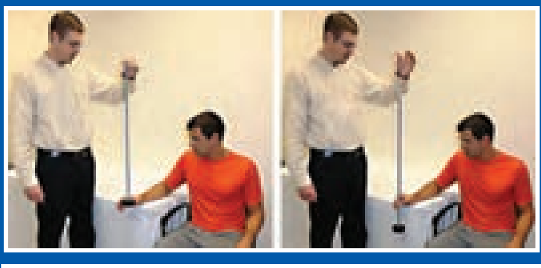
پودمان سوم

معادله‌های درجهٔ دوم



رایج‌ترین آزمون سرعت عکس‌العمل در تربیت بدنی آزمون *خط‌کش* است. برای اجرا کردن این آزمون، دست‌های آزمودنی را طوری در کنار لبهٔ میز قرار می‌دهند که انگشت شست و سبابهٔ او به طور موازی با یکدیگر قرار گیرند. سپس نقطهٔ صفر خط‌کش را مقابل لبهٔ بالایی دست قرار می‌دهند و در عرض سه ثانیه آن را رها می‌کنند. فرد باید به محض رها شدن خط‌کش، آن را با دست بگیرد. به نظر شما اگر فردی خط‌کش را در فاصلهٔ ۴/۹ سانتی‌متری پس از رها شدن بگیرد، زمان عکس‌العمل او چقدر بوده است؟

۳ــ۱ــ مفهوم معادله‌های درجهٔ دوم

مادر زهرا از کارآفرینان نمونهٔ کشور است. او یک کارگاه تولید صنایع دستی دارد که افراد زیادی در آنجا مشغول به‌کارند. برای تأمین هزینه‌ها، لازم است که این کارگاه سه میلیون تومان درآمد ماهیانه داشته باشد. مادر زهرا برای کسب درآمد مورد نظر باید بداند چه تعداد کالا تولید شود و به فروش برسد. او برای یافتن جواب این سؤال‌ها، نظر مشاور مالی کارگاه را جویا می‌شود.

مشاور می‌گوید: برای افزایش درآمد می‌توان قیمت کالا را افزایش داد اما با این کار، ممکن است تعداد مشتری‌ها کم و درآمد کمتر شود. یک راه دیگر، افزایش تولیدات است ولی ممکن است همهٔ تولیدات به فروش نرسند و مجبور شویم قیمت را پایین بیاوریم. به این ترتیب، ممکن است درآمد باز هم کمتر شود. باید حساب شده عمل کنیم و رابطهٔ بین تعداد کالای تولید شده و سود به دست آمده را به طور دقیق حساب کنیم.

با بررسی آمار فروش دوره‌های گذشته، می‌توان رابطهٔ بین قیمت کالا و میزان کالای به فروش رفته را پیدا کرد. بر اساس این اطلاعات، اگر قیمت کالا را با p نشان دهیم و x تعداد کالای فروش رفته با این قیمت باشد، رابطهٔ $x = ۶۰,۰۰۰ - ۳۰۰p$ به طور تقریبی بین آنها برقرار است.

از طریق این معادله می‌توان پیش‌بینی کرد که اگر قیمت یک واحد کالا p باشد، طبق رابطهٔ بالا، به تعداد x واحد از آن کالا به فروش می‌رسد. بر این اساس، در چنین وضعیتی چند واحد کالا باید تولید شود تا با فروش آنها درآمد کارگاه سه میلیون تومان شود؟ فعالیت صفحهٔ بعد به شما در حل این مسئله کمک می‌کند.

فعالیت ۱

۱) با استفاده از رابطهٔ $x = ۶۰,۰۰۰ - ۳۰۰p$، مقدار p را بر حسب x به دست آورید.

....

۲) درآمد حاصل از فروش x کالا با قیمت p را با $R= x.p$ نشان می‌دهند. معادلهٔ درآمد را بر حسب x، بنویسید.

....

....

۳) چند جمله‌ایِ درآمد بر حسبِ x از درجهٔ چند است؟

....

۴) اگر درآمد حاصل از فروش، ماهیانه سه میلیون تومان باشد، چه معادله‌ای برای x به‌دست می‌آید؟

....

معادله‌هایی مانند معادلهٔ به دست آمده از فعالیت بالا را **معادلهٔ درجهٔ دوم** می‌نامند. در بسیاری از مسئله‌های کاربردی، به این گونه معادله‌ها برخورد می‌کنیم.

تعریف

معادله به شکل $ax^2 + bx + c = ۰$ که در آن a و b و c اعداد حقیقی مشخصی هستند و $a \neq ۰$، معادلهٔ درجهٔ دوم نامیده می‌شود.

مقدارهایی برای x که به ازای آنها تساوی برقرار می‌شود، جواب‌های معادله نامیده می‌شوند.

مثال ۱

کدام یک از معادله‌های زیر، معادلهٔ درجهٔ دوم هستند؟

الف) $(۳x-۱)(x+۲)=۶$ ب) $(۲x+۱)(x-۱)=۲x^۲+۳$

معادلهٔ (الف) پس از ساده‌سازی، به شکل زیر در می‌آید.

$$(۳x-۱)(x+۲)=۶ \qquad ۳x^۲+۶x-x-۲-۶=۰ \Rightarrow ۳x^۲+۵x-۸=۰$$

بنابراین، معادلهٔ به دست آمده، معادلهٔ درجهٔ دوم است.

اما، معادلهٔ (ب) پس از ساده‌سازی، به شکل زیر در می‌آید.

$$(۲x+۱)(x-۱)=۲x^۲+۳ \Rightarrow ۲x^۲-۲x+x-۱=۲x^۲+۳ \Rightarrow -x-۴=۰$$

بنابراین، معادلهٔ به دست آمده، معادلهٔ درجهٔ اول است.

مثال ۲

زمینی مستطیل شکل به مساحت ۶۰۰ مترمربع را با ۱۰۰ متر نرده محصور کرده‌ایم. طول و عرض زمین چقدر است؟

اگر طول و عرض این زمین بر حسب متر x و y در نظر گرفته شود، داریم: $۲(x+y)=۱۰۰$ و $xy=۶۰۰$.
از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود: $y=۵۰-x$ و با جایگذاری در معادلهٔ دوم داریم:

$$x(۵۰-x)=۶۰۰ \Rightarrow x^۲-۵۰x+۶۰۰=۰$$

این معادله نیز یک معادلهٔ درجهٔ دوم است. پس از یاد گرفتن روش‌های حل معادله‌های درجهٔ دوم، می‌توانید آن را حل کنید.

کار در کلاس ۱

در مثال ۲، از معادلهٔ $2(x+y)=100$، مقدار x را بر حسب y حساب کنید و معادله‌ای بر حسب y بنویسید. معادلهٔ به دست آمده بر حسب x و معادلهٔ بر حسب y چه شباهتی با هم دارند؟

....

خواندنی‌ها

تاریخچهٔ معادله

معادله‌ها، از اولین دستاوردهای ریاضی بشرند. آنها را می‌توان در قدیمی‌ترین اسناد ریاضیِ مکتوب، مانند برخی از متون میخی بابِلی‌های باستان و پاپیروس‌های مصر باستان، یافت. بنا به ساختار جامعهٔ بابلی، مسئله‌های مربوط به تقسیم ارث، از اهمیت بسیاری برخوردار بودند. اولین پسر همواره بیشترین سهم را دریافت می‌کرد، دومی بیشتر از سومی، و به همین ترتیب.

چنین محاسباتی نسبتاً زیاد رخ می‌دادند و متناظر با معادله‌های خطی ما هستند. پیدا کردن طول و عرض زمین‌هایی که مساحت مشخصی باید داشته باشند منجر به حل معادله‌های درجهٔ دوم می‌شد. البته مفهوم معادله در آن زمان موجود نبود و فقط مسئله‌هایی مطرح بودند که با دستورالعمل‌هایی حل می‌شدند.

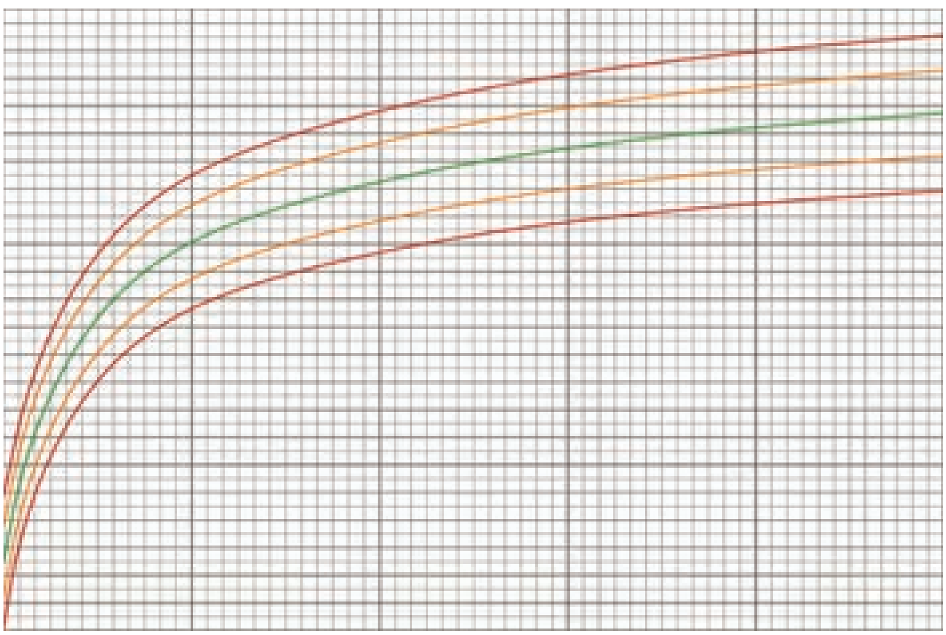
در مسئله‌های مطرح در بابل، مجهول نسبتاً واضح توصیف شده است و در پاپیروس‌های مصری با علامت h نمایش داده شده است.

پیش از اینکه زبان نمادین جبری مطرح شود، مجبور بودند معادله‌ها را به صورت کلامی بیان کنند. با نوشته شدن کتاب جبر و مقابله توسط خوارزمی در سده‌های سوم و چهارم هجری، جبر وارد ریاضیات شد و به حل معادله‌ها پرداخته شد. واژهٔ جبر به معنای جبران کردن و مقابله به معنای رو به رو قرار دادن دو سوی برابری است.

۳ـ۲ـ رابطه‌های غیر خطی

در فصل‌های قبل، در مورد رابطهٔ بین کمیت‌های متناسب بسیار کار کرده‌اید. در حالتی که دو کمیت به‌طور مستقیم با یکدیگر متناسب‌اند، مقدار هر کدام به صورت مضربی از مقدار دیگری است. در این حالت نمودار این‌گونه رابطه‌ها به صورت خط مستقیم است؛ به همین دلیل، این رابطه‌ها از نوع **رابطه‌های خطی** هستند.

در طبیعت، بسیاری از رابطه‌ها به‌صورت خطی نیستند. برای مثال، طول قد انسان‌ها با سن آنها رابطه دارد. آیا این رابطه یک رابطهٔ خطی است؟ اگر این رابطه، یک رابطهٔ خطی بود، تصور کنید طول قد انسان‌های سالمند چقدر می‌شد؟ می‌دانید که بعد از تولد، طول قد انسان افزایش پیدا می‌کند ولی میزان این افزایش در بازه‌های زمانی ثابت نیست و تقریباً بعد از بیست و دو سالگی، طول قد انسان ثابت می‌ماند. نمودار این رابطه برای یک فرد مانند شکل زیر است.



فعالیت ۲، تفاوت رابطه‌های خطی و غیرخطی را نشان می‌دهد.

فعالیت ۲

رابطهٔ طول ضلع یک مربع با محیط آن و رابطهٔ طول ضلع یک مربع با مساحت آن را در نظر بگیرید.
طول ضلع مربع را با x، محیط آن را با P و مساحت آن را با S نشان دهید.

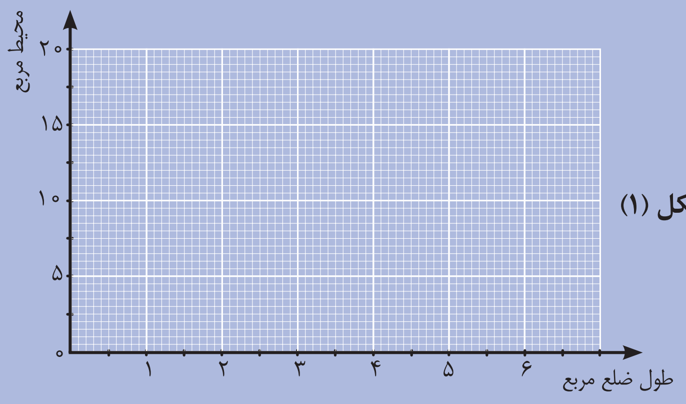
۱) رابطهٔ P و x و همچنین رابطهٔ S و x را با دو معادله بنویسید.

....

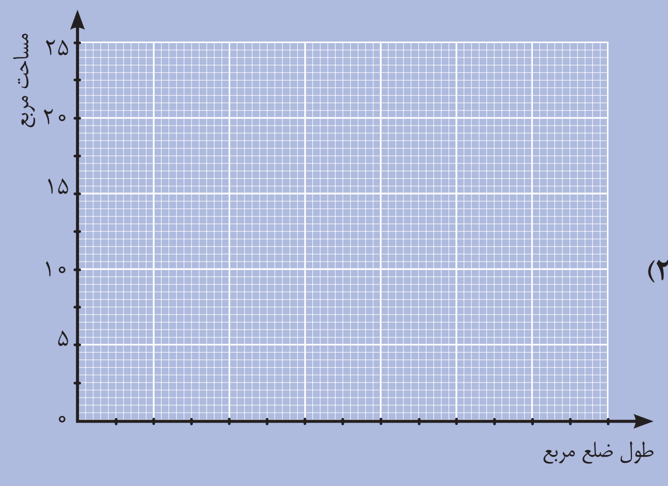
۲) جدول زیر را کامل کنید.

x (طول ضلع مربع)	۱	۲	۳	۴	۵
p (محیط مربع)	...	...	...	...	...
s (مساحت مربع)	...	...	...	...	...

۳) نقاط به دست آمده در جدول را در دو دستگاه محورهای مختصات زیر نشان دهید.



شکل (۱)



شکل (۲)

۴) جدولی رسم کنید که میزان افزایش محیط و مساحت مربع را وقتی طول ضلع آن از ۱ به۲، از ۲ به ۳ و از ۴ به ۵ افزایش می‌یابد، نشان دهد.

۵) آیا نسبت افزایش محیط مربع به افزایش طول ضلع آن، مقدار ثابتی است؟

....

۶) آیا نسبت افزایش مساحت مربع به افزایش طول ضلع آن، مقدار ثابتی است؟

....

۷) می‌خواهیم نقاط شکل (۱) را به هم وصل کنیم؛ آیا می‌توانیم با یک خط راست همهٔ این نقاط را به هم وصل کنیم؟ چرا؟

....

۸) می‌خواهیم نقاط شکل (۲) را به هم وصل کنیم؛ آیا می‌توانیم با یک خط راست همهٔ این نقاط را به هم وصل کنیم؟ چرا؟

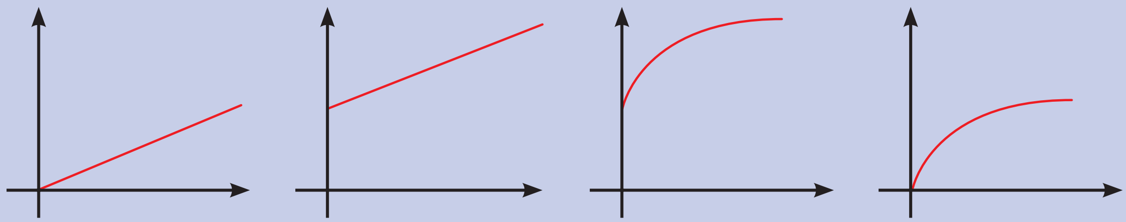
....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که نمودار رابطهٔ بین طول ضلع مربع و محیط آن به صورت خط راست است. در این حالت، نسبت افزایش محیط مربع به افزایش طول ضلع آن، مقداری ثابت است و این دو مقدار باهم رابطهٔ خطی دارند. ولی نسبت افزایش مساحت مربع به طول ضلع آن، مقدار ثابتی نیست. به همین

دلیل، نمودار رابطهٔ طول ضلع مربع و مساحت آن به صورت خط راست نیست و رابطهٔ بین طول ضلع مربع و مساحت آن را **غیرخطی** می‌نامند.

کار در کلاس ۲

در شکل زیر، محور افقی نشان‌دهندهٔ زمان بر حسب ماه و محور عمودی نشان‌دهندهٔ وزن یک انسان بر حسب کیلوگرم است. کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند نمودار وزن یک انسان در طول زمان باشد؟



کار در کلاس زیر، نمودار یک رابطهٔ غیرخطی مهم را بررسی می‌کند.

کار در کلاس ۳

یک عدد حقیقی و مجذور آن را در نظر بگیرید. عدد حقیقی دلخواه را با x و مجذور آن (x^2) را با y نشان دهید.

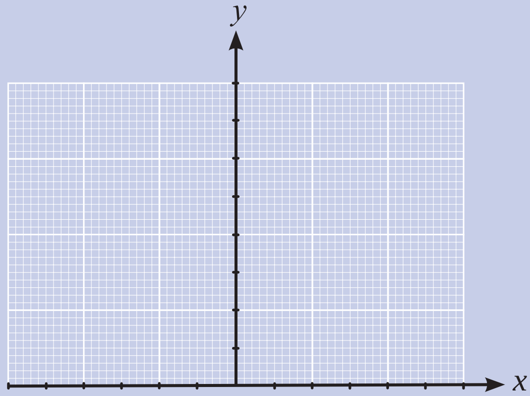
۱) رابطهٔ بین x و y را با یک معادله نشان دهید.

....

۲) جدول زیر را کامل کنید (برای محاسبه می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

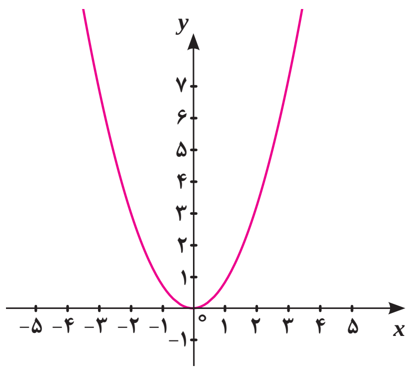
x	-۲	-۱/۸	-۱/۶	-۱/۴	-۱/۲	-۱	۰	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
y	...	...	...	...	...	...	...	...	۱/۴۴	...	...	...	...

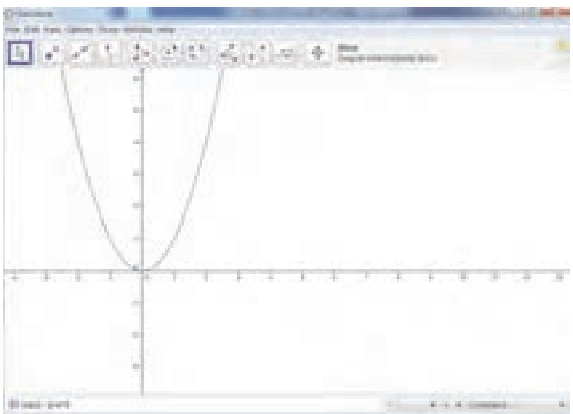
۳) نقاط جدول صفحهٔ قبل را روی محورهای مختصات زیر نشان دهید و نمودار رابطهٔ $y = x^۲$ را رسم کنید.



رسم نمودار با جئو جبرا

به کمک جئوجبرا، نمودار رابطهٔ $y = x^۲$ به طور دقیق‌تر به‌صورت شکل روبه‌رو رسم می‌شود.





برای رسم نمودار یک رابطه، معادلهٔ آن را در کادر پایین صفحه وارد کنید.

در وضعیت‌های زندگی روزمره، گاهی چند پدیده را هم‌زمان بررسی می‌کنیم. در چنین حالاتی ممکن است نمودارِ نمایش‌دهندهٔ این پدیده‌ها با هم برخورد داشته باشند. در فعالیت زیر با معنا و مفهوم نقاط برخورد نمودار رابطه‌ها آشنا خواهیم شد.

فعالیت ۳

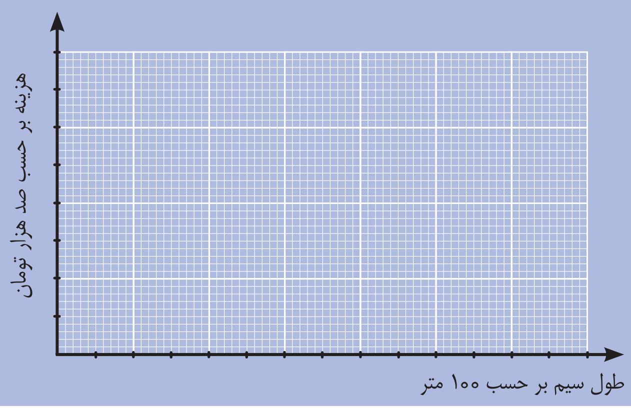
هزینهٔ ثابت ماهیانهٔ یک کارگاه تولید سیم برق، ۱۷۰,۰۰۰ تومان است. هزینهٔ تهیهٔ مواد اولیه برای هر متر سیم ۶۰ تومان و قیمت فروش هر متر سیم ۴۰۰ تومان است.

۱) با توجه به این اطلاعات، جدول را کامل کنید.

طول سیم‌های فروخته شده (متر)	۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰
هزینهٔ تولید (تومان)	...	...	...	...	...	...	...
درآمد حاصل از فروش (تومان)	...	...	...	...	...	...	...

۲) اگر x طول سیم‌های فروخته شده، C هزینهٔ تولید و R درآمد حاصل از فروش سیم در یک ماه باشد، رابطهٔ بین طول سیم‌های فروخته شده و هزینه و همچنین، رابطهٔ بین طول سیم‌های فروخته شده و درآمد حاصل از فروش را بنویسید.

۳) در دستگاه مختصات زیر، اگر محور افقی، طول سیم‌های فروخته شده بر حسب متر و محور عمودی هزینهٔ تولید (برای رسم نمودار هزینه) و درآمد حاصل از فروش (برای رسم نمودار درآمد) بر حسب تومان در یک ماه در نظر گرفته شود، رابطه‌های بالا را در این دستگاه مختصات رسم کنید (هر واحد محور افقی را ۱۰۰ متر و هر واحد محور عمودی را ۱۰۰ هزار تومان در نظر بگیرید).



۴) مختصات نقطهٔ برخورد دو خط را بیابید.

....

۵) نقطهٔ برخورد این دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

....

۶) اگر مختصات نقطه‌ای در هر دو معادله صدق[1] کند، این نقطه در کجا قرار دارد؟

....

محل برخورد دو خط، نقطه‌ای است که اگر مختصات آن را در معادله‌های هر دو خط قرار دهیم، تساوی برقرار می‌شود. برعکس، اگر مختصات نقطه‌ای در هر دو معادله صدق کند، این نقطه همان محل برخورد دو خط است.

کار در کلاس ۴

یک کارگاه تولید میز تحریر در هر ماه برای پرداخت مخارج دستگاه‌هایش، سیصدو بیست هزار تومان هزینه می‌کند. هزینهٔ مواد اولیه برای هر میز ۲۰,۰۰۰ تومان و قیمت فروش هر میز ۳۰,۰۰۰ تومان است.

۱) جدول زیر را کامل کنید.

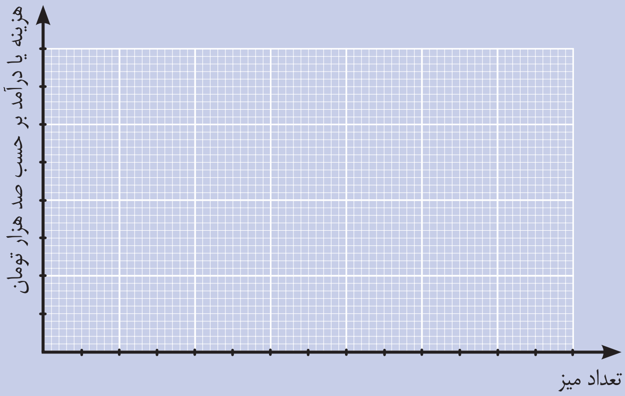
تعداد میزهای تولید شده در یک ماه	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
هزینهٔ تولید (بر حسب هزارتومان)	...	...	...	...	...
درآمد حاصل از فروش (بر حسب هزارتومان)	...	...	...	...	...

۱ـ اگر با جایگذاری مختصات یک نقطه در یک معادله، تساوی برقرار شود، گوییم که مختصات نقطه در معادله صدق می‌کند.

۲) اگر در یک ماه، تعداد میزهای تولید شده x، هزینهٔ تولید C و درآمد حاصل از فروش R در نظر گرفته شود، رابطهٔ بین تعداد میزها و هزینهٔ تولید و همچنین رابطهٔ بین تعداد میزها و درآمد حاصل از فروش در یک ماه را بنویسید.

....

۳) در دستگاه مختصات زیر اگر محور افقی، تعداد میزهای تولید شده و محور عمودی، هزینهٔ تولید (برای رسم نمودار هزینه) و درآمد حاصل از فروش (برای رسم نمودار درآمد) بر حسب صد هزار تومان در یک ماه را نشان دهد، رابطه‌های بالا را در این دستگاه مختصات رسم کنید[1].



۴) مختصات نقطهٔ برخورد دو خط بالا را به‌صورت تقریبی بیابید.

....

۵) نقطهٔ تقاطع دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

....

۱ــ اگر چه تعداد میزها، عدد حسابی و نمودار واقعی گسسته است، برای داشتن تصویر بهتری از روابط، مناسب است نمودار را یک خط فرض کنیم.

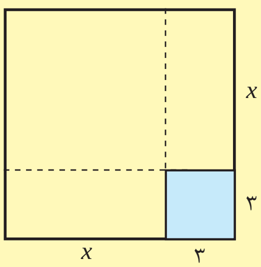
۳ــ۳ــ روش‌های حل معادله‌های درجهٔ دوم

در فعالیت‌های قبل با توصیف پدیده‌ها به کمک معادله آشنا شدیم. اما برای رسیدن به جواب‌های مسئله‌هایمان، باید جواب‌های آن معادله‌ها را به‌دست آوریم. برای حل معادله‌ها روش‌های مختلفی وجود دارد. در فعالیت ۴، با روش هندسی حل معادله‌های درجهٔ دوم آشنا خواهیم شد.

خواندنی

خوارزمی برای حل معادله‌های درجهٔ دوم، شش حالت خاص را بررسی کرده است. از میان این حالت‌ها فقط یکی از آنها را توضیح خواهیم داد.

در این حالت، جملهٔ ثابت C در $ax^۲+bx+c$ باید منفی باشد. برای مثال، معادلهٔ $x^۲+۶x-۴۰=۰$ را در نظر بگیرید. در روش خوارزمی، جمله‌هایی را که مجهول دارند، در یک طرف تساوی نگه می‌داریم؛ عدد ثابت را به طرف دیگر می‌بریم و معادله را به صورت $x^۲+۶x=۴۰$ می‌نویسیم. نصف ضریب x را حساب می‌کنیم که در این مثال، برابر ۳ است. با این محاسبات می‌توانیم، مساحت مربعی با ضلع $x+۳$ را حساب کنیم.



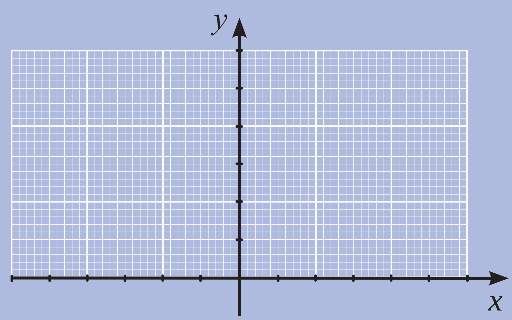
در شکل بالا، مساحت مربع رنگی ۳×۳ می‌شود. مساحت قسمت باقیمانده یعنی $x^۲+۶x$ برابر ۴۰ است پس، مساحت مربع بزرگ ۴۹=۹+۴۰ است و طول ضلع مربع بزرگ برابر $\sqrt{۴۹}=۷$ خواهد بود. پس $x+۳=۷$ و در نتیجه $x=۴$. همهٔ معادله‌های درجهٔ دوم را نمی‌توان با این روش حل کرد. همچنین با این تعبیر هندسی، فقط یکی از جواب‌های معادله‌های درجهٔ دوم به دست می‌آید.

فعالیت ۴

۱) دو رابطه $y_۱=x^۲$ و $y_۲=۲x+۳$ را در نظر بگیرید و جدول زیر را کامل کنید.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$x^۲$	...	...	...	...	...	...
$۲x+۳$	...	...	...	...	...	...

۲) با استفاده از جدول بالا، نمودار معادله‌های $y_۱=x^۲$ و $y_۲=۲x+۳$ را در دستگاه مختصات روبه‌رو رسم کنید.



۳) مختصات نقطهٔ برخورد این دو نمودار را بیابید.

....

۴) آیا مختصات نقاط برخورد خط و منحنی در هر دو معادله صدق می‌کنند؟

....

۵) آیا طول‌های نقاط برخورد منحنی $y_۱$ و خط $y_۲$ در معادلهٔ $x^۲=۲x+۳$ صدق می‌کنند؟

....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که طول‌های نقاط برخورد دو نمودار رابطه‌های $y_۱=x^۲$ و $y_۲=۲x+۳$ جواب‌هایی برای معادلهٔ $x^۲=۲x+۳$ هستند. برعکس، هر جوابی از این معادله، یک نقطهٔ برخورد نمودارهای $y_۱=x^۲$ و $y_۲=۲x+۳$ را نشان می‌دهد. معادلهٔ $x^۲=۲x+۳$ را می‌توان به صورت معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-۲x-۳=۰$ نوشت. ملاحظه می‌شود برای یافتن جواب‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم می‌توان از این شیوه کمک گرفت.

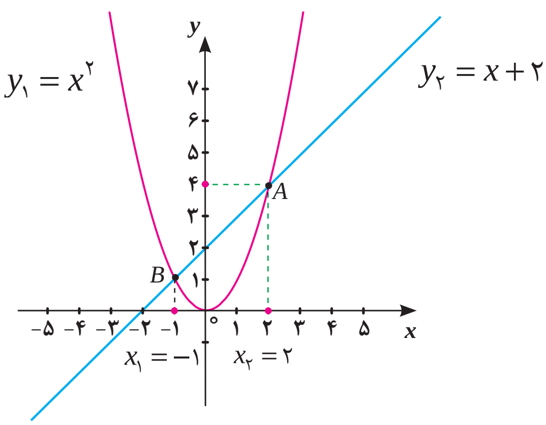
برای مثال، معادلهٔ $x^۲-۲x-۳=۰$ را در نظر بگیرید. این معادله را به صورت $x^۲=۲x+۳$ می‌نویسیم. می‌توان گفت جواب‌های این معادله، مقدارهایی از x هستند که به ازای آنها، مقدارهای $x^۲$ و $۲x+۳$ با هم برابر می‌شوند. با رسم نمودارهای $y_۱=x^۲$ و $y_۲=۲x+۳$ و مشخص‌کردن نقطه برخورد این دو نمودار و تعیین طول نقاط برخورد می‌توان جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۲x-۳=۰$ را به دست آورد. به کمک این روش، هر معادلهٔ درجهٔ دوم دیگری را نیز می‌توانیم حل کنیم. این روش را **روش هندسی** حل معادله‌های درجهٔ دوم می‌گویند.

مثال ۳

معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-x-۲=۰$ را با روش هندسی حل کنید.

ابتدا آن را به صورت $x^۲=x+۲$ می‌نویسیم و نمودارهای معادله‌های $y_۱=x^۲$ و $y_۲=x+۲$ را رسم می‌کنیم. این دو نمودار در نقاط A و B با یکدیگر برخورد می‌کنند. به ازای طول نقطهٔ A و طول نقطهٔ B، مقدارهای $x^۲$ و $x+۲$ مساوی شده‌اند. این مقدارها، دو جواب معادلهٔ $x^۲-x-۲=۰$ می‌باشند. یعنی $x=-۱$ و $x=۲$ جواب‌های مسئله هستند.

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$x^۲$	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹
$x+۲$	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵

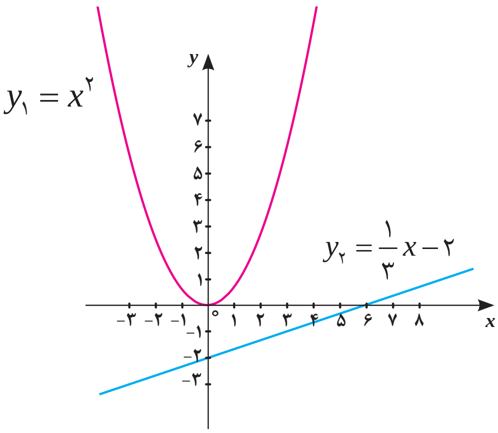


مثال ۴

معادلهٔ درجهٔ دوم $۳x^{۲} - x + ۶ = ۰$ را با روش هندسی حل کنید.

ابتدا آن را به صورت $x^{۲} = \frac{۱}{۳}x - ۲$ می‌نویسیم و نمودارهای معادله‌های $y_{۱} = x^{۲}$ و $y_{۲} = \frac{۱}{۳}x - ۲$ را رسم می‌کنیم. دیده می‌شود که این نمودارها با یکدیگر برخورد نمی‌کنند. پس، نقطهٔ مشترکی ندارند و به ازای هیچ مقداری از x دو مقدار $x^{۲}$ و $\frac{۱}{۳}x - ۲$ مساوی نمی‌شوند. پس معادلهٔ $x^{۲} = \frac{۱}{۳}x - ۲$ جواب ندارد.

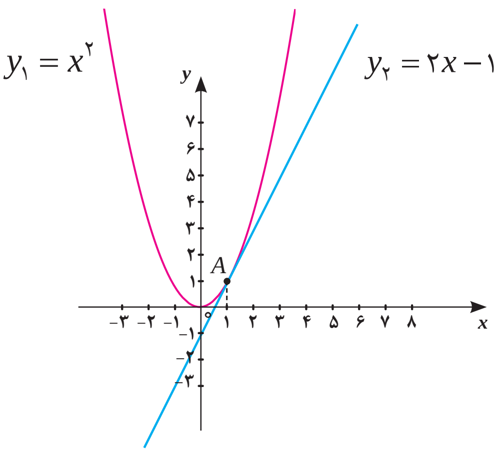
x	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$x^{۲}$	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹
$\frac{۱}{۳}x - ۲$	-۳	$-\frac{۸}{۳}$	$-\frac{۷}{۳}$	-۲	$-\frac{۵}{۳}$	$-\frac{۴}{۳}$	-۱



مثال ۵

معادلهٔ درجهٔ دوم $x^{۲} - ۲x + ۱ = ۰$ را با روش هندسی حل کنید.

ابتدا آن را به صورت $x^{۲} = ۲x - ۱$ می‌نویسیم و نمودارهای معادله‌های $y_{۱} = x^{۲}$ و $y_{۲} = ۲x - ۱$ را رسم می‌کنیم. دیده می‌شود که این نمودارها بر هم مماس هستند. با توجه به امکان وجود خطای دید، حدس می‌زنیم معادله فقط یک جواب دارد و برای بررسی درستی حدس خود، از جدول کمک می‌گیریم. در این حالت $x = ۱$ جواب معادله است.



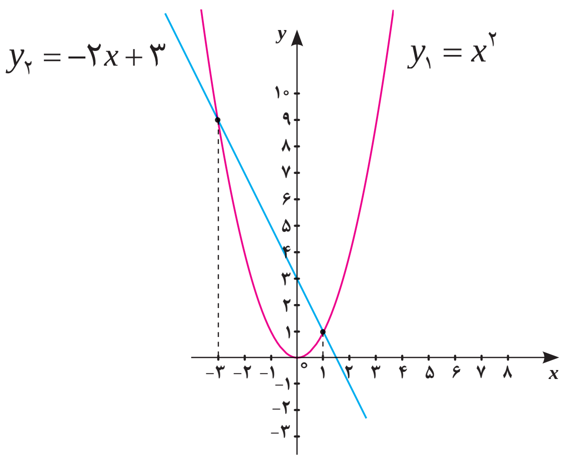
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$x^{۲}$	۴	۱	۰	۱	۴
$۲x - ۱$	-۵	-۳	-۱	۱	۳

همان طور که در مثال‌ها دیدید، برخی از معادله‌های درجهٔ دوم، دارای یک جواب (یک نقطهٔ مشترک بین خط و منحنی)، برخی دیگر دارای ۲ جواب (دو نقطهٔ مشترک بین خط و منحنی) و برخی هم بدون جواب (بدون نقطهٔ مشترک بین خط و منحنی) هستند.

مثال ۶

با روش هندسی نشان دهید عدد ۳− یک جواب معادلهٔ $x_2+2x-3=0$ است. سپس جواب دیگر معادله را پیدا کنید.

نمودارهای منحنی $y_1=x^2$ و خط $y_2=-2x+3$ را رسم می‌کنیم.



این دو نمودار در نقطه‌ای به طول ۳- همدیگر را قطع می‌کنند. بنابراین ۳- یک جواب معادله است. با دقت در نمودار مشاهده می‌شود که این دو نمودار یکدیگر را در نقطه‌ای به طول ۱ نیز قطع کرده‌اند. بنابراین، $x=1$ جواب دیگر معادله است.

کاردرکلاس ۵

معادله‌های زیر را با روش هندسی حل کنید (برای سهولت در رسم، از نرم‌افزار جئوجبرا کمک بگیرید).

الف) $x^2+2x+1=0$ ب) $x^2-1=0$ پ) $2x^2+x+1=0$

مسئله‌ها

۱) معادله‌های زیر را با روش هندسی حل کنید و جواب‌های آنها را به طور تقریبی به دست آورید.

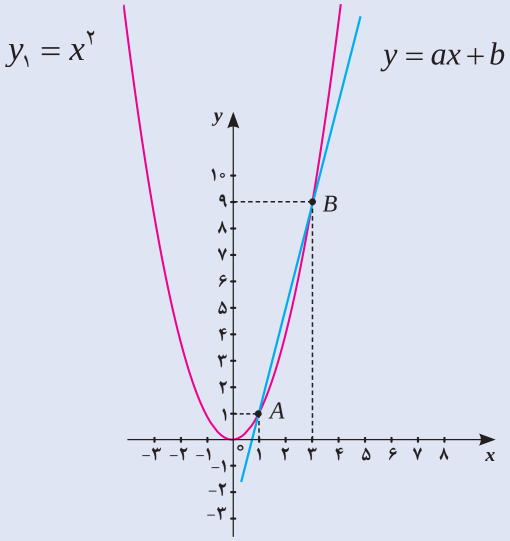
الف) $۲x^۲ - ۳x = ۵$

ب) $۴x^۲ + ۸x = ۰$

پ) $x^۲ + x = ۱$

ت) $x^۲ + ۴x = -۴$

۲) در شکل زیر، خط به معادلهٔ $y = ax + b$ را در نظر بگیرید. مقادیر a و b را با توجه به شکل مشخص کنید. سپس معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که جواب‌های آن ۱ و ۳ باشد (**راهنمایی:** یک دستگاه دو معادله با دو مجهول بر حسب a و b تشکیل دهید، یا ابتدا شیب این خط را بیابید).



روش جبری حل معادله‌های درجهٔ دوم

با توجه به وجود خطای رسم و اندازه‌گیری در روش هندسی، همواره نمی‌توان به جواب دقیق رسید. با انجام فعالیت ۵ با روش دیگری آشنا می‌شوید که با استفاده از آن، جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم به‌طور دقیق محاسبه می‌شود.

فعالیت ۵

معادلهٔ $x^۲+۶x-۷=۰$ را در نظر بگیرید.

۱) جمله‌هایی را که مجهول دارند، در یک طرف تساوی نگه دارید و جملهٔ ثابت را به طرف دیگر ببرید.

....

۲) نصف ضریب x در معادلهٔ بالا را به دست آورید و آن را به توان ۲ برسانید.

....

۳) عدد به‌دست آمده از مرحلهٔ (۲) را به دو طرف معادلهٔ مرحلهٔ (۱) اضافه کنید.

....

۴) طرف اول تساوی را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، به‌صورت مجذور یک عبارت بنویسید.

(یادآوری: اتحاد مربع دو جمله‌ای به‌صورت $(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$ است.)

....

۵) از دو طرف تساوی جذر بگیرید و دو جواب برای x به‌دست آورید.

....

روشی را که در بالا برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم به کار بردیم، برای هر معادلهٔ درجهٔ دوم دیگری هم می‌توان به‌کار برد.

کار در کلاس ۶

معادلهٔ $x^۲-۳x+۲=۰$ را مانند فعالیت ۵ حل کنید.

از روش فعالیت ۵ برای حل یک معادلهٔ درجهٔ دوم دلخواه استفاده می‌کنیم تا تشخیص دهیم در چه شرایطی یک معادلهٔ درجهٔ دوم جواب دارد. در صورت وجود جواب، فرمولی هم برای جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم پیدا می‌کنیم.

فعالیت ۶

معادلهٔ درجهٔ دوم دلخواه $ax \;\; +bx+c=$ را در نظر بگیرید ($a\neq ۰$).

۱) طرفین معادلهٔ بالا را بر a تقسیم کنید و معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ضریب $x^۲$ در آن برابر ۱ باشد.

....

۲) جمله‌های دارای x را در یک طرف تساوی نگه دارید و جملهٔ ثابت (جملهٔ فاقد x) را به طرف دیگر ببرید.

....

۳) در معادلهٔ بالا، نصف ضریب x را به‌دست آورید و آن را به توان ۲ برسانید.

....

۴) عدد به‌دست آمده از مرحلهٔ (۳) را به دو طرف معادلهٔ مرحلهٔ (۲) اضافه کنید.

....

۵) به کمک تساوی‌های بالا، جاهای خالی را پر کنید:

$$(x+\frac{b}{\cdots\cdots})^۲=\frac{\cdots\cdots-۴ac}{\cdots\cdots\cdots}$$

۶) تساوی بالا در چه شرایطی امکان‌پذیر است؟ معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ در چه شرایطی جواب دارد؟

....

۷) نشان دهید در صورت مثبت بودن $b^۲-۴ac$ جواب‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ برابر جواب‌های دو معادلهٔ زیر است.

$$x+\frac{b}{۲a}=\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} \quad , \quad x+\frac{b}{۲a}=-\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

با انجام فعالیت صفحهٔ قبل نتیجه می‌گیریم که در صورت مثبت بودن $b^۲-۴ac$، که معادلهٔ درجهٔ دوم دارای جواب‌های زیر است:

$$x_۱=\frac{-b+\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} \quad , \quad x_۲=\frac{-b-\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

فرمول‌های بالا را **فرمول‌های محاسبهٔ جواب معادلهٔ درجهٔ دوم** می‌گویند. در هر معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت $ax^۲+bx+c=۰$ ، عبارت $b^۲-۴ac$ را با Δ (بخوانید دلتا) نشان می‌دهند. شرط وجود جواب برای یک معادلهٔ درجهٔ دوم این است که $\Delta \geq ۰$.

اگر $\Delta>۰$، معادله دو جواب دارد که عبارت‌اند از : $x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} \quad , \quad x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$

اگر $\Delta=۰$، معادله فقط دارای جواب $x=-\frac{b}{۲a}$ است؛ زیرا از فرمول‌های محاسبهٔ جواب معادله، نتیجه می‌شود: $x_۱=x_۲=-\frac{b}{۲a}$.

اگر $\Delta<۰$، معادله جواب ندارد. چرا؟

مثال ۷

جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$ را در صورت وجود پیدا کنید.

در این معادله $a=۱$ و $b=-۳$ و $c=۱$. بنابراین $\Delta=(-۳)^۲-(۴)(۱)(۱)=۵$.

چون $\Delta=۵>۰$ ، این معادله دارای دو جواب زیر است:

$$x_۱=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲} \quad , \quad x_۲=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$$

کار در کلاس ۷

جواب‌های معادله‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $۵x^۲+۲x+۱=۰$

ب) $x^۲-۶=۰$

پ) $x^۲-۳x=۰$

مسئله‌ها

۱) جواب‌های معادله‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $۲x^۲+۵x=۰$

ب) $۳x^۲+۱۳x+۳=۰$

پ) $\sqrt{۲}x(x+\sqrt{۵})=\sqrt{۸}$

ت) $x^۲+x+۲=۰$

ث) $(۲x-۱)^۲=۵$

ج) $(x+۲)^۲=-۴$

۲) اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $۵x^۲+۱۳x+c=۰$ برابر (۳-) باشد، جواب دیگر این معادله را بیابید.

....

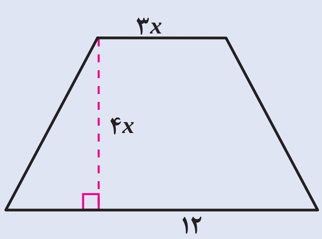
۳) اگر طول مستطیلی سه برابر عرض آن باشد و مساحت آن ۳۰۰ مترمربع باشد، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ این مسئله چند جواب دارد؟

....

۴) مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زیر، ۱۰۸ سانتی‌متر مربع است. مقدار x را پیدا کنید.

....

....



۵) حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی، ۱۳۲ می‌باشد. این دو عدد را پیدا کنید.

....

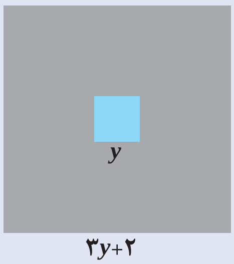
۶) عددی طبیعی بیابید که دو برابر آن به اضافهٔ ۳۵، با توان دوم آن عدد مساوی باشد.

....

۷) نشان دهید $-۱+\sqrt{۲}$ یک جواب معادلهٔ $x^{۲}+۲x-۱=۰$ است.

....

۸) مساحت ناحیهٔ خاکستری ۴۰ سانتی‌متر مربع است. اندازهٔ هر ضلع مربع‌ها را به‌دست آورید.



....

....

۹) معمای زیر در کتاب «الجبر و المقابله» خوارزمی آمده است (گرفته شده از کتاب خوارزمی بنیان‌گذار جبر، کارونا برزینا).

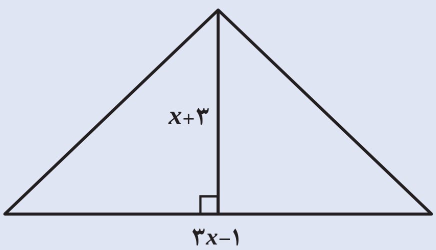
” مقداری است که اگر یک سوم آن و یک درهم را در یک چهارم آن و یک درهم ضرب کنم، حاصل آن بیست می‌شود.“

این مقدار را پیدا کنید.

۱۰) مساحت مثلث روبه‌رو ۲۴ سانتی‌مترمربع است.

الف) مقدار x را پیدا کنید.

ب) اندازهٔ قاعده و ارتفاع مثلث چقدر است؟



....