پودمان چهارم

توان‌رسانی به توان عددهای گویا

پژوهشگران به تازگی با استفاده از دست‌کاری ژنتیکی نوعی باکتری، توانسته‌اند روندی برای این باکتری ایجاد کنند که با دریافت هیدروژن و کربن‌دی اکسید، انرژی تولید کند. این باکتری می‌تواند هیدروژن و کربن دی اکسید را جذب کرده و آنها را به سوخت الکل تبدیل کند. هدف از این کار، رسیدن به یک سطح قابل توجه از بهره‌وری است که بتواند در این زمینه از گیاهان پیشی بگیرد.
محققان اعلام کردند که باکتری‌ها می‌توانند از نور خورشید تا میزان ۱۰ برابر مؤثرتر از گیاهان بهره‌وری کنند.

۴ ــ ۱ــ مفهوم توان‌رسانی به توان عددهای گویا

محمد مدتی بیمار بود و برای معالجه به دکتر مراجعه کرده بود. دکتر از او در مورد زمان شروع بیماری و شدت آن پرسیده بود. او پس از بهبودی، به مدرسه رفت و از دبیر علوم خود سؤال کرد: «مگر زمان شروع بیماری در تصمیم دکتر برای تجویز دارو مؤثر است؟»

دبیر گفت: «بله. علت بروز بسیاری از بیماری‌ها باکتری‌ها هستند و با گذشت زمان مقدار آنها افزایش می‌یابد؛ مثلاً، نوعی از باکتری‌ها پس از هر ساعت دو برابر می‌شوند. بنابراین، اگر در شروع، یک گرم باکتری داشته باشیم، در پایان ساعت‌های اول و دوم و سوم و ... وزن باکتری‌ها به ترتیب ۲ و ۴ و ۸ و ... گرم خواهد شد.»

محمد همان طور که با خود فکر می‌کرد ریاضی در پزشکی هم کاربرد دارد، این سؤال برایش مطرح شد: وزن باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر خواهد شد؟

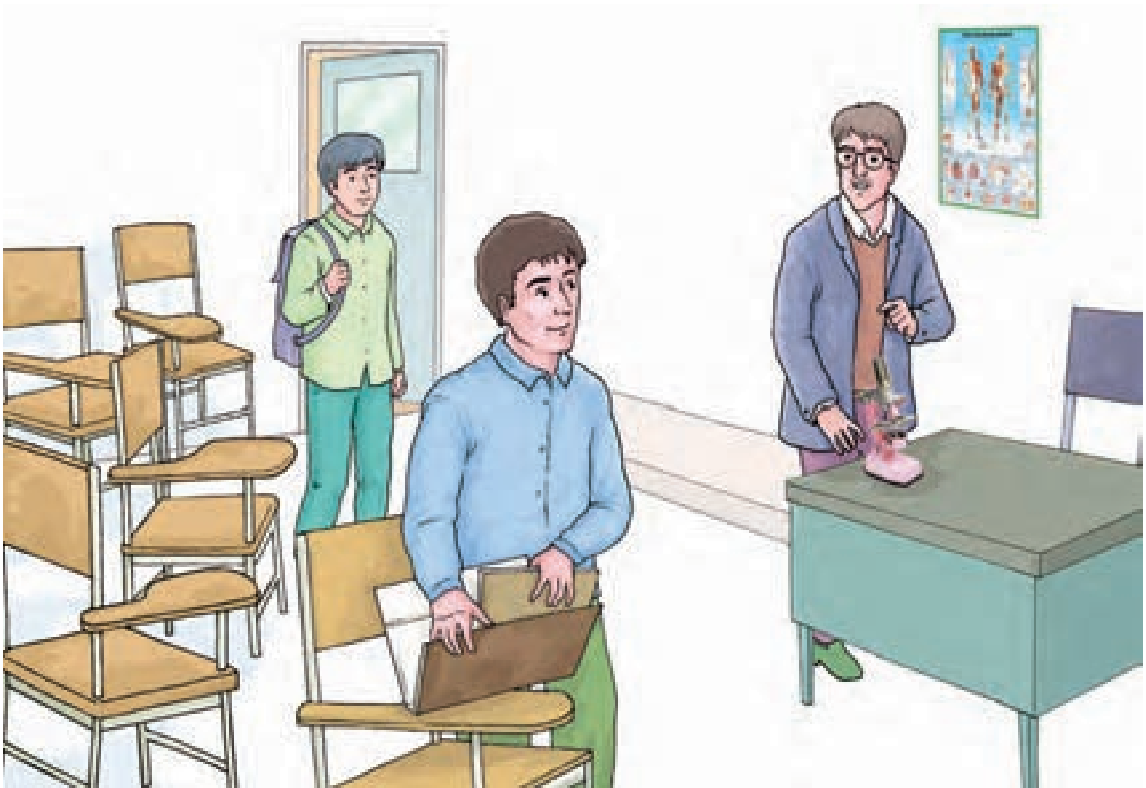
دبیر گفت: «اگر به ارتباط بین وزن باکتری‌ها و زمان سپری شده توجه کنید می‌توانید وزن آنها را حدس بزنید. وزن یک گرم باکتری پس از ۱ ساعت 2^1 گرم، بعداز ۲ ساعت 2^2 گرم و بعداز ۳ ساعت 2^3 گرم و... می‌شود. آیا می‌توانید حدس بزنید که بعد از نیم ساعت ($\frac{1}{2}$ ساعت) وزن باکتری‌ها چقدر می‌شود؟»

محمد گفت: «شاید می‌خواهید بگویید $2^{\frac{1}{2}}$ گرم است.»

دبیر گفت : «فرض کنیم حدسی که زده‌اید درست باشد، آیا این عدد برایتان معنی دارد؟»

محمد گفت: «با عددهایی که توان آنها عدد صحیح است آشنایی دارم؛ اما نمی‌دانم $2^{\frac{1}{2}}$ چیست.»

دبیر گفت: «با انجام فعالیت بعد، شما خودتان هم می‌توانید مقدار این عدد را پیدا کنید.»



فعالیت ۱

نوعی باکتری را در نظر بگیرید که وزن آن هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر در شروع ۱ گرم باکتری داشته باشیم، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱) اگر وزن باکتری‌ها پس از هر نیم‌ساعت b برابر شود، وزن آنها را پس از یک‌ساعت بر حسب b به‌دست آورید و در محل تعیین شده بنویسید.

....

....

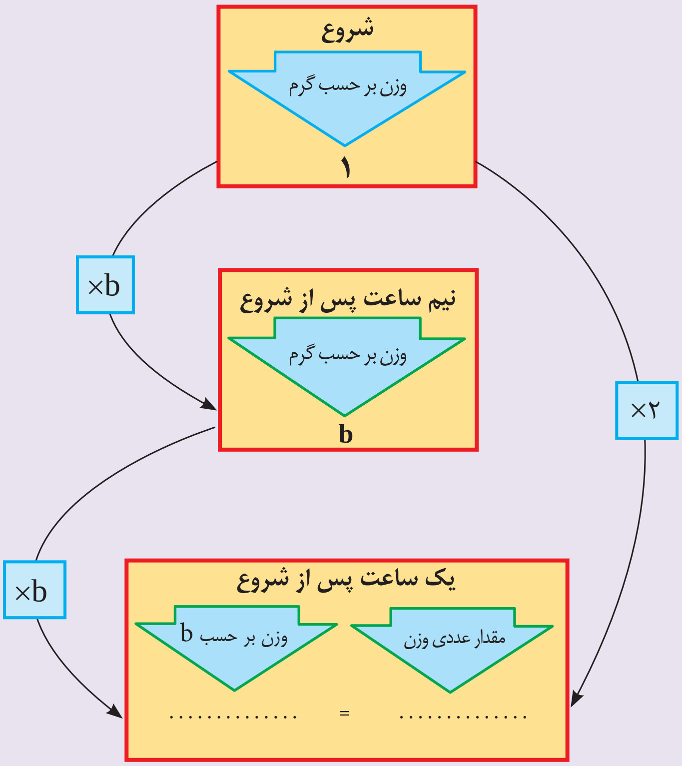
....

۲) وزن ۱ گرم باکتری را پس از یک ساعت برحسب گرم محاسبه کنید و در محل تعیین شده بنویسید. از تساوی حاصل، مقدار b را به‌دست آورید.

....

....

....



محمد گفت: آیا می‌توانیم ازاین فعالیت نتیجه بگیریم که مقدار $۲^{\frac{۱}{۲}}$ همان $\sqrt{۲}$ است؟

دبیر گفت: بله می‌توانیم. تعریف $۲^{\frac{۱}{۲}}$ به صورت $\sqrt{۲}$ تعریف مناسبی است. حال فرض کنیم وزن باکتری‌ها پس از یک‌ساعت ۳ برابر می‌شد. اگر با یک گرم باکتری شروع کنیم ، وزنی را که آنها پس از نیم‌ساعت به آن می‌رسند، با نماد $۳^{\frac{۱}{۲}}$ نشان می‌دهیم. این عدد همان $\sqrt{۳}$ است؛ زیرا اگر این عدد را با b نشان دهیم پس از پایان یک‌ساعت مقدار باکتری‌ها از یک طرف ۳ و از طرف دیگر $b^{۲}$ است. پس $b^{۲}=۳$ ؛ که نتیجه می‌دهد $b=\sqrt{۳}$ ؛ یعنی:

$$۳^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۳}$$

در حالت کلی، توانِ $\frac{۱}{۲}$ همهٔ اعداد مثبت به همین صورت تعریف می‌شود.

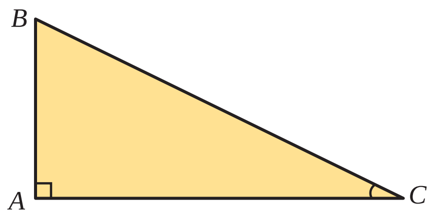
تعریف

اگر a عددی مثبت یا صفر باشد، بنا به تعریف $a^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{a}$

مثال ۱

الف) نمایش رادیکالی عدد $۳۶^{\frac{۱}{۲}}$ به صورت $\sqrt{۳۶}$ است و $۳۶^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳۶} = ۶$.

ب) شکل زیر، یک مثلث قائم‌الزاویه است ($\hat{A} = ۹۰^\circ$). اگر اندازهٔ دو ضلع زاویهٔ قائمه ۵ و ۱۲ باشد، طول وتر را به صورت یک عدد توان‌دار و یک عدد رادیکالی نمایش دهید و آن را ساده کنید.



$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ = ۱۲^۲ + ۵^۲ = ۱۶۹ \Rightarrow BC = ۱۶۹^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۱۶۹} = ۱۳$$

کاردرکلاس ۱

۱) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را بنویسید سپس در صورت امکان، آنها را ساده کنید.

$۴۹^{\frac{۱}{۲}} =$

$(\frac{۱}{۲۵})^{\frac{۱}{۲}} =$

$(۰/۰۱)^{\frac{۱}{۲}} =$

۲) طول ضلع مربعی را که مساحت آن ۹ سانتی‌مترمربع است، به‌صورت یک عدد توان‌دار نمایش دهید و آن را ساده کنید.

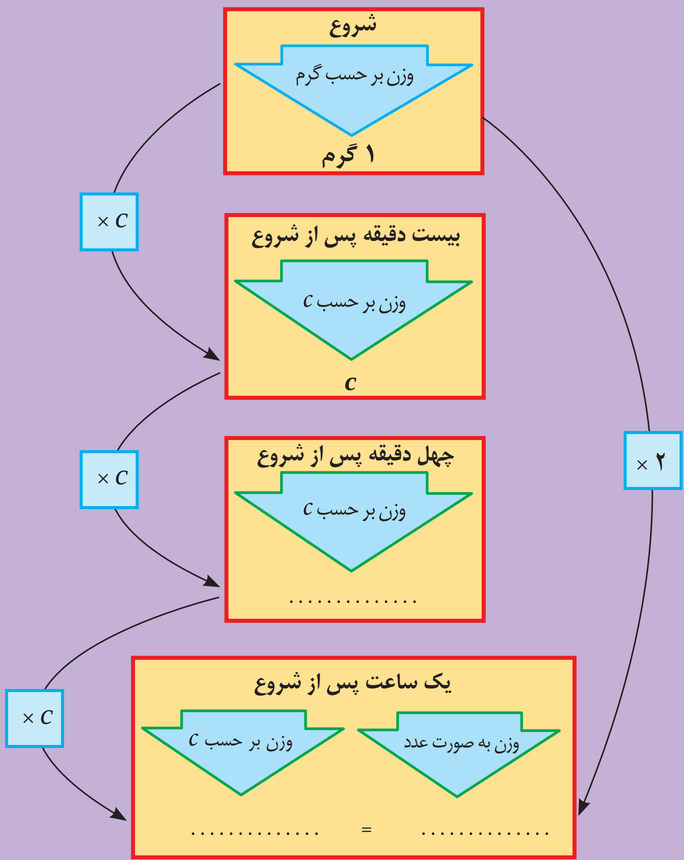
در فعالیت ۲، مفهوم توانِ $\frac{۱}{۳}$ عددهای مثبت را بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۲

یک گرم از یک نوع باکتری را در نظر بگیرید که پس از هر ساعت دو برابر می‌شود. با روش زیر بررسی کنید که پس از $\frac{۱}{۳}$ ساعت چند گرم باکتری ایجاد می‌شود.

۱) فرض کنید وزن باکتری‌ها پس از هر $\frac{۱}{۳}$ ساعت c برابر شود. وزن باکتری‌ها را پس از $\frac{۱}{۳}$ ساعت و $\frac{۲}{۳}$ ساعت و یک‌ساعت بر حسب c در نمودار زیر بنویسید.

۲) نمودار را کامل کنید و از تساوی حاصل، مقدار c را به دست آورید.



در اینجا نیز، وزن باکتری‌ها را پس از $\frac{۱}{۳}$ ساعت با $۲^{\frac{۱}{۳}}$ نمایش می‌دهیم. فعالیت بالا نشان می‌دهد که وزن این نوع باکتری پس از $\frac{۱}{۳}$ ساعت، $\sqrt[۳]{۲}$ است. بنابراین، $۲^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲}$.

اگر وزن باکتری‌ها پس از هر ساعت ۵ برابر شود و با یک گرم باکتری شروع کنیم، وزن آنها را پس از بیست دقیقه ($\frac{۱}{۳}$ ساعت) با $۵^{\frac{۱}{۳}}$ نشان می‌دهیم. این مقدار با استدلالی شبیه به فعالیت صفحه قبل برابر $\sqrt[۳]{۵}$ می‌باشد. در حالت کلی، توانِ $\frac{۱}{۳}$ هر عددِ مثبت a به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف

اگر a عددی مثبت یا صفر باشد، بنا به تعریف $a^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{a}$.

مثال ۲

الف) نمایش رادیکالی عدد $۸^{\frac{۱}{۳}}$ به صورت $\sqrt[۳]{۸}$ است، بنابراین : $۸^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۸}=۲$.

ب) طول ضلع مکعبی با حجم ۲۷ سانتی‌متر مکعب، $\sqrt[۳]{۲۷}$ سانتی‌متر است که می‌توانیم به‌صورت $۲۷^{\frac{۱}{۳}}$ نمایش دهیم.

کاردرکلاس ۲

۱) با توجه به تساوی‌های داده شده، ابتدا نمایش رادیکالی اعداد را بنویسید و سپس، حاصل را به‌دست آورید.

الف) $۶^۳=۲۱۶ \Rightarrow ۲۱۶^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{\dots}=\dots$

ب) $(\frac{۱}{۷})^۳=\frac{۱}{۳۴۳} \Rightarrow (\frac{۱}{۳۴۳})^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{\frac{\dots}{\dots}}=\dots$

۲) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را بنویسید و سپس در صورت امکان، آنها را ساده کنید.

$۶۴^{\frac{۱}{۳}}=$ $\qquad (۹^۳)^{\frac{۱}{۳}}=$ $\qquad (\frac{۱}{۸})^{\frac{۱}{۳}}=$ $\qquad (۰/۰۰۱)^{\frac{۱}{۳}}=$

استفاده از ماشین حساب

یک گرم از باکتری‌هایی را که وزن آنها پس از یک‌ساعت دو برابر می‌شوند در نظر بگیرید. با استفاده از ماشین حساب، وزن آنها را در هر یک از دو حالت زیر بر حسب گرم با تقریب اعشاری تا دو رقم اعشار نشان دهید(توجه کنید، اگر از ماشین‌حساب‌های مختلف استفاده می‌کنید، ممکن است ترتیب فشاردادن کلیدها متفاوت باشد).

الف) پس از نیم‌ساعت:

محاسبه از طریق توان‌رسانی[1]:

2 → x^y → (→ 1 → / → 2 →) → =

محاسبه از طریق ریشه‌گیری:

2 → √ → =

ب) پس از ۲۰ دقیقه:

محاسبه از طریق توان‌رسانی:

2 → x^y → (→ 1 → / → 3 →) → =

محاسبه از طریق ریشه‌گیری:

2 → $\sqrt[y]{x}$ → 3 → =

۱ـ در کادرهای استفاده از ماشین حساب، فلش بین دکمه‌های ماشین حساب به معنای توالی فشردن دکمه‌های ماشین حساب است.

مسئله‌ها

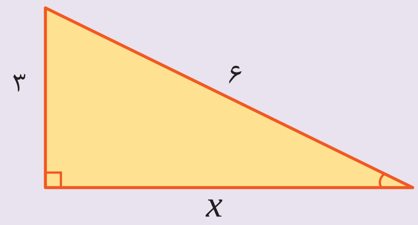
۱) نقطه چین‌ها را با عبارت مناسب تکمیل کنید:

$$11^3 = 1331 \Rightarrow 1331^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\cdots\cdots\cdots} = \cdots\cdot$$

$$17^2 = 289 \Rightarrow 289^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\cdots\cdots\cdots} = \cdots\cdots\cdots$$

۲) مقادیر خواسته شده را ابتدا به صورت یک عدد توان‌دار با توان گویا بنویسید و سپس عبارت رادیکالی متناظر آن را نوشته و با استفاده از ماشین حساب، حاصل را تا دو رقم اعشار حساب کنید.

الف) مقدار x



ب) نوعی از باکتری را در نظر می‌گیریم که وزن آن پس از یک ساعت دو برابر می‌شود. اگر با دو گرم باکتری شروع کنیم پس از نیم ساعت چقدر باکتری داریم؟ مقدار باکتری‌ها پس از بیست دقیقه چقدر است؟

....

پ) قطر یک مربع به ضلع ۳ را به‌صورت عددی توان‌دار بنویسید.

....

۳) بخشی از راه حل احمد برای یافتن ریشه‌های معادلۀ درجۀ دوم $2x^2 - 3x - 2 = 0$ به صورت زیر است:

$$x = \frac{3 \pm \left((-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2)\right)^{\frac{1}{2}}}{2 \times 2} = \cdots\cdots$$

درستی یا نادرستی راه حل را بررسی کرده و در صورت درستی با ادامۀ راه حل و درصورت نادرستی با نوشتن راه حل درست، ریشه‌های معادله را به‌دست آورید.

۴) دارایی‌های یک شرکت در هر سال، ۱۵۰ درصد سال قبل است. دارایی این شرکت طی ده سال به صورت زیر گزارش شده است :

زمان تأسیس: ۱ میلیارد ریال، پایان سال اول: ۱/۵ میلیارد ریال، پایان سال دوم: ۲/۲۵ میلیارد ریال و ...

الف) دارایی شرکت در پایان سال‌های دوم، چهارم و دهم را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

ب) رابطه‌ای بنویسید که دارایی در پایان سال n ام را به صورت یک عبارت توان‌دار بر حسب n نمایش دهد.

پ) اگر روند رشد دارایی‌ها در هر ماه نیز طبق رابطهٔ قسمت قبل باشد، دارایی شرکت را پس از ۴ ماه و ۶ ماه، به صورت یک عدد توان‌دار و یک عبارت رادیکالی نمایش دهید و با ماشین حساب مقدارِ آن را به صورت یک عدد اعشاری نمایش دهید.

خواندنی

به‌تازگی دانشمندان موفق شده‌اند فناوری جدیدی ارائه کنند که به کمک آن می‌توان اطلاعات را بر روی رشته‌های دی‌اِن‌اِی باکتری‌ها ذخیره کرد . این روش از این نظر بسیار حائز اهمیت است که برخلاف روش‌های پیشین بدون آسیب رساندن به بافت زندهٔ باکتری، می‌توان این کار را به انجام رساند.

طراحان این روش معتقدند که ذخیرهٔ داده‌ها بر روی بافت‌های زنده می‌تواند مزایای خارق‌العاده‌ای را به همراه داشته باشد زیرا با چنین ساختارهایی می‌توانند به درمان هوشمند بیماری‌ها دست بزنند.

البته حجم داده‌های قابل ذخیره در شرایط فعلی به هیچ عنوان به‌اندازه‌ای نیست که بتوان از آن در سطح کاربردی بهره گرفت ولی این روش را می‌توان یک راهکار برای آیندهٔ انباره‌های اطلاعاتی به‌حساب آورد.

۴ــ۲ــ ریشه‌گیری عددهای حقیقی

مسئلهٔ تعیین وزن باکتری‌ها را در نظر بگیرید. وزن باکتری‌ها پس از ۱۵ دقیقه ($\frac{۱}{۴}$ ساعت) چقدر است؟ پس از ۱۲ دقیقه ($\frac{۱}{۵}$ ساعت) چقدر است؟ این مقادیر را چگونه نشان می‌دهند؟ برای پاسخ دادن به این سؤال‌ها لازم است علاوه بر ریشهٔ دوم و سوم، ریشه‌های دیگر یک عدد را هم بشناسیم.

خواندنی

تاریخچهٔ ریشه‌گیری

از لحاظ تاریخی، ایدهٔ ریشه‌گیری در ارتباط با حل معادله‌های جبری پدید آمده است. در محاسبهٔ جواب‌های معادله‌های درجهٔ دوم و سوم، عبارت‌های پیچیده‌ای از رادیکال‌ها دیده می‌شوند. اگرچه روش‌های عددی در محاسبهٔ جواب‌های معادله‌ها بسیار مؤثرتر هستند، با این حال نیاز به ریشه‌گیری همچنان وجود دارد.


جرونیو کاردان

ریشه‌گیری عکس عمل توان‌رسانی است. توان‌رسانی به توان n (برای عدد a) را با a^n نشان می‌دهند و عکس این عمل را با $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهند و آن را ریشهٔ nام از a می‌نامند.

پس از کشف فرمول جبری حل معادله‌های درجهٔ دوم، تحقیقاتی طولانی برای یافتن فرمول جبری برای حل معادله‌های درجهٔ سوم آغاز شد. برای یافتن چنین فرمولی باید تا قرن شانزدهم صبر می‌شد تا **کاردان**، ریاضیدان ایتالیایی چنین فرمولی را به دست آورد. جواب‌های معادلهٔ $x^۳+ax=b$ به شکل زیر هستند.

$$x=\sqrt[۳]{\sqrt{\frac{a^۳}{۲۷}+\frac{b^۲}{۴}}+\frac{b}{۲}}-\sqrt[۳]{\sqrt{\frac{a^۳}{۲۷}+\frac{b^۲}{۴}}-\frac{b}{۲}}$$

بعد از حل معادله‌های درجهٔ سوم، چگونگی حل معادله‌های درجهٔ چهارم نیز به دست آمد. **اویلر** تلاش کرد معادله‌های درجهٔ پنجم را به روش مشابهی حل کند ولی موفق نشد. در قرن نوزدهم **آبل** و **گالوا** ثابت کردند که معادله‌های درجهٔ پنجم به روش‌های جبری قابل حل نیستند و فرمولی جبری از طریق ریشه‌گیری برای جواب‌های معادله‌های درجهٔ پنجم و درجات بالاتر وجود ندارد.

فعالیت ۳

در هر قسمت، ابتدا جمله‌ها را کامل کنید. سپس به سؤال پاسخ دهید.

۱) یک ریشهٔ دوم عدد ۲۵ عدد .... است؛ زیرا ۲۵ = $(......)^{۲}$

....

۲) ریشه‌های دوم یک عدد را تعریف کنید.

....

۳) یک ریشهٔ سوم عدد ۸ عدد .... است؛ زیرا ۸ = $(....)^{۳}$.

....

۴) ریشه‌های سوم یک عدد را تعریف کنید.

....

۵) برای ریشه‌های چهارم یک عدد، چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟ از ریشهٔ چهارم مثالی بزنید.

....

۶) برای ریشه‌های پنجم یک عدد چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟ از ریشهٔ پنجم مثالی بزنید.

....

۷) برای ریشه‌های kاُم یک عدد چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟

....

۸) اگر $b^k = a$ آنگاه .... یک ریشهٔ .... عدد .... است.

با استفاده از فعالیت۳، تعریف زیر از ریشه‌گیری مرتبه‌های بالاتر داده می‌شود.

تعریف

اگر k یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ باشد، عدد حقیقی b را یک ریشهٔ kام عدد حقیقی a می‌نامیم، هرگاه $b^k = a$.

مثال ۳

الف) عدد ۲ یک ریشهٔ ششم ۶۴ است؛ زیرا $۶۴=۲^۶$.

ب) با توجه به $\frac{۱}{۱۰,۰۰۰} = (\frac{۱}{۱۰})^۴$ ، عدد $\frac{۱}{۱۰}$ یک ریشهٔ چهارم $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$ است.

پ) عدد ۲- یک ریشهٔ پنجم ۳۲- است؛ زیرا $-۳۲ = (-۲)^۵$.

ت) برای هر عدد طبیعی k، صفر فقط یک ریشهٔ k ام دارد که برابر با صفر است.

ث) با تجزیهٔ عدد ۱۵,۶۲۵ به عوامل اول، نتیجه می‌شود $۱۵,۶۲۵ = ۵^۶$ یعنی ۵ یک ریشهٔ ششم ۱۵,۶۲۵ است.

کاردرکلاس ۳

۱) به جای نقطه‌چین‌ها، عددهای مناسب قرار دهید.

الف) از آنجا که $۳^۵=۲۴۳$ ، عدد .... یک ریشهٔ پنجم عدد .... است.

ب) با توجه به تساوی، $(-۵)^۶=...$ عدد .... یک ریشهٔ ششم عدد .... است.

پ) تساوی $\frac{۱}{۸} = (\frac{۱}{۲})^{....}$ نشان می‌دهد که عدد $\frac{۱}{۲}$ یک ریشهٔ .... عدد .... است.

۲) یک ریشهٔ چهارم از اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۶۲۵ ب) $\frac{۱}{۸۱}$ ج) ۰/۰۰۰۱

۳) یک ریشهٔ پنجم از اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۱ ب) $-\frac{۱}{۳۲}$ ج) ۳×۸۱

۴) برای پیدا کردن ریشه‌های چهارم و پنجم یک عدد، چه پیشنهادی دارید؟

....

فعالیت ۴

۱) جدول زیر را کامل کنید.

عدد	...	...	۲	۱	$\frac{۲}{۳}$	۰	$-\frac{۲}{۳}$	-۱	-۲
توان چهارم	...	...	...	...	...	...	$\frac{۱۶}{۸۱}$	...	...

۲) آیا در سطر دوم جدول، عدد منفی دیده می‌شود؟ چرا ؟

....

۳) توان چهارم اعداد قرینه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

....

۴) آیا یک عدد منفی می‌تواند ریشهٔ چهارم داشته باشد؟ چرا؟

....

۵) با استفاده از جدول، ریشه‌های چهارم اعداد ۱ و $\frac{۱۶}{۸۱}$ را بنویسید.

....

۶) با توجه به پاسخ‌های به دست آمده، در مورد تعداد ریشه‌های چهارم عدد مثبت a چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ این ریشه‌ها چه رابطه‌ای با هم دارند؟

....

۷) آیا این نتیجه در مورد ریشه‌های زوج دیگر نیز درست است؟ با مثال نشان دهید.

....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که عددهای مثبت دو ریشهٔ زوج دارند و این ریشه‌ها قرینهٔ یکدیگرند. با دقت در جدول بالا مشاهده می‌شود که توان زوج همهٔ اعداد منفی، همواره عددی مثبت است. بنابراین اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند.

نکته

۱) هر عددِ مثبتِ a دو ریشهٔ زوج دارد که قرینهٔ یکدیگرند، اگر k یک عدد طبیعی زوج باشد، ریشهٔ kاِم مثبت a را با $\sqrt[k]{a}$ نمایش می‌دهیم، و ریشهٔ kاِم منفی آن $-\sqrt[k]{a}$ خواهد بود.

۲) اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند.

مثال ۴

الف) عدد ۶۴ دارای دو ریشهٔ ششم است که عبارت‌اند از ۲ و ۲-؛ زیرا $۶۴ = ۲^۶ = (-۲)^۶$، بنابراین $\sqrt[۶]{۶۴} = ۲$.

ب) عدد ۶۴- ریشهٔ ششم ندارد؛ زیرا توان ششم هر عدد حقیقی، مثبت است .

پ) عدد۲، دو ریشهٔ چهارم دارد که قرینهٔ یکدیگرند.این دو ریشه به صورت $\sqrt[۴]{۲}$ و $-\sqrt[۴]{۲}$ نوشته می‌شوند.

ت) عدد ۲- ریشهٔ چهارم ندارد؛ زیرا هیچ عدد حقیقی وجود ندارد که توان چهارم آن منفی باشد.

می‌دانیم که رابطهٔ $\sqrt{a^۲} = |a|$ برای هر عدد حقیقی a درست است. در فعالیت زیر درستی این رابطه را برای ریشه‌های زوج دیگر نیز بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۵

۱) جدول زیر را کامل کنید.

a	$-۰/۱$	$۰/۱$	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	-۲	۲
$\sqrt[۴]{a^۴}$	$\sqrt[۴]{(-۰/۱)^۴}$	...	...	...	...	...
حاصل	۰/۱	...	...	...	...	...

۲) عددهای سطر آخر جدول چه رابطه‌ای با عددهای سطر اول آن دارند؟

....

۳) حاصل $\sqrt[۶]{۳^۶}$ و $\sqrt[۶]{(-۳)^۶}$ را به‌دست آورید و با نتیجهٔ قسمت قبل مقایسه کنید.

....

نتیجهٔ فعالیت ۵ در مورد هر ریشهٔ زوج نیز برقرار است.

تعریف

اگر a عددی حقیقی و k عددی زوج باشد، آنگاه $\sqrt[k]{a^k}=|a|$

مثال ۵

عبارت‌های $\sqrt[6]{\left(-\frac{2}{3}\right)^6}$ و $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^4}$ را ساده کنید.

$$\sqrt[6]{\left(-\frac{2}{3}\right)^6}=\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}$$

$$\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^4}=\left|1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1$$

کاردرکلاس ۴

۱) حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $\sqrt[4]{625}$ ب) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$ پ) $\sqrt[6]{0/000001}$ ت) $\sqrt[6]{\left(-0/01\right)^6}$

۲) ریشه‌های ششم اعداد زیر را بنویسید.

الف) 5^6 ب) ۷۲۹ پ) ۱ ت) $(-5)^6$

۳) عبارت‌های $\sqrt[6]{\left(-\frac{5}{3}\right)^6}$ و $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{3}\right)^4}$ را بدون استفاده از رادیکال بنویسید.

....

در فعالیت ۵ دیدید که اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند و اعداد مثبت دو ریشهٔ زوج قرینه دارند. در ادامه، این وضع را برای ریشه‌های فرد بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۶

۱) جدول زیر را کامل کنید.

ریشهٔ ...	۲	۱	$\frac{۱}{۴}$	۰	۱-	$-\frac{۱}{۴}$	۲-	عدد
عدد	...	...	$\frac{۱}{۱۰۲۴}$	...	...	...	...	توان پنجم

۲) آیا در سطر دوم جدول، عددی منفی دیده می‌شود؟ آیا می‌توان نتیجه گرفت که عددهای منفی ریشهٔ پنجم دارند؟

....

۳) توان پنجم عددهای قرینه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که همهٔ عددها ریشهٔ پنجم دارند. این نتیجه در مورد ریشه‌های فرد دیگر نیز درست است. هر عدد حقیقی، یک و فقط یک ریشهٔ فرد kام دارد.

نکته

اگر k عددی فرد باشد، عدد حقیقی a ، یک و فقط یک ریشهٔ فردِ k اُم دارد کــه آن را با $\sqrt[k]{a}$ نمایش می‌دهیم .

مثال ۶

عدد ۲۴۳ یک ریشهٔ پنجم دارد که عدد ۳ است؛ زیرا $۳^۵ = ۲۴۳$. بنابراین: $\sqrt[۵]{۲۴۳} = ۳$. همچنین عدد ۲۴۳- یک ریشهٔ پنجم دارد که عدد ۳- است؛ زیرا $(-۳)^۵ = -۲۴۳$ پس: $\sqrt[۵]{-۲۴۳} = -۳$.

کاردرکلاس ۵

حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $\sqrt[۵]{۱۱^{۵}}$ ب) $\sqrt[۵]{\frac{۱}{۲۴۳}}$ پ) $\sqrt[۵]{-۰/۰۰۰۰۱}$ ت) $\sqrt[۷]{(-۳)^{۷}}$

اکنون که علاوه بر ریشهٔ دوم و سوم با ریشه‌های دیگر عددها نیز آشنا شده‌ایم، می‌توانیم توان‌های گویای دیگرِ اعداد مثبت را نیز تعریف کنیم.

نکته

اگر a یک عدد حقیقیِ مثبت یا صفر و n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه بنا به تعریف $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

توجه داشته باشید که در تعریف توان‌رسانی به توان عددهای گویای غیر صحیح، پایه همواره مثبت در نظر گرفته می‌شود و توان گویای اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

مثال ۷

الف) نمایش رادیکالی عدد $۳۲^{\frac{۱}{۵}}$ عبارت است از $\sqrt[۵]{۳۲}$. بنابراین: $۳۲^{\frac{۱}{۵}} = \sqrt[۵]{۳۲} = ۲$.

ب) ریشه یکم هر عدد برابر با خودش است.

پ) عدد $۶۲۵^{\frac{۱}{۴}}$ برابر است با $\sqrt[۴]{۶۲۵}$ که ساده شدهٔ آن عدد ۵ است؛ یعنی: $۶۲۵^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۶۲۵} = ۵$.

ت) نوعی از باکتری را در نظر بگیریدکه وزن آن پس از هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر در شروع، یک گرم باکتری داشته باشیم، وزن آن پس از۱۲دقیقه ($\frac{۱}{۵}$ ساعت) برابر است با $\sqrt[۵]{۲} = ۲^{\frac{۱}{۵}}$ گرم و پس از ۱۵ دقیقه ($\frac{۱}{۴}$ ساعت) برابر است با $۲^{\frac{۱}{۴}}$.

کار در کلاس ۶

ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را نوشته و سپس در صورت امکان آنها را ساده کنید.

الف) $(۳^{۸})^{\frac{۱}{۸}}$ ب) $(\frac{۱}{۳۲})^{\frac{۱}{۵}}$ پ) $(۰/۰۰۰۰۱)^{\frac{۱}{۵}}$ ت) $۲۴۳^{\frac{۱}{۵}}$

استفاده ازماشین حساب

به کمک ماشین حساب ابتدا عدد $\sqrt[۵]{۲}$ و سپس عدد $۲^{\frac{۱}{۵}}$ را با تقریب اعشاری تا دو رقم اعشار بنویسید و درستی تساوی آنها را بررسی کنید.

به کمک ریشه‌گیری :

2 → $\sqrt[y]{x}$ → 5 → =

به کمک توان‌رسانی :

2 → x^y → (→ 1 → / → 5 →) → =

توان‌رسانی به توان سایر اعداد گویا نیز قابل تعریف است. می‌دانیم که در توان‌رسانی به توان اعداد صحیح خاصیت $(a^m)^n = a^{mn}$ برقرار است. تعریف را به گونه‌ای ارائه می‌کنیم که این ویژگی برای توان‌رسانی به توان اعداد گویا هم برقرار باشد. برای مثال، برای محاسبهٔ $a^{\frac{۲}{n}}$، آن را به صورت $a^{\frac{۱}{n}\times ۲}$ درنظر می‌گیریم. ابتدا $a^{\frac{۱}{n}}$ را حساب می‌کنیم و حاصل را به توان ۲ می‌رسانیم. برای محاسبهٔ $a^{\frac{۳}{n}}$، آن را به صورت $a^{\frac{۱}{n}\times ۳}$ در نظر می‌گیریم و ابتدا $a^{\frac{۱}{n}}$ را حساب می‌کنیم و حاصل را به توان ۳ می‌رسانیم. به همین ترتیب و برای محاسبهٔ $a^{\frac{-۳}{n}}$، آن را به صورت $a^{\frac{۱}{n}\times(-۳)}$ در نظر می‌گیریم؛ ابتدا $a^{\frac{۱}{n}}$ را حساب می‌کنیم و حاصل را به توان ۳- می‌رسانیم.

مثال ۸

مقدارهای $۴^{\frac{۳}{۲}}$ و $۲۷^{-\frac{۲}{۳}}$ و $۰/۰۱^{-\frac{۳}{۲}}$ را محاسبه کنید.

$$۴^{\frac{۳}{۲}} = (۴^{\frac{۱}{۲}})^{۳} = (\sqrt[۲]{۴})^{۳} = ۲^{۳} = ۸$$

$$۲۷^{-\frac{۲}{۳}} = (۲۷^{\frac{۱}{۳}})^{-۲} = (\sqrt[۳]{۲۷})^{-۲} = (۳)^{-۲} = \frac{۱}{۳^{۲}} = \frac{۱}{۹}$$

$$(۰/۰۱)^{-\frac{۳}{۲}} = (۰/۰۱^{\frac{۱}{۲}})^{-۳} = (\sqrt[۲]{۰/۰۱})^{-۳} = (۰/۱)^{-۳} = \frac{۱}{(۰/۱)^{۳}} = \frac{۱}{۰/۰۰۱} = ۱۰۰۰$$

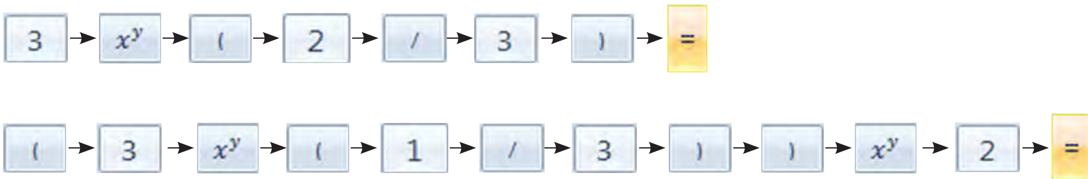
ویژگی‌های توان‌رسانی با عددهای صحیح ، در توان‌رسانی با اعداد گویا نیز برقرار است.

توجه: در عبارت $\left((-۹)^{۲}\right)^{\frac{۱}{۴}}$ نمی‌توان توان‌ها را در هم ضرب کرد؛ زیرا به $(-۹)^{\frac{۲}{۴}}$ تبدیل خواهد شد؛ درحالی که طبق تعریف، در توان‌رسانی به توان اعداد گویای غیر صحیح، پایه نباید منفی باشد. این عبارت به صورت زیر ساده می‌شود.

$$((-۹)^{۲})^{\frac{۱}{۴}} = ۸۱^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۸۱} = ۳$$

استفاده از ماشین حساب

به کمک ماشین حساب ابتدا عدد $۳^{\frac{۲}{۳}}$ و سپس عدد $(۳^{\frac{۱}{۳}})^{۲}$ را با تقریب اعشاری تا دو رقم اعشار بنویسید و سپس، درستی تساوی آنها را بررسی کنید.



همچنین ویژگی‌های

$$a^{m} \times b^{m} = (ab)^{m} \qquad a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$$

که در توان‌رسانی با عددهای صحیح برقرار بود در توان‌رسانی با اعداد گویا (با شرط $a > ۰$ و $b > ۰$) نیز برقرار است.

مثال ۹

محاسبات زیر را انجام دهید.

الف) $۶۴^{\frac{۱}{۳}} \times ۶۴^{\frac{۱}{۲}} = ۶۴^{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}} = ۶۴^{\frac{۵}{۶}} = (۶۴^{\frac{۱}{۶}})^{۵} = \left(\sqrt[۶]{۶۴}\right)^{۵} = ۲^{۵} = ۳۲$

ب) $۸^{\frac{۱}{۲}} \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = (۸ \times ۲)^{\frac{۱}{۲}} = ۱۶^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۱۶} = ۴$

پ) $۴^{-\frac{۱}{۳}} \times ۴^{-\frac{۱}{۶}} = ۴^{(-\frac{۱}{۳})+(-\frac{۱}{۶})} = ۴^{-\frac{۲+۱}{۶}} = ۴^{-\frac{۳}{۶}} = ۴^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۴^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۱}{\sqrt{۴}} = \frac{۱}{۲}$

ت) $۳^{-\frac{۲}{۳}} \times ۹^{-\frac{۲}{۳}} = (۳ \times ۹)^{-\frac{۲}{۳}} = ۲۷^{-\frac{۲}{۳}} = \frac{۱}{۲۷^{\frac{۲}{۳}}} = \frac{۱}{(\sqrt[۳]{۲۷})^{۲}} = \frac{۱}{۳^{۲}} = \frac{۱}{۹}$

کار در کلاس ۷

۱) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای $۶۴^{\frac{۱}{۳}}$ و $۶۴^{\frac{۱}{۲}}$ را بنویسید و آنها را ساده کنید. سپس حاصل را به‌دست آورید و نتیجه را با مثال ۹- الف مقایسه کنید.

$$۶۴^{\frac{۱}{۳}} \times ۶۴^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۳]{\dots} \times \sqrt[۲]{\dots} = \dots$$

۲) ابتدا نمایش رادیکالی اعداد $۸^{\frac{۱}{۲}}$ و $۲^{\frac{۱}{۲}}$ را بنویسید. سپس با استفاده از خواص ضرب رادیکال‌ها، حاصل را به صورت یک رادیکال بنویسید و ساده کنید. آنگاه نتیجه را با مثال ۹- ب مقایسه کنید.

$$۸^{\frac{۱}{۲}} \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{\dots} \times \sqrt{\dots} = \sqrt{\dots \times \dots} = \sqrt{\dots} = \dots$$

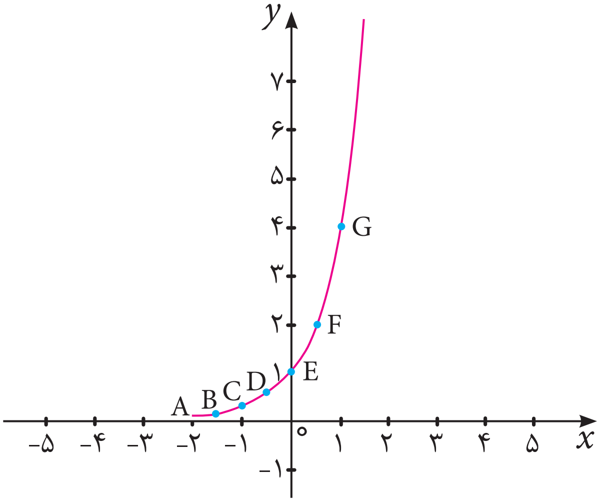
۳) حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید. (در هرکدام بگویید از کدام خاصیت استفاده کرده‌اید.)

الف) $۱۲۵^{\frac{۲}{۳}}$ ب) $۸^{-\frac{۲}{۳}}$ پ) $۶۴^{\frac{۱}{۱۲}} \times ۶۴^{\frac{۳}{۴}}$ ت) $\left(\left(\frac{۱}{۳۲}\right)^{\frac{۱}{۵}}\right)^{۳}$ ث) $\sqrt[۳]{۱۶} \times ۲^{\frac{۲}{۳}}$

آشنایی با توان‌های گویای عددهای مثبت موجب می‌شود بتوانیم توان‌های بیشتری از یک عدد را محاسبه کرده و به کمک آنها پدیده‌های طبیعی را به‌طور مناسب مدل‌سازی کنیم. برای مثال، در جدول زیر، برخی از توان‌های عدد ۴ را مشاهده کنید.

x	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱
۴^x	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴
مختصات نقطهٔ متناظر	$A\begin{bmatrix}-۲\\ \frac{۱}{۱۶}\end{bmatrix}$	$B\begin{bmatrix}-\frac{۳}{۲}\\ \frac{۱}{۸}\end{bmatrix}$	$C\begin{bmatrix}-۱\\ \frac{۱}{۴}\end{bmatrix}$	$D\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$	$E\begin{bmatrix}۰\\ ۱\end{bmatrix}$	$F\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}\\ ۲\end{bmatrix}$	$G\begin{bmatrix}۱\\ ۴\end{bmatrix}$

اگر مقادیر x را روی محور x ها و مقادیر ۴^x را روی محور yها مشخص کنیم و این نقاط را به یکدیگر متصل کنیم، نمودار زیر را خواهیم داشت. همان طور که دیده می‌شود نمودار ۴^x، یک خط راست نیست.



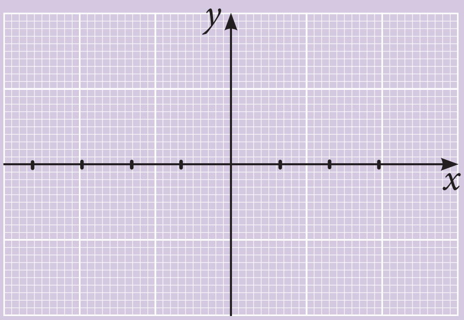
کار در کلاس ۸

در جدول زیر، برخی از توان‌های عدد $\frac{۱}{۴}$ را می‌بینید:

x	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$
$(\frac{۱}{۴})^x$	۱۶	...	...	۲	۱	...	...	...

۱) جدول را کامل کنید.

۲) مقادیر x را روی محور x ها و مقادیر $(\frac{۱}{۴})^x$ را روی محور y ها مشخص کرده و این نقاط را به یکدیگر متصل کنید.



۳) آیا نمودار $(\frac{۱}{۴})^x$، یک خط راست است؟

....

مسئله‌ها

۱)به جای نقطه‌چین‌ها عبارت مناسب قرار دهید.

الف) $۷^۲ = ۴۹ \Rightarrow (۴۹)^{.....} = \sqrt[۲]{.....} = ...$

ب) $۱۷^۳ = ۴۹۱۳ \Rightarrow ۴۹۱۳^{.....} = \sqrt[۳]{.....} = ...$

پ) $۱۳^۴ = ۲۸۵۶۱ \Rightarrow ۲۸۵۶۱^{.....} = \sqrt[۴]{.....} = ...$

ت) $۱۵^{-۴} = (\frac{۱}{۱۵})^۴ = \frac{۱}{۵۰۶۲۵} \Rightarrow (\frac{۱}{۵۰۶۲۵})^{.....} = \sqrt[۴]{.....} = ...$

ث) $(\frac{۱}{۳})^۹ = ... \Rightarrow (.........)^{\frac{۱}{۹}} = \sqrt[۹]{.........} = ...$

ج) $۵^۶ = ۱۵۶۲۵ \Rightarrow (۱۵۶۲۵)^{\frac{....}{۶}} = \sqrt[..]{۱۵۶۲۵} = ...$

چ) $(۰/۳)^۵ = ۰/۰۰۲۴۳ \Rightarrow (۰/۰۰۲۴۳)^{\frac{۱}{....}} = \sqrt[۵]{.........} = ...$

۲) در هر کدام از قسمت‌های زیر، مسئله‌ای در زمینهٔ بیان شده طرح کنید که جواب آن، عدد توان‌دارِ داده شده باشد:

الف) $۴^{\frac{۱}{۴}}$: (تکثیر باکتری‌ها)

....

ب) $۲۷^{\frac{۱}{۳}}$: (زمینهٔ هندسی)

....

۳) هریک از عددها را به عدد مساوی آن در ستون مقابل وصل کنید.

$\sqrt[4]{6}$	$4^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[3]{2^2}$	$3^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}}$
$\sqrt[6]{2^5}$	$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[12]{3^{11}}$	$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{3}}$
$\frac{1}{9}$	$32^{\frac{6}{5}}$
۶۴	$27^{-\frac{2}{3}}$

۴) پاسخ هر یک از پرسش‌های زیر را به دو صورتِ عدد توان‌دار و عبارتِ رادیکالی نمایش دهید و در صورت امکان، ساده کنید.

الف) قطر یک مربع به طول ضلع ۵ چقدر است؟

....

ب) وزن ۱ گرم از نوعی باکتری در هر ساعت ۸ برابر می‌شود. وزن باکتری پس از ۲۰ دقیقه چقدر می‌شود؟

....

پ) طول ضلع مکعبی با حجم ۱۰۰۰ متر مکعب چقدر است؟

....

ت) طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۶ و ۹ سانتی‌متر چقدر است؟

....

۵) ابتدا نمایش رادیکالی عبارت‌های زیر را بنویسید و سپس در صورت امکان آنها را ساده کنید.

الف) ریشه‌های دوم عدد ۱۲۱

ب) ریشهٔ پنجم عدد ۳۲

پ) ریشهٔ پنجم عدد ۳۲-

ت) ریشه‌های ششم عدد $\frac{۱}{۶۴}$

ث) توانِ $\frac{۱}{۳}$ عدد ۲۷

ج) توانِ $\frac{۱}{۵}$ عدد ۳۲

۶) حاصل هر کدام از عبارت‌های زیر را ابتدا به صورت یک عدد توان‌دار و سپس، به صورت عبارت رادیکالی بنویسید و در صورت امکان ساده کنید.

الف) $۴^{\frac{۱}{۴}} \times ۴^{\frac{۱}{۳}}$

ب) $۶۴^{-\frac{۱}{۲}} \times ۶۴^{-\frac{۱}{۳}}$

پ) $\left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۴}} \times \left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۱۲}}$

ت) $۵^{\frac{۱}{۳}} \times ۲۵^{\frac{۱}{۳}}$

ث) $\left(۳^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲}$

ج) $\left(۲۷^{-۲}\right)^{\frac{۱}{۶}}$

۷) عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\sqrt[۴]{(۱-\sqrt{۳})^{۴}}$

ب) $\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^{۳}}$

۸) با کامل کردن جدول زیر، نقاط آن را روی محورهای مختصات مشخص کنید و نقاط را به هم وصل کنید.

(برای محاسبهٔ توان های گویا می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

x	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	۱
۲^{x}	...	...	...	...	...	...	...