{(0, 100), (1, 105), (2, 120), (3, 145), (4, 180)\}$$

- $X(t)$ را به صورت جدول مرتب کنید.

$$R_X = \{100, 105, 120, 145, 180\}$$

- $X(t)$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

- برد تابع X را به دست آورید.

$$\frac{\dot{X}}{\dot{t}} = \frac{X(t_2) - X(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{145 - 120}{3 - 2} = \frac{25}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{X}}{\dot{t}} = 25$$

- $\frac{\dot{X}}{\dot{t}}$ را به ازای $t_1 = 2$ و $t_2 = 3$ محاسبه کنید.

مثال ۸: با توجه به مقادیر روبه‌رو کارهای زیر را انجام

$$f(3) = 5, f(4) = -6, f(5) = 9, f(-4) = 9$$

دهید.

حل:

$$f = \{(3, +5), (4, -6), (5, 9), (-4, 9)\}$$

$$D_f = \{3, 4, 5, -4\}$$

$$R_f = \{+5, -6, 9\}$$

الف) تابع f را به صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) دامنه را به دست آورید.

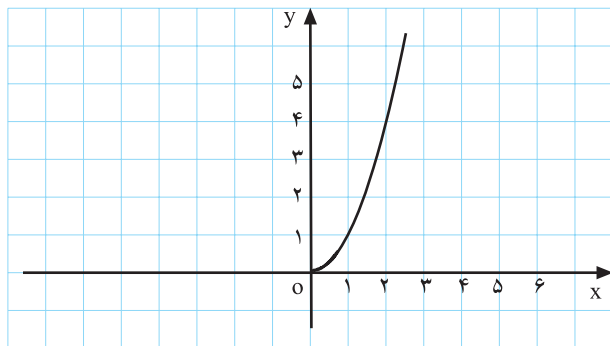
ج) برد f را به دست آورید.

۴-۳-۲- نمایش نموداری تابع: تابع‌ها را می‌توان

به صورت نمودار نیز نمایش داد.

مثلاً نمودار ۲-۷۶ نمودار یک تابع است. زیرا برای هر

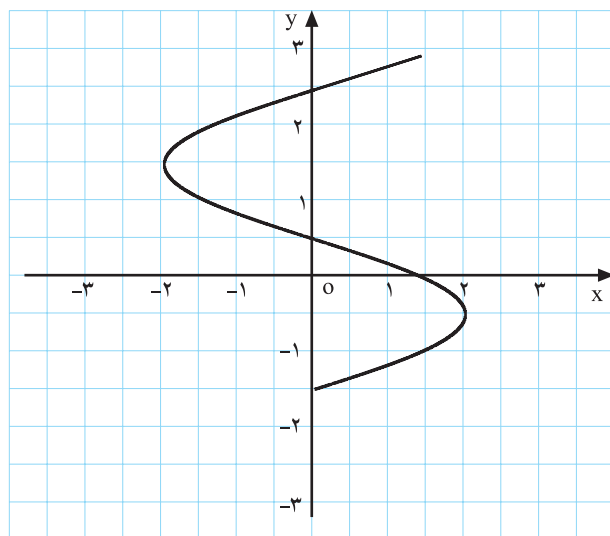
x فقط یک y وجود دارد.



نمودار ۲-۷۶

نمودار ۲-۷۷ نمودار تابع نیست چون به ازای $x = \frac{1}{2}$

بیش از یک مقدار برای y وجود دارد.



نمودار ۲-۷۷

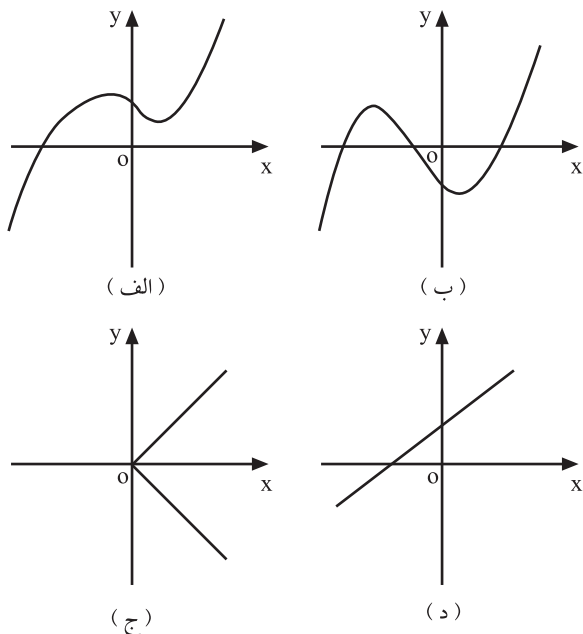
تعریف: یک نمودار، نمودار یک تابع را مشخص می‌کند هرگاه هر خطی به موازات محور y ها رسم کنیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

تمرین

از نمودارهای ۲-۷۸ کدام یک نمودار یک تابع را مشخص

می‌کند؟

- الف)
- ب)
- ج)
- د)

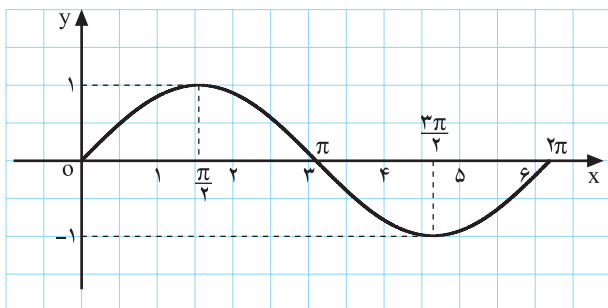


نمودارهای ۲-۷۸

مثال ۱: با توجه به نمودار ۲-۷۹ الف به سؤال‌های زیر

پاسخ دهید.

- الف) دامنه نمودار را بیابید.
- ب) برد نمودار را به دست آورید.



نمودار ۲-۷۹ الف

حل:

الف) برای تعیین دامنه از روی نمودار مقادیر x ها را

به صورت بازه می‌نویسیم، بنابراین :

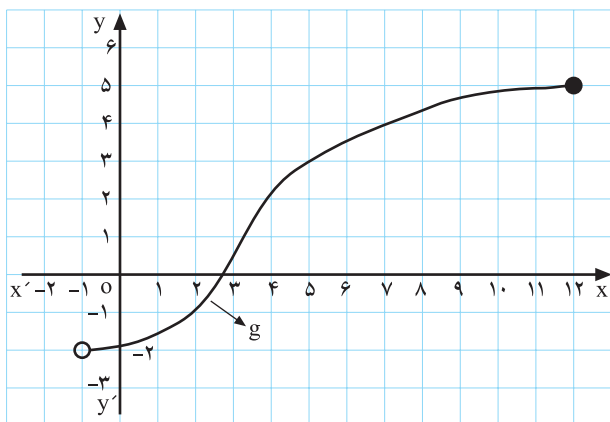
$$D_f = [0, 2\pi]$$

ب) برای تعیین برد از روی نمودار مقادیر y ها را به صورت

بازه بیان می‌کنیم :

$$R_f = [-1, 1]$$

مثال ۲: با توجه به نمودار ۲-۷۹-ب به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.



نمودار ۲-۷۹-ب

$$D_g = (-1, 12]$$

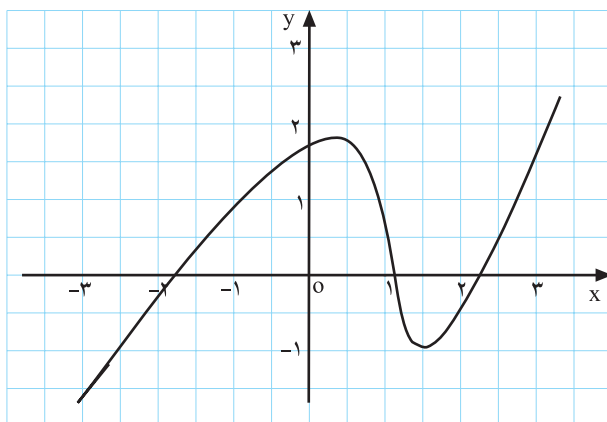
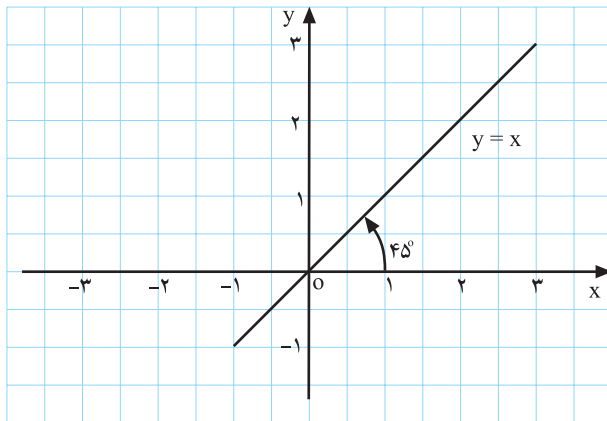
$$R_g = (-2, 5]$$

$$y = -3x + 4$$

جدول ۲-۱۱

شماره‌ی دانش‌آموز	۱	۲	۳	۴	۵
قد دانش‌آموز	۱۶۲cm	۱۵۷cm	۱۷۰cm	۱۶۲cm	۱۷۲cm

$$f = \{(x, y) | y = x, x, y \in \mathbb{R}\}$$



الف) دامنه‌ی نمودار را بیابید.
 ب) برد نمودار را به دست آورید.
 نتیجه: با توجه به فعالیت‌ها و مثال‌های حل شده، تابع‌ها را به چهار صورت می‌توان نمایش داد.
 ۱- با ضابطه؛ مانند:

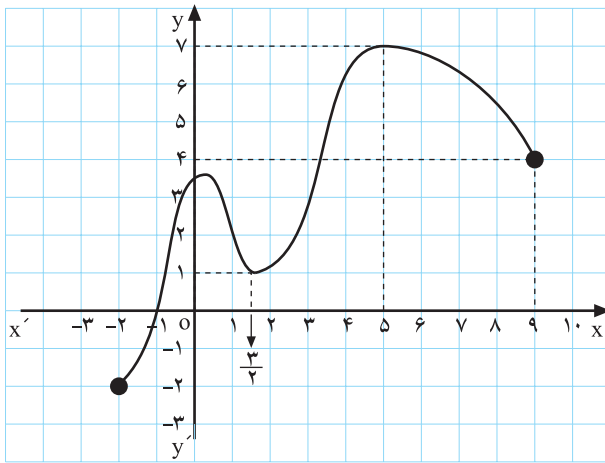
۲- با جدول؛ مانند جدول ۲-۱۱

۳- با زوج مرتب؛ مانند:

۴- با نمودار؛ مانند شکل‌های ۲-۸۰ و ۲-۸۱

شکل ۲-۸۰

شکل ۲-۸۱



شکل ۲-۸۲

$$D_f = [-2 \text{ و } 9] \text{ و } R_f = [-2 \text{ و } 7]$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 1, f(-1) = 0$$

$$f(x) = 7 \rightarrow x = 5$$

$$f(-2) = -2$$

$$f(5) = 7$$

$$f(x) = 4x^2 + 3b - 7 \text{ و } f(-3) = 9$$

$$f(-3) = 9 \rightarrow 4(-3)^2 + 3b - 7 = 9$$

$$\Rightarrow 36 + 3b - 7 = 9$$

$$\Rightarrow 3b + 29 = 9 \Rightarrow 3b = 9 - 29 = -20$$

$$\Rightarrow b = \frac{-20}{3}$$

مثال ۳: تابع f با نمودار ۲-۸۲ مشخص شده است. به

سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) D_f و R_f را به دست آورید:

ب) با استفاده از نمودار ۲-۸۲، $f\left(\frac{3}{2}\right)$ و $f(-1)$ را بیابید.

ج) اگر $f(x) = 7$ مقدار x چیست؟

د) کم‌ترین مقدار تابع در بازه $[-2, 7]$ چه مقدار است؟

ه) بیش‌ترین مقدار تابع در بازه $[-2, 7]$ چه مقدار است؟

مثال ۴: $f(x)$ و $f(-3)$ در مقابل مفروض‌اند. مقدار b را

به دست آورید.

حل: در $f(x)$ به جای x مقدار -3 را قرار می‌دهیم و

آن را برابر با 9 قرار می‌دهیم.

- با حل معادله مقدار b را به دست می‌آوریم.

آزمون پایانی (۳)

محل پاسخ به سوالات آزمون پایانی (۳)

$$V_{(x)} =$$

$$V_{(4)} =$$

$$x^2 + 2y^3 = 54$$

$$y = 2\sqrt{3} \cos x + 1$$

$$D_f = \{0, -1, 1, 2\} \text{ و } f(x) = -2x^2 + 1$$

تمرین

۱- ابعاد مکعب مستطیلی برابر x ، $x-2$ و $x+2$ است به طوری که $x > 2$ ؛

الف) ضابطه‌ی حجم مکعب را بنویسید.

ب) به ازای $x = 4$ حجم مکعب را محاسبه کنید.

راهنمایی: حجم مکعب مستطیل برابر است با حاصل ضرب ابعاد آن.

۲- آیا ضابطه‌ی مقابل مربوط به تابع است؟ چرا؟

۳- تابع مقابل مفروض است.

اگر $A \left| \frac{\pi}{6} \right|_{2b+1}$ یک نقطه از تابع باشد مقدار b را محاسبه

کنید.

۴- تابع f و دامنه‌ی آن (D_f) مفروض است.

الف) تابع f را به صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) جدول تابع را رسم کنید.

بخش دوم

فصل چهارم

دامنه‌ی تابع‌های حقیقی

هدف کلی

تشریح مفاهیم دامنه‌ی تابع‌هایی که برد آن‌ها زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است.

هدف‌های رفتاری: بعد از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

- ۱- دامنه‌ی تابع را تعریف کند؛
- ۲- دامنه‌ی تابع چند جمله‌ای را تشخیص دهد؛
- ۳- دامنه‌ی توابع کسری را تعیین کند؛
- ۴- دامنه‌ی تابع‌های رادیکالی را تعیین کند.

پیش آزمون (۴)

محل پاسخ به سوالات پیش آزمون (۴)

D_f .

D_g .

D_z .

D_k .

D_h .

۱- دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

الف) f . . $(7,0)$ و $(5,3)$ و $(-2,1)$ و $(1,5)$

ب) $g(x) = \frac{5x \cdot 1}{4x^2 - 1}$

پ) $Z(x) = \sqrt{7 - x^2}$

ت) $k(x) = \sqrt{3x - 5}$

ث) $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x - 2} - 2}$

۲-۴- دامنه‌ی تابع با ضابطه

دامنه‌ی توابع را در چند حالت بررسی می‌کنیم.

۲-۴-۱- دامنه‌ی توابع چند جمله‌ی از x ، اعداد حقیقی

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

می‌باشد.

$$a_n \neq 0, n \in \mathbb{Z}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

به بیان دیگر:

مثال: در زیر دو تابع داده شده‌اند، دامنه‌ی آن‌ها را بیابید.

الف) $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = 4x + 5$$

ب) $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = 3x^4 - 5x + 7$$

۲-۴-۲- دامنه‌ی توابع کسری

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

دامنه‌ی توابع کسری به صورت $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ و $q(x)$ چند جمله‌ای برحسب x عبارت است از مجموعه‌ی اعداد حقیقی منهای ریشه‌های مخرج کسر (زیرا به ازای ریشه‌های مخرج کسر، تابع تعریف نشده است)

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x \in \mathbb{R}, q(x) = 0\}$$

مثال ۱: دامنه‌ی تابع مقابل را بیابید.

$$f(x) = \frac{3x + 1}{5x - 1}$$

حل: ریشه‌ی مخرج کسر را پیدا می‌کنیم:

$$5x - 1 = 0 \Rightarrow 5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

– دامنه‌ی تابع برابر است با:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{5} \right\}$$

مثال ۲: دامنه‌ی تابع مقابل را بیابید.

$$g(x) = \frac{5x + 4}{x^2 + 7x + 6}$$

حل: مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x^2 + 7x + 6 = 0 \Rightarrow (x + 6)(x + 1) = 0$$

– ریشه‌های مخرج عبارتند از:

$$\begin{aligned} x + 6 &= 0 \Rightarrow x = -6 \\ x + 1 &= 0 \Rightarrow x = -1 \end{aligned}$$

– دامنه‌ی تابع برابر است با:

$$D_g = \mathbb{R} - \{-6, -1\}$$

مثال ۳: دامنه‌ی تابع مقابل را بنویسید.

$$k(x) = \frac{x \cdot 3}{x^2 \cdot 2x - 3}$$

$$x^2 \cdot 2x - 3 = (x \cdot 3)(x - 1)$$

حل: مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x \cdot 3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$D_k = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

– ریشه‌های مخرج عبارتند از:

دامنه‌ی تابع k برابر است با:

تذکر: در تابع با ضابطه‌ی $\frac{p(x)}{q(x)}$ ، $f(x)$ ، برای پیدا کردن دامنه نباید عبارت کسری را ساده کنیم (مثال ۳).

تمرین

دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی مقابل را بیابید.

$$f(x) = \frac{5x^2 \cdot x}{x^2 - 2x}$$

۳-۲-۴- دامنه‌ی تابع‌های شامل رادیکال (به

این گونه توابع، توابع اصم نیز می‌گوئیم): دامنه‌ی توابع رادیکالی را در دو حالت با فرجه‌ی فرد و با فرجه‌ی زوج بررسی می‌کنیم.

$$f(x) = \sqrt[n]{f(x)}$$

دامنه‌ی تابع اصم با فرجه‌ی فرد:

$$f(x) = \sqrt[k]{p(x)}, \quad k \in \mathbb{N}$$

– دامنه‌ی تابع f برابر است با:

$$D_f = D_p$$

مثال ۱: دامنه‌ی توابع داده‌شده را بیابید.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{1 - 5x} \quad (\text{الف})$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 - 16 = 0\}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1 - 5x}{x^2 - 16}} \quad (\text{ب})$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$$

$$f(x) = \sqrt[k]{p(x)}, \quad k \in \mathbb{N}$$

دامنه‌ی تابع اصم با فرجه‌ی زوج

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid p(x) \geq 0\}$$

هرگاه $f(x) = \sqrt[k]{p(x)}$ ، $k \in \mathbb{N}$ آنگاه:

$$g(x) = \sqrt{1-x}$$

مثال ۲: دامنه‌ی تابع مقابل را پیدا کنید.

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid 1-x \geq 0\} = (-\infty, 1]$$

حل: چون فرجه زوج است دامنه برابر است با:

$$k(x) = \sqrt{3x-8}$$

مثال ۳: دامنه‌ی تابع مقابل را بیابید.

$$D_k = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x-8 \geq 0\}$$

حل: چون فرجه زوج است، پس:

$$3x-8 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 8 \Rightarrow x \geq \frac{8}{3}$$

– نامعادله‌ی مقابل را حل می‌کنیم؛

$$D_k = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{8}{3}\right\} = \left[\frac{8}{3}, \infty\right)$$

– دامنه‌ی تابع k برابر است با:

$$f(x) = \sqrt{\frac{7-2x}{3x-8}}$$

مثال ۴: دامنه‌ی تابع مقابل را بیابید.

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{7-2x}{3x-8} \geq 0\right\}$$

حل: چون فرجه زوج است، پس:

$$\frac{7-2x}{3x-8} \geq 0$$

برای پیدا کردن D_f نامعادله‌ی مقابل را حل می‌کنیم.

$$7-2x \geq 0 \Rightarrow 7 \geq 2x \Rightarrow x \leq \frac{7}{2}$$

– ریشه‌های صورت و مخرج کسر را به دست می‌آوریم.

$$3x-8 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 8 \Rightarrow x \geq \frac{8}{3}$$

– با توجه به ریشه‌های نامعادله، جدول ۱۲-۲ را تعیین

جدول ۱۲-۲

x	$-\infty$	$\frac{8}{3}$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$7-2x$	+	+	-	-
$3x-8$	-	0	+	+
$\frac{7-2x}{3x-8}$	-	+	-	+

تغییر نشده
جواب

علامت می‌کنیم.

با توجه به جدول ۲-۱۲ دامنه را می‌یابیم، پس:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{5}{2}\} \cup \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{2}\right)$$

فعالیت ۲-۹

تابع مقابل مفروض است.

$$f(x) = \sqrt{\frac{3-4x}{x^2-9}}$$

- (الف) ریشه‌ی عبارت $3-4x$ را به دست آورید.
 (ب) ریشه‌های عبارت x^2-9 را به دست آورید.
 (ج) به ازای چه مقادیری از x تابع f تعریف نشده است؟
 (د) دامنه‌ی تابع f را بیابید.
 مثال ۶: دامنه تابع مقابل را به دست آورید.

$$g(x) = \sqrt{\frac{5-7x}{x^2-x-12}}$$

$$5-7x \leq 0 \Rightarrow 5 \leq 7x \Rightarrow x \geq \frac{5}{7}$$

حل: ریشه‌ی صورت کسر را به دست می‌آوریم.

– مخرج کسر را به حاصل ضرب دو عامل تبدیل می‌کنیم.

$$x^2-x-12 = (x-4)(x+3)$$

– ریشه‌های مخرج کسر را به دست می‌آوریم.

$$x-4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$x+3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

– دامنه‌ی g برابر است با:

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5-7x}{x^2-x-12} \neq 0\}$$

– با توجه به ریشه‌های صورت و مخرج کسر، جدول ۲-۱۳

را تعیین علامت می‌کنیم.

جدول ۲-۱۳

x	-	- ۳	$\frac{5}{7}$	۴	..
$5-7x$	+	+	+	-	-
x^2-x-12	-	+	+	-	+
$\frac{5-7x}{x^2-x-12}$	+	+	+	-	-
	تعریف نشده			تعریف نشده	
	جواب			جواب	

$$D_g = \left(-\infty, -3\right) \cup \left(\frac{5}{7}, 4\right) \cup \left(4, \infty\right)$$

– دامنه‌ی تابع g برابر با:

مثال ۷: دامنه‌ی تابع مقابل را محاسبه کنید.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 4$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

حل: دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای برابر اعداد حقیقی \mathbb{R}

است.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{64 - x^2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 64 - x^2 \geq 0\}$$

مثال ۸: دامنه‌ی تابع مقابل را به دست آورید.

حل: چون فرجه‌ی رادیکال زوج است، داریم:

– عبارت زیر رادیکال را برابر صفر قرار داده، ریشه‌های

آن را به دست می‌آوریم.

$$64 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 8$$

– ریشه‌ها را به ترتیب صعودی در جدول ۲-۱۴ می‌نویسیم

و عبارت زیر رادیکال را تعیین علامت می‌کنیم.

جدول ۲-۱۴

x	-	$x < -8$	-8	$-8 < x < 8$	8	$x > 8$
$64 - x^2$		-		.		-
		جواب				

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x \leq 8\} = [-8, 8]$$

با توجه به جدول ۲-۱۴ دامنه برابر است با:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{64 - x^2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{N} \mid -12 \leq x \leq 8\}$$

مثال ۹: دامنه‌ی تابع مقابل را به دست آورید.

حل: با توجه به حل مثال ۸ دامنه‌ی تابع f برابر است با:

$$D_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

– با شرط $x \in \mathbb{N}$ ، دامنه‌ی تابع f برابر است با:

$$f(x) = \sqrt{3x^2 - 5x - 2}$$

مثال ۱۰: دامنه‌ی تابع مقابل را به دست آورید.

حل: چون فرجه‌ی رادیکال زوج است، دامنه برابر است با:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x^2 - 5x - 2 \geq 0\}$$

مثال ۱۳: دامنه‌ی تابع مقابل را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{3x + 1}{\sqrt{9 - x^2}}$$

حل: چون فرجه زوج و عبارت زیر رادیکال مخرج کسر

است، پس:

$$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 9 - x^2 > 0\}$$

– نامعادله‌ی مقابل را حل می‌کنیم:

$$9 - x^2 > 0 \iff x^2 < 9 \iff |x| < 3 \iff -3 < x < 3$$

– دامنه‌ی تابع برابر است با:

$$D_f = (-3, 3)$$

نکته: تابع f به صورت چند ضابطه‌ای در مقابل مفروض است دامنه‌ی تابع f برابر با اجتماع D_1 و D_2 و ... D_n است، یعنی:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in D_1 \\ \vdots \\ f_2(x), & x \in D_2 \\ \vdots \\ f_{n-1}(x), & x \in D_{n-1} \\ \vdots \\ f_n(x), & x \in D_n \end{cases}$$

بنابراین، دامنه‌ی تابع f برابر است با:

$$D_f = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \dots \cup D_n$$

مثال ۱۴: دامنه‌ی تابع مقابل را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 5 - 2x^4, & x \in \mathbb{R} \\ -5, & x \neq 4 \end{cases}$$

حل: دامنه‌ی تابع f برابر با اجتماع دامنه‌های تک تک

آن‌هاست، یعنی:

$$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 5 - 2x^4 \text{ تعریف شده است}\} \cup \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 4\}$$

– دامنه‌ی f برابر با:

مثال: الف) دامنه‌ی تابع مقابل را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ -x - 3, & x = 0 \end{cases}$$

ب) مقادیر $f(0)$ و $f(-1)$ را بیابید.

ج) تابع f را رسم کنید.

حل:

الف) هرگاه $f_1(x) = x^2$ و $f_2(x) = -x + 3$ دامنه‌ی f

برابر است با:

$$D_f \cdot D_{f_1} \cdot D_{f_2} \cdot [0, \dots) \cup (-\dots, 0) \cup (-\dots, \dots) \cdot \mathbb{R}$$

$$f(0) = 0^2 = 0$$

ب) $x = 0$ را در ضابطه‌ی x^2 قرار می‌دهیم،

پس:

۱. $x = -1$ را در ضابطه‌ی $-x + 3$ قرار می‌دهیم،

یعنی:

$$f(-1) = (-1) + 3 = 2$$

ج) با توجه به شرط‌های تابع، به ازای مقادیر دلخواه x

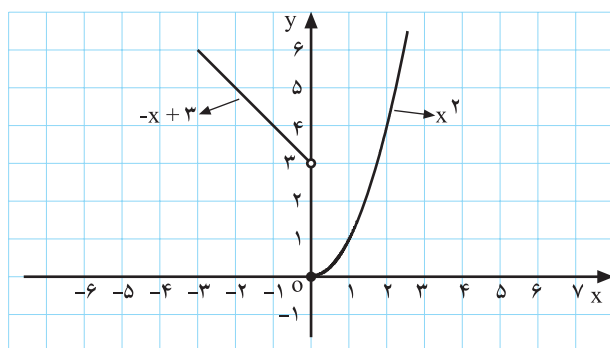
مقادیر $f(x)$ را برای هر ضابطه به دست می‌آوریم (جدول ۲-۱۶-۲)

الف و ب).

جدول ۲-۱۶

$x \#$	$f(x)$	$x \circ$	$f(x)$
۰	۰	۰	۳
۱	۱	-۱	۴
۲	۴	-۲	۵

(الف) (ب)



شکل ۲-۸۳

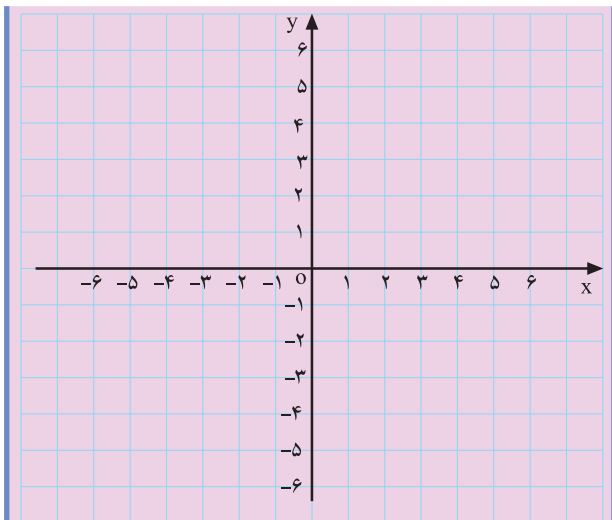
۲-۱۶-۲) مقادیر جدول (الف) و (ب) را در دستگاه

محورهای مختصات مشخص می‌کنیم و نمودار هر یک را رسم

می‌کنیم (شکل ۲-۸۳).

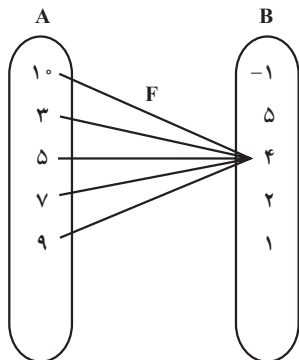
تمرین ۱: تابع روبه‌رو مفروض است.

$$U(x) = \begin{cases} x & \circ \\ 1 & x \# \circ \end{cases}$$



شکل ۲-۸۴

$$g(x) = \begin{cases} x! & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$



شکل ۲-۸۵

$$f(3) = 4, f(5) = 4, f(7) = 4,$$

$$f(9) = 4, f(1) = 4$$

$$f = \{(1, 4), (3, 4), (5, 4), (7, 4), (9, 4)\}$$

$$D_f = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad R_f = \{4\}$$

$D_f = R_f = \{4\}$ یا 4

$$D_f = R_f = \{1, 3, 5, 7, 9, 4\}$$

$$f(1) = 4, f(3) = 4, f(5) = 4, f(7) = 4, f(9) = 4$$

الف) نمودار تابع U را رسم کنید.

ب) دامنه‌ی تابع $U(x)$ را تعیین کنید.

تمرین ۲: دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی مقابل را به دست آورید.

مثال ۱۶: اگر شکل ۲-۸۵ نمایش مجموعه‌ی تابع f باشد،

$$f: A \rightarrow B$$

یعنی:

به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) مقادیر $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$, $f(9)$, $f(1)$ را

محاسبه کنید.

ب) تابع f را به صورت زوج مرتب نمایش دهید.

سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید.

ج) $D_f = R_f$ را بیابید.

د) $D_f = R_f$ را پیدا کنید.

ه) آیا می‌توانید ضابطه‌ای برای تابع f بنویسید؟

– پس به ازای هر x از A ، داریم:

$$f(x) = 4$$

نکته: تابع بالا را تابع ثابت می‌نامیم که در ادامه مطالب، معرفی می‌گردد.

مثلاً تابع‌های مقابل:

$$f(x) = \sqrt{v}, g(x) = 1, t(x) = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{v}$$

مثال ۱۷: تابع مقابل مفروض است. مقادیر زیر را محاسبه

کنید.

$$f(x) = x = 3$$

الف) $f(4)$: به جای x ، عدد ۴ را قرار می‌دهیم، پس:

$$f(4) = 4 = 3 \cdot 4 = 12$$

ب) $f(x \dots x)$: به جای x ، $x \dots x$ را قرار می‌دهیم،

یعنی:

$$f(x \dots x) = (x \dots x) = 3$$

ج) $f(x \dots x) - f(x)$:

$$f(x \dots x) - f(x) = x \dots x - 3 = (x \dots x) - 3$$

تفاضل برابر است با:

– پس از ساده کردن تفاضل به دست می‌آید.

$$f(x \dots x) - f(x) = x \dots x - 3 = x \dots x - 3 = x \dots x - 3$$

مثال ۱۸: تابع با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. مقادیر زیر

را محاسبه کنید.

$$f(x) = 3x^2 - 5x$$

الف) $f(2)$: در تابع f به جای x ، عدد ۲ را قرار می‌دهیم،

پس:

$$f(2) = 3(2)^2 - 5(2) = 12 - 10 = 2$$

ب) $f(2 \dots h) - f(2)$:

در تابع f به جای x مقدار $2 \dots h$ را قرار می‌دهیم، یعنی:

$$f(2 \dots h) = 3(2 \dots h)^2 - 5(2 \dots h)$$

– مقدار $f(2 \dots h)$ برابر است با:

$$3(4 \dots 4h \dots h^2) - 10 - 5h = 3h^2 + 4h - 2$$

– با توجه به مقادیر $f(2)$ و $f(2+h)$ ، تفاضل $f(2+h) - f(2)$

و $f(2)$ برابر با:

$$f(2+h) - f(2) = 3h^2 + 7h + 2 - 2 = 3h^2 + 7h$$

تمرین

۱- تابع باضابطه‌ی $g(x) = 3x - 5$ و $x - 2$ مفروض
 $x^2 + 4x - 2$ را تکمیل کنید.

است.

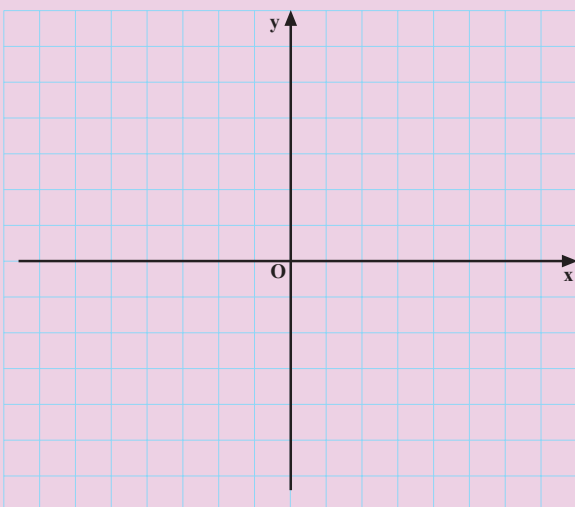
کارهای زیر را انجام دهید:

الف) جدول ۲-۱۷ (الف) و (ب) را تکمیل کنید.

جدول ۲-۱۷

$x < -2$		$x = -2$	
x	g(x)	x	g(x)
-2		-2	
-3		-1	
-4		0	

(الف) (ب)



شکل ۲-۸۶

جدول ۲-۱۸

5	0	1	2	3	4
f(5)	4	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

f . . (0, 4), (1,), (2,), (3,), (4,)

(ب) نمودار تابع g را با توجه به مقادیر به دست آمده از جدول

۲-۱۷ (الف) و (ب) رسم کنید.

۲- هرگاه $4 = 5 - 35^2$ و $f(5)$ و D_f . . 0, 1, 2, 3, 4

باشند.

الف) جدول ۲-۱۸ را تکمیل کنید.

ب) مؤلفه‌ی دوم تابع f را بنویسید.

ج) آیا می‌توان گفت $f(\frac{5}{2}) = 0$ ؟ چرا؟

آزمون پایانی (۴)

محل پاسخ به سوالات آزمون پایانی (۴)

۱- دامنه‌ی هریک از توابع زیر را بنویسید :

۱) $f(x) = 5x^2 - 4x - 1$

۲) $f(x) = \frac{-4x - 1}{x^2 - 7x - 12}$

۳) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3x-1}{5-7x}}$

۴) $f(x) = \frac{7x - 1}{5x^2 - 8}$

۵) $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$

۶) $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x^2-1}}$

۲- $f(x)$ و D_f در مقابل مفروض اند :

- تابع f را به صورت زوج مرتب و جدول نوشته و برد آن را بنویسید.

۳- تابع چندضابطه‌ای f در مقابل مفروض است دامنه و برد تابع f را بنویسید.

۱. $f(x) = 2 \sin x$ و $D_f = \left\{ \frac{6}{2}, \frac{6}{3}, \frac{6}{6} \right\}$

	-۲	۰	۲x	۳
$f(x)$: ۲/۵	۳	۲x	۵
	: ۷	۵	۲x	۷

بخش دوم

فصل پنجم

چند تابع ویژه

هدف کلی

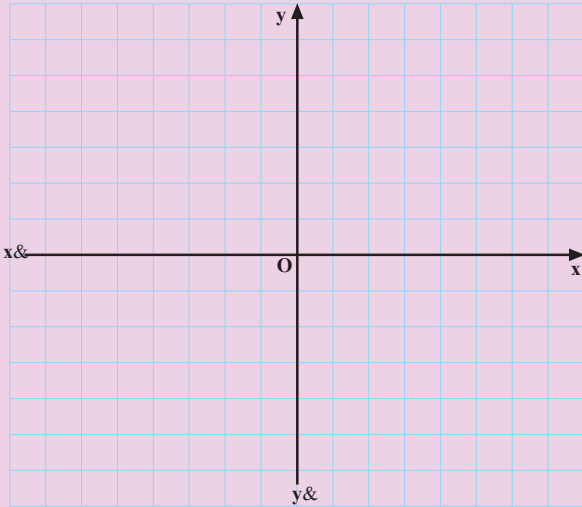
معرفی توابع ثابت، همانی، مثلثاتی و برخی از ویژگی‌های آنها

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

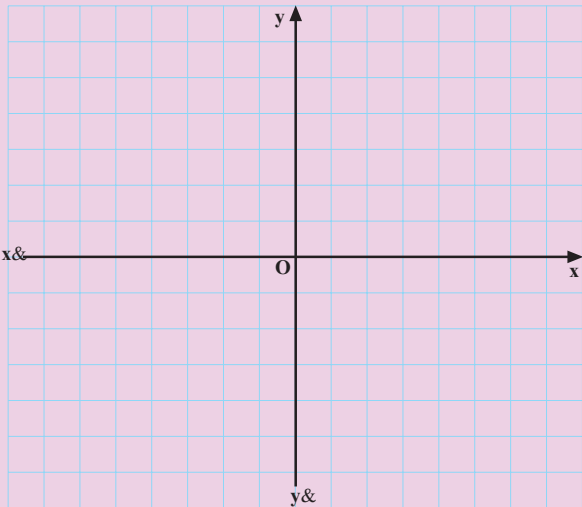
- ۱- نمودار تابع ثابت را رسم کند؛
- ۲- تابع همانی را رسم کند؛
- ۳- دامنه‌ی توابع مثلثاتی را تعیین کند؛
- ۴- تابع‌های مساوی را تعیین کند.

پیش‌آزمون (۵)

محل پاسخ به سوالات پیش‌آزمون (۵)



شکل ۲-۸۷



شکل ۲-۸۸

۱- نمودار تابع $y = 5x$ را رسم کنید (شکل ۲-۸۷).

۲- تابع $I = (-1, -1), (0, 0), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$ مفروض است.

- نقاط I را روی شکل ۲-۸۸ مشخص و به هم وصل کنید.

- نتیجه‌ای را که به دست می‌آورید به طور مختصر بنویسید.

۲-۵- چند تابع ویژه

در این قسمت به بررسی چند تابع ویژه مانند تابع ثابت، تابع همانی و توابع مثلثاتی می‌پردازیم.

۲-۵-۱- تابع ثابت

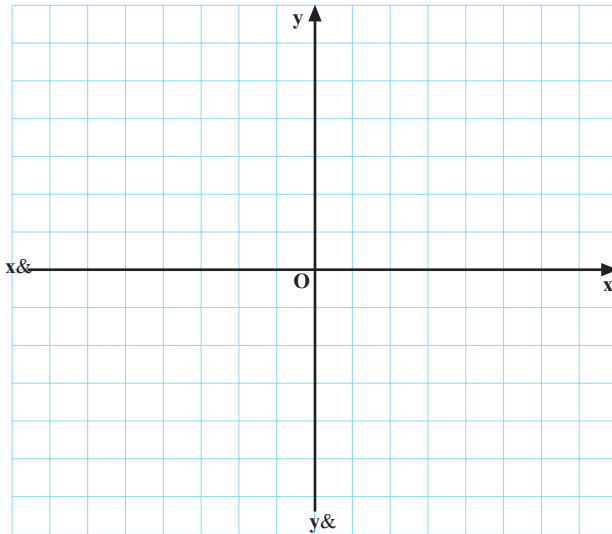
فعالیت ۲-۱۰

هرگاه $f(x) = 7$ باشد:

الف) جدول ۲-۱۹ را کامل کنید.

جدول ۲-۱۹

x	-۸	-۳	۰	۳	۴
f(x)	-۷	<input type="text"/>	<input type="text"/>	-۷	<input type="text"/>



ب) تابع f را در دستگاه محورهای مختصات شکل ۲-۸۹

رسم کنید.

شکل ۲-۸۹

ج) دامنه و برد تابع را به دست آورید.

د) آیا می‌توان گفت f یک تابع ثابت است؟

مثال: نمودار تابع مقابل را رسم کنید.

۴. $f(x)$

۴. $f(x)$

جدول ۲-۲۰

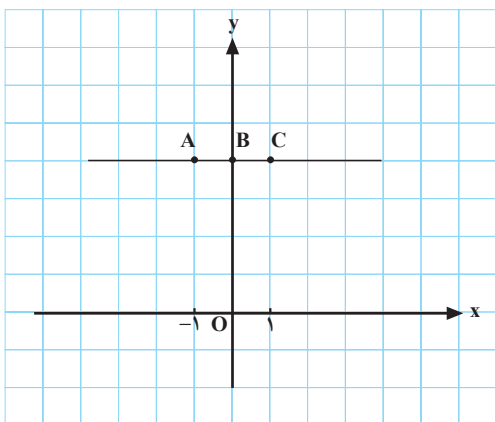
x	-۱	۰	۱
y	۴	۴	۴
	A(-۱, ۴)	B(۰, ۴)	C(۱, ۴)

حل: به ازای هر x داریم:

جدول ۲-۲۰ را تکمیل می‌کنیم.

با توجه به جدول تکمیل شده به ازای هر مقدار از x فقط

یک مقدار برای y به دست می‌آید.



نمودار ۲-۹۰

– در نمودار ۲-۹۰ خط ۴. y موازی محور x ها را مشاهده می کنید.

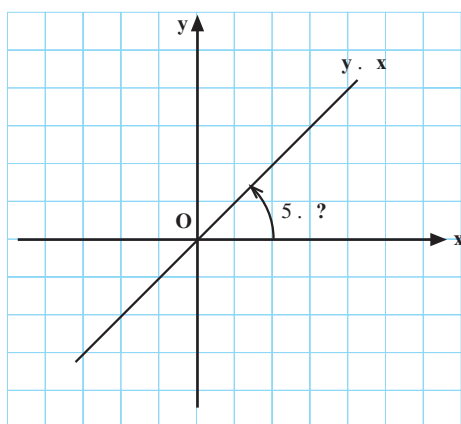
تعریف تابع ثابت: تابعی که در هر نقطه از دامنه اش مساوی مقدار ثابت c باشد تابع ثابت نام دارد.

نمودار ۲-۹۱

$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$
 $f(x) = c$

– شکل ریاضی آن مطابق رابطه ی روبه رو است.

نکته: در تابع حقیقی $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ هرگاه $f(x) = c$ و $c \in \mathbb{R}$ آن گاه دامنه ی آن برابر مجموعه اعداد حقیقی و برد آن برابر c است و خط $y = c$ موازی محور x ها است. به بیان دیگر: $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = \{c\}$



شکل ۲-۹۲

۲-۵-۲- تابع همانی

فعالیت ۱۱-۲

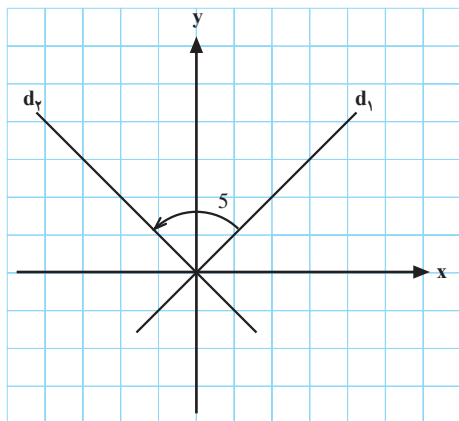
با توجه به تابع با ضابطه ی x . $f(x)$ و نمودار ۲-۹۲ (نیمساز ربع اول و سوم) جاهای خالی را تکمیل کنید.
 الف) تابع f را تابع می نامیم.

ب) شیب تابع همواره برابر یک است. به بیان دیگر

$\tan 5$ و 5 است. و

فعالیت ۲-۱۲

با توجه به شکل ۲-۹۳ هرگاه d_1 نیمساز ربع اول و سوم و d_2 نیمساز ربع دوم و چهارم باشد آن‌گاه زاویه 5 برابر است؟ چرا؟



شکل ۲-۹۳

نتیجه: هر تابع که هر عضو دامنه را به خودش
متناظر کند یک تابع همانی است. ضابطه‌ی تابع، را با
نماد x . $f(x)$ نمایش می‌دهیم (شکل ۲-۹۴).

شکل ۲-۹۴

نکته: دامنه و برد تابع همانی با هم برابر است و نمودار تابع همانی نیمساز ربع اول و سوم است.

مثال: مجموعه‌ی B ، در مقابل، مفروض است.

$B = \{5, -2, 7\}$

تابع همانی از مجموعه‌ی B را بنویسید.

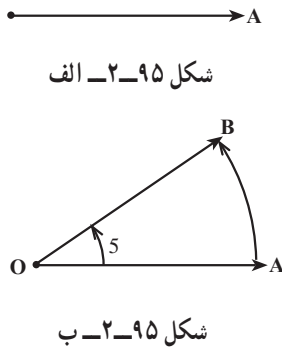
حل: فرض می‌کنیم I تابع همانی از B باشد، بنابراین خواهیم

داشت:

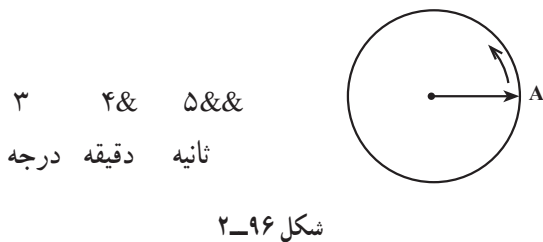
$I = \{(x, y) \mid x, y \in B, x = y\} = \{(7, 7), (-2, -2), (5, 5)\}$

۳-۵-۲- مثلثات

زاویه: نیم خط $\dot{O}A$ شکل (۲-۹۵- الف) را حول نقطه O خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا در وضعیت $\dot{O}B$ قرار گیرد تا شکل ۲-۹۵- ب حاصل شود. زاویه‌ی حاصل (5 یا $\angle AOB$) با سه نوع واحد، یعنی درجه، گراد و رادیان قابل اندازه‌گیری است.



۱- درجه (D): هرگاه نیم خط $\dot{O}A$ یک دوران کامل نماید یک دایره تشکیل می‌شود. اندازه‌ی زاویه مرکزی مقابل به $\frac{1}{360}$ محیط دایره را یک درجه می‌نامند (شکل ۲-۹۶). اجزای درجه، دقیقه و ثانیه است و یک دقیقه برابر 60° ثانیه است. مثال ۱: نمایش مثلثاتی یک زاویه به اندازه‌ی سه درجه و چهار دقیقه و پنج ثانیه به شکل مقابل است.



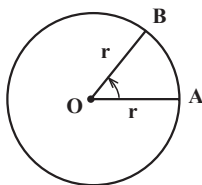
۲. گراد (G): اندازه‌ی زاویه مرکزی مقابل به $\frac{1}{400}$ محیط دایره را یک گراد می‌نامند. اجزای گراد عبارت است از: دسی گراد ($\frac{1}{100}$ گراد)، سانتی گراد ($\frac{1}{1000}$ گراد)، میلی گراد ($\frac{1}{10000}$ گراد).

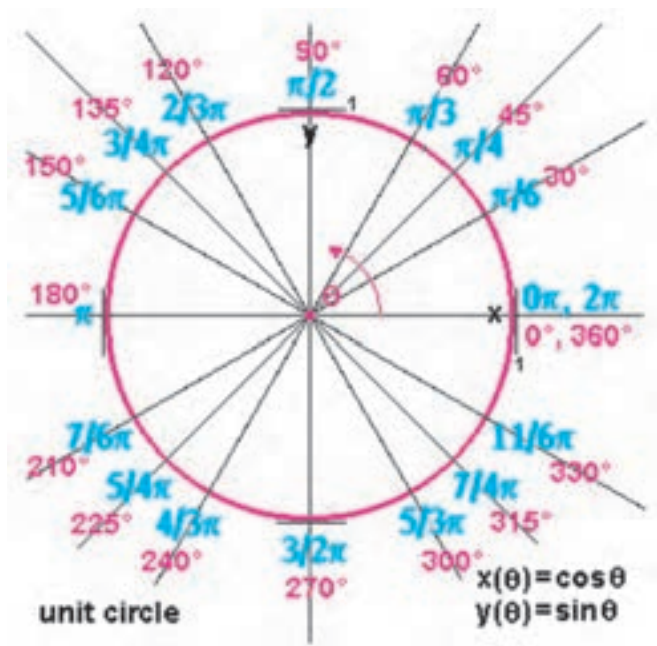
۵/۴۳۲

مثال:

پنج گراد و چهار دسی گراد و سه سانتی گراد و دو میلی گراد.

۳. رادیان (R): اندازه‌ی زاویه مرکزی مقابل به کمانی از دایره که طول آن برابر با شعاع دایره باشد یک رادیان نامیده می‌شود (شکل ۲-۹۷).





با توجه به این که محیط دایره 2π می باشد، 360° را ۲۶ رادیان است.

شکل ۹۸-۲

$$\frac{D}{360} \cdot \frac{G}{400} \cdot \frac{R}{26}$$

رابطه‌ی بین درجه، گراد و رادیان: با توجه به تعاریف زاویه، گراد و رادیان می توانیم رابطه‌ی مقابل را بنویسیم.

– هرگاه آن را بر عدد ۲ ساده کنیم داریم:

$$\frac{D}{180} \cdot \frac{G}{200} \cdot \frac{R}{6}$$

مثال ۲: ۴۵ درجه چند رادیان است؟

$$\frac{D}{180} \cdot \frac{R}{6}, D = 45$$

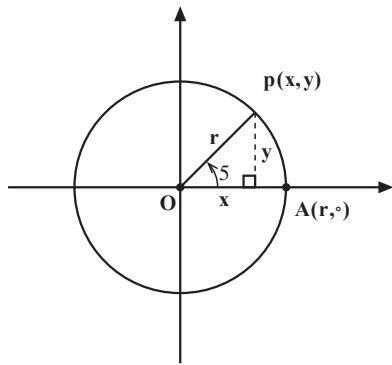
حل: رابطه‌ی رادیان و درجه را می نویسیم.

$$\cdot \frac{45}{180} \cdot \frac{R}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{R}{6} \cdot 4R \cdot 6$$

– ۴۵ بر حسب رادیان برابر است با:

$$R \cdot \frac{6}{4}$$

نکته: ۶ رادیان، 180° درجه و 200° گراد می باشد.



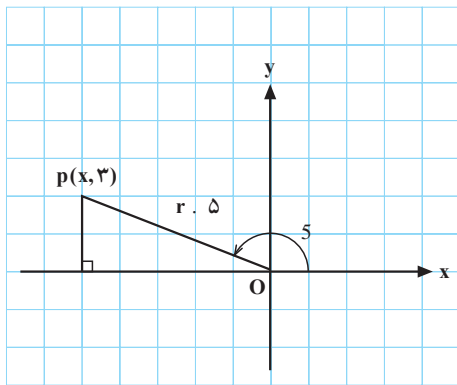
شکل ۱۰۰-۲

از نقطه‌ی A روی دایره‌ی شکل $10^\circ-2$ در جهت مثبت (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) شروع به حرکت می‌نماییم و به نقطه‌ای مانند $P(x, y)$ می‌رسیم. نسبت مثلثاتی $\angle AOP$ را بیابید.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin 5 = \frac{\square}{r}, \quad \cos 5 = \frac{\square}{r}$$

$$\tan 5 = \frac{\square}{\square}, \quad \cot 5 = \frac{x}{y}$$



شکل ۱۰۱-۲

مثال ۱: در شکل $101-2$ ، $\sin 5$ ، $\cos 5$ و $\tan 5$ را

بیابید.

حل:

— برای پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی ابتدا باید x_p را بیابیم.

— بنابر رابطه‌ی فیثاغورث داریم:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad 5^2 = x^2 + 3^2 \quad x^2 = 16$$

— چون نقطه‌ی p در ناحیه‌ی دوم است، x_p منفی است.

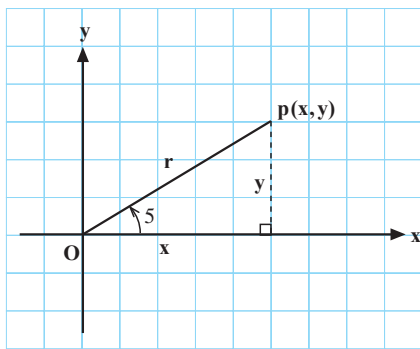
$$x = -4$$

— بنابراین داریم:

$$\sin 5 = \frac{y}{r} = \frac{3}{5}, \quad \cos 5 = \frac{x}{r} = \frac{-4}{5}, \quad \tan 5 = \frac{y}{x} = \frac{3}{-4}$$

فعالیت ۱۴-۲

با توجه به تعاریف نسبت‌های مثلثاتی و شکل ۲-۱۰۲ جاهای خالی را پر کنید.



شکل ۲-۱۰۲

$$r^2 = x^2 + y^2$$

– بنابر رابطه‌ی فیثاغورث داریم :

$$۱) \sin 5 = \frac{\square}{r}$$

سینوس ۵. $\frac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی 5}}{\text{وتر}}$

$$۲) \cos 5 = \frac{\square}{r}$$

کسینوس ۵. $\frac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی 5}}{\text{وتر}}$

$$۳) \tan 5 = \frac{\square}{\square}$$

تانژانت ۵. $\frac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی 5}}{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی 5}}$

$$۴) \cot 5 = \frac{\square}{\square}$$

کتانژانت ۵. $\frac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی 5}}{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی 5}}$

$$۵) \sin^2 5 + \cos^2 5 = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{\square}{\square} \quad \bigcirc$$

– با توجه به شماره‌های ۱ و ۲ و طرفین و وسطین و جایگزینی x و y داریم :

$$۶) \tan 5 = \frac{y}{x} = \frac{r \sin 5}{r \cos 5} = \frac{\sin 5}{\cos 5}$$

– با توجه به ۱ و ۲ و تعریف کتانژانت داریم :

$$۷) \cot 5 = \frac{x}{y} = \frac{\square}{\square} = \frac{\bigcirc}{\bigcirc}$$

نکته: عبارات مقابل به ازای تمامی زوایای θ درست است بنابراین اتحاد مثلثاتی نامیده می‌شوند.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

تمرین

آیا عبارت روبه‌رو یک اتحاد مثلثاتی است؟ چرا؟

فعالیت ۱۵-۲

الف) با توجه به اتحادهای مثلثاتی جاهای خالی را پر

کنید.

$$۱) \sin^2 \theta = 1 - \square \quad ۲) \cos^2 \theta = 1 - \square$$

$$۳) \tan \theta \times \cot \theta = 1 \quad \begin{array}{l} \nearrow \tan \theta = \frac{1}{\square} \\ \searrow \cot \theta = \frac{1}{\square} \end{array}$$

ب) با توجه به حاصل ضرب تانژانت در کتانژانت جای

خالی را پر کنید.

$$۴) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Rightarrow$$

$$1 + \square = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

ج) با فرض $\sin \theta \neq 0$ دو طرف تساوی را بر $\sin^2 \theta$ تقسیم

کنیم: جای خالی را پر کنید.

بنابراین:

$$۵) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow$$

$$1 + \square = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

– هرگاه با فرض $\cos \theta \neq 0$ دو طرف تساوی مقابل را بر

$\cos^2 \theta$ تقسیم کنیم، جای خالی را پر کنید.

نتیجه: بنابر فعالیت (۱۵-۲ الف) داریم:

$$۱) \sin^2 5 \cdot 1 - \cos^2 5, \cos^2 5 \cdot 1 - \sin^2 5$$

بنابر فعالیت (۱۵-۲ ب) داریم:

$$۲) \tan 5 \cdot \cot 5 \cdot ۱ \text{ یا } \tan 5 \cdot \frac{1}{\cot 5} \text{ یا } \cot 5 \cdot \frac{1}{\tan 5}$$

بنابر فعالیت (۱۵-۲ ج) داریم:

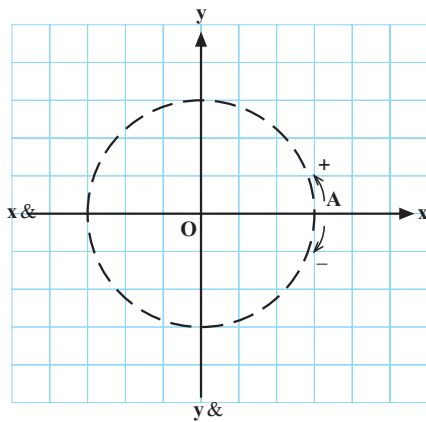
$$۳) ۱ \cdot \tan^2 5 \cdot \frac{1}{\cos^2 5} \text{ یا } \cos^2 5 \cdot \frac{1}{1 \cdot \tan^2 5}$$

بنابر فعالیت (۱۵-۲ د) داریم:

$$۴) ۱ \cdot \cot^2 5 \cdot \frac{1}{\sin^2 5} \text{ یا } \sin^2 5 \cdot \frac{1}{1 \cdot \cot^2 5}$$

دایره‌ی مثلثاتی

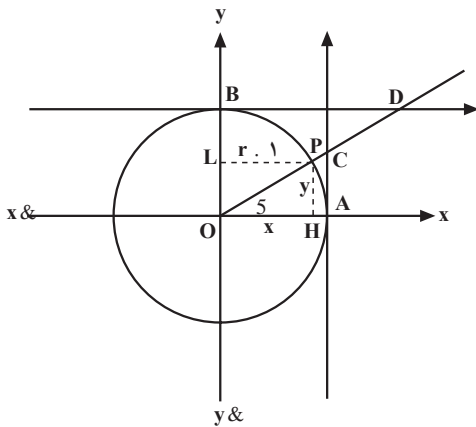
در دستگاه مختصات شکل ۲-۱۰۳ به کمک پرگار دایره‌ای به شعاع واحد (OA) رسم کنید. جهت دایره را خلاف جهت عقربه‌های ساعت در نظر بگیرید. به این دایره، دایره‌ی مثلثاتی می‌گویند.



شکل ۲-۱۰۳

محورهای مثلثاتی

در شکل ۲-۱۰۴ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع واحد و جهت مخالف عقربه‌های ساعت (دایره‌ی مثلثاتی) را مشاهده می‌کنید.



شکل ۲-۱۰۴

نقطه‌ی $P(x,y)$ با جهت مثبت محور x ها، زاویه‌ی θ می‌سازد. بنابر تعریف نسبت‌های مثلثاتی داریم:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = \overline{OL}$$

– محور $yo'y$ را محور سینوس‌ها می‌نامند. با توجه به تعریف دایره‌ی مثلثاتی و تغییرات $\sin \theta$ داریم:

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

– محور $x'ox$ را محور کسینوس‌ها می‌نامند. با توجه به شعاع دایره‌ی مثلثاتی داریم:

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

– تغییرات $\cos \theta$ برابر با:

با توجه به شکل $1-4$ و نسبت تشابه در مثلث‌های OAC

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{1} \text{ و } x \neq 0 \Rightarrow$$

و OPH داریم:

$$\tan \theta = \overline{AC}$$

خط مماس بر دایره‌ی مثلثاتی در نقطه‌ی شروع (A) را محور تانژانت‌ها می‌نامند. بنابر نامحدود بودن خط داریم:

$$\tan \theta \in \mathbb{R}$$

– با توجه به تعریف کتانژانت داریم:

$$\cot \theta = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

– از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBD داریم: (شکل

$1-4$)

$$\cot \theta = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BD}}{1} = \overline{BD}$$

– چون دو مثلث OPH و OBH به حالت سه زاویه، با

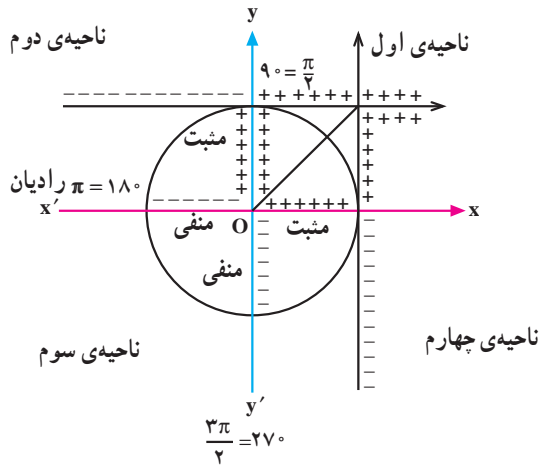
یکدیگر متشابه می‌باشند و داریم:

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \overline{BD} \Rightarrow \cot \theta = \overline{BD}$$

– بنابر نامحدود بودن، محور کتانژانت‌ها داریم:

$$\cot \theta \in \mathbb{R}$$

علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی چهارگانه دایره مثلثاتی



شکل ۲-۱۰۵

جدول ۲-۲۱

α	$0^\circ < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 4\pi$
α	ناحیه اول	ناحیه دوم	ناحیه سوم	ناحیه چهارم
علامت $\sin \alpha$	+	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

جدول ۲-۲۲

α	$0^\circ < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
علامت $\cos \alpha$	+	<input type="checkbox"/>	-	<input type="checkbox"/>

جدول ۲-۲۳

α	ناحیه اول	ناحیه دوم	ناحیه سوم	ناحیه چهارم
علامت $\tan \alpha$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-

جدول ۲-۲۴

α	$0^\circ < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$0^\circ < \alpha < 2\pi$
علامت $\cot \alpha$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	+	-

فعالیت ۲-۱۶

۱) در شکل ۲-۱۰۵ دایره مثلثاتی به همراه محورهای مثلثاتی رسم شده است. سؤال‌ها و جدول‌های زیر را کامل کنید.

تغییرات علامت $\sin \alpha$ در جدول ۲-۲۱

۱- تغییرات علامت $\sin \alpha$ را در جدول ۲-۲۱ کامل کنید.

تغییرات علامت $\cos \alpha$ در جدول ۲-۲۲

۲- تغییرات علامت $\cos \alpha$ را در جدول ۲-۲۲ کامل کنید.

۳- با توجه به تغییرات علامت $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ در نواحی

چهارگانه علامت $\tan \alpha$ را در جدول ۲-۲۳ تکمیل کنید.

۴- با تکمیل جدول ۲-۲۴ علامت $\cot \alpha$ را در نواحی

چهارگانه دایره مثلثاتی مشخص کنید.

– از رابطه‌ی روبه‌رو می‌توان نتیجه‌ی زیر را گرفت :

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

نتیجه: علامت‌های $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ همواره در ناحیه‌ی اول تا چهارم با هم برابر است.

مثال: رابطه‌ی مقابل همواره برقرار است، حدود α را

مشخص کنید.

$$\sin \alpha > 0 \text{ و } \sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$$

حل: چون حاصل ضرب سینوس و کسینوس منفی است

$$\text{و } \sin \alpha > 0 :$$

$$\cos \alpha < 0$$

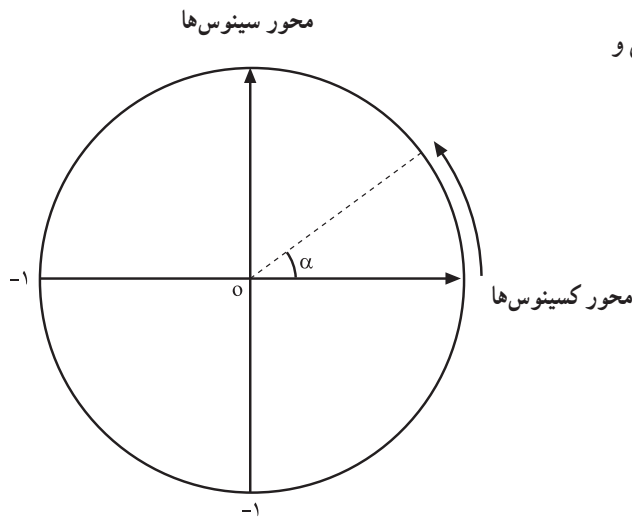
– پس α در ناحیه‌ی دوم قرار دارد، یعنی :

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

فعالیت ۱۷-۲

در شکل ۲-۱۰۶ دایره‌ی مثلثاتی با محورهای سینوس و

کسینوس رسم شده است.



شکل ۲-۱۰۶

۱- هرگاه $\alpha = 0$ باشد محور کسینوس‌ها چه عددی را

نشان می‌دهد؟

$$\cos 0^\circ = \square$$

۲- هرگاه α از 0° تا $\frac{\pi}{4}$ و از $\frac{\pi}{4}$ تا π تغییر کند مقدار

جبری کسینوس رفته رفته کم می‌شود در نقطه‌ی $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ،

$\alpha = \pi$ مقدار کسینوس چه اعدادی را نشان می‌دهد؟

$$\cos \frac{\pi}{4} = \square \quad , \quad \cos \pi = \square$$

۳- هرگاه α از π تا $\frac{3\pi}{4}$ و نیز از $\frac{3\pi}{4}$ تا 2π تغییر کند

آیا مقدار کسینوس روبه افزایش است؟

خیر

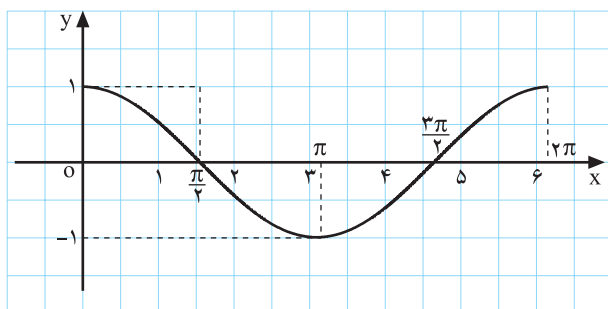
بلی

در نقاط $x = \frac{3\pi}{2}$ و $x = 2\pi$ مقدار کسینوس چیست؟

$$\cos \frac{3\pi}{2} = \square, \quad \cos 2\pi = \square$$

جدول ۲-۲۵

α	0°	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	$\pi = 180^\circ$	$\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$	$2\pi = 360^\circ$
$\cos \alpha$ علامت			-۱		



نمودار ۲-۱۰۷

جدول ۲-۲۶

α	0°	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	0	-۱	<input type="checkbox"/>

$$\sin(0^\circ) = \square$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = \square$$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = \square$$

$$\sin 2\pi = 0$$

۴- جدول ۲-۲۵ را کامل کنید.

۵- با استفاده از جدول ۲-۲۵ و فعالیت ۲-۱۳ نمودار

$y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ رسم شده است.

۶- هرگاه $\alpha = 0$ باشد امتداد زاویه محور سینوس ها را

در مبدأ مختصات قطع می کند. در این حالت سینوس صفر درجه را به دست آورید (جدول ۲-۲۶ را تکمیل کنید).

۷- وقتی α از 0° تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر می کند مقدار $\sin \alpha$ مثبت

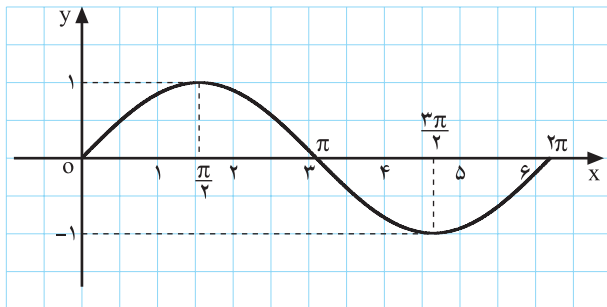
است. در $\alpha = \frac{\pi}{2}$ مقدار سینوس حداکثر است. این مقدار چیست؟

۸- در فواصل $\frac{\pi}{2}$ تا π و π تا $\frac{3\pi}{2}$ مقدار سینوس

کاهش می یابد به طوری که در $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ مقدار حداقل سینوس

برابر -1 می باشد. در ناحیه $(\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi)$ دوباره

مقدار سینوس افزایش می یابد به طوری که در $\alpha = 2\pi$ مقدار آن صفر می شود.



نمودار ۲-۱۰۸

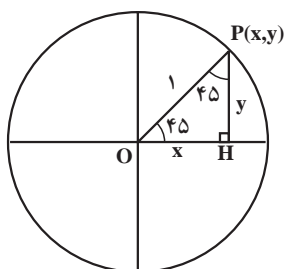
– با توجه به مطالب بالا نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ رسم شده است.

– با توجه به روابط روبه‌رو جدول ۲-۲۷ را تکمیل کنید.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

جدول ۲-۲۷

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\tan \alpha$	$\frac{0}{1} = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	نامعین	<input type="checkbox"/>
$\cot \alpha$	$\frac{1}{0} = \text{نامعین}$	0	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



شکل ۲-۱۰۹

مثال: در دایره‌ی مثلثاتی شکل ۲-۱۰۹ مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه مفروض است. نسبت‌های مثلثاتی ۴۵ را به‌دست آورید.

حل: چون مثلث متساوی‌الساقین است. داریم:

$$OH = PH \Rightarrow x = y$$

$$OP^2 = OH^2 + HP^2 \Rightarrow 1 = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ یا } x = +\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

– بنابراین رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle OHP$:

– چون x سمت راست مبدأ است پس جواب مثبت فقط

قابل قبول است.

$$\sin(45) = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} \Rightarrow \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ضلع مقابل به زاویه‌ی ۴۵
سینوس زاویه‌ی ۴۵ = $\frac{\text{وتر}}{\text{پس}}$

$$\cos(45) = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} \Rightarrow \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(45) = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \tan 45 = 1$$

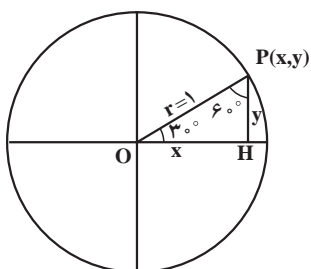
$$\cot(45) = \frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \cot 45 = 1$$

کسینوس زاویه ی ۴۵ = ضلع مجاور به ۴۵ وتر ، پس :

تائزانت زاویه ی ۴۵ = ضلع مقابل به زاویه ی ۴۵ ضلع مجاور به زاویه ی ۴۵ ، پس :

کتائزانت ۴۵ = ضلع مقابل به زاویه ی ۴۵ ضلع مجاور به زاویه ی ۴۵ ، پس :

فعالیت ۱۸-۲



شکل ۱۱۰-۲

در شکل ۱۱۰-۲ مثلثی با دو زاویه ی ۳۰ و ۶۰ را مشاهده می نمایم، نسبت های مثلثاتی این دو زاویه را به دست آورید.

$$PH = y = \square$$

- می دانیم ضلع مقابل به زاویه ی ۳۰ نصف وتر است، پس :

$$r^2 = OH^2 + PH^2 \Rightarrow 1^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

- بنابر رابطه ی فیثاغورث داریم :

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}, \quad x = +\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- x و y در ناحیه ی اول است، پس فقط مثبت مورد قبول است.

$$\sin(30) = \cos 60 = \frac{\square}{\bigcirc} = \frac{1}{2}$$

- چون دو زاویه ی ۳۰ و ۶۰ متمم یکدیگرند پس :

$$\cos(30) = \frac{x}{r} = \frac{\square}{r} = \bigcirc = \sin 60$$

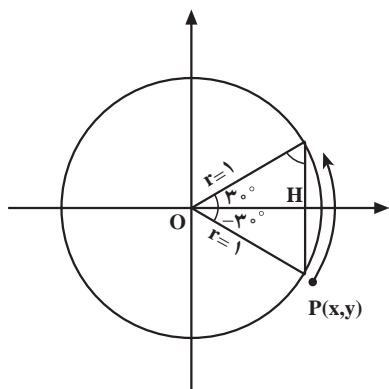
- همچنین داریم :

$$\tan(30) = \frac{\square}{x} = \frac{1}{\square} = \bigcirc = \cot 60$$

- $\tan 30$ برابر $\cot 60$ (زیرا $30 + 60 = 90$)، پس :

$$\cot(30) = \frac{x}{y} = \frac{\bigcirc}{\bigcirc} = \sqrt{3} = \tan \square$$

- $\cot 30$ برابر است با :



شکل ۲-۱۱۱

مثال ۱: نسبت مثلثاتی $\alpha = -30^\circ$ را محاسبه کنید.
 حل: در شکل ۲-۱۱۱ زاویه $\alpha = -30^\circ$ را در جهت
 گردش عقربه‌های ساعت را جدا می‌کنیم.

– در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه 30°
 نصف وتر است.

$$\sin(30^\circ) = PH = \frac{1}{2}$$

$$y = -PH = -\frac{1}{2}$$

– با توجه به این که نقطه‌ی P در ناحیه‌ی چهارم واقع
 است. داریم:

$$OP^2 = OH^2 + PH^2 \Rightarrow 1^2 = x^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

– بنابر قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

– چون $\theta = 30^\circ$ در ناحیه‌ی چهارم واقع است فقط مثبت
 قابل قبول است.

$$\sin(-30^\circ) = \frac{y}{r} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} \Rightarrow \sin(-30^\circ) = \frac{-1}{2} = -\sin 30^\circ$$

– در نتیجه خواهیم داشت:

$$\cos(-30^\circ) = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \Rightarrow \cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$

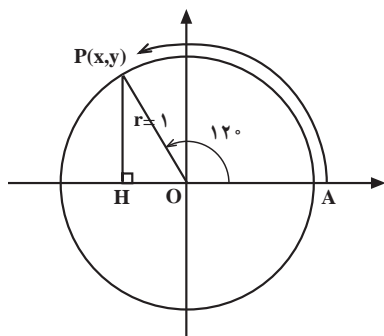
$$\tan(-30^\circ) = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3} = -\tan 30^\circ$$

$$\cot(-30^\circ) = \frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} = -\cot 30^\circ$$

نتیجه‌ی کلی: هرگاه دو زاویه مانند α و $-\alpha$ قرینه باشند، کسینوس آن‌ها برابر است ولی سایر نسبت‌های
 مثلثاتی قرینه‌ی یکدیگرند.

مثال ۲: نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\alpha = 120^\circ$ را به دست آورید.

حل: در شکل ۲-۱۱۲ زاویه‌ی 120° را روی دایره مثلثاتی جدا می‌کنیم.



شکل ۲-۱۱۲

$$OH = \frac{1}{2} OP = \frac{1}{2} (1) \Rightarrow OH = \frac{1}{2}$$

$$x = -OH = -\frac{1}{2}$$

$$OP^2 = PH^2 + OH^2 \Rightarrow 1 = y^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ یا } y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(120^\circ) = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(60^\circ)$$

$$\cos(120^\circ) = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} = -\cos(60^\circ)$$

$$\tan(120^\circ) = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} = -\tan(60^\circ)$$

$$\cot(120^\circ) = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\cot(60^\circ)$$

– می‌دانیم ضلع مقابل به زاویه‌ی 30° نصف وتر است، پس:

– چون نقطه‌ی P در سمت چپ محور xها واقع است داریم:

– بنابر قضیه‌ی فیثاغورث داریم:

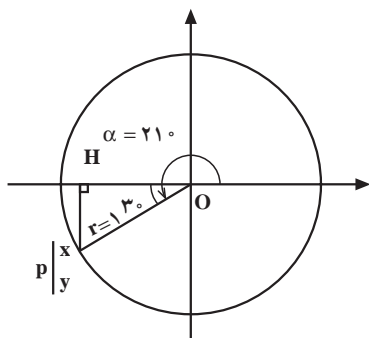
– چون نقطه‌ی p در ناحیه‌ی دوم است، پس y آن مثبت است.

– $\sin 120^\circ$ برابر با $\sin 60^\circ$ است زیرا:

– $\cos 120^\circ$ برابر با $-\cos 60^\circ$ است زیرا:

– $\tan 120^\circ$ برابر با $-\tan 60^\circ$ است زیرا:

– $\cot 120^\circ$ برابر با $-\cot 60^\circ$ است زیرا:



شکل ۱۱۳-۲

مثال ۳: نسبت مثلثاتی $\alpha = 21^\circ$ را به دست آورید.
 حل: زاویه 21° را در شکل ۱۱۳-۲ روی دایره‌ی
 مثلثاتی جدا می‌کنیم.

– ضلع مقابل به زاویه 3° نصف وتر است، پس:

$$PH = \frac{1}{2}(OP) = \frac{1}{2}$$

– چون نقطه‌ی P زیر محور xها واقع است y منفی است،

$$y = -PH = -\frac{1}{2}$$

لذا داریم:

$$OP^2 = PH^2 + OH^2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{4} + x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4}$$

– بنابر رابطه‌ی فیثاغورث داریم:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

– چون نقطه‌ی P در ناحیه‌ی سوم واقع است پس x منفی

قابل قبول است، پس:

$$\sin(21^\circ) = \frac{y}{r} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} = -\sin(3^\circ)$$

– $\sin 21^\circ$ برابر با $-\sin 3^\circ$ ، زیرا:

$$\cos(21^\circ) = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos(3^\circ)$$

– $\cos 21^\circ$ برابر با $-\cos 3^\circ$ ، است زیرا:

$$\tan 21^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 3^\circ$$

– $\tan 21^\circ$ برابر با $\tan(3^\circ)$ ، زیرا:

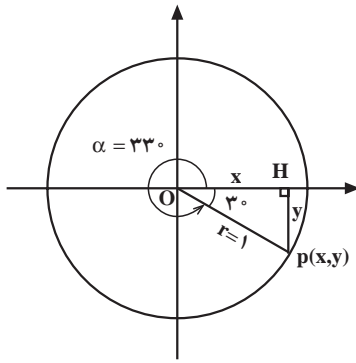
$$\cot 21^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} = \cot 3^\circ$$

– $\cot(21^\circ)$ برابر با $\cot(3^\circ)$ ، زیرا:

مثال ۴: نسبت‌های مثلثاتی $\alpha = 33^\circ$ را بیابید.

حل: روی دایره‌ی شکل ۲-۱۱۴ زاویه‌ی $\alpha = 33^\circ$ را

جدا می‌کنیم.



شکل ۲-۱۱۴

$$PH = \frac{1}{2} OP = \frac{1}{2}$$

$$y = -PH = -\frac{1}{2}$$

$$1 = x^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 33^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} = -\sin 3^\circ$$

$$\cos 33^\circ = \frac{x}{r} = \frac{+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 3^\circ$$

$$\tan 33^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{1}{2}}{+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3} = -\tan 3^\circ$$

$$\cot 33^\circ = \frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} = -\cot 3^\circ$$

– ضلع مقابل به زاویه‌ی 3° نصف وتر است، پس:

– چون نقطه‌ی p در ناحیه‌ی چهارم است، پس:

– بنابر رابطه‌ی فیثاغورث داریم:

– چون p در ناحیه‌ی چهارم است، منفی مورد قبول نیست،

پس:

– $\sin 33^\circ$ برابر با $-\sin 3^\circ$ ، زیرا:

– $\cos(33^\circ)$ برابر با $(+\cos 3^\circ)$ ، زیرا:

– $\tan(33^\circ)$ برابر با $-\tan(3^\circ)$ ، زیرا:

– $\cot(33^\circ)$ برابر با $-\cot(3^\circ)$ ، زیرا:

تمرین

آیا می‌توانیم ادعا کنیم رابطه‌های مقابل درست است؟

خیر

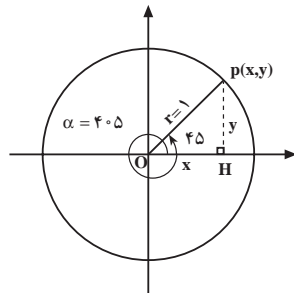
بلی

$$\sin(330^\circ) = \sin(2 \times 180^\circ - 30^\circ) = -\sin(30^\circ) ,$$

$$\cos(330^\circ) = \cos(2 \times 180^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ$$

$$\tan 330^\circ = \tan(2 \times 180^\circ - 30^\circ) = -\tan(30^\circ) ,$$

$$\cot(330^\circ) = (2 \times 180^\circ - 30^\circ) = -\cot 30^\circ$$



شکل ۲-۱۱۵

$$PH = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = PH = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$OH = HP \Rightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(405^\circ) = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(45^\circ)$$

$$\cos(405^\circ) = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(45^\circ)$$

$$\tan(405^\circ) = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 = \tan(45^\circ)$$

$$\cot(405^\circ) = \frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 = \cot(45^\circ)$$

مثال ۵: نسبت‌های مثلثاتی $\alpha = 405^\circ$ را بیابید.

حل: در شکل ۲-۱۱۵ زاویه $\alpha = 405^\circ$ را جدا

می‌کنیم.

- ضلع روبه‌رو به زاویه 45° برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وتر است، پس:

- نقطه‌ی p در ناحیه‌ی اول قرار دارد پس:

- در مثلث $\triangle OHP$ با توجه به تساوی دو زاویه، داریم:

- $\sin(405^\circ)$ برابر با $\sin(45^\circ)$ ، زیرا:

- $\cos(405^\circ)$ برابر با $\cos(45^\circ)$ ، زیرا:

- $\tan(405^\circ)$ برابر با $\tan(45^\circ)$ ، زیرا:

- $\cot(405^\circ)$ برابر با $\cot(45^\circ)$ ، زیرا:

با توجه به مثال حل شده در این قسمت می‌توانیم نتایج

صفحه‌ی بعد را بیان کنیم:

نتیجه‌ی ۱: نسبت مثلثاتی $(-\alpha)$ بر حسب α : مثال:

$$\sin(-60^\circ) = -\sin(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-60^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-60^\circ) = -\tan(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-60^\circ) = -\cot(60^\circ) = -\sqrt{3}$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

نتیجه‌ی ۲: نسبت مثلثاتی $\pi - \alpha$ بر حسب α : مثال:

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} \text{ یا } \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cot \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

نتیجه‌ی ۳: نسبت مثلثاتی $2\pi - \alpha$ بر حسب α : مثال:

$$\alpha = \frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} \text{ یا } \alpha = 300^\circ = \frac{5\pi}{3}$$

$$\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cot \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot(2\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

نتیجه‌ی ۴: نسبت مثلثاتی $2\pi + \alpha$ بر حسب α : مثال: $\alpha = 39^\circ = 2 \times 18^\circ + 3^\circ = 2\pi + \frac{\pi}{6}$

$$\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

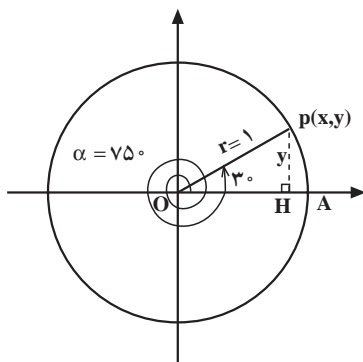
$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan(2\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\cot(2\pi + \alpha) = \cot \alpha$$



شکل ۲-۱۱۶

مثال ۶: زاویه‌ی 75° را روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص

کنید و نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی 75° را به دست آورید.

حل: زاویه‌ی 75° را روی شکل ۲-۱۱۶ جدا می‌کنیم.

– پس از طی دو دور در خلاف جهت عقربه‌های ساعت،

از نقطه‌ی شروع دایره، زاویه‌ی 3° درجه را طی می‌کنیم؛

به 75° می‌رسیم:

$$75^\circ \div 36^\circ = 2 \text{ دور و } 3^\circ$$

$$75^\circ = 2 \times 36^\circ + 3^\circ$$

$$\sin(75^\circ) = \sin(2 \times 36^\circ + 3^\circ) = \sin(3^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\text{– } \sin(75^\circ) \text{ برابر با } \sin(3^\circ) :$$

$$\cos(75^\circ) = \cos(2 \times 36^\circ + 3^\circ) = \cos(3^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{– } \cos(75^\circ) \text{ برابر با } \cos(3^\circ) :$$

$$\tan(75^\circ) = \tan(2 \times 36^\circ + 3^\circ) = \tan(3^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{– } \tan(75^\circ) \text{ برابر با } \tan(3^\circ) :$$

$$\cot(75^\circ) = \cot(2 \times 36^\circ + 3^\circ) = \cot(3^\circ) = \sqrt{3}$$

$$\text{– } \cot(75^\circ) \text{ برابر با } \cot(3^\circ) :$$

– با توجه به حل مثال می‌توانیم نتیجه‌ی زیر را عنوان

کنیم.

نتیجه: $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$ مثال: $\sin(93^\circ) = \sin(5 \times 18^\circ + 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$ $\cos(93^\circ) = \cos(5 \times 18^\circ + 3^\circ) = \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

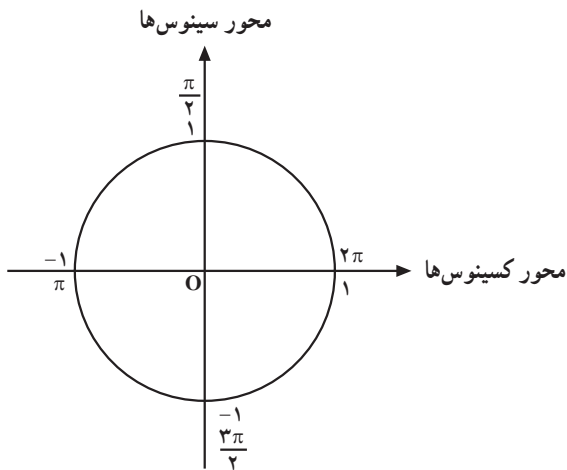
پاسخ:

تمرین: نسبت‌های سینوس و کسینوس ۹۴۵ را بیابید.

حل معادله‌های مثلثاتی

فعالیت ۱۹-۲

– دایره‌ی مثلثاتی در شکل ۲-۱۱۷ رسم شده است



شکل ۲-۱۱۷

۱- مقدار سینوس بین چه اعدادی قرار دارد؟

$-1 \leq \sin x \leq 1$

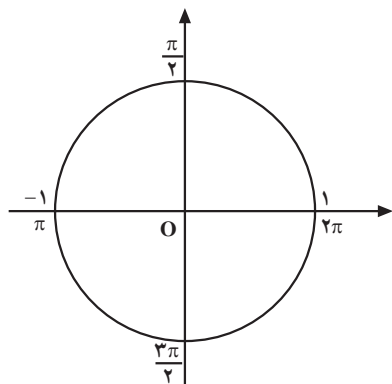
۲- تابع $\sin x$ به ازای چه زوایایی از x برابر یک می‌شود؟

$x = \square$

۳- تابع $\sin x$ به ازای چه مقدار از x برابر منفی یک می‌شود؟

می‌شود؟

$x = \square$



شکل ۲-۱۱۸

۴- وقتی $\sin x = 0$ باشد، می‌خواهیم تمامی زوایایی را تعیین کنیم که مقدار سینوس آن‌ها صفر باشد. در شکل ۲-۱۱۸ مشخص کنید چه زوایایی دارای سینوس صفر می‌باشند؟

$\sin \square = 0$ و $\sin \square = 0$ و $\sin 2\pi = 0$

$\sin(\pi + 2\pi) = ?$

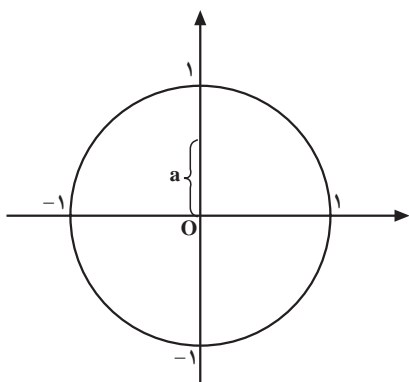
$\sin(\pi + 3\pi) = ?$ و $\sin(\pi + 2\pi) = ?$

$\sin(\pi + 4\pi) = ?$

۵- سینوس زوایای 0 ، π ، 2π برابر صفر است. آیا سینوس زوایای 3π ، 4π ، 5π و ... نیز صفر است؟ چرا؟

نتیجه: جواب‌های کلی معادله‌ی $\sin x = 0$ برابر است با: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

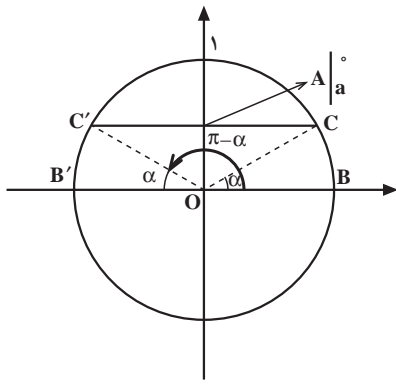
فعالیت ۲-۲۰



شکل ۲-۱۱۹

شکل ۲-۱۱۹ دایره‌ی مثلثاتی را نشان می‌دهد. برای پیدا کردن جواب‌های معادله‌ی $\sin x = a$ ، که $-1 \leq a \leq 1$ ، مراحل زیر را انجام دهید.

$\sin x = a$ و $-1 \leq a \leq 1$ و $x = ?$



شکل ۲-۱۲

$$\sin(\pi - \alpha) \boxed{} \sin \alpha$$

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = ? \text{ و } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin((\pi - \alpha) + 2k\pi) = ?$$

۱- خط گذرا از نقطه‌ی $A(\alpha, a)$ و موازی با محور کسینوس‌ها را رسم کنید. این خط، دایره‌ی مثلثاتی را در چند نقطه قطع می‌کند؟ (شکل ۲-۱۲).

۲- نقاط C' و C را به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم. سینوس دو زاویه‌ی α و $\pi - \alpha$ با هم چه رابطه‌ای دارند؟ (شکل ۲-۱۲).

۳- اگر α یا $\pi - \alpha$ یک جواب معادله باشند آیا هر چند بار دور دایره گردش نمایم مقدار سینوس تغییر می‌کند؟

نتیجه: جواب کلی معادله‌ی مقابل عبارت است از:

$$\sin x = a = \sin \alpha, \quad -1 \leq a \leq 1$$

$$x = 2k\pi + \alpha \text{ یا } x = 2k\pi + (\pi - \alpha), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2 \sin^2 x - \sin x = 0$$

مثال: جواب‌های معادله‌ی مقابل را بیابید.

$$\sin x (2 \sin x - 1) = 0$$

حل: از $\sin x$ فاکتور می‌گیریم، بنابراین خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi + 0 \Rightarrow \boxed{x = k\pi, k \in \mathbb{Z}} \\ 2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \end{cases} \text{ می‌دهیم:}$$

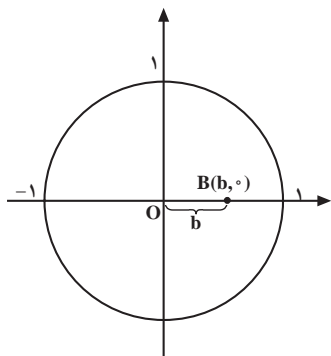
$$x = \frac{\pi}{6}, \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم.

$$\Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}} \text{ و } \boxed{x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}}$$

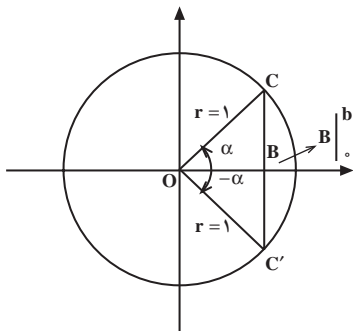
- جواب کلی معادله عبارت است از:

فعالیت ۲-۲۱



شکل ۲-۱۲۱

$$\cos x = b, -1 \leq b \leq 1$$



شکل ۲-۱۲۲

$$\cos(-\alpha) = \frac{OB}{r} \quad \square \quad \cos \alpha = \frac{OB}{r}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

بلی خیر

شکل ۲-۱۲۱ دایره‌ی مثلثاتی را نشان می‌دهد. برای پیدا کردن جواب‌های کلی معادله‌ی مقابل:

مراحل زیر را انجام دهید.

خط‌گذرا از نقطه‌ی $B(b, 0)$ و موازی با محور سینوس‌ها را رسم کنید. این خط دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی C و C' قطع می‌کند (شکل ۲-۱۲۲).

نقاط C و C' را به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم (شکل

۲-۱۲۲).

دو زاویه‌ی ایجاد شده‌ی α و $-\alpha$ با هم چه رابطه‌ای

دارند؟

آیا می‌توانیم رابطه‌ی مقابل را قبول کنیم؟

۳- اگر α و $-\alpha$ یک جواب معادله باشند و چندین بار زاویه دور دایره گردش کند $(2k\pi)$ و بر روی α و $-\alpha$ قرار گیرد کسینوس برابر چه مقداری می‌باشد؟

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha = \square$$

$$\cos(2k\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \square$$

$$\cos x = b = \cos \alpha, -1 \leq b \leq 1$$

نتیجه: جواب کلی معادله‌ی مقابل عبارت است از:

$$x = 2k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

مثال: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی مقابل را پیدا کنید.

$$\cos^2 x - 2 \cos x + \frac{3}{4} = 0$$

حل:

– حاصل جمع دو عدد $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ برابر ۱ و ضربشان برابر

$$(\cos x - \frac{3}{4})(\cos x - \frac{1}{4}) = 0$$

$\frac{3}{4}$ است، پس:

با توجه به تغییرات $\cos x$ بین -1 و 1 ، جواب $\frac{3}{4}$ قابل قبول

نیست.

– به ازای $\frac{1}{4}$ جواب قابل قبول، و زاویه x برابر است با:

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{3}{4} \\ \cos x = \frac{1}{4} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

– با قرار دادن $\frac{\pi}{3}$ در رابطه‌ی کلی جواب‌های معادله را

به دست می‌آوریم.

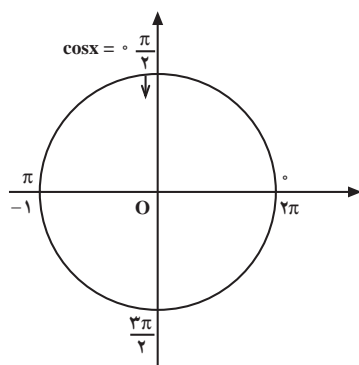
$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0$$

مثال: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

حل: با توجه به شکل ۲-۱۲۳ به ازای $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$

معادله‌ی $\cos x = 0$ برابر صفر است.

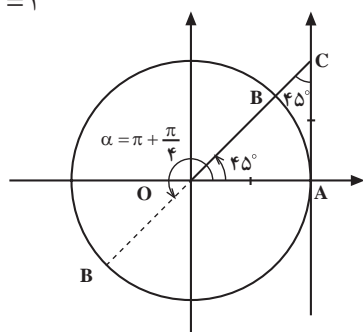


شکل ۲-۱۲۳

نتیجه: جواب‌های کلی معادله‌ی $\cos x = 0$ عبارت است از: $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$\tan x = 1$$

محور تانژانت‌ها



شکل ۲-۱۲۴

مثال: معادله‌ی مثلثاتی مقابل را حل کنید.

– برای پیدا کردن تمامی زوایایی که مقدار تانژانت آن‌ها

برابر با عدد ۱ می‌باشد مراحل زیر را انجام دهید.

۱- در شکل ۲-۱۲۴ بر روی محور تانژانت پاره خط AC

را به اندازه‌ی واحد جدا کنید. از C به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم مقدار تانژانت زاویه‌ی حاصل (۴۵) برابر با چیست؟

$$\tan \frac{\pi}{4} = \square$$

۲- هرگاه نقطه‌ی B را به اندازه‌ی π واحد در جهت دایره‌ی مثلثاتی حرکت دهیم به نقطه‌ای مانند B' می‌رسیم. مقدار تانژانت زاویه‌ی $\pi + \frac{\pi}{4}$ برابر چیست؟

$$\tan(\pi + \frac{\pi}{4}) = ?$$

- هرگاه از B' به اندازه‌ی π واحد در جهت دایره‌ی مثلثاتی حرکت کنیم به نقطه‌ی B می‌رسیم. آیا مقدار تانژانت تغییر می‌کند؟

$$\tan(2\pi + \frac{\pi}{4}) = ?$$

- آیا رابطه‌ی مقابل صحیح است؟ چرا؟

$$\tan(k\pi + \frac{\pi}{4}) = 1 \text{ و } k \in \mathbb{Z}$$

نتیجه: جواب‌های کلی معادله‌ی $\tan x = m = \tan \alpha$ که $m \in \mathbb{R}$ برابر است با: $x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$

مثال‌های اضافی

مثال ۱: تابع روبه‌رو مفروض است.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{\sin x - 1}}$$

الف) این تابع به ازای چه مقدار از x تعریف نمی‌شود؟
حل: به ازای ریشه‌های مخرج، تابع f تعریف نمی‌شود:

$$\sqrt{\sin x - 1} = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow$$

$$\sin x = \frac{1}{1} = \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

جواب‌های کلی عبارت است از:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{2}) = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$D_f = ?$$

ب) دامنه‌ی تابع f را به دست آورید.

حل: دامنه‌ی f عبارت از کلیه‌ی اعداد حقیقی به جز

ریشه‌ی مخرج است، پس:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ یا } x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \right\}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 9x}}$$

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

جدول ۲-۲۸

x	-3	0	3
x	-	-	+
$x^2 - 9$	+	-	+
$x^3 - 9x$	-	+	-

جواب

$$D_f = (-3, 0) \cup (3, +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{3-5x}}$$

$$\frac{2x+1}{3-5x} \geq 0$$

$$2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$3-5x=0 \Rightarrow 3=5x \Rightarrow x=\frac{3}{5}$$

جدول ۲-۲۹

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$
$2x+1$	-	+
$3-5x$	+	-
$\frac{2x+1}{3-5x}$	-	+

جواب

$$-\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{5}$$

مثال ۲: تابع با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. دامنه‌ی آن را به دست آورید.

حل: تابع f به ازای xهایی که $x^3 - 9x > 0$ تعریف شده است. نامعادله اخیر به روش تعیین علامت حل می‌شود.

ریشه‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ در جدول ۲-۲۸ قرار داده و تعیین علامت می‌کنیم.

در نتیجه دامنه‌ی f برابر است با:

مثال ۳: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است:

الف) به ازای چه مقادیری از x تابع f تعریف شده است؟
حل:

با توجه به زوج بودن فرجه‌ی رادیکال تابع f باید داشته باشیم:

ریشه‌های صورت و مخرج نامعادله را به دست می‌آوریم:

ریشه‌ها را به ترتیب نزولی به صعودی در جدول ۲-۲۹ قرار داده تعیین علامت می‌کنیم.

با توجه به نامعادله، تابع در $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$ تعریف شده است.

ب) دامنه‌ی تابع f را پیدا کنید.

حل:

با استفاده از جدول ۲۹-۲ دامنه‌ی f برابر است با:

$$D_f = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{5} \right\} = \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{5} \right)$$

مثال ۴: تابع‌های f و g مفروض‌اند. مقادیر زیر را به دست

آورید.

$$f(x) = 7x^2 - 5x, g(x) = 2 \sin x - 3$$

$$f(0) + g(0) = ? \quad (1)$$

f(0) و g(0) را از ضابطه‌ی مربوط به دست می‌آوریم و

با هم جمع می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 7(0)^2 - 5(0) = 0 - 0 = 0 \\ g(0) &= 2 \sin 0 - 3 = 0 - 3 = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) + g(0) = -3$$

$$f(3) - g\left(\frac{\pi}{6}\right) = ? \quad (2)$$

$$f(3) = 7(3)^2 - 5(3) = 63 - 15 = 48$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} - 3 = 2 \times \frac{1}{2} - 3 = 1 - 3 = -2$$

f(3) و g(π/6) را از ضابطه‌ی مربوط به دست می‌آوریم

و از هم کم می‌کنیم.

$$\Rightarrow f(3) - g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 48 - (-2) = 50$$

مثال ۵: دامنه و برد تابع با ضابطه‌ی مقابل را به دست آورید.

$$f(x) = -2 \sin 3x + 5$$

حل: دامنه‌ی تابع شامل کلیه‌ی اعداد حقیقی است:

$$D_f = \mathbb{R}$$

– تغییرات تابع سینوس بین -۱ و ۱ است، بنابراین:

$$-1 \leq \sin 3x \leq 1$$

– نامعادله را در عدد ۲- ضرب می‌کنیم، پس:

$$-1 \times (-2) \geq -2 \times \sin 3x \geq 1 \times (-2)$$

– چون نامعادله در عدد منفی ضرب شده است جهت

نامعادله تغییر می‌کند.

$$+2 \geq -2 \sin 3x \geq -2$$

به همه‌ی طرف‌های نامعادله عدد ۵ اضافه می‌کنیم.

$$2 + 5 \geq -2 \sin 3x + 5 \geq -2 + 5$$

– پس از ساده کردن برد تابع f برابر است با:

$$\Rightarrow 7 \geq f(x) \geq 3 \Rightarrow R_f = [3, 7]$$

مثال ۶: معادله‌ی مثلثاتی مقابل را حل کنید.

$$\sqrt{3} \tan^2 x - \tan x = 0$$

حل: از $\tan x$ فاکتور می‌گیریم و هر یک از عوامل را برابر

صفر قرار می‌دهیم:

$$\tan x(\sqrt{3} \tan x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \\ \sqrt{3} \tan x - 1 = 0 \end{cases}$$

– اولین جواب به ازای $\tan x = 0$ برابر با:

$$\tan x = 0 \Rightarrow x = 0$$

– دومین جواب به ازای $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ برابر با:

$$\sqrt{3} \tan x - 1 = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

– جواب‌های کلی معادله برابر است با:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

تمرین

۱- زوایای $\frac{11\pi}{6}$ ، $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{6}$ را برحسب درجه

بنویسید.

۲- نسبت‌های مثلثاتی 30° و 50° را برحسب رادیان

بنویسید.

۳- معادله‌ی مقابل را حل کنید و جواب‌های کلی آن را

به دست آورید.

$$\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$$

۴- معادله‌ی مقابل را حل کنید و جواب‌های کلی را

به دست آورید.

$$\sin 2x = 0$$

فعالیت ۲۲-۲

دو تابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند. جاهای خالی را در الف و ب تکمیل کنید.

$$f(x) = \sin^2 x + 3, \quad g(x) = -\cos^2 x + 4$$

الف) $D_f = \square$ و $D_g = \square$

ب) $R_f = \square$ و $R_g = \square$

ج) آیا می‌توان گفت: $f = g$ ؟ چرا؟

نتیجه: دو تابع f و g برابرند، هرگاه دو شرط را دارا باشند:

الف - دامنه‌های آن‌ها برابر باشند، یعنی $D_f = D_g$

ب - به ازای تمامی مقادیر x از دامنه، $f(x) = g(x)$ باشد.

مثال ۱: آیا دو تابع مقابل برابرند؟

$$f(x) = x + 2, \quad g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x}$$

حل: D_f و D_g را به دست می‌آوریم، آن‌گاه ثابت می‌شود

برابر نیستند.

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

مثال ۲: آیا دو تابع مقابل برابرند؟

$$f(x) = 2 - 2 \sin^2 x \quad \text{و} \quad g(x) = 2 \cos^2 x$$

حل: D_f و D_g را به دست می‌آوریم:

$$D_f = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f = D_g$$

- برای هر x در دامنه‌ی تابع f ($D_f = D_g$)، $f(x) = g(x)$

زیرا

$$f = g, \text{ پس}$$

$$f(x) = 2 - 2 \sin^2 x = 2(1 - \sin^2 x) = 2 \cos^2 x$$

فعالیت ۲۳-۲

دو تابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 3k + 1 & x = 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x) = x + 2$$

جاهای خالی زیر را تکمیل کنید.

الف) $D_f = (\mathbb{R} - \{2\})$ $\{2\} = \square$ و $D_g = \square$

ب) $g(2) = \square$

ج) هرگاه $f(2) = g(2)$ آن گاه $k = \square$

د) باتوجه به مقدار k ، آیا می توان گفت دو تابع f و g

برابرند؟

تمرین

کدام یک از زوج تابع های زیر برابرند؟

الف) $f(x) = \frac{x^2 + 7x + 12}{x + 3}$ و $g(x) = x + 4$

ب) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & x \neq 1 \\ -2 & x = 1 \end{cases}$ و $g(x) = x - 3$

آزمون پایانی (۵)

محل پاسخ به سوالات آزمون پایانی (۵)

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 \sin x - \sqrt{3}}$$

$$f(x) = x - 1, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin x - 1 & \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{5\pi}{6} \\ \cos x & x < 0 \end{cases}$$

۱- $y = C$ و $C \in \mathbb{R}$ یک تابع ثابت است. نمودار تابع با توجه به دو مقدار مختلف ($C > 0$ یا $C < 0$) در کدام قسمت از محور x ها قرار می‌گیرد؟ (بالا یا پایین محور)

۲- هرگاه $A = \{0, 1, 2\}$ تابعی از A بنویسید که مختص اول هر زوج آن برابر مختص دوم باشد.

۳- دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی مقابل را به دست آورید.

۴- آیا دو تابع f و g برابرند؟ چرا؟

۵- تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. مقدار زیر را محاسبه کنید.

$$3f\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

بخش دوم

فصل ششم

عملیات روی تابع‌ها

هدف کلی

تعیین ضابطه‌ی $f \pm g$ و $f \times g$ و f/g با داشتن ضابطه‌ی تابع‌های f و g و کاربرد آن‌ها

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

- ۱- چهار عمل اصلی روی دو تابع را تعریف کند؛
- ۲- با داشتن ضابطه‌ی تابع‌های f و g ، ضابطه‌ی تابع $f \pm g$ و $f \times g$ و f/g را بنویسد؛
- ۳- دامنه‌ی تابع‌های $f \pm g$ و $f \times g$ و f/g را تعیین کند؛
- ۴- چهار عمل اصلی تابع‌ها را در موارد کاربردی استفاده کند.

پیش‌آزمون (۶)

محل پاسخ به سوالات پیش‌آزمون (۶)

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \text{ و } g(x) = \frac{x}{x-3}$$

$$f(x) = 7x + 1 \text{ و } g(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = \{(-1, 0), (2, 5), (9, 11), (11, 20)\}$$

$$g(x) = \{(9, 17), (7, 9), (-1, 3)\}$$

۱- توابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند:

الف) دامنه‌ی f و g را بیابید.

ب) ضابطه‌های $f+g$ و $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید و

سپس دامنه‌ی هر یک را به دست آورید.

۲- توابع f و g با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند.

مقادیر زیر را به دست آورید.

$$(f+g)(2) \text{ و } \left(\frac{g}{f}\right)(2)$$

۳- توابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند.

حساب کنید:

الف) $f \times g$ و $2f + 3g$

ب) D_{f+g} و $D_{f \times g}$

۲-۶- عملیات روی تابع‌ها (+, -, *, /)

اگر f و g دو تابع حقیقی باشند و به ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g دو عدد حقیقی به دست آید، می‌توان چهار عمل اصلی (اعمال روی توابع) یعنی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را تعریف کرد.

۱-۲-۶- جمع دو تابع f و g : جمع f و g به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

دامنه‌ی مجموع f و g برابر است با اشتراک دامنه‌های آن‌ها:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$f(x) = \sqrt{2-x} \quad \text{و} \quad g(x) = \sqrt{3x-5}$$

مثال: اگر داشته باشیم:

ضابطه‌ی $f+g$ را به دست آورید و سپس دامنه‌ی $f+g$

را محاسبه کنید.

$$f(x) + g(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{3x-5}$$

حل: ضابطه‌ی $f+g$ برابر است با:

با توجه به زوج بودن فرجه‌ی رادیکال و شرط $2-x \geq 0$

دامنه f برابر است با:

$$D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, 2-x \geq 0\} = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leq 2\} = (-\infty, 2]$$

$$D_g = \{x | x \in \mathbb{R}, 3x-5 \geq 0\} = \left\{x | x \in \mathbb{R}, x \geq \frac{5}{3}\right\}$$

- دامنه‌ی تابع g همانند تابع f برابر است با:

$$= \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$$

دامنه‌ی $f+g$ برابر است با اشتراک دامنه‌های f و g :

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = (-\infty, 2] \cap \left[\frac{5}{3}, +\infty\right) = \left[\frac{5}{3}, 2\right]$$

۲-۲-۶- تفریق دو تابع f و g : تفریق $g(x)$ از $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

دامنه‌ی تفاضل f و g برابر است با:

۳-۲-۶- حاصل ضرب دو تابع f و g : حاصل ضرب دو تابع f و g به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

- دامنه‌ی $f \times g$ برابر است با:

مثال ۲: تابع‌های مقابل مفروض است

$$f(x) = 2x - 1, g(x) = \frac{x}{x-1}$$

ضابطه‌ی $f \times g$ و $f - g$ را به دست آورید و دامنه‌ی هر یک

را محاسبه کنید.

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 2x - 1 - \frac{x}{x-1} \Rightarrow$$

ضابطه‌ی $f \times g$ برابر است با :

$$f(x) - g(x) = \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - x}{x-1} = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x-1}$$

- پس از مخرج مشترک خواهیم داشت :

$$f(x) \times g(x) = (2x - 1) \times \left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{2x^2 - x}{x-1}$$

ضابطه‌ی $f \times g$ برابر است با :

$$D_f = \mathbb{R}$$

- تابع f دوجمله‌ای است. دامنه‌ی آن برابر است با :

$$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

- تابع g کسری است دامنه‌ی آن برابر است با :

- دامنه‌ی $f - g$ و $f \times g$ برابر است با اشتراک دامنه‌های

$$D_{f-g} = D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

توابع f و g ، بنابراین خواهیم داشت :

۴-۶-۲- خارج قسمت دو تابع: تابع f/g به ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g که $g(x) \neq 0$ به صورت

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

مقابل تعریف می‌شود :

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x | x \in \mathbb{R}, g(x) = 0\}$$

دامنه‌ی f/g برابر است با :

مثال ۳: تابع‌های f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض اند :

$$f(x) = \sqrt{3-x} \text{ و } g(x) = \sqrt{1+x}$$

ضابطه‌ی f/g را به دست آورید و سپس دامنه‌ی آن را

محاسبه کنید.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{1+x}}$$

حل: چون فرجه رادیکال زوج است با شرط $3-x \geq 0$

دامنه‌ی f ، برابر است با :

$$D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, 3-x \geq 0\} = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leq 3\}$$

$$= (-\infty, 3]$$

- دامنه‌ی g با شرط $x+1 \geq 0$ برابر است با :

$$D_g = \{x | x \in \mathbb{R}, 1+x \geq 0\} = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq -1\}$$

$$= [-1, +\infty)$$

– دامنه‌ی f/g طبق رابطه کلی برابر است با:

$$D_{f/g} = D_f \setminus D_g - \{x | x \in \mathbb{R}, g(x) = 0\} \Rightarrow$$

آن‌گاه خواهیم داشت:

$$D_{f/g} = (-\infty, 3] \setminus [-1, +\infty) - \{x | x \in \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{1+x} = 0\}$$

$$\Rightarrow D_{f/g} = [-1, 3] - \{x | x \in \mathbb{R}, 1+x=0\}$$

پس $D_{f/g}$ برابر است با:

$$\Rightarrow D_{f/g} = [-1, 3] - \{-1\} = (-1, 3]$$

فعالیت ۲۴-۲

تابع‌های مقابل مفروض‌اند.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \text{ و } g(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

– جاهای خالی را تکمیل کنید.

$$D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 \geq 0\} = (-\infty, -2] \quad \square \quad (1)$$

$$D_g = \{x | x \in \mathbb{R}, 9 - x^2 \geq 0\} = [-3, \square] \quad (2)$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \square \quad (3)$$

$$D_{f/g} = D_f \setminus D_g - \{\pm 3\} = \square \quad (4)$$

مثال ۴: تابع‌های مقابل مفروض‌اند. مطلوب است:

$$f = \{(3, 5), (-4, 9), (11, 1)\}$$

$$D_{f \times g}, D_{f \pm g} \text{ (الف)}$$

$$g = \{(3, 9), (2, 5), (11, 17), (0, 12)\}$$

$$f \times g, f + g \text{ (ب)}$$

حل: برای پیدا کردن دامنه‌های $f \pm g$ و $f \times g$ دامنه‌های

f و g را می‌یابیم:

– اشتراک D_f و D_g برابر است با:

$$D_f = \{3, -4, 11\} \text{ و } D_g = \{3, 2, 11, 0\}$$

$$D_{f \pm g} = D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \{3, 11\}$$

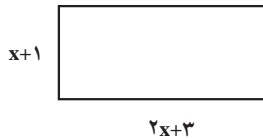
حل ب: برای یافتن $f + g$ ، $f \times g$ دامنه‌های مشترک f و

g را مشخص می‌کنیم و مقادیر مربوط به دامنه‌های مشترک را با

هم جمع و یا در هم ضرب می‌کنیم.

$$f + g = \{(3, 5 + 9), (11, 1 + 17)\} = \{(3, 14), (11, 18)\}$$

$$f \times g = \{(3, 5 \times 9), (11, 1 \times 17)\} = \{(3, 45), (11, 17)\}$$



مثال ۵: مستطیل مقابل مفروض است.

– ضابطه‌ای برای مساحت $S(x)$ بنویسید، سپس $S(3)$ را محاسبه کنید.

حل: مساحت مستطیل $S(x)$ برابر است با طول ضرب در عرض.

عرض طول

$$S(x) = (2x + 3) \times (x + 1)$$

– $S(3)$ برابر است با:

$$S(3) = (2 \times 3 + 3)(3 + 1) = 9 \times 4 = 36$$

مثال ۶: مختصات نقاط M و N در رویه‌رو مفروض است.

$$M \begin{cases} t + 4 \\ t^2 \end{cases} \text{ و } N \begin{cases} 2t - 1 \\ 4t + 3 \end{cases}$$

$$x_P = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{t + 4 + 2t - 1}{2} = \frac{3t + 3}{2}$$

$$y_P = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{t^2 + 4t + 3}{2}$$

الف) مختصات وسط MN را بر حسب t به دست آورید. سپس به ازای $t = 3$ مختصات وسط را محاسبه کنید. حل: x نقطه‌ی P وسط MN برابر است با:

– y نقطه‌ی P وسط MN برابر است با:

$$x_P = \frac{3(3) + 3}{2} = 6 \quad y_P = \frac{3^2 + 4(3) + 3}{2} = 12$$

– به ازای $t = 3$ ، مقادیر x_P و y_P برابر است با:

ب) طول پاره خط MN را بر حسب t یافته، سپس به ازای $t = 4$ مقدار MN را حساب کنید.

حل ب: رابطه‌ی محاسبه‌ی طول پاره خط MN برابر است

با:

$$MN = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}$$

$$MN = \sqrt{(t + 4 - 2t + 1)^2 + (t^2 - 4t - 3)^2}$$

– مختصات M و N را در رابطه‌ی MN قرار می‌دهیم:

– طول پاره خط MN بر حسب t به دست می آید.

$$\Rightarrow MN = \sqrt{(5-t)^2 + (t^2 - 4t - 3)^2}$$

$$MN = \sqrt{(5-4)^2 + (4^2 - 4 \times 4 - 3)^2}$$

$$= \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

– به ازای $t = 4$ مقدار MN را محاسبه می کنیم.

پاسخ:

تمرین: در مثال ۶، مختصات وسط پاره خط را به ازای

$t = 0$ حساب کنید.

مثال ۷: مقدار آبی که در هر ثانیه، بر حسب لیتر، از

فواره‌های A و B وارد استخر می شود به ترتیب از دو تابع f و g

با ضابطه‌های مقابل محاسبه می شود.

$$f(t) = 4t \text{ و } g(t) = 7t$$

الف) مقدار آبی که از فواره‌های A و B وارد استخر

می شود از چه دستوری محاسبه می شود؟

حل: اگر مجموع $f(t)$ و $g(t)$ را $h(t)$ فرض کنیم داریم:

$$h(t) = (f+g)(t) = f(t) + g(t) = 4t + 7t$$

– آبی که وارد استخر می شود برابر است با:

$$h(t) = 11t$$

ب) در 20 ثانیه چقدر آب وارد استخر می شود؟

$$h(t) = 11t \Rightarrow$$

به جای t عدد 20 را در تابع با ضابطه‌ی $h(t)$ قرار می دهیم:

$$h(20) = 11 \times 20 = 220 \text{ لیتر}$$

ج) فرض کنید گنجایش این استخر معادل 7700 لیتر

باشد، پس از چند ثانیه پر می شود؟

$$h(t) = 11t$$

– مقدار $h(t)$ را برابر ظرفیت استخر قرار می دهیم، بنابراین:

$$11t = 7700 \Rightarrow t = \frac{7700}{11} \Rightarrow t = 700 \text{ ثانیه}$$

تمرین

$$f(t) = t^2 + 2t, g(t) = 3t$$

ضابطه‌ی تابع‌های مقابل داده شده‌اند :

۱- ضابطه‌ی $(f \pm g)$ را محاسبه کنید.

۲- به ازای $t = 3$ مقدار $(f + g)(t)$ را پیدا کنید.

۳- به ازای $t = -3$ مقدار $(f - g)(t)$ را پیدا کنید.

مثال ۸: تابع‌های f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند.

$$f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{2-x}$$

- دامنه‌های $f + g$ و f/g را بیابید.

حل: با توجه به زوج بودن فرجه‌ی رادیکال، دامنه‌ی f برابر

است با :

$$D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} = [0, +\infty)$$

- با توجه به زوج بودن فرجه‌ی رادیکال دامنه‌ی g برابر

است با :

$$D_g = \{x | x \in \mathbb{R}, 2 - x \geq 0\} = (-\infty, 2]$$

- دامنه‌ی $f + g$ برابر است با :

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [0, 2]$$

- دامنه‌ی f/g را محاسبه می‌کنیم،

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x | x \in \mathbb{R}, g(x) = 0\} \Rightarrow$$

دامنه‌ی f/g برابر است با :

$$D_{f/g} = [0, 2] - \{2\} = [0, 2)$$

تمرین

۱- تابع‌های f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند :

الف) ضابطه‌های $f \times g$ و g/f را محاسبه کنید.

ب) دامنه‌های $f - g$ و g/f را محاسبه کنید.

۲- دو تابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند :

$$f = \sqrt{x-1} \text{ و } g(x) = \sqrt{9-x^2}$$

$$f(x) = 3x + 1, g(x) = x^2 - 2x$$

مقدار $(f + g)(3)$ را محاسبه کنید.

آزمون پایانی (۶)

محل پاسخ به سوالات آزمون پایانی (۶)

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 - 4}, \quad g(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{و} \quad g(x) = 3x - 2$$

۱- تابع های f و g با ضابطه های مقابل مفروض اند :

۲- دامنه های $f - g$ ، $f \times g$ و f/g را به دست آورید.

۳- تابع f با ضابطه ی مقابل مفروض است. حاصل عبارت های $f(3) \times f(2)$ و $f(3) + f(-2)$ را به دست آورید.

۴- تابع های f و g با ضابطه های روبه رومفروض اند :

الف) ضابطه ی $f \times g$ و f/g را بنویسید.

ب) مقدار $(f+g)(0)$ را بیابید.

ج) مقدار $\frac{f(8)}{g(2)}$ را بیابید.

۵- هرگاه

$$f = \{(-1, 1), (7, 3), (9, 5), (5, 11), (0, 2), (4, 0)\}$$

$$g = \{(-1, 0), (2, 5), (7, 11), (-5, 11), (3, 9)\}$$

الف) دامنه های $f \pm g$ و $f \times g$ را بیابید.

ب) توابع $2f + 3g$ و $f \times g$ را تعیین کنید.

بخش دوم

فصل هفتم

ترکیب دو تابع

هدف کلی

ترکیب دو یا چند تابع و کاربردهای آن در حل مسائل

- هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:
- ۱- ضابطه‌ی $f \circ g$ و $g \circ f$ را با داشتن ضابطه‌ی f و g بنویسد؛
 - ۲- مقدار تابع‌های $f \circ g$ و $g \circ f$ را در بعضی از نقطه‌های دامنه‌اش تعریف کند؛
 - ۳- مسائل مربوط به کاربرد ترکیب تابع‌ها را حل کند.

پیش‌آزمون (۷)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۷)

$$f(x) = 3x + 2$$

- ۱- تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است :
- الف) مقادیر $f(0)$ و $f(-2)$ را به‌دست آورید.
- ب) $f(x-2)$ را بنویسید.
- ج) $f(3x+2)$ را بنویسید.

$$f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = x^2 - 1$$

- ۲- تابع‌های f و g با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند.

ضابطه‌های $f \circ g$ و $g \circ f$ را بنویسید.

$$f(x) = 3x^2 + 2bx - 7$$

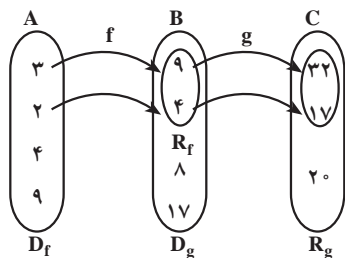
- ۳- تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. اگر
- $f(-1) = 4$ باشد مقادیر b و $f(-2)$ را بیابید.

$$f(x) = 2x + 1, \quad (f \circ g)(x) = 3x + 4$$

- ۴- تابع f و $f \circ g$ با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند،
- $g(3)$ را بنویسید.

۲-۷- ترکیب دو تابع

فعالیت ۲-۲۵



شکل ۲-۱۲۵



فرض کنید $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow C$

$$x \rightarrow 3x + 5 \quad x \rightarrow x^2$$

با توجه به تابع های f و g و شکل ۲-۱۲۵ به سؤال های

زیر پاسخ دهید.

۱- مقدارهای $f(3)$ و $g(9)$ برابر چه اعدادی هستند؟

۲- مقدارهای $f(2)$ و $g(4)$ برابر چه اعدادی هستند؟

۳- آیا روابط $g(f(2)) = g(4)$ و $g(f(3)) = g(9)$

صحیح است؟

۴- مجموعه ی $R_f \cap D_g$ را به دست آورید.

۵- با توجه به شکل ۲-۱۲۵ و روابط بالا، آیا می توان

تابع h را به صورت $h: A \rightarrow C$ با ضابطه ی زیر تعریف کرد؟

$$x \rightarrow 3x^2 + 5$$

(در حالت کلی $g(f(x))$ را می توان با نماد $(g \circ f)(x)$

نشان داد)

تعریف: دو تابع f و g مفروض اند. ترکیب تابع g با f را با

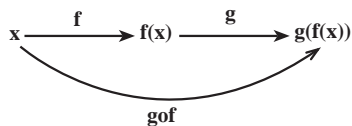
$g \circ f$ نشان می دهند و تابع $g \circ f: A \rightarrow C$ است که به ازای هر

$x \in A$ ، $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. شکل ۲-۱۲۶ نمودار ترکیب

این دو تابع است.

تذکر: $g \circ f$ هنگامی قابل تعریف است که $D_g \cap R_f \neq \emptyset$.

$$f: A \longrightarrow B \quad \text{و} \quad g: B \longrightarrow C$$



شکل ۲-۱۲۶

مثال: تابع f با ضابطه ی روبه رو مفروض است:

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$f(1), f(3), f(z), f(-2z+1)$$

مقدارهای مقابل را به دست آورید.

$$f(1) = 1^2 + 2(1) + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

حل: برای محاسبه ی $f(1)$ به جای x ، ۱ را قرار می دهیم:

$$f(3) = 3^2 + 2(3) + 3 = 9 + 6 + 3 = 18$$

- برای محاسبه ی $f(3)$ ، به جای x ، ۳ را قرار می دهیم:

– برای محاسبه ی $f(z)$ ، به جای x ، z را قرار می‌دهیم:

$$f(z) = z^2 + 2z + 3$$

– برای محاسبه ی $f(-2z+1)$ ، به جای x ، $-2z+1$ را

قرار می‌دهیم:

$$f(-2z+1) = (-2z+1)^2 + 2(-2z+1) + 3$$

– با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$\Rightarrow f(-2z+1) = 4z^2 - 4z + 1 - 4z + 2 + 3$$

$$\Rightarrow f(-2z+1) = 4z^2 - 8z + 6$$

– پس از ساده کردن $f(-2z+1)$ به دست می‌آید:

مثال ۲: توابع f و g با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض اند:

$(fog)(x)$ ، $gof(x)$ را به دست آورید.

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = -2x + 3$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (-2x + 3)^2$$

حل: روش اول: fog برابر است با:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = -2f(x) + 3 = -2x^2 + 3$$

– gof برابر است با:

روش دوم: در $f(g(x))$ به جای $g(x)$ مقدار آن را قرار

می‌دهیم، یعنی:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(-2x + 3) = (-2x + 3)^2$$

– در $g(f(x))$ به جای $f(x)$ مقدار آن را قرار می‌دهیم:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = -2x^2 + 3$$

مثال ۳: تابع‌های f و fog با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض اند.

$$f(x) = 4x + 1 \quad \text{و} \quad (fog)(x) = 3x - 1$$

– ضابطه تابع g را بیابید، سپس $g(1)$ را حساب کنید.

حل: در رابطه ی fog به جای x در $f(x)$ مقدار $g(x)$ را

قرار می‌دهیم؛

$$(fog)(x) = f(g(x)) = 4g(x) + 1$$

از تابع fog با ضابطه ی $3x-1$ خواهیم داشت :

$$\Rightarrow 4g(x)+1=3x-1$$

- ضابطه ی g برابر است با :

$$\Rightarrow 4g(x)=3x-1-1 \Rightarrow g(x)=\frac{3x-2}{4}$$

- در $g(x)$ ، به جای x عدد 1 را قرار می دهیم :

$$g(1)=\frac{3 \times 1-2}{4}=\frac{1}{4}$$

مثال 4: تابع های f و g مفروض اند.

$$f = \{(-1, 7), (3, 4), (7, 5), (4, 2)\}$$

$$g = \{(7, 11), (0, 1), (5, 18), (9, 9)\}$$

$$D_g = \{7, 0, 5, 9\} \text{ و } R_f = \{7, 4, 5, 2\} \Rightarrow \text{حل الف)}$$

الف) D_g و R_f را به دست آورید.

$$D_g \cap R_f = \{7, 5\}$$

$$(g \circ f)(7) = g(f(7)) = g(5) = 18 \quad \text{حل ب)}$$

ب) $g \circ f(7)$ و $g \circ f(-1)$ را به دست آورید.

$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(7) = 11$$

ج) دامنه ی gof را به دست آورید.

$$g \circ f = \{(7, 18), (-1, 11)\} \Rightarrow \text{حل ج)}$$

- دامنه ی gof برابر است با :

$$D_{g \circ f} = \{7, -1\}$$

مثال 5: رابطه ی مقابل مفروض است. $f(t)$ را به دست

$$f(-4t+1) = 5t-1$$

آورید.

حل: عبارت $-4t+1$ را برابر متغیر x قرار می دهیم و t را

بر حسب x محاسبه می کنیم.

$$-4t+1=x \Rightarrow -4t=x-1 \Rightarrow t=\frac{x-1}{-4}$$

- در تابع f، متغیرها را بر حسب x مرتب می کنیم.

$$f(x) = 5\left(\frac{x-1}{-4}\right) - 1 = \frac{5x-5}{-4} - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5x-5+4}{-4}$$

- مخرج مشترک می گیریم :

- ضابطه $f(x)$ برابر است با :

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5x-1}{-4}$$

- به جای متغیر x متغیر t را قرار می دهیم، پس داریم :

$$f(t) = \frac{5t-1}{-4}$$

مثال ۶: تابع‌های f و $(f \circ g)$ با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند.

مقدار $g(3)$ را محاسبه کنید.

$$f(x) = 3x + 2 \text{ و } (f \circ g)(x) = \frac{2x-1}{1-5x}$$

حل: ابتدا $(f \circ g)(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) + 2 = \frac{2x-1}{1-5x} \Rightarrow$$

– از طرف دوم رابطه مخرج مشترک می‌گیریم.

$$3g(x) = \frac{2x-1}{1-5x} - 2 = \frac{2x-1-2+10x}{1-5x} = \frac{12x-3}{1-5x}$$

– ضابطه‌ی $g(x)$ برابر است با:

$$\Rightarrow 3g(x) = \frac{3(4x-1)}{1-5x} \Rightarrow g(x) = \frac{4x-1}{1-5x}$$

– به جای x ، عدد ۳ را قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow g(3) = \frac{4(3)-1}{1-5(3)} \Rightarrow g(3) = \frac{11}{-14}$$

فعالیت ۲۶-۲

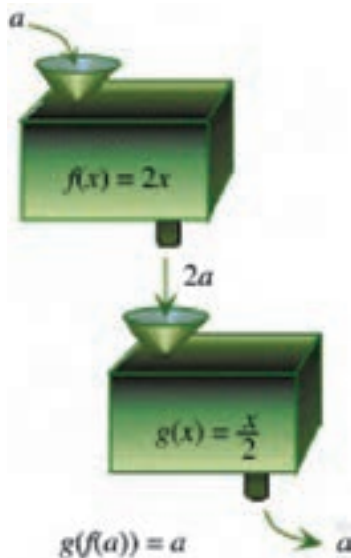
تابع‌های f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند.

$$f(x) = 2x \text{ و } g(x) = \frac{x}{2}$$

با توجه به شکل ۲۶-۱۲۷ آیا می‌توان ادعا کرد که:

الف) $(g \circ f)(2) = 2$ ؟ چرا؟

ب) $(g \circ f)(a) = a$ ؟ چرا؟



شکل ۲۶-۱۲۷

مثال ۷: تابع‌های f و g با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند.

$$f(x) = 3x + 7 \text{ و } g(x) = 2x - 3$$

– معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$3(f \circ g)(x) + 2(g \circ f)(x) = 7$$

حل: ضابطه‌ی تابع fog برابر است با:

$$(fog)(x) = 3g(x) + 7 = 3(2x - 3) + 7$$

$$\Rightarrow (fog)(x) = 6x - 2$$

– ضابطه‌ی تابع gof برابر است با:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = 2f(x) - 3$$

$$= 2(3x + 7) - 3$$

– پس از ساده کردن داریم:

$$\Rightarrow gof(x) = 6x + 11$$

– مقادیر $(gof)(x)$ و $(fog)(x)$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$3(fog)(x) + 2(gof)(x) = 18x - 6 + 12x + 22 = 7$$

– مقدار x برابر است با:

$$\Rightarrow 3 \cdot x + 16 = 7 \Rightarrow 3 \cdot x = 7 - 16 \Rightarrow x = \frac{-3}{1}$$

آزمون پایانی (۷)

محل پاسخ به سوالات آزمون پایانی (۷)

$$f(x) = \frac{5x+3}{3x-1} \text{ و } g(x) = 1-4x$$

$$f(x) = 2x+1 \text{ و } g(x) = 4x-3$$

$$f(x) = 3x+1 \text{ و } (fog)(x) = \frac{1}{4}x+3$$

$$f(x) = x^2+2 \text{ و } g(x) = x+3$$

۱- دو تابع f و g با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند. مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $f(0)$ و $g(f(0))$

ب) $f(g(1))$ و $g(1)$

۲- دو تابع f و g با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند. ضابطه‌ی توابع $f \circ g$ ، $g \circ f$ و $f \circ f$ را بنویسید.

۳- دو تابع f و $(f \circ g)$ با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند. مقدار $g(-2)$ را حساب کنید.

۴- دو تابع f و g با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند. ریشه‌های $(g \circ f)(x) = 3x$ را به دست آورید.

بخش سوم

حد و پیوستگی

هدف کلی بخش

مفاهیم حد و به‌کارگیری آن در تعیین پیوستگی توابع

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل
اول	حد
دوم	پیوستگی
سوم	تعمیم حد

بخش سوم

فصل اول

حد

هدف کلی

مفاهیم میل کردن یک متغیر به یک عدد و میل کردن مقادیرهای یک تابع به عدد و تعمیم مفهوم حد

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

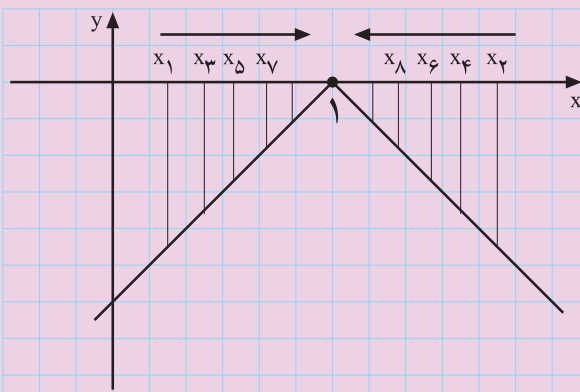
- ۱- میل کردن یک متغیر را از چپ و راست به یک عدد، به سوی $+\infty$ یا به سوی $-\infty$ تعریف کند؛
- ۲- حد تابع را تعریف کند؛
- ۳- حد چپ و راست یک تابع در یک نقطه را تعریف کند؛
- ۴- حد چپ و راست تابع را از روی نمودار آن تعیین کند؛
- ۵- حد چپ و راست تابع را از روی ضابطه‌ی آن تعیین کند.
- ۶- حد توابع کسری را که صورت و مخرج آن‌ها، (وقتی که $x \rightarrow a$) برابر صفر می‌شود، به دست آورد.
- ۷- قضیه فشردگی را در تعیین حد بعضی از توابع به کار برد.

پیش‌آزمون (۱)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۱)



شکل ۳-۱



شکل ۳-۲

۱- اعداد $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ بر روی محور اعداد حقیقی مشخص شده‌اند (شکل ۳-۱).
الف) این اعداد به کدام عدد نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

ب) این اعداد از کدام سمت (راست یا چپ) به این عدد نزدیک می‌شوند؟

۲- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -|x-1|$ در \mathbb{R} تعریف شده است. با توجه به شکل ۳-۲ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) هرگاه x_1, x_3, x_5, \dots از چپ به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر شوند، $f(x_1), f(x_3), \dots$ به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

ب) هرگاه مقادیر x_2, x_4, x_6, \dots از مقادیر بیشتر از ۱ به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر گردند، $f(x_2), f(x_4), \dots$ به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

۱-۳- حد

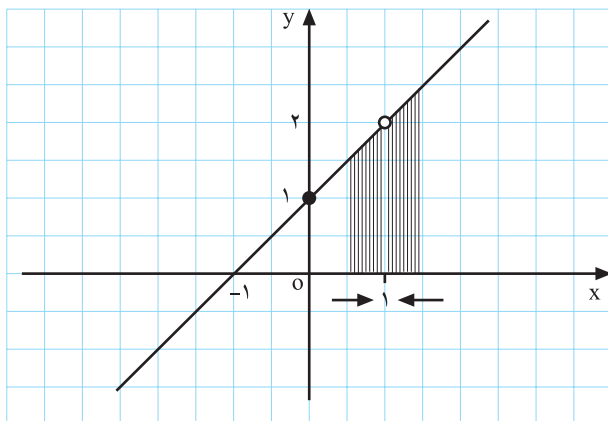
مفهوم حد یکی از مفاهیم پایه در ریاضیات است. در این بخش سعی شده که به صورت شهودی به بیان این مفهوم بپردازیم.

فعالیت ۱-۳

نمودارهای مقابل را نگاه کنید، سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید.

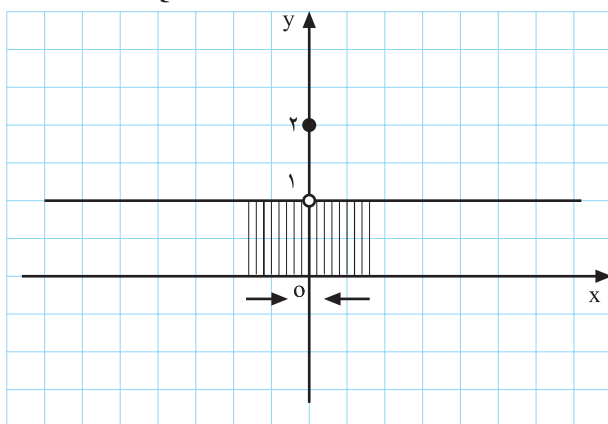
- ۱- در شکل ۳-۳ وقتی بر روی محور x ها به عدد ۱ نزدیک شویم مقدار y به کدام عدد نزدیک می شود؟
- ۲- آیا مقدار تابع در $x=1$ وجود دارد؟
 بله خیر

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ و } x \neq 1$$



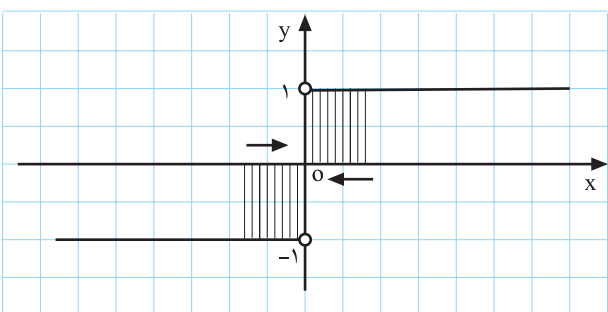
شکل ۳-۳

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$



شکل ۳-۴

$$f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



شکل ۳-۵

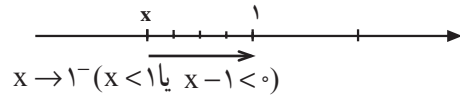
- ۳- در شکل ۳-۴ وقتی x از راست و یا از چپ به عدد صفر (0) نزدیک و نزدیک تر می شود مقدار y به کدام عدد نزدیک می شود؟
 پاسخ:

- ۴- در شکل ۳-۵ وقتی که x از سمت راست صفر یعنی از مقادیر بیشتر از صفر به عدد 0 نزدیک و نزدیک تر می شود مقدار $f(x)$ به کدام عدد نزدیک تر می شود؟
- ۵- در شکل ۳-۵ وقتی که x از سمت چپ صفر یعنی از مقادیر کم تر از 0 به عدد صفر نزدیک تر می شود $f(x)$ به کدام عدد نزدیک می شود؟

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1, \quad x \neq 1$$

جدول ۳-۱

x	0 →	0/8 →	0/9 →	0/99 →	0/999 →	0/9999 →	1
f(x)	1	1/8	1/9	1/99	1/999	1/9999	?



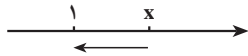
(میل کردن x به عدد ۱ از چپ)

مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

جدول ۳-۱ مقادیر مختلف تابع را به ازای چند عدد نزدیک به ۱ نشان می‌دهد. همان‌طور که در جدول ۳-۱ مشاهده می‌کنید، هرچه مقدار x با مقادیر کمتر از ۱ به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد (از چپ به عدد ۱ میل می‌کند) تابع f یا y به ۲ میل می‌کند و هرچه x با مقادیر بیشتر از ۱ به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد (از راست به ۱ میل می‌کند) مقدار تابع f یا y به عدد ۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود (به عدد ۲ میل می‌کند) (جدول ۳-۲).

جدول ۳-۲

x	1) 1/0001) 1/001) 1/01) 1/1) 2
f(x)	?) 2/0001) 2/001) 2/01) 2/1) 3



$x \rightarrow 1^+$ (یا $x > 1$)

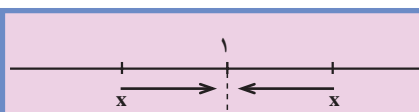
(میل کردن x به عدد ۱ از راست)

از ترکیب نماد جدول‌های ۳-۱ و ۳-۲ جدول

۳-۳ به دست می‌آید.

جدول ۳-۳

x	0 →	0/8 →	0/9 →	0/99 →	0/999 →	0/9999 →	1) 1/0001) 1/001) 1/01) 1/1) 2
f(x)	1	1/8	1/9	1/99	1/999	1/9999	2) 2/0001) 2/001) 2/01) 2/1) 3



(میل کردن x به عدد ۱)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

نتیجه: حد تابع f وقتی x به ۱ میل می‌کند برابر ۲ می‌باشد و

آن را به صورت مقابل می‌نویسیم:

فعالیت ۲-۳

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است :

با تکمیل جدول ۳-۴ به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

جدول ۳-۴

x	$-1 \rightarrow$	$-0/1 \rightarrow$	$-0/0/1 \rightarrow$	$-0/00/1 \rightarrow$	0	$0/00/1$	$0/0/1$	$0/1$	$0/5$	1
f	۱	<input type="checkbox"/>	۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱	<input type="checkbox"/>	۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = ?$$

۱- هرگاه x از چپ به عدد 0 میل کند $f(x)$ به کدام عدد

میل می‌کند؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ?$$

۲- هرگاه x از راست به عدد صفر میل کند $f(x)$ به کدام

عدد میل می‌کند؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$$

۳- حد $f(x)$ وقتی x به 0 میل می‌کند چیست؟

تابع f در نقطه‌ی $x = a$ زمانی دارای حد می‌باشد که حد چپ و حد راست تابع در این نقطه برابر باشند. به

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

بیان دیگر :

فعالیت ۳-۳

تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. با تکمیل جاهای

خالی به سؤال‌های ۱، ۲ و ۳ پاسخ دهید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} = \frac{\boxed{}}{x} = 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{|x|}{x} = \frac{\boxed{}}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

۱- با توجه به جدول ۵-۳ وقتی x از چپ به صفر میل

می کند f(x) به چه عددی میل می کند؟

جدول ۵-۳

x	۱.	۰/۱.	۰/۰۱.	۰/۰۰۱.	۰/۰۰۰۱.	۰
f(x)	۱	۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱	۱

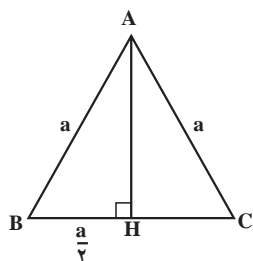
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \boxed{}$$

جدول ۶-۳

x	۰	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۷	۱
f(x)	۱	<input type="checkbox"/>	۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \boxed{}$$



شکل ۶-۳

$$BH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AH \text{ و } AB = BC = AC = a \quad (1)$$

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 \quad AH^2 = AB^2 - BH^2$$

$$AH^2 = AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \quad AH^2 = \frac{4AB^2 - AB^2}{4}$$

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \quad (2)$$

$$S = \frac{1}{2} (a) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right) \quad S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

۲- با توجه به جدول ۶-۳ وقتی x از راست (با مقادیر

بیشتر از صفر) به عدد صفر میل می کند f(x) به چه عددی میل

می کند؟

۳- با توجه به سؤال های ۱ و ۲ آیا تابع f در $x = 0$ دارای

حد می باشد؟ چرا؟

مثال: در شکل ۶-۳ مثلث متساوی الاضلاع به طول

ضلع a رسم شده است. مساحت مثلث را بر حسب a حساب کنید.

حل: در مثلث متساوی الاضلاع میانه، ارتفاع و

عمود منصف بر یکدیگر منطبق می باشند، در نتیجه BH برابر است با:

— مساحت مثلث از رابطه‌ی مقابل به دست می آید:

— طول ارتفاع مثلث قائم الزاویه‌ی AHB را محاسبه

می کنیم:

— مقدار BH و AB را در رابطه قرار می دهیم و AH را

به دست می آوریم.

— با قراردادن مقدار AH و BC در رابطه‌ی مساحت

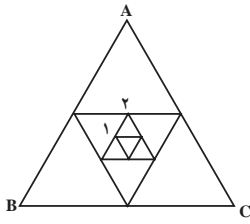
خواهیم داشت:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

مساحت مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a برابر است با:

برای مثال، اگر طول ضلع برابر $a_0 = 4$ باشد داریم:

$$a_0 = 4 \Rightarrow S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} (4)^2 \Rightarrow S_0 = 4\sqrt{3}$$



شکل ۳-۷

۲) هرگاه وسط ضلع‌های مثلث شکل ۳-۶ را به هم وصل کنیم مثلث جدیدی (شکل ۳-۷) به دست می‌آید. اگر a_1 طول ضلع و S_1 مساحت این مثلث باشد، a_1 و S_1 را حساب کنید.

۳- هرگاه عمل قبل را سه مرتبه‌ی دیگر ادامه دهیم (شکل ۳-۷) در هریک از مثلث‌های ایجاد شده طول ضلع مثلث و مساحت آن را محاسبه کنید.

$$a_1 = \frac{a_0}{2} = 2 \text{ و } S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} (2)^2 = \sqrt{3}$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = 1 \text{ و } S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{1}{2} \text{ و } S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

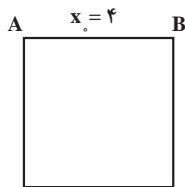
$$a_4 = \frac{a_3}{2} = \frac{1}{4} \text{ و } S_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{64}$$

۴- هرگاه عمل فوق را n مرتبه تکرار کنیم مقدارهای a_n و S_n به چه عددی میل می‌کنند؟

$$a_0 = 4, a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{4},$$

همان طوری که می‌بینیم هر قدر تعداد این مراحل زیاد شود منجر کسرهای a_n و S_n رو به افزایش است به طوری که حاصل کسر از هر عدد کوچک مثبتی کمتر می‌شود یعنی به سمت صفر میل می‌کند.

$$S_0 = 4\sqrt{3}, S_1 = \sqrt{3}, S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}, S_3 = \frac{\sqrt{3}}{16}, S_4 = \frac{\sqrt{3}}{64},$$

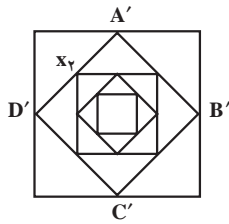


شکل ۳-۸

$$S_0 = x_0^2 \Rightarrow S_0 = 16$$

فعالیت ۳-۴

۱- در شکل ۳-۸ مربعی به طول ضلع ۴ را مشاهده می‌کنید. اگر x طول ضلع و S_0 مساحت مربع باشد مساحت مربع چقدر است؟



شکل ۹-۳

$$x_1^2 = 2^2 + \square^2 \Rightarrow x_1 = 2\sqrt{\square}$$

$$S_1 = x_1^2 = \square$$

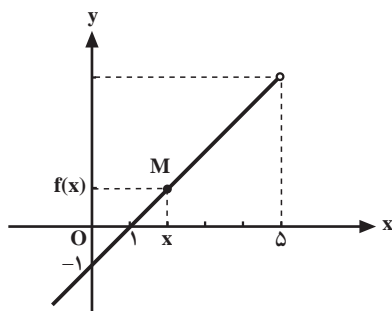
$$x_2^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4 \Rightarrow x_2 = \square$$

$$S_2 = x_2^2 = \square$$

$$x_3^2 = \square^2 + 1^2 = 2, x_3 = \sqrt{2}, S_3 = x_3^2 = \square$$

$$x_4^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \square = 1, x_4 = \square, S_4 = x_4^2 = 1$$

$$S_n \rightarrow \square, x_n \rightarrow \square$$



$$\lim_{x \rightarrow \delta} f(x) = \square$$

شکل ۱۰-۳

۲- وسط ضلع‌های مربع را به یکدیگر وصل کنید (شکل

۳-۹) طول ضلع جدید را x_1 و مساحت آن را S_1 می‌نامیم. x_1 و S_1 را به دست آورید.

۳- عمل فوق را سه بار دیگر تکرار می‌کنیم.

در هر یک از مربع‌های ایجاد شده طول ضلع مربع و مساحت آن را محاسبه کنید.

۴- هرگاه $n \rightarrow +\infty$ ، x_n به چه عددی میل می‌کند؟

۵- هرگاه $n \rightarrow +\infty$ ، S_n به چه عددی میل می‌کند؟

مثال: در شکل مقابل متحرک M روی مسیر داده شده از

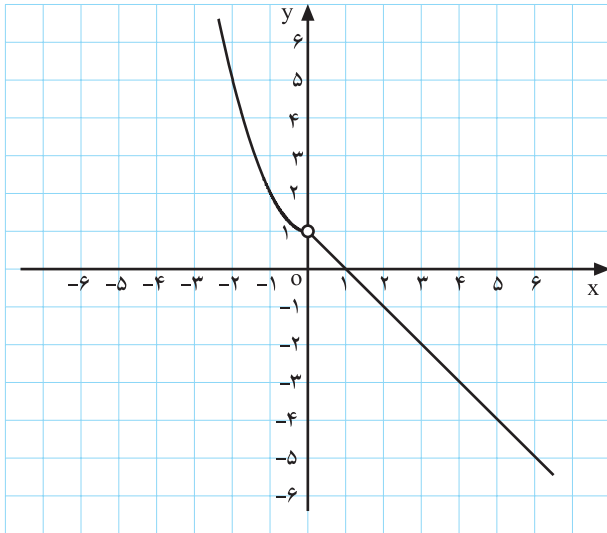
چپ به راست حرکت می‌کند، وقتی x به عدد ۵ نزدیک و نزدیک‌تر

شود، $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شود؟

تعریف حد: در یک بازه‌ی باز شامل عدد a ، تابع $f(x)$ را گوییم دارای حد است اگر هر قدر متغیر x به عدد a نزدیک شود مقدار تابع به عدد L نزدیک گردد (ممکن است $f(a)$ تعریف نشده باشد). این موضوع را با نماد

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ ریاضی نشان می‌دهیم.}$$

فعالیت ۵-۳



شکل ۱۱-۳

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ 1 - x & x > 0 \end{cases}$$

تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

تعریف شده است (شکل ۱۱-۳).

۱- با توجه به شکل ۱۱-۳، حد $f(x)$ را وقتی $x \rightarrow 0$

به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \square$$

جدول ۷-۳

x	0	$0/00001$	$0/001$	$0/01$	$0/1$	$0/7$	1
$f(x)$	$?$	$0/99999$	\square	\square	$0/9$	$0/3$	0

۲- جدول ۷-۳ را کامل کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \square$$

۳- وقتی $x \rightarrow 0^+$ ، حد $f(x)$ چیست؟

جدول ۸-۳

x	$-1 \rightarrow$	$-0/1 \rightarrow$	$-0/01 \rightarrow$	$-0/001 \rightarrow$	$-0/0001$	0
$f(x)$	2	$1/01$	\square	$1/00001$	\square	$?$

۴- جدول ۸-۳ را کامل کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \square$$

۵- وقتی $x \rightarrow 0^-$ ، حد $f(x)$ به چه عددی میل می کند؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \square$$

۶- با توجه به مراحل ۳ و ۵ حد مقابل را محاسبه کنید.

فعالیت ۶-۳

تابع f با ضابطه روبه‌رو مفروض است.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x > 0 \\ a + 3 & x < 0 \end{cases}$$

جدول ۳-۹

x	0^-	$0/0001^-$	$0/001^-$	$0/01^-$	$0/1^-$
$f(x)$		<input type="text"/>	$1/002^-$	<input type="text"/>	$1/2^-$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \square$$

الف) جدول ۳-۹ را با توجه به مقادیر $f(x)$ تکمیل کنید.

ب) با توجه به جدول وقتی $x \rightarrow 0^+$ مقدار $f(x)$ به چه

عددی میل می‌کند؟

ج) اگر تابع f در $x = 0$ دارای حد باشد مقدار a را محاسبه

کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow 1 = \square \Rightarrow a = -2$$

تمرین

۱- تابع f به صورت روبه رو تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & x > 2 \\ x-5 & x < 2 \end{cases}$$

خیر بلی

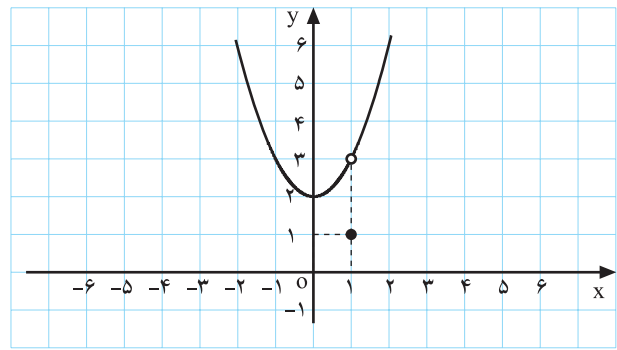
الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

ب) آیا تابع f در $x=2$ دارای حد می باشد؟

۲- در هریک از شکل های زیر مقدار حد را در صورت

وجود به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \text{ (الف)}$$

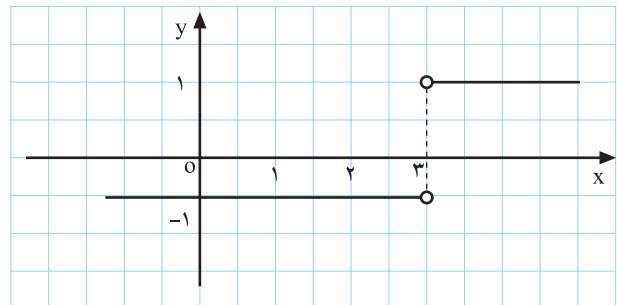


شکل ۱۲-۳

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = ?$$

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-3} \text{ (ب)}$$



شکل ۱۳-۳

۳- در هریک از تمرین های زیر ابتدا جدول داده شده را

کامل کنید سپس مقدار حد را به دست آورید.

جدول های ۱۰-۳

x	$1/9 \rightarrow$	$1/99 \rightarrow$	$1/999 \rightarrow$	2	$2/001 \rightarrow$	$2/01 \rightarrow$	$2/1 \rightarrow$
$f(x)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

(الف) $f(x) = 2x + 7$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \square$

جدول ۱۱-۳

x	۴/۰۰۰۰۱)	۴/۰۰۰۱)	۴/۰۱)	۴/۱
f(x)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

(ب) $f(x) = \sqrt{x-4}$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \square$

۴- مقدار b را طوری بیابید که تابع f با ضابطه‌ی مقابل در نقطه‌ی $x = 3$ دارای حد باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \cos \pi x + b & x < 3 \\ x^2 + 2 & x > 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\square} = 1 & x > 0 \\ \frac{x}{\square} = \bigcirc & x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \square$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \square$

خیر بله

۵- تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

نمودار آن را رسم کنید و سپس $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ را به‌دست آورید.

۶- تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

(الف) جاهای خالی را پر کنید.

(ب) نمودار تابع f را رسم کنید.

(ج) با استفاده از نمودار رسم شده حدهای مقابل را به‌دست آورید.

(د) آیا تابع فوق در نقطه‌ی $x = 0$ دارای حد می‌باشد؟

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\begin{array}{r} f(x) \text{ مقسوم} \quad | \quad x-a \\ \hline L(x) \quad \text{مقسوم علیه} \\ r \quad \text{خارج قسمت} \\ \hline \text{باقی مانده} \end{array}$$

$$f(x) = (x-a)q(x) + r, r \in \mathbb{R}$$

الف) $4x^2 - 7x + 6 \div x - 2$

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 7x + 6 \quad | \quad x - 2 \\ \hline \quad \square \\ \hline \end{array}$$

$$4x(x-2) = 4x^2 - 8x$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 7x + 6 \quad | \quad x - 2 \\ \hline 4x^2 \quad 8x \quad \quad \square \\ \hline \quad x + 6 \\ \quad x \quad 2 \\ \hline \quad \quad 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 7x + 6 \quad | \quad x - 2 \\ \hline 4x^2 \quad 8x \quad \quad \square \\ \hline \quad x + 6 \\ \quad x \quad 2 \\ \hline \quad \quad 8 \end{array}$$

$$(4x+1)(x-2) + 8 = 4x^2 - 7x + 6$$

ب) $x^2 + 7x + 12 \div x + 4$

$$\begin{array}{r} x^2 + 7x + 12 \quad | \quad x + 4 \\ \hline \quad \square \\ \hline \end{array}$$

$$x(x+4) = x^2 + 4x$$

۱-۱-۳ بخش پذیری چند جمله ای ها بر $x-a$: اگر

$f(x)$ یک چند جمله ای از درجه n باشد، وقتی $f(x)$ را بر $x-a$ تقسیم می کنیم خارج قسمت و باقی مانده ی یکتایی مانند $q(x)$ و r به دست می آید.

در نتیجه به ازای هر x داریم:

مثال: باقی مانده و خارج قسمت تقسیم های مقابل را به دست

آورید:

حل: الف)

ابتدا $O = \frac{4x^2}{x} = 4x$ را در مقسوم علیه ضرب کرده و

حاصل را از مقسوم کم می کنیم؛ داریم:

سپس $\square = \frac{x}{x} = 1$ را در مقسوم ضرب کرده و حاصل

را از $x+6$ کم می کنیم؛ داریم:

خارج قسمت = $4x+1$

= 8 باقی مانده

حل: ب) ابتدا $O = \frac{x^2}{x} = x$ را در مقسوم علیه ضرب

کرده و حاصل را از مقسوم کم می کنیم؛ داریم:

$$\begin{array}{r} x^2 + 7x + 12 \quad | \quad x + 4 \\ x^2 \pm 4x \\ \hline 3x + 12 \end{array}$$

$$3(x+4) = 3x+12$$

سپس $\square = \frac{3x}{x} = 3$ را در مقسوم علیه ضرب کرده و حاصل را از $3x+12$ کم می کنیم؛ داریم:

$$\begin{array}{r} x^2 + 7x + 12 \quad | \quad x + 4 \\ x^2 \pm 4x \\ \hline 3x + 12 \\ 3x \pm 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$g(x) = \text{خارج قسمت} = x + 3$$

$$r = \text{باقی مانده} = 0$$

$$x^2 + 7x + 12 = (x+4)(x+3) + 0$$

نکته: اگر $f(x)$ یک چند جمله ای باشد باقی مانده ی تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ برابر $r = f(a)$ خواهد بود.

مثال: باقی مانده ی تقسیم $f(x) = 4x^2 - 7x + 6$ بر $x-2$ را به دست آورید.

مراحل حل: ریشه ی مقسوم علیه را به دست می آوریم:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

– $f(2)$ یعنی باقی مانده ی تقسیم را حساب می کنیم:

$$r = f(2) = 4(2)^2 - 7(2) + 6 \Rightarrow r = 8$$

نکته: چند جمله ای $f(x)$ بر $x-a$ بخش پذیر است هرگاه:

$$r = f(a) = 0$$

از این خاصیت در تجزیه ی چند جمله ای ها استفاده می کنیم؛ یعنی هرگاه $f(a) = 0$ باشد می توانیم بنویسیم:

$$f(x) = (x-a)g(x)$$

مثال: مقدار m را طوری تعیین کنید که تابع f باضابطه ی

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 7m$$

روبه رو بر $x-1$ بخش پذیر باشد.

مراحل حل: ریشه ی مقسوم علیه را به دست می آوریم:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

– به ازای $x=1$ ، $f(1)$ را حساب می‌کنیم و برابر صفر

قرار می‌دهیم:

$$x=1 \Rightarrow f(1) = 3 + 4 - 7m = 0$$

$$\Rightarrow 7 - 7m = 0 \Rightarrow 7m = 7 \Rightarrow m = 1$$

– با حل معادله مقدار m به دست می‌آید:

نکته: در محاسبه‌ی حد $\lim_{x \rightarrow a} q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ هرگاه f و g چند جمله‌ای اند

باشد مقدار حد به صورت $\frac{0}{0}$ در می‌آید، برای محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow a} q(x)$ باید ابتدا عامل صفر کننده $(x-a)$ را از

صورت و مخرج کسر حذف نمود و سپس حد را محاسبه کرد.

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} q(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cancel{(x-a)} f_1(x)}{\cancel{(x-a)} g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

مثال ۱: حد مقابل را به دست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} q(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2} = ?$$

مراحل حل: حد صورت کسر وقتی $x \rightarrow 1$ برابر است

با:

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 + x - 3 = 2(1)^2 + 1 - 3 = 0$$

– حد مخرج کسر در $x=1$ برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x - 2 = 0$$

– چون صورت و مخرج کسر بر $(x-1)$ بخش پذیر است،

بنابراین داریم:

$$2x^2 + x - 3 = (x-1)(2x+3)$$

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

– برای رفع ابهام خواهیم داشت:

$$q(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2} = \frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+2)} = \frac{2x+3}{x+2}$$

در نتیجه حد $q(x)$ وقتی $x \rightarrow 1$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} q(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+3}{x+2} = \frac{5}{3}$$

مثال ۲: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = ?$$

حل: حد صورت و مخرج کسر وقتی $x \rightarrow 2$ صفر می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 5x + 6 = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

$$x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$$

$$q(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} q(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-5} = \frac{2-3}{2-5} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 5x - 2}{3x^2 + 7x + 4} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 7x^2 + 5x - 2 = 7(-1)^2 + 5(-1) - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 3x^2 + 7x + 4 = 3(-1)^2 + 7(-1) + 4 = 0$$

$$7x^2 + 5x - 2 = (x+1)(7x-2)$$

$$3x^2 + 7x + 4 = (x+1)(3x+4)$$

$$q(x) = \frac{7x^2 + 5x - 2}{3x^2 + 7x + 4} = \frac{(x+1)(7x-2)}{(x+1)(3x+4)} = \frac{7x-2}{3x+4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} q(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x-2}{3x+4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} q(x) = \frac{-7-2}{-3+4} = \frac{-9}{1} = -9$$

- صورت و مخرج کسر را به عاملی از $x-2$ تبدیل

می‌کنیم، بنابراین:

- برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

- حد تابع وقتی $x \rightarrow 2$ به دست می‌آید.

مثال ۳: حد تابع مقابل را به دست آورید.

- وقتی $x \rightarrow -1$ حد صورت برابر است با:

- وقتی $x \rightarrow -1$ حد مخرج کسر برابر است با:

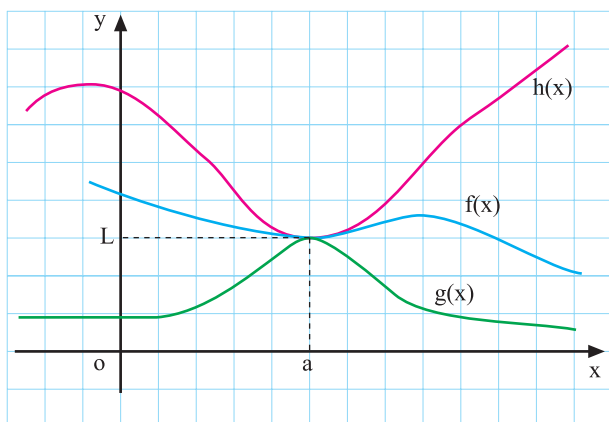
- چون صورت و مخرج کسر به ازای $x = -1$ برابر صفر

گردید، پس هر یک از آن‌ها بر $x+1$ بخش پذیرند، یعنی:

چون $x \rightarrow -1$ بنابراین $x \neq -1$ لذا داریم:

حد تابع را وقتی به $x \rightarrow -1$ به دست می‌آوریم:

بنابراین خواهیم داشت:



قضیه‌ی فشردگی: اگر به ازای هر x از بازه‌ی شامل a به

جز احتمالاً در $x = a$ داشته باشیم:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

مثال: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = ?$$

حل: $\cos x$ در محدوده‌ی دو عدد -1 و 1 قرار دارد،

یعنی:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

— از طرفی $x \rightarrow +\infty$ ، پس $x > 0$ و $\frac{1}{x} > 0$ بنابراین

خواهیم داشت:

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

— از طرفی حد $\frac{1}{x}$ و $\frac{-1}{x}$ وقتی x به سمت $+\infty$ میل

می‌کند برابر است با:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

— طبق قضیه‌ی فشردگی حد تابع برابر است با:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

مثال: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \sin x}{x^3} = ?$$

حل: می‌دانیم که $-1 \leq \sin x \leq 1$ بنابراین داریم:

$$-3 \leq 3 \sin x \leq 3$$

از طرفی وقتی x عددی مثبت باشد می‌توان نوشت:

$$-\frac{3}{x^3} \leq \frac{3 \sin x}{x^3} \leq \frac{3}{x^3}$$

g(x) f(x) h(x)

از طرفی $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^3} = 0$ بنابراین با توجه

به قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \sin x}{x^3} = 0$$

فعالیت ۳-۷

با استفاده از جدول‌های ۳-۱۲ و ۳-۱۳ به سؤالات زیر

پاسخ دهید.

۱- وقتی x با مقادیر کوچک‌تر از 0 به عدد صفر میل

می‌کند ($x \rightarrow 0^-$) مقدار تابع به چه عددی میل می‌کند؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \square$$

جدول ۳-۱۲

x	$-\frac{\pi}{3}^\circ$	$-\frac{\pi}{18}^\circ$	$-\frac{\pi}{9000}^\circ$
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$	0/998173	0/999949	0/999999998

جدول ۱۳-۳

x	°	$\frac{\pi}{90}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$		۰/۹۹۹۹۹۹۹۹۸	۰/۹۹۹۹۹۴۹	۰/۹۹۸۷۳

۲- وقتی x با مقادیر بزرگ تر از ° به عدد صفر میل می کند مقدار تابع به چه عددی میل می کند؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \square$$

با توجه به فعالیت ۷-۳ همواره داریم:

قضیه ۱-۳- (x بر حسب رادیان است)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

مثال: حد روبه رو را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = ?$$

با توجه به این که $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$$

- در نتیجه مقدار حد برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \times \frac{1}{\cos 0} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

مثال: حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{x}$$

حل: صورت و مخرج کسر را در عدد ۴ ضرب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\tan 4x}{4x}$$

- با توجه به $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} 4 \frac{\tan t}{t} = 4 \times 1 = 4$$

مثال: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \sqrt{2}x}{5x}$$

- صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{2}$ ضرب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \sqrt{2}x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \times \tan \sqrt{2}x}{5\sqrt{2}x}$$

- با فرض $\sqrt{2}x = t$ حد برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \sqrt{2}x}{5x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{\tan t}{t} = \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin ax} = \frac{1}{a} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan ax} = \frac{1}{a}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = a$$

مثال: حد روبه‌رو را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sqrt{x}}$$

حل: صورت و مخرج را در عدد 3 ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\tan 3x}{\sqrt{x}} = \frac{3 \tan 3x}{\sqrt{x} \times 3}$$

– با توجه به $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1$ حد را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan 3x}{\sqrt{x} \times 3} = \frac{3}{\sqrt{x}} \times 1 = \frac{3}{\sqrt{x}}$$

مثال: حد روبه‌رو را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = ?$$

– چون $x \neq 0$ است صورت کسر را در $\frac{3}{3x}$ و مخرج را

$\frac{2}{2x}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \frac{3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x}}{2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \times \frac{\sin 3x}{3x}}{2 \times \frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{3 \times 1}{2 \times 1} = \frac{3}{2}$$

– در نتیجه مقدار حد برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1 - \cos 2x}$$

مثال: حد مقابل را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

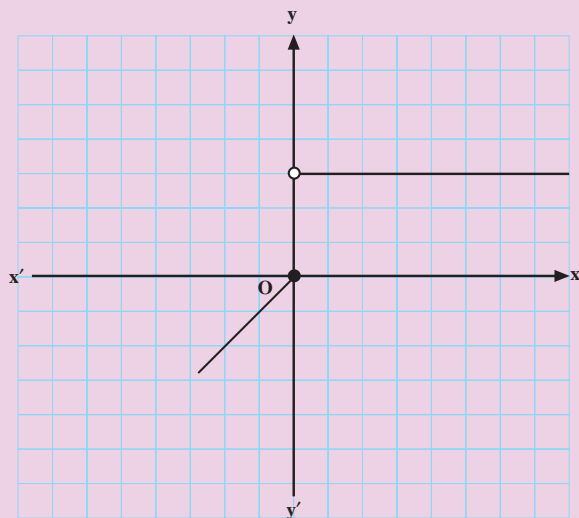
می‌دانیم که: $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ ، بنابراین داریم:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \times 1 = 1$$

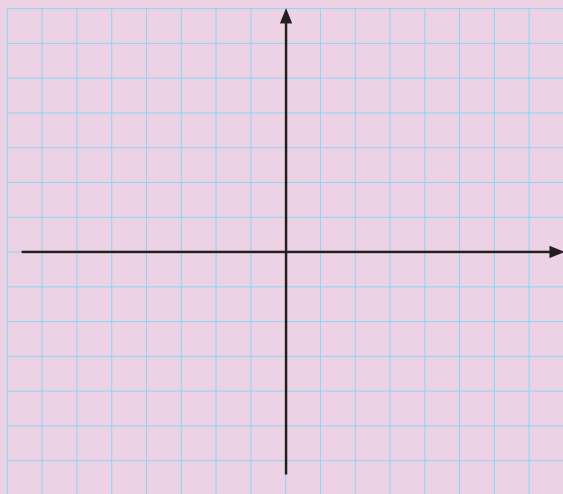
– در نتیجه مقدار حد برابر است با:

آزمون پایانی (۱)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۱)



شکل ۳-۱۵



شکل ۳-۱۶

۱- اگر تابع f در \mathbb{R} به صورت زیر تعریف شده باشد (شکل ۳-۱۵):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$$

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ?$$

۲- فرض کنید تابع f به صورت زیر در \mathbb{R} تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \neq 2 \\ 2x & x = 2 \end{cases}$$

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را به دست آورید.

ج) در تساوی زیر a را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = a \cdot f(2)$$

۳- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 5x^2 + 1}{x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{(2x - \pi)}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$

بخش سوم

فصل دوم

پیوستگی

هدف کلی

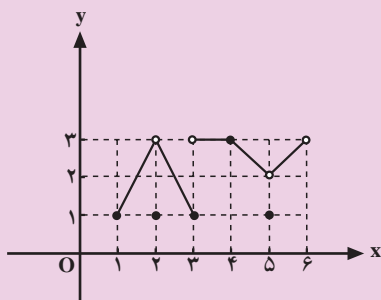
شناسایی توابع پیوسته و حل مسائل آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

- ۱- تابع پیوسته را تعریف کند؛
- ۲- با استفاده از قضیه‌های پیوستگی، حد تابع را در نقطه‌های مورد نظر حساب کند؛
- ۳- نقطه‌های ناپیوستگی تابع‌ها را تعیین کند؛
- ۴- مسائل پیوستگی را به طور نسبی حل کند.

پیش‌آزمون (۲)

محل پاسخ به سوالات پیش‌آزمون (۲)



شکل ۱۷-۳

بلی:

خیر:

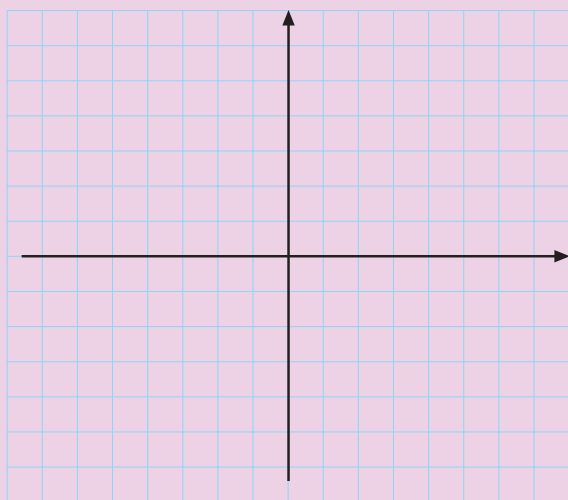
بلی:

خیر:

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \square$$

بلی:

خیر:



شکل ۱۸-۳

۱- شکل ۱۷-۳ نمودار تابع f با دامنه $[1, 6]$

را نشان می‌دهد.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را در جای خالی بنویسید.

ب) $f(2)$ را محاسبه کنید و در جای خالی

بنویسید.

ج) آیا نمودار f در نقطه $x = 2$ گسستگی دارد؟

د) آیا نمودار تابع f در $[3, 5]$ پیوسته است؟

ه) آیا تابع در نقطه $x = 5$ حد دارد؟

و) آیا نمودار تابع در نقطه $x = 5$ پیوسته است؟

۲- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ را

رسم کنید و سپس به سوالات صفحه بعد پاسخ دهید.

محل پاسخ به سوالات پیش‌آزمون (۲)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \square$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \square$$

: بلی

: خیر

$$f(0) = \square$$

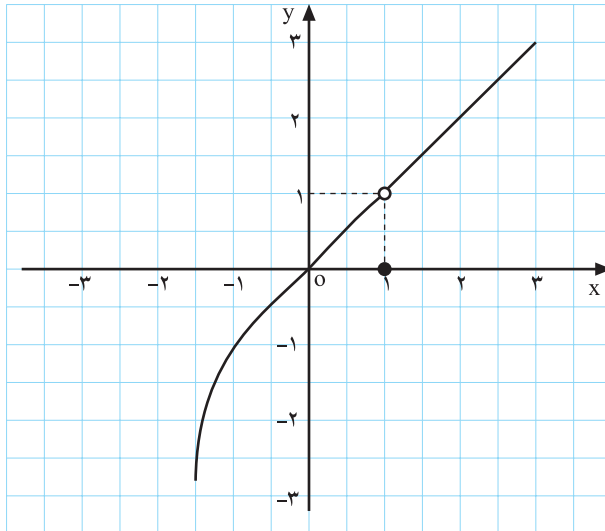
الف) حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow 0^+$ را بیابید.

ب) حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow 0^-$ را بیابید.

ج) آیا تابع در نقطه‌ی $x = 0$ دارای حد می‌باشد؟

د) $f(0)$ را محاسبه کنید.

اصطلاح پیوسته بودن یک تابع در ریاضی، به مفهوم یک پارچه بودن و عدم گسستگی است. به عبارت دیگر اگر تابع f در هیچ نقطه‌ای از دامنه‌اش بریدگی نداشته باشد پیوسته است.



شکل ۳-۱۹

– نمودار ۳-۱۹ مفروض است.

– در این نمودار یک بریدگی در نقطه‌ی $(1, 1)$ مشاهده

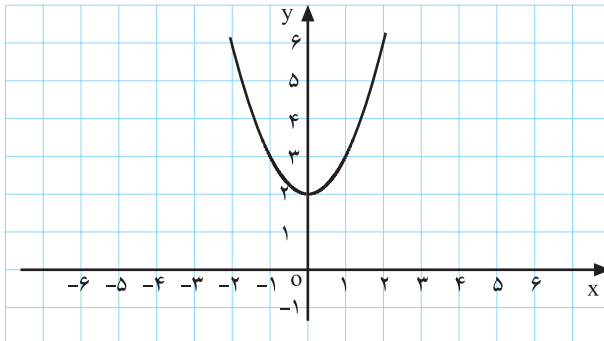
می‌کنیم، بنابراین تابع پیوسته نیست.

– در نمودار ۳-۱۹ وقتی $x \rightarrow 1^-$ مقدار $f(x)$ نیز به

عدد ۱ میل می‌کند در حالی که مقدار تابع در نقطه‌ی $x=1$ برابر

صفر می‌باشد. بنابراین حد تابع در نقطه‌ی $x=1$ با مقدارش برابر

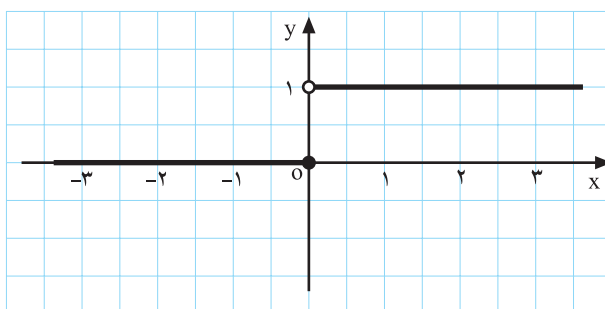
نیست.



شکل ۳-۲۰

در شکل ۳-۲۰ نمودار بریدگی ندارد، بنابراین پیوسته

است.



شکل ۳-۲۱

– در شکل ۳-۲۱ در نقطه‌ی $x=0$ ، نمودار دارای بریدگی

است، بنابراین تابع در آن نقطه پیوسته نیست و دارای حد نیز

نمی‌باشد، زیرا $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ در حالی که $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

است؛ هرچند که مقدار تابع در $x=0$ برابر با حد چپ تابع در

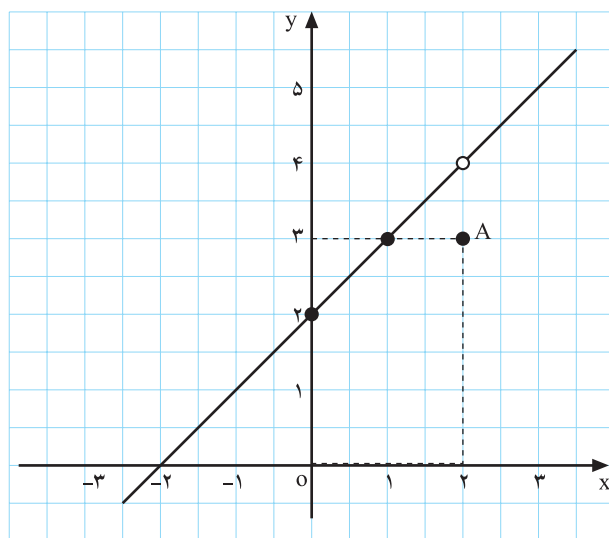
نقطه‌ی $x=0$ می‌باشد.

مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است پس از رسم نمودار تابع، پیوستگی آن را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

حل: دامنه‌ی این تابع $D_f = \mathbb{R}$ است. با فرض $x \neq 2$ و با استفاده از اتحاد مزدوج $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$



شکل ۳-۲۲

نمودار این تابع در شکل ۳-۲۲ مشاهده می‌شود. با مشاهده‌ی شکل تابع می‌بینیم که تابع در نقطه‌ی $(2, 4)$ دارای بریدگی است، بنابراین پیوسته نمی‌باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

از طرف دیگر با مشاهده‌ی نمودار تابع می‌بینیم وقتی $x \rightarrow 2^+$ یا $x \rightarrow 2^-$ ، $f(x)$ به عدد ۴ میل می‌نماید.

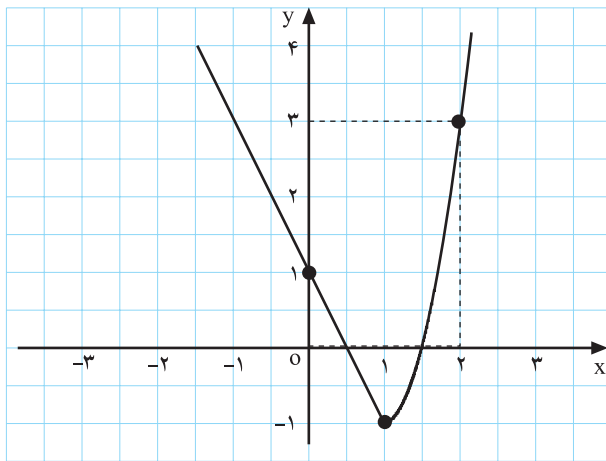
$$f(2) = 3$$

همچنین مقدار تابع در $x = 2$ موجود می‌باشد، اما با حد تابع برابر نمی‌باشد در حالی که اگر $f(2) = 4$ باشد بریدگی موجود در خط پوشانده می‌شود و تابع در دامنه‌اش پیوسته می‌گردد.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & x \leq 1 \\ x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}$$

مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است، پس از رسم در مورد پیوستگی تابع بحث کنید.

حل: ضابطه‌ی تابع برای $x \leq 1$ خط $f(x) = 1 - 2x$ و



شکل ۳-۲۳

برای $x > 1$ ، سهمی $f(x) = x^2 - 2$ می‌باشد (شکل ۳-۲۳).
 با توجه به نمودار ۳-۲۳ مشاهده می‌کنیم که تابع در دامنه‌اش $D_f = \mathbb{R}$ پیوسته می‌باشد. به ویژه مشاهده می‌کنیم که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$ که با $f(1) = -1$ برابر می‌باشد، پس تابع در این نقطه نیز پیوسته است.

تعریف: تابع f را در نقطه‌ی $x = a$ پیوسته گوئیم هرگاه:

- (۱) تابع f در $x = a$ تعریف شده باشد.
 - (۲) حد تابع در $x = a$ وجود داشته باشد.
 - (۳) حد تابع f وقتی $x \rightarrow a$ وجود داشته باشد و با مقدار تابع برابر باشد.
- $$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

نتیجه‌ی ۱: شرط پیوستگی تابع f در $x = a$:

نتیجه‌ی ۲: از آن‌جا که با پیوسته بودن تابع f در $x = a$ حد و مقدار تابع در این نقطه برابر است بنابراین برای به‌دست آوردن حد f وقتی $x \rightarrow a$ کافی است در ضابطه‌ی آن به جای متغیر مقدار a را قرار دهیم.
 خط با ضابطه‌ی $f(x) = 2x + 1$ در \mathbb{R} پیوسته می‌باشد بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2(2) + 1 = 5$$

پیوستگی تابع f در بازه‌ی $[a, b]$

تابع f به $[a, b]$ پیوسته است هرگاه:

۱- در (a, b) پیوسته باشد؛ یعنی به ازای هر عضو این

بازه حد و مقدارش یکی باشد؛

به ازای هر $c \in (a, b)$ داشته باشیم

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

۲- در $x = a$ از راست پیوسته باشد (پیوستگی راست داشته باشد) یعنی داشته باشیم:

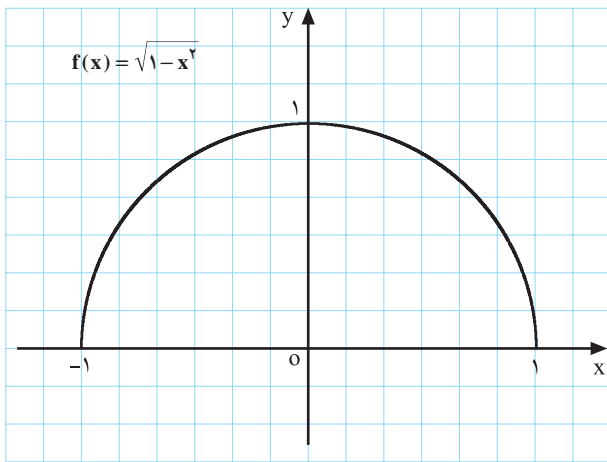
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

۳- در $x = b$ از چپ پیوسته باشد (پیوستگی چپ داشته باشد).

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

مثال: پیوستگی تابع مقابل را در بازه $[-1, 1]$ بررسی کنید.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$



شکل ۳-۲۴

حل: نمودار این تابع به صورت نیم دایره است (شکل ۳-۲۴).

با توجه به نمودار می بینیم که:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \sqrt{1-c^2} = f(c)$$

۱- به ازای هر $c \in (-1, 1)$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \sqrt{1-(-1)^2} = 0 = f(-1)$$

۲- در $x = -1$ تابع پیوستگی راست دارد، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sqrt{1-(1)^2} = 0 = f(1)$$

۳- در $x = 1$ تابع پیوستگی چپ دارد، زیرا:

بنابراین تابع f بر بازه $[-1, 1]$ پیوسته می باشد.

۱-۲-۳ قضیه های پیوستگی

قضیه ۱: توابع زیر در هر نقطه از دامنه شان پیوسته اند.

۱- تابع چند جمله ای

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

اعداد $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ اعداد حقیقی می باشند.

۲- توابع گویا $f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$

۳- توابع رادیکالی $f(x) = \sqrt[n]{x}$

۴- توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, m(x) = \tan x, n(x) = \cot x$

۵- تابع قدرمطلق $f(x) = |x|$

مثال: حد توابع مقابل را بیابید.

چون اعداد داده شده در دامنه‌ی توابع می‌باشد بنابراین برای محاسبه‌ی حد توابع مقدار هر یک از تابع‌ها را به ازای اعداد داده شده به دست می‌آوریم.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 1) = (1)^2 - 4(1) + 1 = -2$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{2x-1} = \sqrt{2(5)-1} = 3$

<p>(۴) $\frac{f}{g}$ (با شرط $g(a) \neq 0$)</p> <p>(۵) kf</p>	<p>(۱) $f + g$</p> <p>(۲) $f - g$</p> <p>(۳) $f \times g$</p>	<p>قضیه‌ی ۲: هرگاه a و k اعداد حقیقی و f و g دو تابع پیوسته در $x = a$ باشند توابع مقابل در $x = a$ پیوسته می‌باشند.</p>
--	--	---

نکته: با توجه به قضیه‌ی ۱ و ۲ می‌توان پیوستگی بسیاری از توابع دیگر را نتیجه گرفت؛ به طور مثال، توابع مقابل در دامنه‌شان پیوسته هستند.

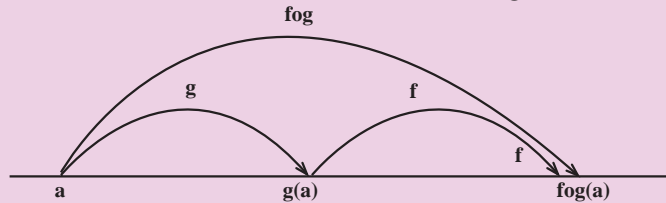
$f(x) = 2x + \sin x$

$f(x) = 7 \tan x$

$f(x) = \frac{x^2 + 3}{\cos x}$

نکته: حاصل جمع، تفریق و حاصل ضرب تعداد متناهی از توابع پیوسته در $x = a$ در این نقطه پیوسته می‌باشند.

قضیه: اگر تابع g در a و f در $g(a)$ پیوسته باشد آن گاه تابع مرکب با ضابطه $f \circ g(x) = f(g(x))$ در $x = a$ پیوسته است.



شکل ۲۵-۳

مثال: تابع با ضابطه $y = \frac{\cos x}{x^2 + 4}$ در \mathbb{R} پیوسته است. در \mathbb{R} پیوسته است. $f(x) = |x|$ در \mathbb{R} پیوسته است. $g(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 4}$ در \mathbb{R} پیوسته است. $\Rightarrow y = f \circ g(x)$

مثال: تابع با ضابطه $y = \frac{\cos x}{x^2 + 4}$ در \mathbb{R} پیوسته است.

مثال: حدود الف و ب را به دست آورید.

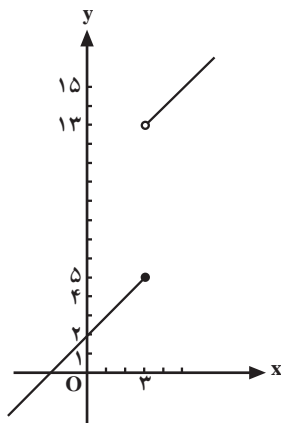
حل: چون این دو تابع در دامنه شان پیوسته می باشند. برای پیدا کردن حدهای آنها کافی است مقدار تابع را در نقاط خواسته شده پیدا کنیم.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 + 2x + 1}{5 \sin x + 2} = \frac{3(0)^4 + 2(0) + 1}{5 \sin 0 + 2} = \frac{1}{2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4-x^2}}{1+x} = \frac{\sqrt{4-(1)^2}}{1+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 7 & x > 3 \\ x + 2 & x \leq 3 \end{cases}$$

مثال: شکل ۲۶-۲ نمودار تابع مقابل است. نقاط پیوستگی تابع را مشخص کنید.



شکل ۲۶-۳

حل: چون ضابطه‌ی تابع به ازای $x > 3$ ، $f(x) = 2x + 7$ و به ازای $x \leq 3$ ، $f(x) = x + 2$ چند جمله‌ای می باشد، بنابراین قضیه‌ی ۱ پیوستگی، تابع در این بازه‌ها پیوسته است. بنابراین تنها لازم است در نقطه‌ی $x = 3$ پیوستگی آن بررسی شود. به ازای $x = 3$ مقدار $f(x)$ برابر است با:

$f(3) = 3 + 2 = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3 + 2 = 5 \text{ و}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2(3) + 7 = 13$$

– حد تابع، وقتی $x \rightarrow 3^-$ و $x \rightarrow 3^+$ ، برابر است با:

$$\mathbb{R} - \{3\}$$

– حد چپ و راست برابر نیستند. بنابراین تابع در $x = 3$ حد ندارد و لذا پیوسته هم نمی‌باشد. ناحیه‌ی پیوستگی تابع با ضابطه‌ی بالا عبارت است از:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x & x < 1 \\ x^2 + 3ax + 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

مثال: مقدار a را در تابع روبه‌رو چنان محاسبه کنید که در $x = 1$ پیوسته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

حل: شرط پیوستگی تابع f در $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + 2x = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 3ax + 2$$

پس تابع f در $x = 1$ حد دارد، یعنی:

$$\Rightarrow a(1)^2 + 2(1) = 1^2 + 3a(1) + 2$$

– مقدار a برابر است با:

$$\Rightarrow 3a - a = -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

مثال: مقدار a و b را چنان بیابید که تابع f در $x = 3$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + a & x < 3 \\ x - 1 & x = 3 \\ |x| + 2b & x > 3 \end{cases}$$

حل: چون تابع باید در $x = 3$ پیوسته باشد بنابراین در این نقطه حد دارد و این حد با مقدار تابع ($f(3)$) برابر است.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3(3)^2 + a = 27 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = |3| + 2b = 3 + 2b$$

$$f(3) = 3 - 1 = 2$$

– مقدار تابع به ازای $x = 3$ از ضابطه‌ی $x - 1$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$\begin{cases} 27 + a = 2 \Rightarrow a = 2 - 27 \Rightarrow a = -25 \\ 3 + 2b = 2 \Rightarrow 2b = 2 - 3 = -1 \Rightarrow b = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

– با توجه به پیوستگی تابع به ازای $x = 3$ حد چپ و راست برابر مقدار تابع است، پس:

– در $x = 3$ تابع f پیوسته است، پس حد راست با مقدار تابع برابر است.

مثال: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. پیوستگی این تابع را در $x = 3$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{3} x & x > 3 \\ 9 - x^2 & x \leq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 9 - (3)^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} \times 3\right) = \sin \pi = 0$$

– با توجه به پیوسته بودن هر یک از ضابطه‌ها داریم: بنابراین تابع در $x = 3$ حد دارد.

مقدار تابع در نقطه‌ی $x = 3$ برابر است با:

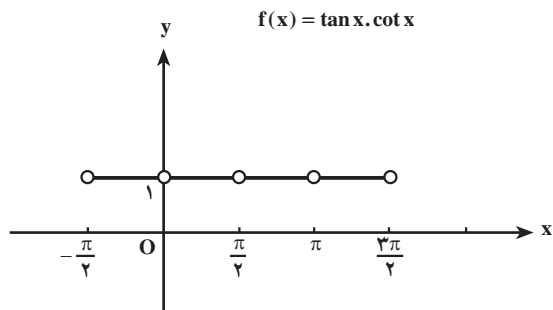
$$f(3) = 9 - 3^2 = 0$$

چون حد و مقدار تابع با یکدیگر برابرند تابع در $x = 3$ پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 0$$

مثال: شکل ۲۷-۳ نمودار تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو را در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ نشان می‌دهد. تابع در چه نقاطی پیوسته نیست؟

حل: تابع در نقاط $(\frac{\pi}{4}, 1)$ ، $(\pi, 1)$ ، $(\frac{3\pi}{4}, 1)$ و $(-\frac{\pi}{4}, 1)$ دارای ناپیوستگی است.



شکل ۲۷-۳

تمرین

۱- پیوستگی تابع‌های زیر را در نقاط داده شده بررسی

کنید.

$$۱) f(x) = \begin{cases} 1-2x & x \neq 5 \\ -14 & x = 5 \end{cases} \quad (\text{در } x_0 = 5)$$

$$۲) f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 2x & x = 1 \\ x^2 + x & x > 1 \end{cases} \quad (\text{در } x_0 = 1)$$

۲- شکل ۲۸-۳ نمودار تابع f را نشان می‌دهد.

الف) آیا $f(1)$ وجود دارد؟ بلی خیر

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را در صورت وجود به دست آورید.

ج) آیا نمودار f در $x=1$ پیوسته است؟

۳- به ازای چه مقدار از a تابع f در $x=2$ پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x < 2 \\ 3ax & x \geq 2 \end{cases}$$

۴- نقاط ناپیوستگی توابع زیر را بیابید.

$$۱) f(x) = \frac{2x}{x^2 - 5x}$$

$$۲) f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$۳) f(x) = \sqrt{x-2}$$

$$۴) f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 5x}$$

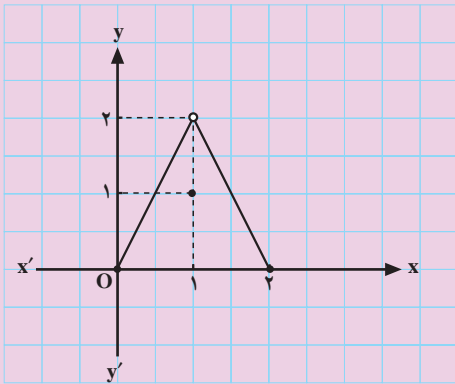
۵- تابع‌های f با ضابطه‌های زیر داده شده است در هر

یک از قسمت‌های الف و ب مقادیر a و b را طوری تعیین کنید

که تابع‌ها در \mathbb{R} پیوسته باشند.

$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} 5 \sin x + 2 & x < 0 \\ b+1 & x = 0 \\ bx^2 + a & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{ب) } f(x) = \begin{cases} 1-x+a & x < 4 \\ 2x & x = 4 \\ \frac{8}{x} - b & x > 4 \end{cases}$$



شکل ۲۸-۳

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سوالات آزمون پایانی (۲)

۱- پیوستگی تابع‌های زیر را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید.

$$۱) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 3 & x < 2 \\ 5x - 6 & x \geq 2 \end{cases} \quad (x=2)$$

$$۲) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & x \neq -1 \\ 3 & x = -1 \end{cases} \quad (x=-1)$$

۲- نقاط پیوستگی تابع‌های زیر را بیابید.

$$۱) f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^3 - x}$$

$$۲) f(x) = \sqrt{3-x}$$

۳- تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است. مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع در \mathbb{R} پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{3x+1} & x > 2 \\ 5 & x = 2 \\ 5bx+4 & x < 2 \end{cases}$$

بخش سوم

فصل سوم

تعمیم حد

هدف کلی

تعیین حد تابع وقتی متغیر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند، همچنین بررسی تابع‌هایی که حد آن‌ها، وقتی x به سمت یک عدد حقیقی یا $\pm\infty$ میل می‌کند، برابر $+\infty$ یا $-\infty$ است.

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

- ۱- حد بی‌نهایت را تعریف کند؛
- ۲- حد در بی‌نهایت را برای یک تابع تعریف کند.

پیش‌آزمون (۳)

محل پاسخ به سوالات پیش‌آزمون (۳)

$$f(x) = \frac{3}{x-4}$$

جدول ۳-۱۴

x	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	۴
f(x)	-۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \square$$

$$f(x) = \frac{3}{x-4}$$

جدول ۳-۱۵

x	۵	۴/۵	۴/۱	۴/۰۱	۴/۰۰۱	<input type="checkbox"/>
f(x)	۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	+∞

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \square$$

الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{3x-2} = ?$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 - 4x + 2}{-5x + 3} = ?$

۱- تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) جدول ۳-۱۴ را کامل کنید.

ب) هر چقدر x با مقادیر کمتر از ۴ به عدد ۴ نزدیک می‌شود f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

۲- تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است:

به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) جدول ۳-۱۵ را کامل کنید.

ب) هر چقدر x با مقادیر بیش‌تر از ۴ به عدد ۴ نزدیک و نزدیک‌تر شود f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

۳- حدهای مقابل را محاسبه کنید.

۳-۳- حد بی نهایت

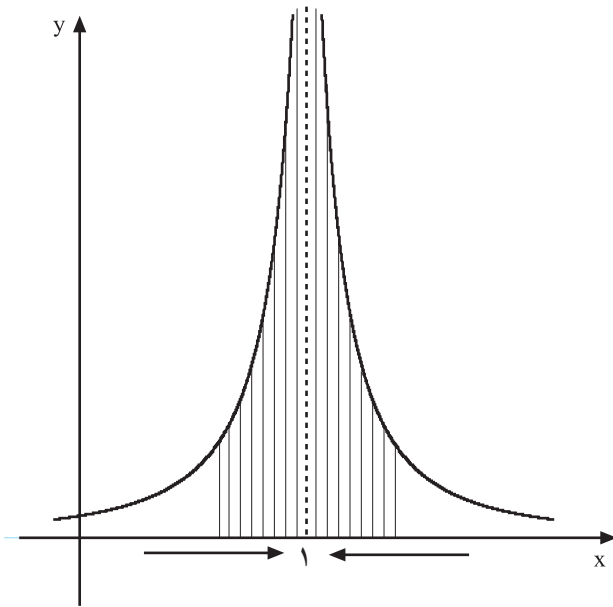
در قسمت‌های قبل با حدهایی که به صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ است و در آن‌ها a و L هر دو اعداد حقیقی می‌باشند، آشنا شدیم. اکنون با حدهایی که در آن‌ها L بی نهایت است آشنا می‌شویم.

فعالیت ۳-۸

با توجه به نمودارهای مقابل به هر یک از سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱- در نمودار ۳-۲۹ وقتی x به عدد ۱ (یک) میل می‌کند مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر می‌شود، یعنی به $+\infty$ میل می‌کند و داریم:

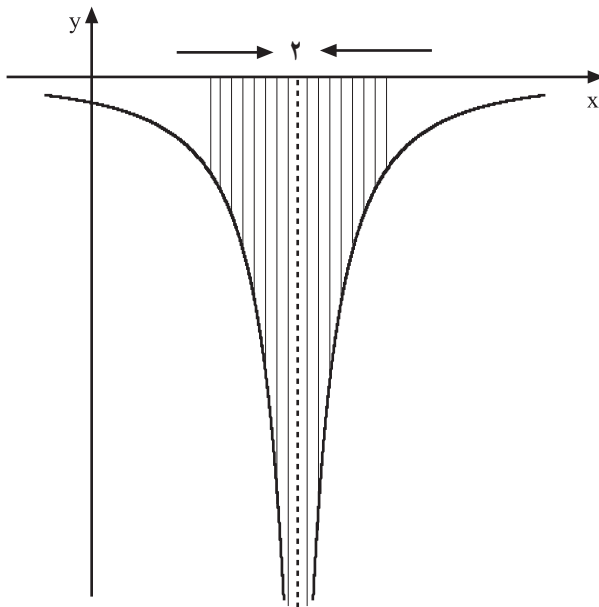
$$\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \bigcirc$$



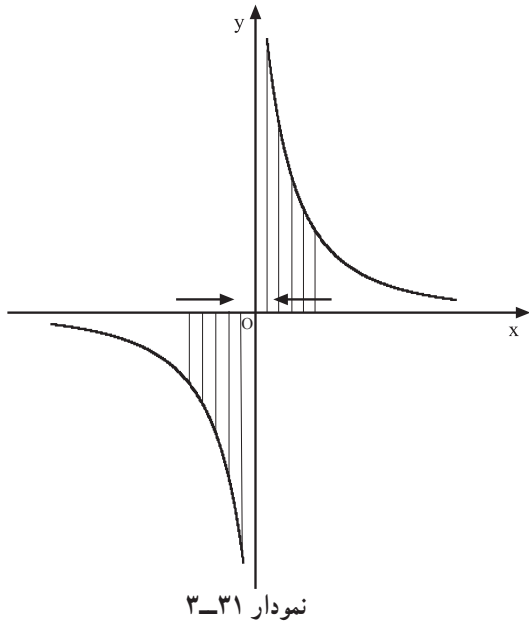
نمودار ۳-۲۹

۲- در نمودار ۳-۳۰ وقتی x به عدد ۲ میل می‌کند $f(x)$ از هر عدد منفی کوچکی کوچک‌تر می‌شود، یعنی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \bigcirc$$



نمودار ۳-۳۰



۳- در نمودار ۳-۳۱ وقتی x با مقادیر بیش‌تر از صفر به عدد ۰ نزدیک شود $(x \rightarrow 0^+)$ ، $f(x)$ از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر می‌شود $(f(x) \rightarrow +\infty)$ پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \square$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

جدول ۳-۱۶

x	۰	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹
$f(x)$	۱	۴	10^2	10^4	10^6	10^8

جدول ۳-۱۷

x	۲	۱/۵	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱
$f(x)$	۱	۴	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

با توجه به نمودار، حد چپ تابع در $x = 0$ برابر چیست؟ آیا تابع f در $x = 0$ دارای حد می‌باشد؟ مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

جدول‌های ۳-۱۶ و ۳-۱۷ مقادیر مختلف تابع را به ازای اعداد نزدیک به یک نشان می‌دهند (شکل ۳-۲۹). هر چه x از مقادیر کم‌تر از ۱ و یا بیش‌تر از یک به عدد ۱ میل می‌کند مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر می‌گردد. بنابراین به مثبت بی‌نهایت $(+\infty)$ میل می‌کند، پس می‌توان نوشت:

فعالیت ۳-۹

تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است.

$$f(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

جدول ۳-۱۸

x	۳	۲/۵	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۰۰۱	۲
$f(x)$	-۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-10^4	<input type="checkbox"/>	-10^8	

در نمودار ۳-۳۰ شکل این تابع را مشاهده کرده‌اید. ۱- جدول ۳-۱۸ را تکمیل کنید.

۲- وقتی x با مقادیر بیش‌تر از ۲ (از راست) به عدد ۲ میل می‌کند آیا مقدار $f(x)$ از هر عدد منفی کم‌تر می‌شود؟ (جدول ۳-۱۸)

بلی خیر

۳- جدول ۳-۱۹ را تکمیل کنید.

جدول ۳-۱۹

x	۱	\rightarrow	$1/5$	\rightarrow	$1/9$	\rightarrow	$1/99$	\rightarrow	$1/999$	\rightarrow	$1/9999$	\rightarrow	۲
$f(x)$	-۱		<input type="checkbox"/>		-۱۰۰		-۱۰۰۰۰		-۱۰۰۰۰۰۰		<input type="checkbox"/>		

۴- وقتی x با مقادیر کم‌تر از ۲ (از چپ) به عدد ۲ میل می‌کند جدول ۳-۱۹ مقدار $f(x)$ از هر عدد کوچکی کوچک‌تر می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \square$$

۵- با توجه به جدول ۳-۱۸ حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \square$$

۶- با استفاده از جدول ۳-۱۹ حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \square$$

۷- حاصل حد مقابل را به دست آورید.

تمرین

تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

۱- جدولی تنظیم کنید که وقتی x با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود مقادیر $f(x)$ را نشان دهد.

۲- جدولی را تنظیم کنید که وقتی x با مقادیر بیش‌تر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود مقادیر $f(x)$ را نشان دهد.

محل پاسخ:

$$f(x) = \frac{5}{x-2}$$

مثال: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. نمودار $f(x)$ را در شکل ۳-۳۱ مشاهده می‌کنید.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

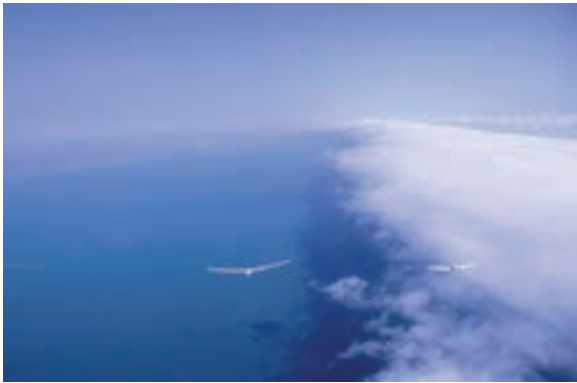
جدول ۳-۲۰

x	\circ	$\circ/00001$	$\circ/0001$	$\circ/01$	$\circ/1$
$f(x)$	10	10000	1000	100	10

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

جدول ۳-۲۱

x	\circ	$-0/00001$	$-0/0001$	$-0/01$	$-0/1$
$f(x)$	$-\infty$	-10000	-1000	-100	-10



شکل ۳-۳۲

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

با توجه به جدول ۳-۲۰ می‌بینیم وقتی که x از راست به عدد \circ (صفر) نزدیک می‌شود، $f(x)$ از هر عدد بزرگی بزرگ‌تر می‌شود. به عبارت دیگر، $f(x)$ را می‌توانیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرط آن که x را به اندازه‌ی کافی به \circ نزدیک کنیم. در این حالت می‌گوییم حد تابع f وقتی $x \rightarrow 0^+$ برابر با $+\infty$ می‌باشد و آن را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم.

با مشاهده‌ی جدول ۳-۲۱ در می‌یابیم وقتی که x از چپ به عدد \circ نزدیک می‌شود $f(x)$ از هر عدد منفی کوچک‌تر می‌شود. به عبارت دیگر $f(x)$ می‌تواند از هر عدد منفی، کوچک‌تر شود، به شرط آن که x به اندازه‌ی کافی به \circ نزدیک شود.

در این حالت می‌گوییم حد تابع f وقتی $x \rightarrow 0^-$ برابر با $-\infty$ می‌باشد، و آن را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم:

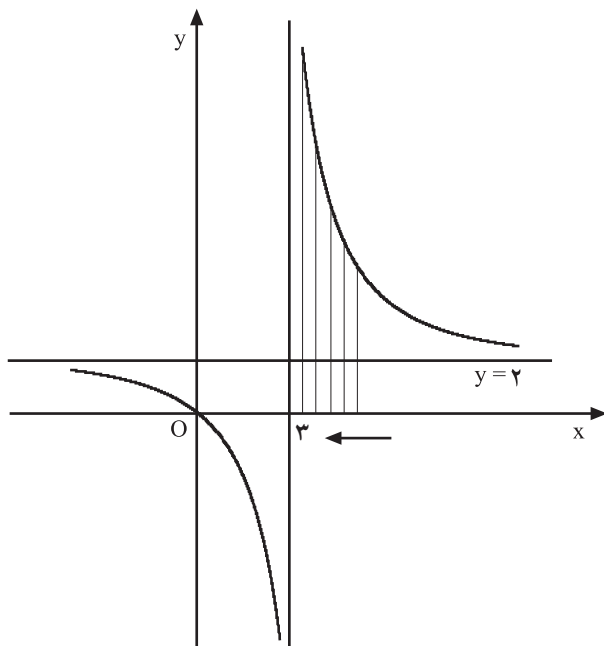
نتیجه: با توجه به مثال‌های حل شده، در می‌یابیم وقتی مخرج کسر به صفر میل کند و صورت کسر مخالف صفر باشد قدر مطلق کسر از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر می‌شود، یعنی کسر بی‌کران افزایش می‌یابد.

مثال: حدهای الف، ب و ج را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3}$

حل الف: چون وقتی $x \rightarrow 3^+$ مقدار صورت کسر $(2x \rightarrow 6)$ عددی مثبت و مخرج کسر از سمت مقادیر بزرگ‌تر از صفر به عدد 0 میل می‌کند، بنابراین حاصل کسر به $+\infty$ میل می‌کند (نمودار ۳-۳۳). یعنی:

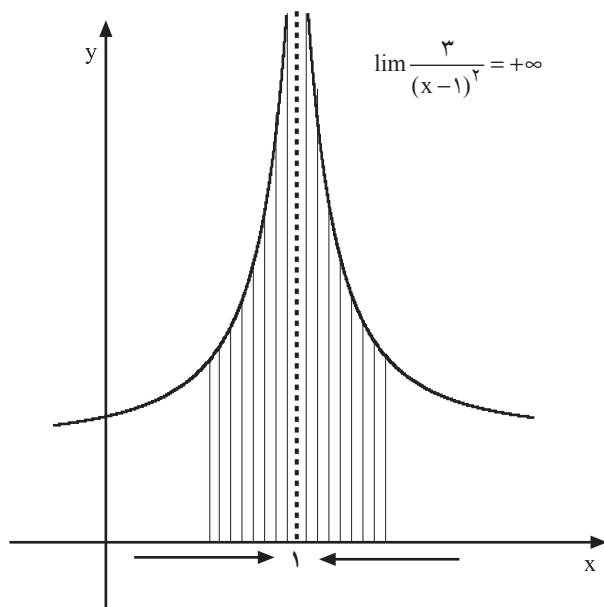
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3} = +\infty$$



نمودار ۳-۳۳

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x-1)^2} = +\infty$

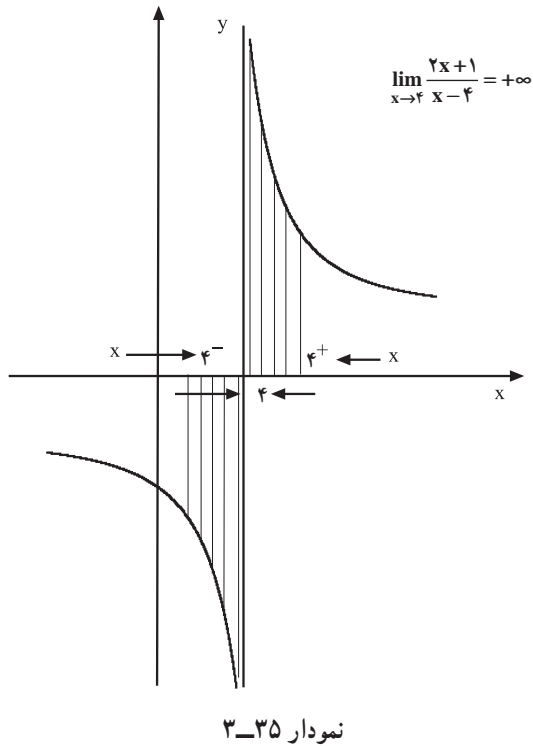
حل ب: وقتی $x \rightarrow 1$ در مخرج کسر: $(x-1)^2 \rightarrow 0^+$ ؛ بنابراین مقدار کسر به $+\infty$ میل می‌کند (نمودار ۳-۳۴).



نمودار ۳-۳۴

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1}{x-4}$$

حل ج: وقتی $x \rightarrow 4^+$ مخرج کسر با مقادیر بیش تر از صفر به صفر میل می کند. بنابراین با توجه به مثبت بودن صورت کسر ($2x+1 \rightarrow 9$) مقدار حد به $+\infty$ میل می کند (نمودار ۳-۳۵).



هرگاه $x \rightarrow 4^-$ مخرج کسر با مقادیر منفی به صفر میل می کند. با توجه به مثبت بودن صورت کسر، حاصل کسر از هر عدد منفی کم تر می باشد. بنابراین به $-\infty$ میل می کند (نمودار ۳-۳۵).

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x+1}{x-4} = -\infty$$

با توجه به مثال های حل شده می توان قضیه ی زیر را نتیجه گرفت:

قضیه ی ۳-۲ هرگاه a عدد حقیقی باشد و داشته باشیم:

الف) اگر $L > 0$ و $g(x)$ با مقادیر مثبت به صفر میل کند،

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

ب) اگر $L < 0$ و $g(x)$ با مقادیر مثبت به صفر میل کند، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

همچنین: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, L \neq 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

ج) اگر $L > 0$ و $g(x)$ با مقادیر منفی به صفر میل کند، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

د) اگر $L < 0$ و $g(x)$ با مقادیر منفی به صفر میل کند، آن گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x-1} = ?$$

مثال: حد کسر مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 3x+1 = 3(1)+1 = 4$$

حل: حد صورت کسر برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 = 0$$

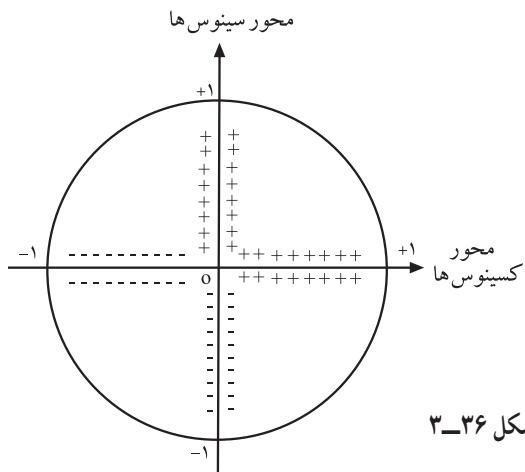
- مخرج کسر با مقادیر مثبت به صفر میل می کند، پس بنا بر

قضیه الف -۲-۳ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \sin x + 1}{\cos x} = ?$$

مثال: حد کسر مقابل را به دست آورید.



شکل ۳-۳۶

- با توجه به دایره ی مثلثاتی، وقتی x با مقادیر بیش تر از

$\frac{\pi}{4}$ به $\frac{\pi}{2}$ میل می کند چون زاویه در ناحیه ی دوم قرار دارد مقدار

کسینوس آن منفی است (شکل ۳-۳۶) بنابراین مخرج کسر با

مقادیر منفی به عدد صفر میل می کند. بنا بر قضیه ی ج-۲-۳

مقدار کسر از هر عدد منفی کوچک تر می باشد در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \sin x + 1}{\cos x} = -\infty$$

مثال: حد کسر مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x}{4-x^2} = ?$$

حل: چون $x > 2$ بنابراین $x^2 > 4$ و $-x^2 < -4$ لذا

داریم:

$$4-x^2 < 0$$

- یعنی مخرج کسر با مقادیر منفی به صفر میل می کند.

حد صورت کسر برابر است با :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} -2x = -4$$

بنابر قضیه ی (د-۲-۳) داریم :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x}{4-x^2} = +\infty$$

قضیه ی ۳-۳-۳ - اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ (عددی ثابت است) $L \neq 0$ آن گاه :

(الف) حد حاصل مجموع دو تابع برابر است با : $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty$

(ب) حد حاصل ضرب دو تابع وقتی $L > 0$ ، برابر است با : $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = +\infty$

(ج) حد حاصل ضرب دو تابع وقتی $L < 0$ ، برابر است با : $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = -\infty$

مثال ۱: حد عبارت روبه رو را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{5}{x-3} + \frac{2}{x+1} \right) = ?$$

حل: حد هر یک از کسر ها را به دست می آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5}{x-3} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{x+1} = \frac{1}{2}$$

حل: طبق قضیه ی (الف-۳-۳) داریم :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{5}{x-3} + \frac{2}{x+1} \right) = +\infty + \frac{1}{2} = +\infty$$

مثال ۲: حد عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x+2}{x-2} \cdot \frac{2}{1-x} \right) = ?$$

حل: حد هر یک از کسر ها را به دست می آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x-2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{1-x} = -2$$

- طبق قضیه ی (ج-۳-۳) داریم :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x+2}{x-2} \cdot \frac{2}{1-x} \right) = (+\infty)(-2) = -\infty$$

قضیه ۳-۴ اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ (عددی ثابت است) آن گاه:

الف) حد حاصل مجموع دو تابع برابر است با: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = L + L = 2L$

ب) اگر $L > 0$ ، حد حاصل ضرب دو تابع برابر است با: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot L = L^2$

ج) اگر $L < 0$ ، حد حاصل ضرب دو تابع برابر است با: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot L = L^2$

مثال: حد عبارت روبه‌رو را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{2x}{x-4} \cdot \frac{3}{x-7} \right) = ?$$

چون $x = 4$ ، بنابراین $x < 4$ و $x > 4$ می‌باشد، لذا

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x}{x-4} = .$$

از طرفی:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3}{x-7} = . 1$$

بنابر قضیه ج-۳-۴ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{2x}{x-4} \cdot \frac{3}{x-7} \right) = (. 1) (.) = .$$

مثال: حد عبارت مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 \cdot 3}{(x-2)^2} \cdot \frac{2x-1}{x-1} \right) = ?$$

چون وقتی $x = 2$ ، $(x-2)^2$ با مقادیر مثبت به صفر

میل می‌کند؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 \cdot 3 = . 12, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 \cdot 3}{(x-2)^2} = .$$

از طرفی $x < 2$ و نزدیک -2 است، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x - 1 = . 3$$

لذا خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{x-1} = \frac{3}{2} = 1.5$$

پس حد مجموع این دو تابع برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 \cdot 3}{(x-2)^2} \cdot \frac{2x-1}{x-1} \right) = (. 12) \cdot 1.5 = . 18$$

تمرین

۱- حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x}{x-3}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-3x}{x(2-x)}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$$

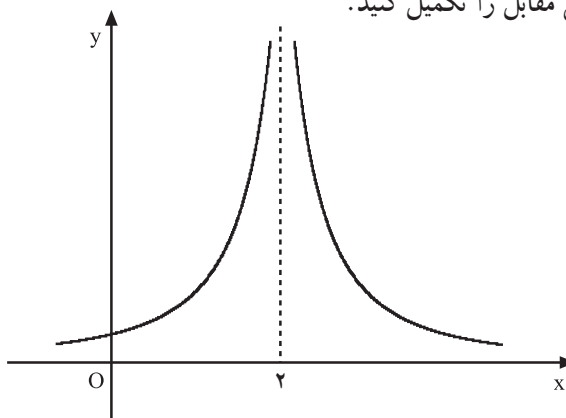
$$۵) \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^4}$$

۲- با توجه به نمودار ۳-۳۷، ۳-۳۸، ۳-۳۹ و ۳-۳۹ جاهای خالی مقابل را تکمیل کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \square$$

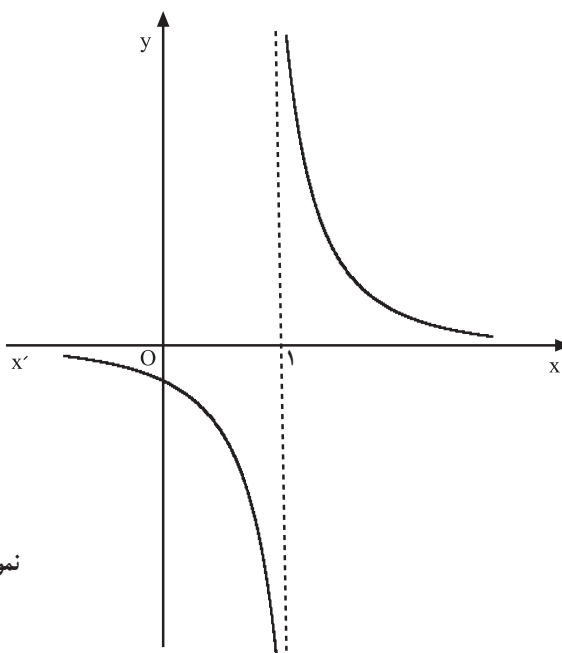
نمودار ۳-۳۷



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \square$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \square$$

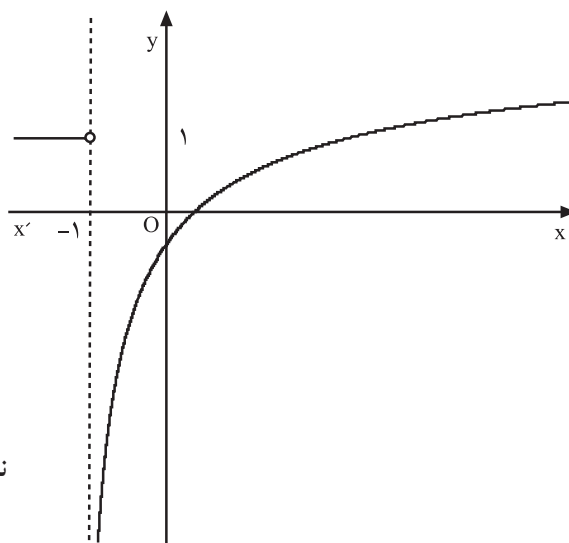
نمودار ۳-۳۸



$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \square$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \square$$

نمودار ۳-۳۹





شکل ۳-۴۰

۳-۳-۱- حد در بی نهایت : در $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ هرگاه

a بی نهایت باشد، حد حاصل را حد در بی نهایت می نامند.

برای داشتن درک بهتری از این نوع حدها به مثال های

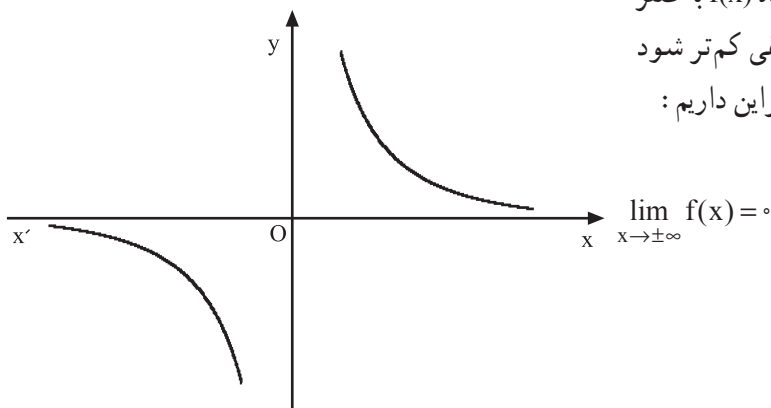
زیر توجه کنید.

مثال: با توجه به نمودار ۳-۴۱ درمی یابیم که هرگاه مقدار

x از هر عدد مثبتی بزرگ تر شود ($x \rightarrow +\infty$) آن گاه $f(x)$ به صفر

نزدیک می گردد. همچنین وقتی x از هر عدد منفی کم تر شود

($x \rightarrow -\infty$) مقدار $f(x)$ به صفر میل می کند. بنابراین داریم :



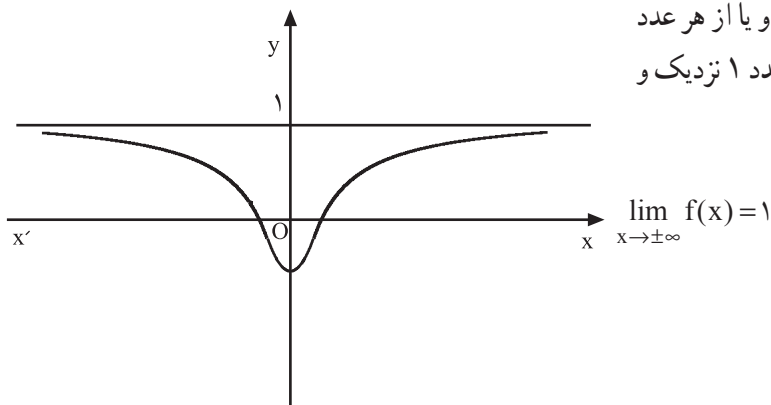
نمودار ۳-۴۱

همچنین هرگاه به نمودار ۳-۴۲ توجه کنیم درمی یابیم که

وقتی x از هر عدد مثبتی بیش تر باشد ($x \rightarrow +\infty$) و یا از هر عدد

منفی کوچک تر شود ($x \rightarrow -\infty$) مقدار $f(x)$ به عدد ۱ نزدیک و

نزدیک تر می گردد ($f(x) \rightarrow 1$) یعنی داریم :



نمودار ۳-۴۲

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

جدول ۳-۲۲

x	1 → 10 → 100 → 1000 → 10000 → 100000 → 1000000 → 10000000 →
f(x)	1 → 0/1 → 0/001 → 0/0001 → 0/00001 → 0/000001 → 0/0000001 →

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

جدول ۳-۲۳

x	-10 ⁶ - . 10 ⁵ - . 1000 - . 100 - . 10 - . 1
f(x)	-10 ⁺⁶ - . 10 ⁺⁵ - . 0/0001 - . 0/01 - . 0/1 - . 1

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

جدول ۳-۲۴

x	1 → 10 → 100 → 1000 → 10000
f(x)	0 → 0/980198 → 0/9998 → <input type="text"/> → <input type="text"/>

جدول ۳-۲۵

x	-10000 - . 1000 - . 100 - . 10) 0) 1
f(x)	<input type="text"/> 0/99998 <input type="text"/> 0/980198

مثال: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است:

با توجه به جدول ۳-۲۲ می‌بینیم که هرگاه x بزرگ و بزرگ‌تر شود به طوری که از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر شود $(x \rightarrow +\infty)$ مقدار f(x) به عدد 0 نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود $(y \rightarrow 0)$ یعنی با توجه به جدول ۳-۲۳ در می‌یابیم که وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، f(x) با مقادیر منفی به صفر میل می‌کند، یعنی:

فعالیت ۳-۹

تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است (شکل ۳-۴۲) با تکمیل جدول‌های ۳-۲۴ و ۳-۲۵ به سؤالات زیر پاسخ دهید:

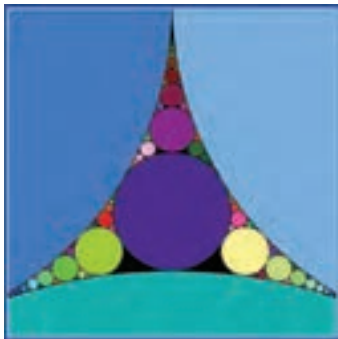
۱- وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند $(x \rightarrow +\infty)$ ، f(x) به کدام عدد میل می‌کند؟

۲- وقتی $x \rightarrow -\infty$ مقدار f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

قضیهی ۳-۵- اگر n عددی صحیح و مثبت باشد، آن گاه:



شکل ۳-۴۳

مثال: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x^5} = ?$$

بنابر قضیهی ۳-۵ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x^5} = 7 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^5} = 7 \times 0 = 0$$

مثال: حد مقابل را به دست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{x-1} = ?$$

حل: از x صورت و مخرج فاکتور می گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(3 + \frac{2}{x})}{x(1 - \frac{1}{x})} =$$

- بنابر قضیهی ۳-۵ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{3 + 0}{1 - 0} = 3$$

مثال: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+3} = ?$$

از x^2 در صورت و مخرج کسر فاکتور می گیریم. با توجه

به قضیهی ۳-۵ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-1}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(2 - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{3}{x^2})} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

- حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x^3+x^2+1} = ?$$

از بزرگ‌ترین درجه‌ی صورت و مخرج فاکتور می‌گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(\frac{1}{x}-1)}{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}-1}{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{0-1}{x^2(1+0+0)} = 0$$

بنابر قضیه ۳-۵ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ داریم:

مثال: حد مقابل را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - \sqrt{x}}{x^2 - x} = ?$$

از بزرگ‌ترین درجه‌ی صورت و مخرج فاکتور می‌گیریم.

بنابر قضیه ۳-۵ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - \sqrt{x}}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(1 - \frac{\sqrt{x}}{x^3})}{x^2(1 - \frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

تابع برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + x + 2}{x^2 + \sqrt{x} - 3} = ?$$

مثال: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2})}{x^2(1 + \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{3}{x^2})} = \frac{4+0+0}{1+0-0} = 4$$

با فاکتورگیری x^2 از صورت و مخرج کسر و بنابر قضیه‌ی

۳-۵ داریم:

نکته: در محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله‌ای هستند):

اگر درجه‌ی $f(x)$ کوچکتر از درجه‌ی $g(x)$ باشد، آن‌گاه حد تابع برابر صفر است. مانند: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3} = 0$

هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ هم درجه باشند مقدار حد برابر خارج قسمت ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی صورت به ضریب

بزرگ‌ترین درجه‌ی مخرج است؛ مانند:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3 + \sqrt{x} - 4}{5x^3 - 4x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3}{5x^3} = \frac{6}{5}$$

اگر درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج بیشتر باشد حد تابع بی‌نهایت می‌شود؛ مانند:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^4 + 6x}{3x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^4}{3x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{3}x^3 = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{ax^m + x + 1}{3x^2 + 7}$$

مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$$

مقادیر a و m را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^m + x + 1}{3x^2 + 7} = 4 \Rightarrow m = 2$$

مراحل حل: چون مقدار حد تابع عددی مخالف صفر شده است، بنابراین صورت و مخرج هم درجه‌اند، لذا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + x + 1}{3x^2 + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{3x^2} = \frac{a}{3} = 4 \Rightarrow \boxed{a = 12}$$

با توجه به مقدار حد تابع، مقدار a برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+7}}{5x+2}$$

مثال: مقدار حد روبه‌رو را محاسبه نمایید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+7}}{5x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{5x} = 0$$

چون درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج کمتر است

بنابراین حد برابر صفر است، یعنی:

تمرین

۱- حدهای زیر را به دست آورید.

$$1) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 + 7x}{x^2 - 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(2x-1)(x+3)}{1-x+x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{7x+1}{-\frac{1}{3}x^2 + 2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6 + 3x - 1}{4x^3 + 2x - x}$$

۲- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{4ax + 7x}{3x^3 + 9x - 2}$ داده شده

است. مقادیر a و m را طوری بیابید که داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 3$$

آزمون پایانی (۳)

محل پاسخ به سوالات آزمون پایانی (۳)

۱- اگر داشته باشیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^{m+1} - 11x + 4}{6x^3 + 4x^2 - 5} = \frac{3}{5}$$

مقدار m و a را به دست آورید.

۲- اگر تابع f در \mathbb{R} پیوسته باشد مقدار a و b را به

دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5 & x > 1 \\ 3 & x = 1 \\ -bx + 4 & x < 1 \end{cases}$$

۳- حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{5x^2 - 14x - 3}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 1}{7x^2 - 4x}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x|x| + 3}{5x^2 - 4x + 3}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^y - 6x}{x^4 + 3x + 1}$$

بخش چهارم

مشتق و کاربردهای آن

هدف کلی بخش

تعیین رفتار تابع‌ها و رسم دقیق نمودار آن‌ها

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل
اول	مشتق
دوم	کاربرد مشتق ۱

بخش چهارم

فصل اول

مشتق

هدف کلی

درک مفهوم مشتق و به دست آوردن مشتق توابع

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

- ۱- به کمک تعریف حد، مشتق توابع را به دست آورد؛
- ۲- مشتق یک تابع را در یک نقطه تعریف کند؛
- ۳- قضیه‌های مشتق و فرمول‌های آن را برای تعیین مشتق توابع دیگر به کار گیرد.

پیش‌آزمون (۱)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۱)

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$f(x) = -x^3 + 5$$

۱- تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است :

الف) $f(x+h)$ را حساب کنید.

ب) $f(x+h) - f(x)$ را به‌دست آورید.

ج) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ را حساب کنید.

۲- تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است :

الف) $f(2)$ را حساب کنید.

ب) $f(x) - f(2)$ را به‌دست آورید.

ج) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ را حساب کنید.

۳- تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. هرگاه x

را x و y را y بنامیم :

الف) y را بیابید. ($y = ?$)

ب) $\frac{y}{x}$ را تعیین کنید.

ج) مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x}$ را به‌دست آورید.

۱-۴- **نمو متغیر:** اگر تابعی با ضابطه‌ی $y = f(x)$ و با دامنه‌ی D_f و x_1 و x_2 دو مقدار متمایز از D_f باشند، در این صورت $x_2 - x_1$ را **نمو متغیر** گوئیم و آن را با x نمایش می‌دهیم.

$$\text{نمو متغیر} : x = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 + x$$

نمو تابع: اگر متغیر مستقل x نموی به اندازه‌ی x داشته باشد، آن‌گاه متغیر وابسته $f(x)$ نموی به اندازه‌ی y خواهد داشت. اگر $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$ دو مقدار از تابع f با ضابطه‌ی $y = f(x)$ به ازای x_1 و x_2 باشند، در این صورت $y_2 - y_1$ را **نمو تابع** گوئیم و آن را با y نمایش می‌دهیم:

$$\text{نمو تابع} : y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\Rightarrow y = f(x_1 + x) - f(x_1)$$

$$. y = f(x + x) - f(x)$$

مثال ۱: تابع f مفروض است، **نمو تابع** را به دست آورید:

$$f(x) = 3x^2 + 5$$

حل: **نمو تابع** عبارت است از:

$$. y = f(x + x) - f(x)$$

– در تابع اصلی به جای متغیر x مقدار $x + x$ را قرار می‌دهیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$. y = 3(x + x)^2 + 5 - (3x^2 + 5) \Rightarrow$$

– عبارت را ساده می‌کنیم:

$$. y = 3x^2 + 6x + 3x^2 + 5 - 3x^2 - 5$$

y برابر است با:

$$\Rightarrow . y = 6x + 3x^2$$

مثال ۲: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است **نمو تابع** را به دست آورید.

$$f(x) = x + 7$$

حل: **نمو تابع** برابر است با:

$$. y = f(x + x) - f(x) \Rightarrow . y = (x + x) + 7 - (x + 7)$$

– پس از ساده کردن عبارت، y برابر است با:

$$\Rightarrow . y = x + x + 7 - x - 7 \Rightarrow . y = x$$

مثال ۳: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است:

$$f(x) = x^2 - 5x$$

الف) به ازای $x = 2$ و $x = 1/0$ مقدار y را به دست آورید.

حل: نمو تابع برابر است با:

$$y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

— $x + \Delta x$ را به جای متغیر $f(x)$ قرار می دهیم، آن گاه

$$y = (x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) - (x^2 - 5x)$$

خواهیم داشت:

$$\Rightarrow y = x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - 5x - 5 \Delta x - x^2 + 5x$$

— پس از ساده کردن عبارت داریم:

$$y = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - 5 \Delta x$$

— y برابر است با:

$$y = 2(2)(0/1) + 0/1^2 - 5(0/1) \Rightarrow y = -0/09$$

— به ازای $x = 2$ و $\Delta x = 0/1$ ، y را محاسبه می کنیم:

ب) به ازای $x = 2$ و $\Delta x = 0/01$ ، مقدار y را به دست

آورید.

$$y = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - 5 \Delta x \Rightarrow$$

حل: با توجه به قسمت الف، داریم:

— به ازای $\Delta x = 0/01$ و $x = 2$ مقدار y را به دست

$$y = 2(2)(0/01) + (0/01)^2 - 5(0/01) = -0/0099$$

می آوریم:

نکته: (در تابع پیوسته f) از مقایسه ی مقدار y در حالت الف و ب نتیجه می گیریم که هر قدر مقدار Δx کوچک تر شود مقدار y نیز کوچک تر خواهد شد.

۱-۱-۴- تعریف و محاسبه ی مشتق: مشتق تابع f را

با $f'(x)$ نمایش می دهیم و به سه روش زیر تعریف می کنیم:

روش ۱: به طور کلی حد نمو تابع به نمو متغیر را مشتق

تابع می نامیم، در صورتی که حد موجود و متناهی باشد. یعنی:

$$1) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

روش ۲: با تعویض h به Δx خواهیم داشت:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

روش ۳: مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x = a$:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال ۱: مشتق تابع مقابل را با استفاده از تعریف مشتق حساب کنید.

$$f(x) = 2 - 5x$$

مراحل حل: رابطه‌ی مشتق برابر است با:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 5(x + \Delta x) - (2 - 5x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-5 \cdot \Delta x}{\Delta x} \end{aligned}$$

– $x + \Delta x$ را به جای متغیر تابع با ضابطه $f(x)$ جایگزین می‌کنیم:

– پس از ساده کردن صورت مشتق تابع به دست می‌آید.

$$f'(x) = -5$$

مثال ۲: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق به دست می‌آید:

$$f(x) = x^2 + 6$$

حل: رابطه‌ی مشتق برابر است با:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 6 - (x^2 + 6)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + \cancel{6} - x^2 - \cancel{6}}{h} \\ \Rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h \\ &\Rightarrow f'(x) = 2x \end{aligned}$$

– به جای متغیر، در تابع مقدار $x+h$ را قرار می‌دهیم:

– پس از ساده کردن، مشتق به دست می‌آید.

مثال ۳: مشتق تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده حساب کنید.

$$f(x) = x^2 - 4, \quad x_0 = 5$$

حل: $f(5)$ را حساب می‌کنیم،

$$f(5) = 5^2 - 4 = 25 - 4 \Rightarrow f(5) = 21$$

– مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x=5$ برابر است با:

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} \\ \Rightarrow f'(5) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x^2 - 4) - 21}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} \end{aligned}$$

– به جای $f(x)$ و $f(5)$ مقدار آن‌ها را قرار می‌دهیم، پس:

– با استفاده از اتحاد مزدوج کسر را ساده می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(\Delta) = \lim_{x \rightarrow \Delta} \frac{\cancel{(x-\Delta)}(x+\Delta)}{\cancel{x-\Delta}} = \lim_{x \rightarrow \Delta} x + \Delta$$

– مشتق تابع در $x = \Delta$ برابر است با :

$$\Rightarrow f'(\Delta) = 1 \circ$$

مثال ۴: مشتق تابع مقابل را در نقطه‌ی داده شده به دست

آورید.

$$f(x) = x^2 - 5x, \quad x_0 = 3$$

حل: مقدار $f(3)$ را حساب می‌کنیم :

$$f(3) = 3^2 - 5(3) \Rightarrow f(3) = -6$$

– مشتق تابع f در $x = 3$ برابر است با :

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x - (-6)}{x - 3}$$

– با استفاده از اتحاد جمله‌ی مشترک صورت کسر تابع

را تجزیه می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}$$

– مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x = 3$ برابر است با :

$$\Rightarrow f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} x - 2 = 3 - 2 \Rightarrow f'(3) = 1$$

می‌دانیم $f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ و از طرفی حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وقتی Δx به صفر میل می‌کند

در صورتی وجود دارد که حد چپ و راست آن برابر باشند؛ به بیان دیگر تابع f با ضابطه‌ی $y = f(x)$ در $x = a$ دارای مشتق است هرگاه داشته باشیم :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال ۵: مشتق‌پذیری تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده

بررسی کنید.

$$f(x) = |x + 5|, \quad x_0 = -5$$

حل: رابطه‌ی مشتق تابع f در $x = a$ برابر با :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

– مقدار تابع f را در $x = -5$ حساب می‌کنیم :

$$f(-5) = |-5 + 5| = 0$$

– مشتق تابع f در $x = -5$ برابر است با :

$$f'(-5) = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{f(x) - f(-5)}{x - (-5)} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{|x + 5| - 0}{x + 5}$$

– حد تابع را با استفاده از تعریف قدرمطلق حساب می‌کنیم.

– هرگاه $x > -5$ حد تابع برابر است با :

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{|x+5|}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{(x+5)}{x+5} = 1$$

– هرگاه $x < -5$ حد تابع برابر است با :

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{|x+5|}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{-(x+5)}{x+5} = -1$$

– مشتق f در $x = -5$ وجود ندارد، زیرا :

$$1 \neq -1$$

مثال ۶: مشتق تابع مقابل را با استفاده از تعریف مشتق

حساب کنید.

$$f(x) = 3 + 5x$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق را می‌نویسیم :

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

با جای‌گذاری $f(x + \Delta x)$ و $f(x)$ در رابطه داریم :

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3 + 5(x + \Delta x) - (3 + 5x)}{\Delta x}$$

– صورت کسر را ساده می‌کنیم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{3} + 5\cancel{x} + 5 \cdot \Delta x - \cancel{3} - 5\cancel{x}}{\Delta x}$$

– مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5(\Delta x)}{\Delta x} = 5$$

مثال ۷: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق

به‌دست آورید.

$$f(x) = \frac{5}{x}$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق برابر است با :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{x + \Delta x} - \frac{5}{x}}{\Delta x}$$

– به جای متغیر x در تابع $x + \Delta x$ قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{x + \Delta x} - \frac{5}{x}}{\Delta x}$$

– از صورت کسر مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{5x - 5(x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)}}{\Delta x}$$

– کسر مرکب را به کسر ساده تبدیل می‌کنیم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-5 \cdot \Delta x}{x(x + \Delta x)} \times \frac{1}{\cancel{\Delta x}}$$

– حد تابع را حساب می‌کنیم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-5}{x(x + \Delta x)} = \frac{-5}{x(x + 0)}$$

مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x) = \frac{-5}{x^2}$$

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + 3xh + h^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 2$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$$

$$f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$f(x) = x^2 + 5, \quad x = 3$$

$$f(3) = 3^2 + 5 = 14$$

مثال ۸: مشتق تابع روبه رو را با استفاده از تعریف مشتق

به دست آورید.

حل: رابطه‌ی کلی مشتق برابر است با :

– با استفاده از اتحاد مکعب صورت را ساده می‌کنیم.

– از متغیر h در صورت فاکتور می‌گیریم.

– مشتق تابع برابر است با :

مثال ۹: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق

در نقطه‌ی خواسته شده حساب کنید.

حل: رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x = 2$

برابر است با :

– با توجه به صورت کسر مخرج را با استفاده از اتحاد

مزدوج تجزیه می‌کنیم :

– پس از رفع ابهام از تابع داریم :

– مشتق تابع f در $x = 2$ برابر است با :

مثال ۱۰: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق

در نقطه‌ی خواسته شده به دست آورید.

حل: مقدار $f(x)$ در $x = 3$ برابر است با :

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

– رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x = 3$ برابر است با :

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 5 - 14}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

– به جای $f(x)$ مقدار تابع را جایگزین می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} x + 3$$

– صورت کسر را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه و ساده می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(3) = 3 + 3 \Rightarrow f'(3) = 6$$

مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x = 3$ برابر است با :

۲-۱-۲ – برخی از رابطه‌های مشتق
قاعده‌ی ۱: مشتق تابع ثابت :

$$f(x) = c \text{ و } c \in \mathbb{R}$$

مشتق تابع ثابت همواره برابر صفر است.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

مشتق تابع ثابت همواره برابر صفر است؛ به بیان دیگر :

$$f(x) = c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$$

مثال:

$$f(x) = -2\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 0$$

قاعده‌ی ۲: مشتق تابع درجه اول :

$$f(x) = ax + b, a \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$$

– از رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ برابر است :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

– عبارت حاصل را حساب می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) + b - (ax + b)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = a$$

مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x) = a$$

مشتق تابع با ضابطه $f(x) = ax + b$ برابر است با :

$$f(x) = -5x + 7$$

مثال ۱: مشتق تابع روبه‌رو را محاسبه کنید.

$$f'(x) = -5$$

– مشتق تابع برابر است با ضریب x :

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 5\pi$$

مثال ۲: مشتق تابع روبه‌رو را به‌دست آورید.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حل: مشتق تابع برابر است با ضریب x :

$$f(x) = x^2$$

مثال ۳: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق،

محاسبه کنید.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

– با استفاده از اتحاد مربع کامل عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x+h \Rightarrow f'(x) = 2x$$

– پس از فاکتورگیری از h ، مشتق تابع برابر است با:

نتیجه: هرگاه $f(x) = x^2$ آن‌گاه $f'(x) = 2x$

در حالت کلی می‌توان قاعده‌ی ۳ را بیان کرد.

قاعده‌ی ۳: هرگاه $f(x) = x^n$ و $n \in \mathbb{R}$ آن‌گاه $f'(x) = nx^{n-1}$

مثال ۴: مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

$$y' = 2x^{2-1} = 2x$$

$$y = x^2$$

$$y' = 7x^{7-1} = 7x^6$$

$$y = x^7$$

$$y' = -6x^{-6-1} = -6x^{-7} = \frac{-6}{x^7}$$

$$y = x^{-6}$$

$$y' = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$$

$$y = x^{\frac{4}{3}}$$

$$f'(x) = nu'u^{n-1}$$

قاعده‌ی ۴: فرض کنید $f(x) = u^n$ ، $f(x)$ بر حسب متغیر x

مثال ۵: مشتق تابع مقابل را بیابید.

$$f(x) = (-4x + 7)^3$$

حل:

– مشتق تابع برابر است با:

$$y' = 3(-4)(-4x + 7)^{3-1} \Rightarrow y' = -12(-4x + 7)^2$$

$$f'(x) = kg'(x)$$

قاعده‌ی ۵: فرض کنید $f(x) = kg(x)$ ، $f(x)$ مقدار ثابت آن گاه:

اثبات قاعده‌ی ۵: رابطه‌ی کلی تعریف مشتق عبارت است

از:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

– در رابطه‌ی کل به جای $f(x)$ مساوی آن یعنی $kg(x)$ را

قرار می‌دهیم، پس:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kg(x + \Delta x) - kg(x)}{\Delta x}$$

$$= k \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = k \cdot g'(x)}$$

در نتیجه مشتق تابع برابر است با:

مثال ۶: مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x) = 7x^5$

ب) $f(x) = -6\left(\frac{3}{4}x + 5\right)^6$

مثال ۷: مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = 7 \times 5 \times x^4 = 35x^4$$

$$f'(x) = (-6)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}x + 5\right)^{6-1} = -\frac{9}{2}\left(\frac{3}{4}x + 5\right)^5$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب) $f(x) = \sqrt{-3x + 5}$

$$f(x) = (-3x + 5)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(-3)(-3x + 5)^{\frac{1}{2}-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{2}(-3x + 5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-3}{2} \times \frac{1}{(-3x + 5)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-3}{2\sqrt{-3x + 5}}$$

$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

نتیجه‌ی ۱: اگر $y = \sqrt{u}$ (بر حسب x) آن‌گاه

اثبات نتیجه‌ی ۱: می‌دانیم $\sqrt[m]{u^n} = u^{\frac{n}{m}}$ ($m, n \in \mathbb{N}$)

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}(u') \times u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}u' \cdot u^{-\frac{1}{2}}$$

پس:

– چون $n \in \mathbb{N}$ و $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ مشتق برابر است با:

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2}u' \times \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

نتیجه‌ی ۲: هرگاه $y = \sqrt[m]{u^n}$ آن‌گاه:

مثال ۸: مشتق تابع مقابل را محاسبه کنید:

$$y = \sqrt[3]{(-4x+3)^2}$$

حل: با استفاده از نتیجه‌ی ۲ مشتق تابع برابر است با:

$$y' = \frac{2(-4)}{3^3\sqrt[3]{(-4x+3)^{3-2}}} = \frac{-8}{3^3\sqrt[3]{-4x+3}}$$

مثال ۹: مشتق تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده حساب

کنید.

$$f(x) = \sqrt{2x+5} \text{ و } x=2$$

حل: با استفاده از نتیجه‌ی ۲ مشتق تابع برابر است با:

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

– مقدار مشتق به ازای $x=2$ برابر است با:

$$y'(2) = \frac{1}{\sqrt{2 \times 2 + 5}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

مثال ۱۰: مشتق تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده

محاسبه کنید.

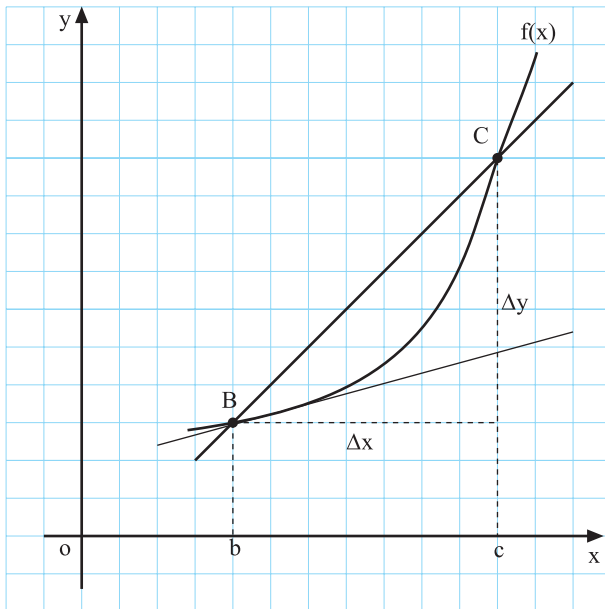
$$f(x) = \sqrt[5]{(2x+1)^3}, \quad x=0$$

حل: با استفاده از نتیجه ۲ مشتق تابع برابر است با:

$$y' = \frac{2 \times 3}{5^5 \sqrt[5]{(2x+1)^{5-3}}} = \frac{6}{5^5 \sqrt[5]{(2x+1)^2}}$$

مقدار مشتق به ازای $x=0$ برابر است با:

$$\Rightarrow y'(0) = \frac{6}{5^5 \sqrt[5]{(0+1)^2}} = \frac{6}{5}$$



نمودار ۴-۱

۳-۱-۴- تعبير هندسي مشتق: نمودار ۴-۱ را مشاهده کنید: اگر نقطه‌ای از منحنی باشد،

– شیب خط مماس برابر است با:

$$m = f'(b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x}$$

نتیجه: شیب خط مماس (ضریب زاویه) بر نمودار $y=f(x)$ که از نقطه‌ی $(b, f(b))$ می‌گذرد برابر مشتق تابع f با ضابطه‌ی $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=b$ ، یعنی:

$$m = f'(b)$$

مثال ۱: معادله‌ی خط مماس بر منحنی روبه‌رو را که از نقطه‌ی $A(-1, 1)$ می‌گذرد بنویسید.

$$f(x) = -x^2 + 2$$

حل: شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در $x=1$ برابر است با:

$$f'(x) = -2x \Rightarrow m = f'(-1) = -2(-1) \Rightarrow m = 2$$

– معادله‌ی خط مماس بر منحنی که از نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$

می‌گذرد برابر است با:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad (/)$$

$A \left| \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \right.$ و $m=2$ را در رابطه‌ی (*) قرار می‌دهیم:

$$y-1=2(x+1) \Rightarrow y=2x+2+1 \Rightarrow$$

معادله‌ی خط مماس که از نقطه‌ی A می‌گذرد برابر

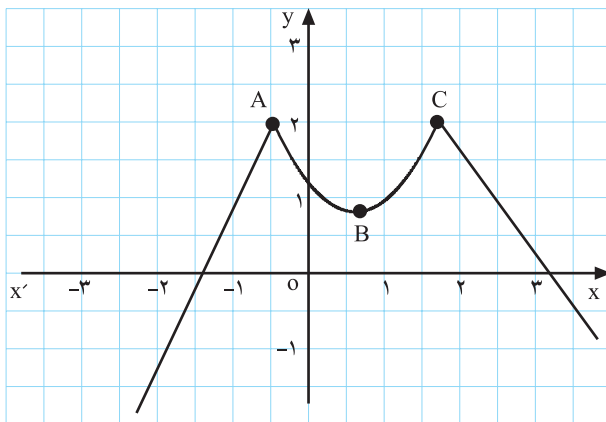
است با:

$$y=2x+3$$

نکته: در نقاطی که مماس بر نمودار وجود نداشته باشد، تابع مشتق ندارد.

مثال ۲: در نقاط A و C در نمودار ۴-۲ مماس وجود

ندارد، پس در این نقاط تابع f مشتق ندارد. ولی در نقطه‌ی B دارای مشتق است، زیرا می‌توان در نقطه‌ی B مماس بر منحنی رسم کرد.



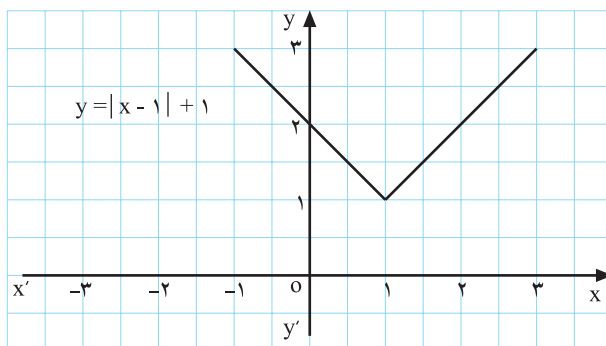
نمودار ۴-۲

مثال ۳: با توجه به نمودار ۴-۳ آیا تابع مقابل در $x=+1$

دارای مشتق است؟ چرا؟

حل: خیر، زیرا نمی‌توان در نقطه‌ی $x=1$ مماس بر نمودار

۴-۳ رسم کرد.



نمودار ۴-۳

۴-۱-۴ قضیه‌های مشتق

قضیه‌ی ۱: اگر تابع f در $x=a$ مشتق داشته باشد در این نقطه پیوسته است.

$$f(x) = x^2 - 3x$$

مثال ۱: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است این تابع

در $x=1$ مشتق پذیر است و مشتق آن برابر است با:

$$f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow f'(1) = -1$$

بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۱ تابع پیوسته است، زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -2$$

قضیه‌ی ۲: (مشتق حاصل جمع دو تابع)

اگر u و v دو تابع بر حسب x و مشتق پذیر باشند و $f(x) = u + v$ ، آن گاه $f'(x) = u' + v'$

$$y = x^2 + x^3$$

مثال ۲: مشتق تابع مقابل را به دست آورید.

$$y' = 2x + 3x^2$$

x^2 و x^3 دو تابع مشتق پذیرند، پس:

قضیه‌ی ۳: اگر u و v بر حسب x ، دارای مشتق باشند و $f = u \cdot v$ آن گاه: $f' = u'v + v'u$

$$f(x) = (-6x^2 + 7x)(3x^4 + \sqrt{x})$$

مثال ۳: مشتق تابع مقابل را به دست آورید.

با استفاده از قضیه‌ی ۳، مشتق $f(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = (-12x + 7)(3x^4 + \sqrt{x}) + (12x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}})(-6x^2 + 7x)$$

تذکر: مشتق حاصل ضرب دو تابع به حاصل ضرب تعداد متناهی تابع قابل تعمیم است.

مثال ۴: مشتق تابع مقابل را به ازای $x=2$ به دست

$$f(x) = (x-2)(x-5)(x+6)$$

آورید.

حل: مشتق تابع برابر است با:

$$f'(x) = (x-2)'(x-5)(x+6) + (x-2)(x-5)'(x+6) + (x-2)(x-5)(x+6)'$$

– پس از محاسبه‌ی مشتق هر پراتز خواهیم داشت:

$$\Rightarrow f'(x) = (x-5)(x+6) + (x-2)(x+6) + (x-2)(x-5)$$

– به جای x عدد ۲ را قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow f'(2) = (2-5)(2+6) + (2-2)(2+6) + (2-2)(2-5)$$

پس مشتق $f(x)$ به ازای $x=2$ برابر است با:

$$f'(2) = -24$$

قضیه‌ی ۴: (مشتق حاصل تقسیم دو تابع)

اگر $u'(x)$ و $v'(x)$ وجود داشته باشد و $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ به شرط $v(x) \neq 0$ آن‌گاه داریم:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}$$

مثال ۵: مشتق تابع مقابل را بنویسید.

$$y = \frac{-7x+5}{3+4x}$$

حل: با استفاده از قضیه‌ی ۴ داریم:

$$\Rightarrow y' = \frac{-v(3+4x) - 4(-7x+5)}{(3+4x)^2}$$

$$= \frac{-21 - 28x + 28x - 20}{(3+4x)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-41}{(3+4x)^2}$$

پس از ساده کردن، مشتق تابع برابر است با:

مثال ۶: مشتق تابع مقابل را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{5}{x^3}$$

حل: طبق قضیه‌ی ۴ داریم:

$$f'(x) = \frac{0 \times x^3 - (3x^2) \times 5}{(x^3)^2} = \frac{-15x^2}{x^6}$$

– مشتق تابع برابر است با :

$$f(x) = -\frac{15}{x^4}$$

قضیه ۵: (مشتق ترکیب دو تابع)

اگر $y = f(u)$ تابعی بر حسب u با ضابطه $y = f(u)$ و $u = g(x)$ تابعی بر حسب x با ضابطه $u = g(x)$ باشد، آن گاه

$$y = f(u) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) \quad y \text{ تابعی بر حسب } x \text{ با این ضابطه:}$$

می باشد. حال اگر $u = g(x)$ در x مشتق پذیر و تابع f در $u = g(x)$ مشتق پذیر باشد آن گاه y نیز در x مشتق پذیر است و همچنین :

$$y' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

مثال ۷: تابع های u و y در مقابل مفروض اند. مشتق y

را بر حسب x (y'_x) به دست آورید.

$$y = -2u^3, \quad u = 3x^2 + 5x$$

– با توجه به قضیه ۵ و رابطه y'_x خواهیم داشت :

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' f'(u) \Rightarrow y' = (6x + 5)(-6u^2)$$

– در عبارت مشتق، به جای u ، مساوی آن را قرار می دهیم،

$$y' = -6(6x + 5)(3x^2 + 5x)^2$$

پس :

مثال ۸: تابع های u و y در مقابل مفروض اند ؛

$$y = 3u^2 + 5u - 3 \quad \text{و} \quad u = \sqrt{3x+1}$$

ابتدا y'_x را یافته، سپس مقدار $y'_{(5)}$ را حساب کنید.

حل: با کاربرد قضیه ۵ مشتق تابع مرکب عبارت است

از :

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' f'(u) \Rightarrow$$

$$y'_x = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}\right)(6u + 5) \Rightarrow$$

– در مشتق تابع به جای u مقدار آن را قرار می دهیم :

$$y'_x = \left(\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}\right)(6\sqrt{3x+1} + 5) \Rightarrow$$

– برای محاسبه $y'_{(5)}$ به جای x عدد ۵ را در مشتق

قرار می دهیم.

$$y'_{(5)} = \left(\frac{3}{2\sqrt{3 \times 5 + 1}}\right)(6\sqrt{3 \times 5 + 1} + 5)$$

– مشتق تابع در $x = 5$ برابر است با :

$$\Rightarrow y'_{(5)} = \left(\frac{3}{8}\right)(29) \Rightarrow y'_{(5)} = \frac{87}{8}$$

(مشتق توابع مثلثاتی)

الف) مشتق تابع سینوس

مثال‌های نمونه:

$$y = \sin x \cdot \sqrt{x} \quad y' = \cos x \cdot \sqrt{x}$$

$$y = 2 \sin x \cdot 3 \sin(x^2 \cdot x)$$

$$y' = 2 \cos x \cdot 3(2x \cdot 1) \cos(x^2 \cdot x)$$

۱- اگر $y = \sin x$ آن‌گاه $y' = \cos x$

۲- اگر $y = \sin u$ (بر حسب x) آن‌گاه $y' = u \cdot \cos u$

ب) مشتق تابع کسینوس

$$y = \cos \sqrt{x} \quad y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x}$$

۱- اگر $y = \cos x$ آن‌گاه $y' = -\sin x$

۲- اگر $y = \cos u$ (بر حسب x) آن‌گاه $y' = -u \cdot \sin u$

ج) مشتق تابع تانژانت

۱- اگر $y = \tan x$ آن‌گاه $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$y = u \cdot (1 + \tan^2 u) = \frac{u}{\cos^2 u}$$

۲- اگر $y = \tan u$ (بر حسب x) آن‌گاه

$$y = \tan 4x \quad y' = 4(1 + \tan^2 4x) = \frac{4}{\cos^2 4x}$$

د) مشتق تابع کتانژانت

۱- اگر $y = \cot x$ آن‌گاه

$$y = \cot^3 x \quad y' = -3(1 + \cot^2 x) \cot^2 x$$

$$y' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$y = u \cdot (1 + \cot^2 u) = \frac{u}{\sin^2 u}$$

۲- اگر $y = \cot u$ آن‌گاه

$$y = \cot \sqrt{x} \quad y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} (1 + \cot^2 \sqrt{x}) = -\frac{1}{2\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}}$$

مثال ۹: مشتق تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده حساب

$$f(x) = 5x^2 - 3 \sin 2x, \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \text{کنید.}$$

حل: مشتق تابع را به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ حساب می‌کنیم.

$$f'(x) = 10x - 6 \cos 2x. \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right) - 6 \cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

— در $x = \frac{\pi}{4}$ ، مشتق برابر است با:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{2} - 6 \cos \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

مثال ۱۰: مشتق تابع مقابل را در نقطه‌ی داده شده

محاسبه کنید.

$$f(x) = \sin 3x \cdot \cos 2x, \quad x = \frac{\pi}{6}$$

حل: مشتق حاصل ضرب دو تابع برابر است با:

$$f'(x) = 3 \cos 3x \cos 2x - 2 \sin 2x \sin 3x.$$

— به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ ، مشتق برابر است با:

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{3} - 2 \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{2}.$$

— پس از ساده کردن مشتق به دست می‌آید.

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} - \sqrt{3}$$

مثال ۱۱: مشتق تابع مقابل را در نقطه‌ی داده شده

به دست آورید.

$$f(x) = x\sqrt{2x} \quad \text{و} \quad x = \frac{9}{2}$$

حل: مشتق حاصل ضرب دو تابع برابر است.

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x} + \frac{2}{2\sqrt{2x}} \cdot x = \sqrt{2x} + \frac{x}{\sqrt{2x}}$$

— به ازای $x = \frac{9}{2}$ مقدار مشتق برابر است با:

$$f'\left(\frac{9}{2}\right) = \sqrt{9} + \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{9}} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

مثال ۱۲: مشتق تابع مقابل را به ازای نقطه‌ی داده

شده به دست آورید.

$$f(x) = 2x \cdot \cot \frac{x}{2} \quad \text{و} \quad x = \pi$$

حل: مشتق جمع دو تابع برابر جمع مشتق‌های آن دو

تابع است؛ در نتیجه داریم:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(1 \cdot \cot^2 \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(1 \cdot \cot \frac{x}{2}\right)$$

— به ازای $x = \pi$ مقدار مشتق برابر است با:

$$f'(\pi) = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(1 \cdot 0\right) - \frac{1}{2} \left(1 \cdot 1\right) = -\frac{1}{2}$$

— پس از ساده کردن $f'(\pi)$ به دست می‌آید.

$$\Rightarrow f'(\pi) = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{5x-1} \text{ و } x=1$$

$$f'(x) = \frac{0 \times (5x-1) - 5 \times 3}{(5x-1)^2} = \frac{-15}{(5x-1)^2} \Rightarrow$$

$$f'(1) = \frac{-15}{16}$$

$$f(t) = \frac{2t-4}{5-4t}, \quad t=4$$

$$f'(t) = \frac{2(5-4t) - (-4)(2t-4)}{(5-4t)^2} = \frac{10 - 8t + 8t - 16}{(5-4t)^2}$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{-6}{(5-4t)^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{-6}{121}$$

$$y = \sqrt{4 + \sin 2x} \text{ و } x=0$$

$$y' = \frac{\cancel{2} \cos 2x}{\cancel{2} \sqrt{4 + \sin 2x}} \Rightarrow y'_{(0)} = \frac{\cos(0)}{\sqrt{4 + \sin(0)}} = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = \sin^3 + \cos^3 0, \quad = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(0) = 3 \cos 0 \sin^2 - \sqrt{\sin 0} \cos^3 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos \frac{\pi}{2} \sin^2 \frac{\pi}{2} - \sqrt{\sin \frac{\pi}{2}} \cos^3 \frac{\pi}{2} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f(x) = (x^2 + \cos x)(-3x + 4), \quad x=0$$

مثال ۱۳: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده

محاسبه کنید.

– با استفاده از مشتق کسر به ازای $x=1$ مشتق را

به دست می آوریم:

مثال ۱۴: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده

محاسبه کنید.

– مشتق تابع کسری برابر است با:

– به ازای $t=4$ ، مشتق تابع برابر است با:

مثال ۱۵: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده

محاسبه کنید.

حل: مشتق تابع به ازای $x=0$ برابر است با:

مثال ۱۶: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده

محاسبه کنید.

حل: مشتق برابر است با:

– به ازای $\frac{\pi}{2}$ ، مقدار مشتق به دست می آید.

مثال ۱۷: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده

حساب کنید.

حل: مشتق تابع حاصل ضرب برابر است با: $f'(x) = (2x - \sin x)(-3x + 4) - 3(x^2 + \cos x)$

به ازای $x = 0$ مقدار مشتق به دست می آید.
 $f'(0) = (2(0) - \sin(0))(-3(0) + 4) - 3(0^2 + \cos(0))$
 $\Rightarrow f'(0) = 0 - 3 \Rightarrow f'(0) = -3$

۵-۱-۴- مشتق دوم یک تابع: با تکرار عمل مثال:

$$f(x) = 3x^5 - 6x^2 + 11$$

$$f'(x) = 15x^4 - 12x$$

$$f''(x) = 60x^3 - 12$$

مشتق گیری در صورت وجود مشتق می توان از مشتق تابع دوباره مشتق گرفت که به آن مشتق مرتبه ی دوم تابع می گوئیم و آن را به صورت y'' یا $f''(x)$ نمایش می دهیم.

نکته: اگر تابع f با ضابطه ی $y = f(x)$ روی بازه ی I مشتق پذیر باشد، اگر تابع f' روی I مشتق پذیر باشد آنگاه می گوئیم تابع f روی I مشتق دوم دارد و مشتق دوم y را با $f''(x)$ نمایش می دهیم و به همین ترتیب مشتق مرتبه ی سوم را با $f'''(x)$ یا $f^{(3)}(x)$ و ... و مشتق مرتبه ی n ام را با $f^{(n)}(x)$ نمایش می دهیم.

$$f^{(3)}(x) = 180x^2 \text{ و } f^{(4)}(x) = 360x$$

$$f^{(5)}(x) = 360 \text{ و } f^{(6)}(x) = 0$$

$$f(x) = -3x^3 + 5x^2 \text{ و } x = -2$$

$$f'(x) = -9x^2 + 10x \Rightarrow f''(x) = -18x + 10$$

$$f''(-2) = -18(-2) + 10 \Rightarrow f''(-2) = 46$$

مثال ۱: در تابع روبه رو $f''(x)$ را در نقطه ی داده شده

حساب کنید.

– از مشتق اول دوباره مشتق می گیریم:

– به ازای $x = -2$ مشتق دوم تابع برابر است با:

مثال ۲: در تابع مقابل $f''(x)$ را در نقطه ی داده شده

به دست آورید.

$$f(x) = \sin x + \cos x \quad x = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = \cos x - \sin x \Rightarrow f''(x) = -\sin x - \cos x$$

– از مشتق اول دوباره مشتق می گیریم:

$$\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

– به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق دوم تابع برابر است با:

$$\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$$

– پس از ساده کردن داریم:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 5Bx^2 + 3x$$

مثال ۳: تابع مقابل مفروض است، هرگاه $y''(2) = 9$ باشد

مقدار B را محاسبه کنید.

$$y' = x^2 - 1 \cdot Bx + 3 \Rightarrow y'' = 2x - 1 \cdot B$$

حل: مشتق اول و دوم تابع را پیدا می‌کنیم:

$$9 = 2(2) - 1 \cdot B \Rightarrow 1 \cdot B = 4 - 9 \Rightarrow B = \frac{-5}{1} = -\frac{-1}{2}$$

- مشتق را برابر عدد داده شده قرار می‌دهیم، B به دست

می‌آید.

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} \text{ و } g(x) = x\sqrt{x}$$

مثال ۴: تابع‌های f و g مفروض‌اند:

$$f''(8) + g''(4) = \frac{35}{72}$$

نشان دهید بین مشتق‌های دوم آن‌ها رابطه‌ی روبه‌رو برقرار

است:

$$f(x) = x^{\frac{4}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$$

حل: مشتق اول تابع با ضابطه f(x) برابر است با:

- برای محاسبه‌ی f''(x) از f'(x) مشتق می‌گیریم:

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right) x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{4}{9} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9x^{\frac{2}{3}}}$$

- به ازای x = 8 مقدار f''(x) برابر است با:

$$f''(x) = \frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f''(8) = \frac{4}{9\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{9}$$

- مشتق اول g(x) برابر است با:

$$g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times x \Rightarrow g'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

- برای محاسبه‌ی g''(x) از g'(x) مشتق می‌گیریم:

$$g''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1 \times (2\sqrt{x}) - x(2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}})}{(2\sqrt{x})^2}$$

- مشتق دوم g(x) برابر است با:

$$\Rightarrow g''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2x - x}{4x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt{x}}$$

- به ازای x = 4 مشتق دوم g(x) برابر است با:

$$\Rightarrow g''(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2+1}{8}$$

$$\Rightarrow g''(4) = \frac{3}{8}$$

- با مقایسه‌ی مقادیر مشتق دوم نتیجه می‌گیریم که رابطه

برقرار است.

$$f''(8) + g''(4) = \frac{1}{9} + \frac{3}{8} = \frac{8+27}{72} = \frac{35}{72}$$

آزمون پایانی (۱)

محل پاسخ به سوالات آزمون پایانی (۱)

۱- مشتق تابع‌های زیر را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

$$۱) f(x) = 5 - 3x$$

$$۲) f(x) = x^2 - 7x$$

۲- با استفاده از تعریف مشتق، ثابت کنید تابع $f(x) = |x - 2|$ در نقطه‌ی $x = 2$ مشتق ندارد.

۳- مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید.

$$۱) y = \sqrt[3]{(2x^2 + 3x)^2}$$

$$۲) y = (3x^2 + 5x)^6$$

$$۳) y = (-6 \sin 2x + \cos 3x)^4$$

$$۴) y = \frac{1 - 7x}{3x + 4}$$

۴- مشتق دوم توابع زیر را به دست آورید.

$$y = 3\sqrt{5x+1} + 7x^2 \text{ (الف)}$$

$$y = 2 \cos 3x \text{ (ب)}$$

$$y = \frac{3}{x} \text{ (ج)}$$

$$y = (3x^2 - 5x)^3 \text{ (د)}$$

بخش چهارم

فصل دوم

کاربرد مشتق (۱)

هدف کلی

استفاده از مشتق تابع برای رسم خط مماس و قائم در یک نقطه از نمودار تابع، تعیین نزولی یا صعودی بودن یک تابع و به دست آوردن نقطه‌های ماکزیمم یا مینیمم یک تابع.

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

- ۱- معادله‌ی خط مماس در یک نقطه از نمودار یک تابع را بنویسد؛
- ۲- معادله‌ی خط عمود بر یک منحنی را در نقطه‌ای واقع بر آن بنویسد؛
- ۳- با استفاده از مشتق، صعودی یا نزولی بودن تابع را مشخص کند؛
- ۴- جدول تغییرات تابع را تعیین کند؛
- ۵- نقطه‌های ماکسیمم یا مینیمم یک تابع را مشخص کند.

پیش‌آزمون (۲)

محل پاسخ به سوالات پیش‌آزمون (۲)

۱- تابع $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$ در \mathbb{R} تعریف شده است.

الف) $f(2)$ را حساب کنید.

ب) اگر شیب خط مماس D که از نقطه‌ی به طول $x = 2$ می‌گذرد برابر $f'(2)$ باشد مقدار آن را بیابید.

ج) معادله‌ی خط مماس (D) را که از نقطه‌ی به طول $x = 2$ می‌گذرد بنویسید.

د) نمودار منحنی $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$ و خط D را رسم کنید.

۲- مشتق تابع $f(x) = -3x^2 + 3x + 1$ را در \mathbb{R} تعیین علامت کنید.

۳- ماکسیمم مقدار تابع با ضابطه $f(x) = 6 - 2x^2$ را به دست آورید.

۴-۲- کاربردهای مشتق (۱)

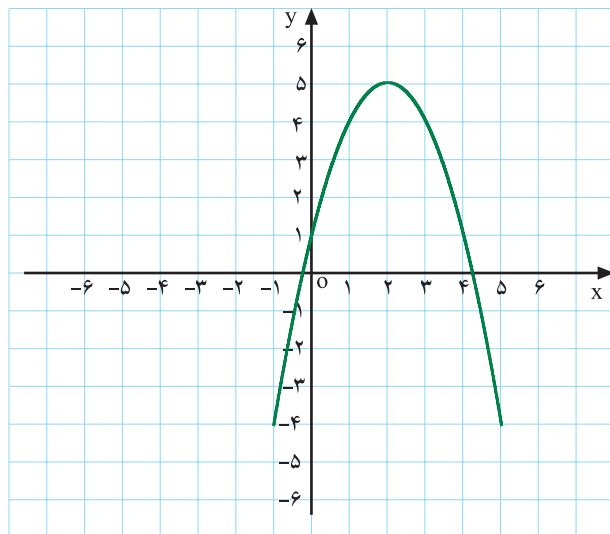
۴-۲-۱- شیب خط مماس و عمود بر یک منحنی

(ضریب زاویه)

فعالیت ۴-۱

نمودار منحنی $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ را در شکل ۴-۴

مشاهده می‌کنید.



نمودار ۴-۴

الف) مقدار $f(2)$ را حساب کنید.

ب) مشتق f را به دست آورید.

ج) $f'(2)$ را حساب کنید.

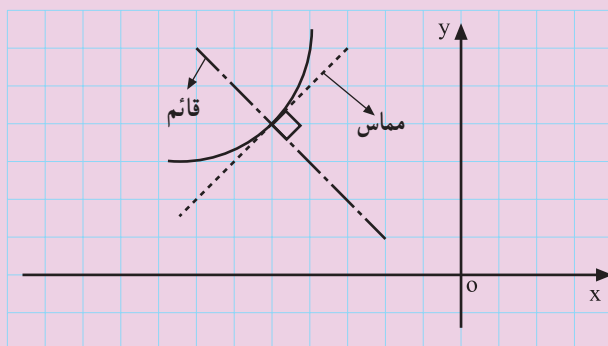
د) آیا می‌توان گفت $f'(2)$ برابر شیب خط مماس بر منحنی

در نقطه $x=2$ است؟

پاسخ:

نتیجه: ضریب زاویه‌ی خط مماس بر منحنی تابع f با ضابطه‌ی $y = f(x)$ در نقطه‌ی به طول $x = a$ عبارت

است از مشتق تابع در آن نقطه؛ به بیان دیگر: (m) ضریب زاویه است) $f'(a) = m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$



نمودار ۴-۵

ضریب زاویه‌ی خط عمودی که از نقطه‌ی به طول $x = a$ می‌گذرد برابر است با: (m') ضریب زاویه‌ی عمود)

$$m' = \frac{-1}{f'(a)} \text{ یا } m' = \frac{-1}{m}$$

(m') ضریب زاویه‌ی عمود است.)

مثال: ضریب زاویه‌ی خط مماس و عمود بر منحنی تابع
مقابل در نقطه‌ی داده شده را حساب کنید.

$$y = -3x^2 + 5x + 7, \quad x = 1$$

حل: به ازای $x = 1$ ضریب زاویه‌ی خط مماس برابر است

با:

$$y' = -6x + 5 \Rightarrow m = y'(1) = -6(1) + 5 \Rightarrow m = -1$$

– ضریب زاویه‌ی خط عمود برابر است با:

$$m' = \frac{-1}{m} \Rightarrow m' = \frac{-1}{-1} \Rightarrow m' = 1$$

مثال: ضریب زاویه‌ی خط مماس و عمود بر منحنی تابع

روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده محاسبه کنید.

$$y = \sqrt{5x^3 + 3x + 4}, \quad x = 0$$

حل: ضریب زاویه‌ی خط مماس و خط عمود در نقطه‌ی

$x = 0$ برابر است با:

$$y' = \frac{15x^2 + 3}{2\sqrt{5x^3 + 3x + 4}} \Rightarrow m = y'(0) = \frac{3}{4} \quad \text{و}$$

$$m' = \frac{-1}{m} = \frac{-4}{3}$$

تمرین: ضریب زاویه‌ی خط مماس بر منحنی تابع‌های زیر

را در نقطه‌های داده شده به دست آورید.

۱) $f(x) = 3 + 5 \sin 2x, \quad x = \pi$

۲) $f(x) = -3x^2 + 5x + 7, \quad x = 2$

۳) $g(x) = \frac{-3x}{2x+4}, \quad x = 1$

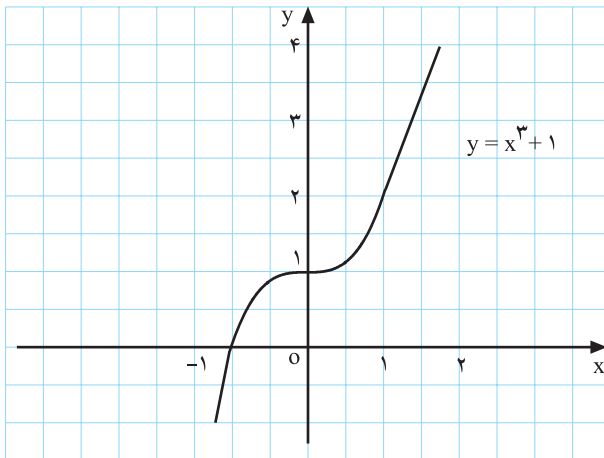
۴) $z(t) = \frac{5}{t}, \quad t = 3$

۵) $f(x) = \sqrt{2x+5}, \quad x = 2$

۲-۲-۴- تعیین معادله‌ی خط مماس و خط عمود

فعالیت ۲-۴

تابع $f(x) = x^3 + 1$ و منحنی آن نمودار ۴-۶ رسم شده است.



نمودار ۴-۶

محل پاسخ:

$$f(2) =$$

$$f'(x) =$$

$$f'(2) =$$

الف) مقدار $f(2)$ را حساب کنید.

ب) مشتق f را به دست آورید.

ج) مقدار $f'(2)$ را حساب کنید.

بلی: خیر:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

د) آیا می‌توان گفت معادله‌ی روبه‌رو معادله‌ی خط مماس

بر منحنی در نقطه‌ی $x = 2$ است؟

بلی: خیر:

$$y - f(2) = \frac{-1}{f'(2)}(x - 2)$$

ه) آیا معادله‌ی مقابل معادله‌ی خط عمود است؟

نتیجه: هرگاه $A(a, f(a))$ روی منحنی $y = f(x)$ واقع باشد. معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = a$ برابر است با:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

همچنین، معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = a$ برابر با:

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)$$

می‌دانیم که ضریب زاویه‌ی خط مماس برابر است با:

$$m = f'(a)$$

– ضریب زاویه‌ی خط عمود نیز برابر است با:

$$m' = \frac{-1}{f'(a)}$$

مثال ۲: معادله‌ی خط مماس و خط عمود بر منحنی تابع
مقابل را در نقطه‌ی داده شده بنویسید :

$$f(x) = -x^2 + 3x, \quad x = 2$$

حل: $f(2)$ در نقطه‌ی داده شده برابر است با :

$$f(2) = -(2)^2 + 3(2) = 2$$

– از تابع مشتق می‌گیریم :

$$f'(x) = -2x + 3$$

– با قرار دادن x نقطه در مشتق، ضریب زاویه به دست می‌آید.

$$m = f'(2) = -2(2) + 3 = -1$$

– مقدار $f(2)$ و $f'(2)$ را در معادله‌ی خط قرار می‌دهیم :

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y - 2 = -1(x - 2)$$

– در نتیجه معادله‌ی خط مماس برابر است با :

$$\Rightarrow y = -x + 4$$

– ضریب زاویه‌ی خط مماس را عکس قرینه می‌کنیم و آن را ضریب زاویه‌ی خط عمود بر منحنی قرار می‌دهیم و معادله‌ی خط عمود را به دست می‌آوریم.

$$y - f(2) = -\frac{1}{f'(2)}(x - 2) \Rightarrow y - 2 = \frac{-1}{-1}(x - 2)$$

$$\Rightarrow y = x$$

مثال ۳: معادله‌ی خط مماس بر منحنی مقابل را در نقطه‌ی داده شده بنویسید.

$$y = -2 \sin 2x \quad \text{و} \quad x = \frac{\pi}{6}$$

حل: مقدار y به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ برابر است با :

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

– y' را به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ محاسبه کرده و آن را برابر

ضریب زاویه‌ی خط قرار می‌دهیم :

$$y' = -4 \cos 2x \Rightarrow m = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4 \cos \frac{\pi}{3} = -2$$

– معادله‌ی خط مماس برابر است با :

$$y - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

– پس از ساده کردن خواهیم داشت :

$$y + \sqrt{3} = -2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y = -2x + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$$

مثال ۴: معادله‌ی خط عمود بر منحنی تابع f را در نقطه‌ی

داده شده بنویسید.

$$f(x) = \tan x \text{ و } x = \frac{\pi}{4}$$

حل: به ازای x نقطه y نقطه برابر است با:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

– از تابع مشتق می‌گیریم

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

– ضریب زاویه‌ی خط مماس به ازای x نقطه در رابطه‌ی

مشتق برابر است با:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1 = 2$$

– معادله‌ی خط عمود بر منحنی برابر است با:

$$y - y_1 = \frac{-1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}(x - x_1) \Rightarrow$$

– به ازای مختصات نقطه، معادله‌ی خط به دست می‌آید.

$$y - 1 = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = \frac{-1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$$

تمرین

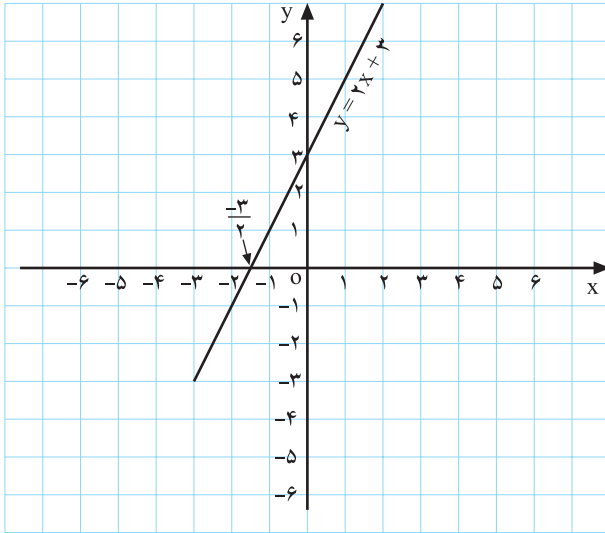
معادله‌ی خط مماس و خط عمود بر منحنی تابع روبه‌رو را

در نقطه‌ی $x = 0$ و $x = 1$ به‌طور جداگانه بنویسید.

شرح عملیات:

$$f(x) = x^3 + 5x - 4$$

فعالیت ۳-۴



نمودار ۴-۷

خط $y = 2x + 3$ و نمودار آن ۴-۷ را مشاهده می‌کنید.

الف) به ازای $f(x_2)$ و $f(x_1)$ ، $x_2 = 0$ و $x_1 = -\frac{3}{4}$

حساب کنید.

ب) آیا نتیجه‌ی روبه‌رو درست است؟

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \quad \square \text{ : خیر } \quad \square \text{ : بلی}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

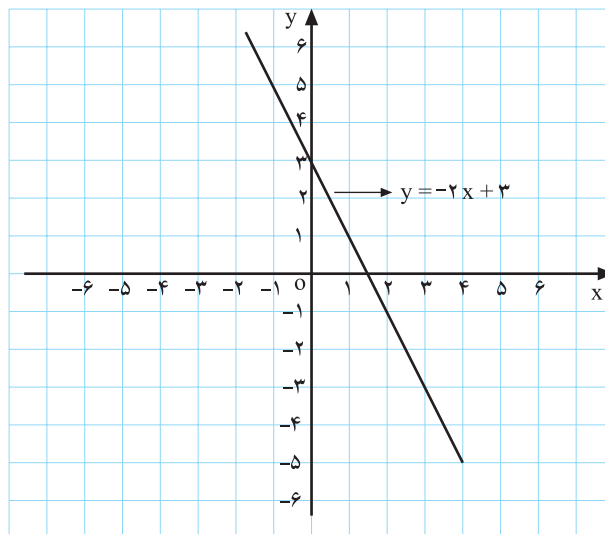
$$y' = 2 > 0$$

ج) با توجه به $D_f = \mathbb{R}$ به ازای هر x_1 و x_2 متعلق به

دامنه، آیا می‌توان نتیجه‌ی مقابل را گرفت؟

- از طرفی y' همواره مثبت است.

اگر تابع $y = f(x)$ بر (a, b) تعریف شده باشد و بر این بازه $y' > 0$ (آنگاه y بر (a, b) صعودی (نزولی) است).



نمودار ۴-۸

مثال: هرگاه $y = -2x + 3$ ، به ازای هر مقدار x از

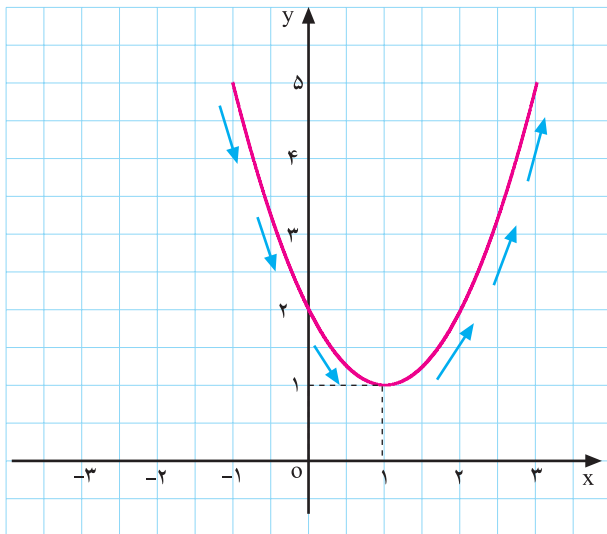
دامنه‌ی تابع $y' = -2 < 0$ باشد می‌گوییم تابع y نزولی است؛ به

بیان دیگر:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

نمودار خط $y = -2x + 3$ را در مقابل مشاهده می‌کنید.

فعالیت ۴-۴



نمودار ۴-۹

منحنی $y = x^2 - 2x + 2$ را در نمودار ۴-۹ مشاهده می‌کنید.

الف) آیا ریشه‌ی مشتق تابع y ، یعنی $y' = 2x - 2$ برابر $x = 1$ است؟ بلی: خیر:

ب) به ازای $x < 1$ ، علامت y' را مشخص کنید. آیا می‌توان گفت در فاصله‌ی $x \in (-\infty, 1)$ تابع نزولی است.

ج) به ازای $x > 1$ ، علامت y' را مشخص کنید. آیا تابع در فاصله‌ی $x \in (1, +\infty)$ صعودی است؟

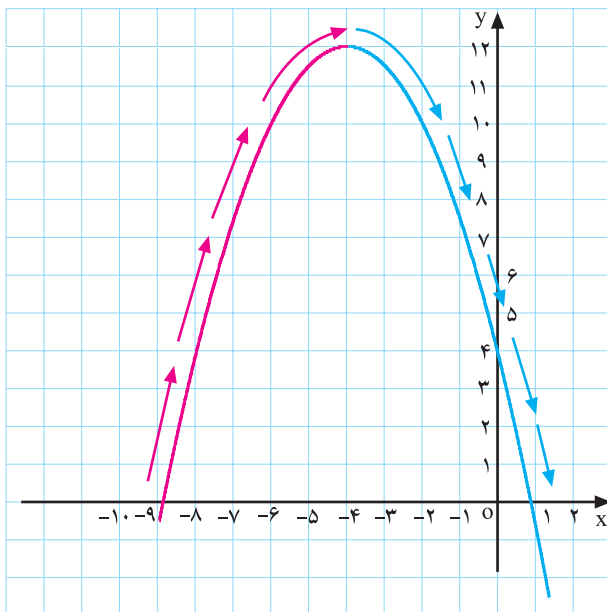
جدول ۴-۱

x	$-\infty$	$x < 1$	1	$x > 1$	$+\infty$
$y' = 2x - 2$		<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	
y	$+\infty$	\searrow	<input type="checkbox"/>	\nearrow	$+\infty$

د) با توجه به موارد بالا، جدول ۴-۱ را تکمیل کنید.

ه) با توجه به نمودار ۴-۹ و جدول ۴-۱ نقطه‌ی مینیمم

تابع $y = x^2 - 2x + 2$ چه نقطه‌ای است؟



نمودار ۴-۱۰

فعالیت ۴-۵

الف) با توجه به منحنی $y = -\frac{1}{3}x^2 - 4x + 4$ و جدول

۴-۲ منحنی این تابع را رسم کنید (نمودار ۴-۱۰).

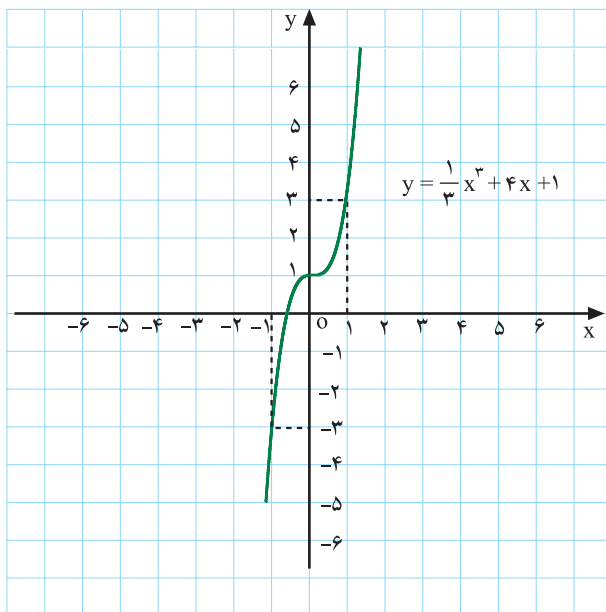
ب) نقطه‌ی ماکزیمم تابع و علامت y' را روی دامنه‌اش

مشخص کنید.

جدول ۴-۲

x	$-\infty$	$x < -4$	-4	$x > -4$	$+\infty$
$y' = -x - 4$					
y	$-\infty$	\nearrow	12	\searrow	$-\infty$

قضیه ۱: فرض کنید تابع f بر بازه I مشتق پذیر باشد و برای هر نقطه x متعلق به I داشته باشیم $f'(x) \geq 0$ ، در این صورت تابع f بر I صعودی است.

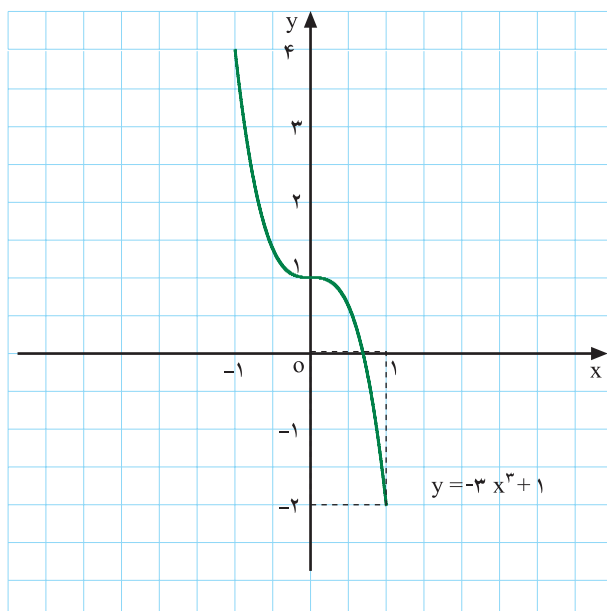


نمودار ۴-۱۱- یک تابع صعودی

مثال ۱: منحنی تابع $y = \frac{1}{3}x^3 + 4x + 1$ را مشاهده می کنید (نمودار ۴-۱۱).

– مشتق این تابع همواره صعودی است، زیرا $y' = x^2 + 4 > 0$.

قضیه ۲: اگر تابع f بر بازه I مشتق پذیر باشد و برای هر نقطه x متعلق به I داشته باشیم $f'(x) \leq 0$ ، آنگاه تابع f بر I نزولی است.



نمودار ۴-۱۲- یک تابع نزولی

مثال ۲: تابع $y = -3x^3 + 1$ مفروض است. چون $y' = -9x^2 \leq 0$ بنابراین تابع نزولی است (نمودار ۴-۱۲).

تعریف: تابع f را بر بازه‌ی I یکنوا گوئیم در صورتی که f بر I صعودی یا نزولی باشد.

مثال ۳: رفتار تابع روبه‌رو را به دست آورید.

$$y = 4x - 1 \cdot 5, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

حل: مشتق تابع برابر است با:

$$y' = 4 > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

بنابراین تابع $y = 4x - 1 \cdot 5$ بر \mathbb{R} صعودی است.

مثال ۴: رفتار تابع روبه‌رو را بررسی کنید.

$$y = \frac{3x+1}{2x-1}, \quad x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

حل: مشتق تابع y را حساب می‌کنیم.

$$y' = \frac{3(2x-1) - 2(3x+1)}{(2x-1)^2} = \frac{6x-3-6x-2}{(2x-1)^2} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{-5}{(2x-1)^2} < 0.$$

– با توجه به علامت y' ، تابع روی $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ نزولی است.

$$y = \tan x - x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

مثال ۵: رفتار تابع روبه‌رو را بررسی کنید.

$$y' = 1 + \tan^2 x - 1 \Rightarrow y' = \tan^2 x \geq 0.$$

حل: با توجه به مشتق تابع، روی بازه‌ی $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$y = \cot 3x - 5x, \quad x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$$

صعودی است.

مثال ۶: رفتار تابع روبه‌رو را بررسی کنید.

$$y' = -3(1 + \cot^2 3x) - 5 \Rightarrow y' = -8 - 3 \cot^2 3x < 0.$$

حل: با توجه به علامت y' ، تابع روی $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ نزولی

است.

$$y = \frac{-1}{3}x^3 - 5x + 11$$

مثال ۷: رفتار تابع روبه‌رو را بررسی کنید.

$$y' = -x^2 - 5 < 0.$$

حل: با توجه به علامت y' ، تابع نزولی است.

$$y = \frac{2x+b}{3x-5}$$

مثال ۸: تابع y مفروض است. حدود b را چنان محاسبه

کنید که تابع همواره در بازه‌ی $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$ در بازه‌ی نزولی باشد.

$$y' = \frac{2(3x-5) - 3(2x+b)}{(3x-5)^2} = \frac{6x-10-6x-3b}{(3x-5)^2}$$

حل: مشتق تابع (y') را به دست می‌آوریم:

چون می خواهیم تابع همواره نزولی باشد باید $y' \leq 0$:
 - حدود b برابر است با :

$$\Rightarrow y' = \frac{-10 - 3b}{(3x - 5)^2} \leq 0 \Rightarrow -10 - 3b \leq 0 \Rightarrow$$

$$-3b \leq 10 \Rightarrow b \geq -\frac{10}{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5x & x < 0 \\ -5x + 4 & x > 0 \end{cases}$$

مثال ۹: رفتار تابع f را بررسی کنید.

حل: مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x) = \begin{cases} 6x + 5 & x < 0 \\ -5 & x > 0 \end{cases}$$

- به ازای $x < 0$ تابع همواره صعودی است، زیرا :

$$f'(x) = 6x + 5 > 0$$

- به ازای $x > 0$ تابع همواره نزولی است، زیرا :

$$f'(x) = -5 < 0$$

مثال ۱۰: ثابت کنید تابع مقابل بردارمنه اش یکنواست.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & x > 1 \\ 1 + 2x & x < 1 \end{cases}$$

حل: مشتق تابع f برابر است با :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & x > 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$$

- به ازای $x > 1$ ، تابع f صعودی است، زیرا :

$$f'(x) = 2x + 4 > 0, \quad x > 1$$

- به ازای $x < 1$ تابع f صعودی است، زیرا :

$$f'(x) = 2 > 0 \quad x < 1$$

- با توجه به مقادیر مشتق، تابع f یکنواست.

$$\Rightarrow f'(x) > 0 \quad x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

محل پاسخ

$$y = \frac{-3x + m}{5x + 2}$$

$$g(x) = \begin{cases} -2x + 1, & x > 0 \\ x^2 + 4, & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = (3b + 2)x - 11$$

تمرین

۱- رفتار تابع‌های زیر را بررسی کنید (صعودی یا نزولی

بودن)

$$۱) y = (2x - 3)^2$$

$$۲) y = \frac{-2x}{4x + 5}$$

$$۳) y = 5 \tan 3x + 4x^3$$

۲- تابع مقابل مفروض است. حدود m را در بازه‌ی

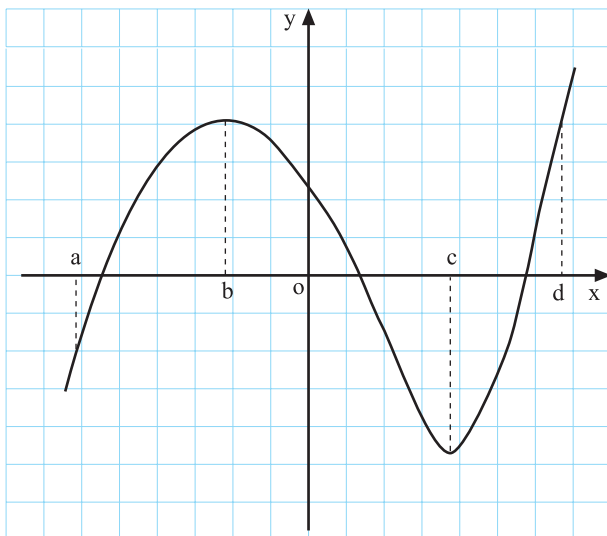
$(-\frac{2}{5}, +\infty)$ چنان بیابید که این تابع همواره نزولی باشد.

۳- تابع g در مقابل مفروض است. آیا g بر دامنه‌اش

یکنواست.

۴- حدود b را در تابع مقابل چنان بیابید که همواره تابع f

صعودی باشد.



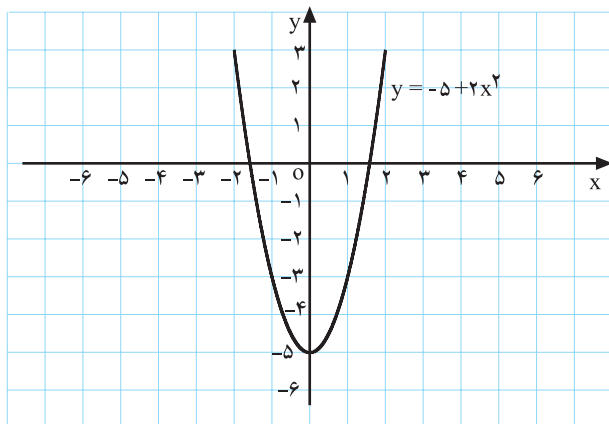
شکل ۴-۱۳

$$y = -5 + 2x^2$$

$$y' = 4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

جدول ۴-۳

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-		+
y	$+\infty$	-5	$+\infty$
	نزولی		صعودی



نمودار تابع ۴-۱۴

۴-۲-۴ تغییرات تابع: منحنی تابع f را در شکل

۴-۱۳ مشاهده می کنید.

- در بازه های (a,b) ، (c,d) تابع صعودی است.

- در بازه ی (b,c) تابع نزولی است.

نکته: منظور از بررسی تغییرات تابع، معین کردن

قسمت هایی از دامنه است که تابع در آن صعودی یا نزولی می باشد.

که برای رسم دقیق نمودار یک تابع به کار برده می شود.

مثال ۱: تابع مقابل مفروض است. جدول تغییرات این

تابع را مورد بررسی قرار دهید و منحنی آن را رسم کنید.

حل: ریشه ی مشتق را به دست می آوریم.

- جدول تغییرات تابع را با توجه به ریشه ی مشتق تابع

تنظیم کرده و تابع را تعیین علامت می کنیم.

- با توجه به جدول ۴-۳ تابع در فاصله ی $(-\infty, 0)$ نزولی

و در فاصله ی $(0, +\infty)$ صعودی است.

- نمودار ۴-۱۴ با توجه به جدول ۴-۳ رسم شده است.

مثال ۲: تغییرات تابع مقابل را بررسی کنید. (بدون رسم)

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

حل: از تابع مشتق می‌گیریم:

$$y' = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0$$

– ریشه‌های مشتق را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ \text{یا} \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

جدول ۴-۴

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'		+	-	+
y	$-\infty \rightarrow$	$\frac{19}{6}$	$-\frac{4}{3}$	$\rightarrow +\infty$
		max	min	

$$y = (2x-1)^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

حل: ریشه‌های مشتق تابع را به دست می‌آوریم:

$$y' = 4(2x-1) = 0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

جدول ۴-۵

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'		-	+
y	$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$

– با تعیین علامت ریشه‌های مشتق تغییرات تابع را در

جدول ۴-۴ مشخص می‌کنیم.

با مشاهده‌ی جدول ۴-۴ در می‌یابیم که در بازه‌ی $(-\infty, -1)$

و بازه‌ی $(2, +\infty)$ تابع صعودی و در بازه‌ی $(-1, 2)$ نزولی است.

مثال ۳: تغییرات تابع مقابل را بررسی کنید (بدون رسم)

– با توجه به جدول ۴-۵ تابع در بازه‌ی $(-\infty, \frac{1}{2})$ نزولی

و در بازه‌ی $(\frac{1}{2}, +\infty)$ صعودی است.

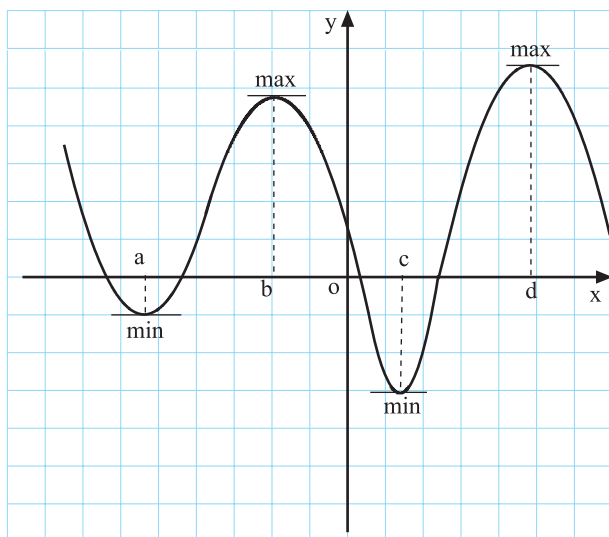
تمرین

تغییرات تابع‌های زیر را بررسی کنید (بدون رسم نمودار)

الف) $y = -2x^2 + 8x$

ب) $y = 4x - \frac{1}{6}x^3$

محل پاسخ:



نمودار ۴-۱۵

۵-۲-۴- ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع: در نمودار ۴-۱۵ تابع در نقاط b و d ماکسیمم نسبی و در نقاط a و c مینیمم نسبی دارد.

اگر بخواهیم با استفاده از جدول تغییرات و مشتق تابع این نقاط را به دست آوریم چه مراحل باید انجام گیرد؟ برای این منظور فعالیت ۴-۶ را انجام دهید.

فعالیت ۴-۶

تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$f(x) = x^3 - 12x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \square, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \square$$

جدول ۴-۶

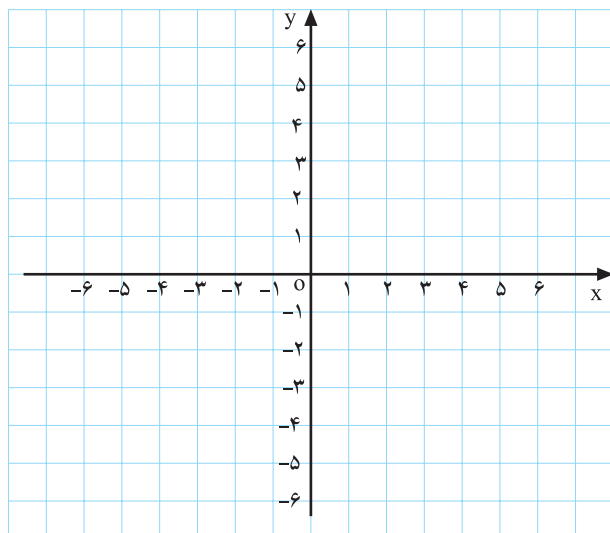
x	$-\infty$	\square	\square	$+\infty$
y'		\vdots	\vdots	
y	$-\infty$	\square	\square	$+\infty$

الف) حدهای روبه‌رو را محاسبه کنید.

ب) ریشه‌های مشتق تابع f را به دست آورید.

ج) جدول ۴-۶ را تکمیل کنید.

د) با توجه به تعیین علامت، نقاط ماکسیمم و مینیمم تابع را تعیین کنید.



نمودار ۴-۱۶

ه) با استفاده از جدول نمودار تابع f را رسم کنید.

تعریف ۱: تابع f در نقطه‌ی $(x_0, f(x_0))$ دارای مینیمم نسبی است در صورتی که بازه‌ای باز شامل x_0 ، مانند $(a, b) \subset D_f$ باشد به قسمی که برای هر x از این بازه داشته باشیم:

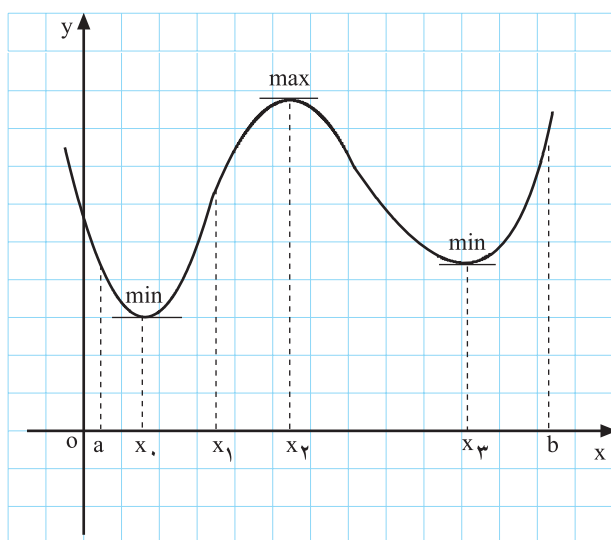
$$f(x_0) \leq f(x)$$

را مقدار مینیمم نسبی تابع می‌نامیم. (نمودار ۴-۱۷)

تعریف ۲: گوئیم تابع f در نقطه‌ی $(x_1, f(x_1))$ دارای ماکسیمم نسبی است در صورتی که بازه‌ای باز شامل x_1 ، مانند $(a, b) \subset D_f$ باشد به قسمی که برای هر x از این بازه داشته باشیم:

$$f(x_1) \geq f(x)$$

را مقدار ماکسیمم نسبی تابع می‌نامیم. (نمودار ۴-۱۷)



نمودار ۴-۱۷: $y = f(x)$

در شکل ۴-۱۷ نمودار $y = f(x)$ را مشاهده می‌کنیم که دارای چند نقطه‌ی ماکسیمم و مینیمم نسبی است.



شکل ۴-۱۸

تعریف ۳: نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع را نقاط اکسترمم تابع می‌نامیم.

مثال ۱: برای تعیین جهت تغییرات و نقاط اکسترمم تابع با ضابطه $y = f(x)$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

$$y = x^3 - \frac{1}{3}x + 1$$

الف) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

ب) ریشه‌های $y' = 0$ را در صورت وجود به دست

می‌آوریم:

$$y' = 3x^2 - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 3x^2 = \frac{1}{3}$$

ج) با توجه به موارد الف و ب جدول تغییرات را تشکیل

می‌دهیم.

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_2 = +\frac{1}{3} \end{cases}$$

د) با استفاده از تغییرات علامت، نقاط min و max را

مشخص می‌کنیم.

جدول ۷-۴

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
y'	+		-	+
y	$-\infty$	$\nearrow \frac{29}{27}$	$\searrow \frac{25}{27}$	$\nearrow +\infty$
		max	min	

نکته ۱: در صورتی که مشتق در نقطه‌ی x برابر صفر باشد ولی در دو طرف دارای یک علامت باشد تابع در x اکسترمم نسبی ندارد.

نکته ۲: هرگاه در تابع پیوسته‌ای معادله‌ی $y' = 0$ ریشه نداشته باشد تابع در دامنه‌اش همواره صعودی یا نزولی می‌باشد.

مثال ۲: اکسترمم‌های تابع مقابل را به دست آورید.

حل: مشتق تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$y = 3x - x^2$$

– مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم (جدول ۸-۴).

$$y' = 3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

جدول ۸-۴

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y'	+		-
y	$-\infty$	$\nearrow \frac{9}{4}$	$\searrow -\infty$
		max	

– با توجه به جدول ۸-۴ تغییرات و علامت مشتق بازه‌ی

$(-\infty, \frac{3}{2})$ تابع صعودی و در بازه‌ی $(\frac{3}{2}, +\infty)$ تابع نزولی است.

- نقطه‌ی $(\frac{3}{4}, \frac{9}{4})$ نقطه‌ی ماکسیم تابع است.

مثال ۳: جدول تغییرات تابع مقابل را به دست آورید و با رسم منحنی تابع، نقاط اکسترمم را نیز مشخص سازید.

$$y = \sin x + 2 \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$y' = \cos x = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{3\pi}{2}$$

حل: ریشه‌های مشتق تابع را به دست می‌آوریم.

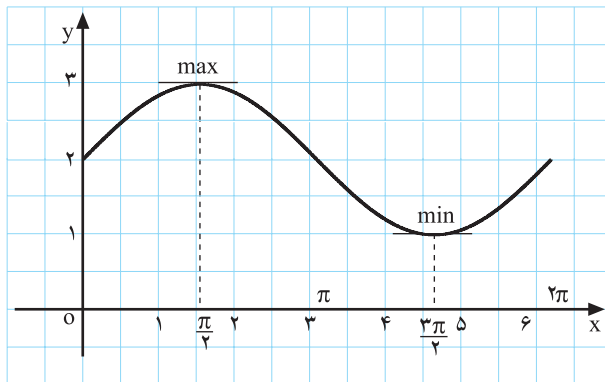
- مشتق را تعیین علامت می‌کنیم (جدول ۹-۴).

جدول ۹-۴

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y'	+	0	-	0	+
y	2	3	2	1	2
		max		min	

- با توجه به تغییر علامت مشتق، تابع در بازه‌های $(0, \frac{\pi}{2})$

و $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ صعودی و در بازه‌ی $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ نزولی است.



نمودار ۹-۴

- نقاط به دست آمده از جدول ۹-۴ را بر روی دستگاه

مختصات تعیین می‌کنیم.

- با رسم نقاط به یکدیگر منحنی تابع به دست می‌آید.

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 3$$

$$y' = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

مثال ۴: اکسترمم تابع مقابل را در بازه‌ی $[-2, 3]$ به دست

آورید.

حل ۳: ریشه‌های y' را پیدا می‌کنیم و در جدول ۱۰-۴

قرار می‌دهیم.

جدول ۱۰-۴

x	-2	2	3
y'	-	0	+
y	27	-5	-3
		min	

- با توجه به جدول ۱۰-۴ نقطه‌ی $(2, -5)$ نقطه‌ی مینیمم

نسبی است.

مثال ۵: مقادیر a و b و c از تابع مقابل را چنان محاسبه کنید که نقاط $(-3, 22)$ و $(1, -10)$ اکسترمم تابع و نقطه‌ی $(-1, 7)$ نقطه‌ای از تابع باشد.

$$y = ax^3 + bx^2 - 9x + c$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx - 9$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx - 9 = 0$$

$$\begin{cases} 3a(-3)^2 + 2b(-3) - 9 = 0 \\ 3a(+1)^2 + 2b(1) - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 27a - 6b = 9 \\ 3a + 2b = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 27a - 6b = 9 \\ +9a + 6b = 27 \end{cases}$$

$$36a = 36 \Rightarrow a = 1$$

$$3(1) + 2b = 9 \Rightarrow 2b = 9 - 3 \Rightarrow b = 3$$

$$y = x^3 + 3x^2 - 9x + c$$

$$7 = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 9(-1) + c \Rightarrow 7 = -1 + 3 + 9 + c$$

$$\Rightarrow c = 7 - 11 \Rightarrow c = -4$$

حل: از تابع مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم.

— به جای متغیر در مشتق $x = -3$ و $x = 1$ را قرار می‌دهیم در نتیجه خواهیم داشت:

— برای محاسبه‌ی a و b دستگاه دو مجهولی درجه اول را از روش حذفی حل می‌کنیم.

— با حذف b مقدار a به دست می‌آید:

— مقدار a را در یکی از معادلات دستگاه قرار می‌دهیم تا b به دست آید:

— برای محاسبه‌ی c مقدار a و b را در تابع قرار می‌دهیم، در نتیجه:

— از طرفی با قراردادن مختصات نقطه‌ی $(-1, 7)$ از منحنی در رابطه‌ی به دست آمده خواهیم داشت.

— مقدار c برابر است با:

مثال ۶: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. اگر این تابع در نقطه‌ی $(-1, 7)$ دارای اکسترمم باشد مقدار c و b را محاسبه کنید.

$$f(x) = x^3 + 6bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6b$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 3(-1)^2 + 6b = 0 \Rightarrow 3 + 6b = 0$$

حل: مشتق تابع برابر است با:

— تابع در $x = -1$ دارای اکسترمم است، پس:

– مقدار b برابر است با :

$$\Rightarrow 6b = -3 \Rightarrow b = \frac{-3}{6} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{2}}$$

– به ازای $b = -\frac{1}{2}$ ضابطه‌ی تابع برابر است با :

$$f(x) = x^3 + 6\left(-\frac{1}{2}\right)x + c \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x + c$$

– نقطه‌ی $(-1, 7)$ را در ضابطه‌ی تابع جایگزین می‌کنیم :

$$7 = (-1)^3 - 3(-1) + c \Rightarrow 7 = -1 + 3 + c$$

– مقدار c برابر است با :

$$c = 7 - 2 \Rightarrow \boxed{c = 5}$$

مثال ۷: تابع g با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

نقطه‌ی $(1, 3)$ اکستریم تابع است. m و n را محاسبه کنید.

$$g(x) = -x^2 + 5mx + n$$

حل: نقطه‌ی $(1, 3)$ بر نمودار g واقع است، پس :

$$g(1) = 3 \Rightarrow -(1)^2 + 5m(1) + n = 3 \Rightarrow \boxed{5m + n = 4}$$

– مشتق تابع به ازای $x = 1$ برابر صفر است، پس :

$$g'(x) = -2x + 5m \Rightarrow -2(1) + 5m = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{5}$$

– به ازای $m = \frac{2}{5}$ مقدار n را حساب می‌کنیم :

$$5\left(\frac{2}{5}\right) + n = 4 \Rightarrow 2 + n = 4 \Rightarrow$$

$$n = 4 - 2 \Rightarrow \boxed{n = 2}$$

مثال ۸: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است.

$$f(x) = (3a+1)x^3 + 5ax^2 + 5x - 7$$

مقدار a را چنان محاسبه کنید که در $x = -1$ تابع دارای

اکستریم باشد.

حل: مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x) = 3(3a+1)x^2 + 10ax + 5$$

– به ازای $x = -1$ مشتق تابع برابر صفر است، پس :

$$f'(-1) = (9a+3)(-1)^2 + 10a(-1) + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{a = +8}$$

تمرین

۱- نقاط اکسترمم تابع‌های زیر را در بازه‌های داده شده مشخص کنید.

$$۱) y = \cos x + \frac{1}{4}x \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$۲) y = -5x^2 + 4x + 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$۳) y = x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

۲- مقدار a و b را چنان بیابید که نقطه‌ی $(-2, 4)$ ماکسیمم تابع $y = -5x^2 + bx + a$ باشد.

۳- مقدار c را در تابع $f(x) = cx^3 + (5-2c)x + 5$ چنان بیابید که نقطه‌ی $x = 2$ نقطه‌ی اکسترمم تابع باشد.

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سوالات آزمون پایانی (۲)

۱- معادله‌ی خط مماس و خط عمود بر نمودار

تابع $y = x^3 - 4x$ در نقطه‌ی $x = 2$ را بنویسید.

۲- صعودی و نزولی بودن تابع‌های زیر را از طریق تعیین علامت مشتق تابع مشخص کنید.

۱) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 1 \quad x \in \mathbb{R}$

۲) $f(x) = 7 - x^2 \quad x \in \mathbb{R}$

۳- به کمک مشتق، تابع‌های زیر را رسم کنید.

۱) $y = 4x - x^2$

۲) $y = 2x^3 - 6x + 1$

۴- تابع f با ضابطه‌ی

$f(x) = bx^3 + (2b + 3)x^2 + 7x$ داده شده است. مقدار b را چنان به دست آورید که در $x = +1$ تابع اکسترمم داشته باشد.

۵- جدول تغییرات تابع $y = \cos x + 3$ را در

بازه‌ی $x \in [0, \pi]$ یافته و سپس منحنی آن را رسم کنید.

منابع و مأخذ

- ۱- رولاندای لارسن، رابرت بی هوستتلیر، بروس اچ ادواردز (۱۳۷۲)، حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه‌ی تحلیلی، ترجمه دکتر علی اکبر عالم‌زاده، نشر اتحاد
 - ۲- روبرت الیس، دنی گولیک (۱۳۷۳) حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه‌ی تحلیلی، ترجمه دکتر علی اکبر عالم‌زاده، انتشارات پژوهش
 - ۳- جورج توماس، راس فیلی (۱۳۷۷)، حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، ترجمه دکتر مهدی بهزاد و همکاران، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ ششم
 - ۴- بابلیان، اسماعیل و همکاران (۱۳۸۳) ریاضی ۳ (پودمانی) : فنی و حرفه‌ای (کلیه رشته‌های زمینه‌ی صنعت و رشته‌ی کامپیوتر، زمینه‌ی خدمات)، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
 - ۵- پاریاب، خلیل و همکاران (۱۳۸۰)، ریاضی ۵ : فنی و حرفه‌ای (کلیه رشته‌های زمینه‌ی صنعت و رشته‌ی کامپیوتر و ماشین‌های کشاورزی)، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
 - ۶- بابلیان، اسماعیل و همکاران (۱۳۸۰) ریاضیات ۱ : نظری (رشته‌های علوم تجربی - ریاضی و فیزیک - فنی و حرفه‌ای) سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.
- ۷- Kaufmann, Jeromee (1988), Precalculus, Pws - Kent Publishing
- ۸- JACOBS, RUSSELF, (1981), Introductory Algebra², Harcourt Brace Jovanovich Publishing
- ۹- Bolster, I.c, cox, G.f., Gibb, E.G., Hansen., V.P, Kirkpatrick, J.E., Robitaille, D.F., Trimble, H.C., Varce, I.E., Walch, R., wisner, R.J, Mathematics Around Us, (1975), Scott Foresman and company.

