

فصل ۲

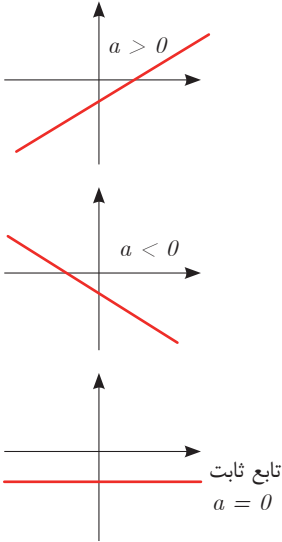
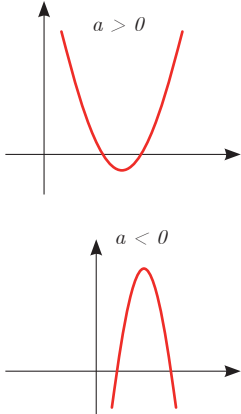
علوم پایه

تابع







■ اگر دو کمیت (الف) و (ب) با یکدیگر مرتبط باشند و با مشخص شدن مقدار کمیت (الف)، یک مقدار معین برای کمیت (ب) به دست آید، در این صورت کمیت (ب) را تابعی از کمیت (الف) می نامند.

مقادیری که کمیت (الف) می تواند داشته باشد را دامنه این تابع می نامند و قانونی را که، مقادیر کمیت (ب) را بر حسب مقادیر کمیت (الف) به دست می دهد، قانون یا ضابطه این تابع می نامند.

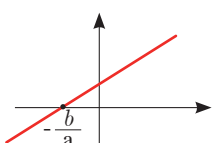
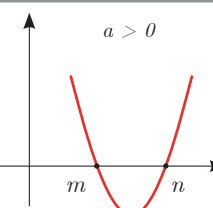
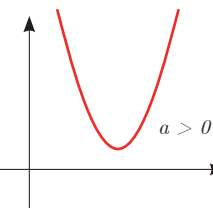
شکل کلی تابع درجه اول و درجه دوم:

| قانون یا ضابطه تابع | دامنه | شکل کلی تابع با دامنه \mathbb{R} بر حسب مقدار a |
|---|--|---|
| تابع خطی درجه اول $f(x) = ax + b$ | \mathbb{R} یا زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} |  <p> $a > 0$ $a < 0$ تابع ثابت $a = 0$ </p> |
| تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ $a \neq 0$ | \mathbb{R} یا زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} |  <p> $a > 0$ $a < 0$ </p> |

نمایش مجموعه به صورت بازه

| نمایش مجموعه | نمایش روی محور | نمایش بازه |
|---|---|----------------|
| $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ |  | $[a, b]$ |
| $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ |  | $(a, b]$ |
| $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ |  | $[a, b)$ |
| $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ |  | (a, b) |
| $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ |  | $(a, +\infty)$ |
| $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ |  | $(-\infty, b]$ |

حل معادله از طریق رسم

| معادله | تابع | جواب | مثال |
|--|---|--|--|
| معادله درجه ۱ $ax + b = 0$ | رسم تابع خطی درجه اول $f(x) = ax + b$ | محل برخورد با محور Xها در صورت وجود |  $x = -\frac{b}{a}$ جواب |
| معادله درجه ۲ $ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$ | رسم تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ $a \neq 0$ | محل برخورد با محور Xها در صورت وجود | $a > 0$  جواب $x = n$ و $x = m$ |
| معادله درجه ۲ $ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$ | رسم تابع درجه ۲ $f(x) = ax^2 + bx + c$ $a \neq 0$ | محل برخورد با محور Xها در صورت وجود | $a > 0$  جواب ندارد زیرا نمودار با محور Xها برخورد نمی‌کند. |

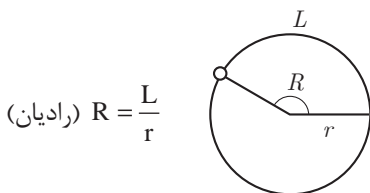
■ نامساوی‌های به صورت $ax^2 + bx + c \leq 0$ یا $ax^2 + bx + c \geq 0$ که در آن a, b, c اعداد داده حقیقی هستند ($a \neq 0$) را نامعادله درجه دوم می‌نامند. مقدارهایی از x که نامعادله را به یک نامساوی درست تبدیل می‌کنند، جواب‌های نامعادله می‌نامند.

حل نامعادله از طریق رسم تابع

| به طور مثال نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر | جواب نامعادله $f(x) > 0$ | جواب نامعادله $f(x) < 0$ | جواب نامعادله $f(x) \leq 0$ |
|---|--|--|---|
| | قسمت‌هایی از نمودار که بالای محور x ‌ها است. $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ | قسمت‌هایی از نمودار که پایین محور x ‌ها است. (a, b) | قسمت‌هایی از نمودار که محور x ‌ها را قطع کرده و پایین آن است. $[a, b]$ |

مثلثات

■ اگر نقطه‌ای از یک دایره به شعاع r کمانی به طول L را در جهت مثبت طی کند، مقدار $\frac{L}{r}$ را اندازه زاویه چرخش آن نقطه، برحسب رادیان می‌نامند. برای زاویه‌های منفی، $-\frac{L}{r}$ را مقدار آن زاویه برحسب رادیان می‌نامند.



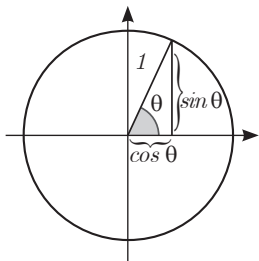
■ دایره‌ای که شعاع آن ۱ واحد است، دایره واحد نامیده می‌شود. در دایره واحد، طول کمان طی‌شده، همان اندازه زاویه چرخش برحسب واحد رادیان است. در تساوی‌های زیر

$$\frac{L}{r} = \frac{\pi}{180} D, \quad D = \frac{180}{\pi} \times \frac{L}{r}$$

همان اندازه زاویه برحسب رادیان است. اگر اندازه یک زاویه برحسب رادیان را R و اندازه آن زاویه برحسب درجه را با D نشان دهیم، این تساوی‌ها به صورت زیر درمی‌آیند.

$$D = \frac{180}{\pi} R, \quad R = \frac{\pi}{180} D$$

این تساوی‌ها نشان می‌دهند، ضریب تبدیل رادیان به درجه $\frac{180}{\pi}$ و ضریب تبدیل درجه به رادیان $\frac{\pi}{180}$ است.



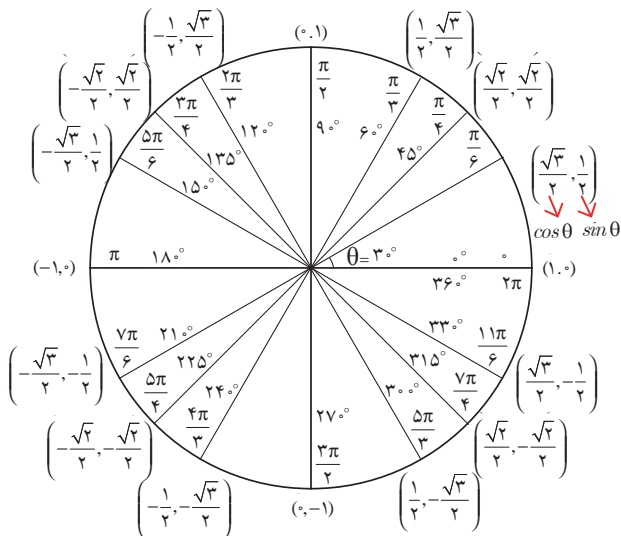
نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دلخواه

فرض کنید θ یک زاویه تند برحسب رادیان باشد، در این صورت داریم:

| | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ | $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ | $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$ |
| $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$ | $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$ | $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$ |
| $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ | $\cos(-\theta) = \cos \theta$ | $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ |
| $\sin(2\pi + \theta) = \sin \theta$ | $\cos(2\pi + \theta) = \cos \theta$ | $\tan(2\pi + \theta) = \tan \theta$ |
| $\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$ | $\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$ | $\tan(2\pi - \theta) = -\tan \theta$ |

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های خاص

| زاویه θ | 30° | 45° | 60° |
|-------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| نسبت \downarrow | | | |
| $\cos \theta$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\sin \theta$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\tan \theta$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |



■ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی:

زاویه θ را در نظر بگیرید، در این صورت داریم:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

و همچنین اگر θ زاویه‌ای باشد که $\cos\theta \neq 0$ بنا به تعریف داریم:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

■ شیب خط و تانژانت زاویه‌ها:

برای هر خط دلخواه به معادله $y = ax + b$ با شیب a که با محور طول‌ها زاویه θ می‌سازد، داریم:

$$\tan\theta = a$$

✓ لگاریتم و خواص آن:

اگر a یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و اعداد حقیقی b و c به گونه‌ای باشند که: $b = a^c$ آنگاه c را لگاریتم b در مبنای a می‌نامند و با $\log_a b$ نشان می‌دهند. به عبارت دیگر داریم:

$$\log_a b = c$$

■ فقط اعداد مثبت لگاریتم دارند، یعنی عبارت $\log_a b$ فقط برای $b > 0$ تعریف می‌شود.

■ برای $b, c > 0$ داریم: $\log(bc) = \log b + \log c$

■ در حالت کلی: برای هر $a, b > 0$ داریم: $\log(a+b) \neq \log a + \log b$

■ برای $b, c > 0$ داریم: $\log \frac{b}{c} = \log b - \log c$

■ در حالت کلی: برای هر $a, b > 0$ داریم: $\log(a-b) \neq \log a - \log b$

■ برای $b > 0$ و هر عدد حقیقی x داریم: $\log b^x = x \log b$

■ برای $a, b > 0$ و $a \neq 1$ داریم: $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

✓ آمار توصیفی:

- نمودار پراکنش دو کمیت، مجموعه‌ای از نقاط در صفحه مختصات است که طول و عرض هر نقطه، داده‌های مربوط به اندازه‌گیری‌های متناظر دو کمیت است.
- x و y دو کمیت مرتبط هستند. اگر مقادیر این دو کمیت برای برخی از x ها در یک بازه، مشخص باشد، پیش‌بینی مقادیر y به ازای x های مشخص در این بازه به کمک خط برازش را درون‌یابی و پیش‌بینی مقادیر y به ازای x های مشخص در خارج از این بازه را برون‌یابی می‌نامند.
- پس از مرتب کردن مقادیر داده‌ها، عددی را که تعداد داده‌های قبل از آن با تعداد داده‌های بعد از آن برابر است را میانه می‌نامند.
- نمودار جعبه‌ای:

