

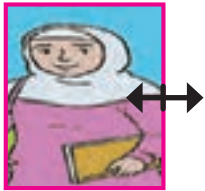
پودمان پنجم

نسبت‌های مثلثاتی



زاویه‌یاب دریایی، ابزاری است که از آن برای اندازه‌گیری زاویه بین خورشید یا ستارگان دیگر با افق، استفاده می‌شود. از طریق این اندازه‌گیری و به کمک مثلثات، مکان کشتی را تعیین می‌کنند. در صورتی که به طور افقی مورد استفاده قرار گیرد، برای اندازه‌گیری زاویه بین دو شیء در ساحل (یا دریا) نیز به کار می‌رود.

یکی از دوستان علاقه زیادی به عکس‌های خودش دارد. دلش می‌خواهد هر جا که بتواند عکس‌های خودش را ببیند! چند روز پیش که خانه‌شان رفته بودم، دیدم کمی در فکر است. از او پرسیدم به چه فکر می‌کند. عکسی از خودش در تعطیلات گذشته را نشان داد و گفت: چون از آن عکس خوشش آمده است، سعی کرده به کمک رایانه آن را به اندازه‌ای بزرگ کند که روی جلد کتابچه‌ای که سفرنامه‌هایش را در آن می‌نویسد، بچسباند. این بار به نظرم آمد که ابتکار خوبی بود. پرسیدم مشکل چیست؟ نتیجه کارش را نشان داد. با توجه به مکان فلش، خودتان حدس بزنید مشکل چه بود!



خودتان حدس بزنید مشکل چه بود!

گفتم: می‌توانم کمکت کنم. یک فعالیت می‌گویم. بعد از انجام آن متوجه می‌شوی مشکلت چیست؟

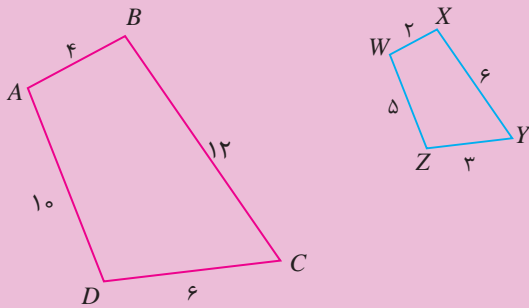
گفت: تو هم دبیر ریاضی شدی!؟

دیدم راست می‌گوید. چقدر از دبیر ریاضی‌ام تأثیر گرفته‌ام. ولی او چون خیلی مشتاق بود عکسش را بزرگ کند، قبول کرد تا فعالیتی را که به او می‌گویم انجام دهد.





دو شکل متشابه رو به‌رو را در نظر بگیرید.



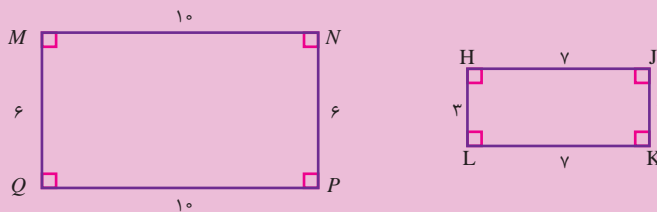
(۱) نسبت اضلاع متناظر را بنویسید.

(۲) هر یک از اضلاع $ABCD$ چند برابر اضلاع متناظرش در $WXYZ$ است؟

(۳) هر یک از اضلاع $WXYZ$ با اضلاع متناظرش در $ABCD$ چه رابطه‌ای دارد؟

(۴) نسبت اضلاع $ABCD$ به $WXYZ$ را با نسبت اضلاع $WXYZ$ به $ABCD$ مقایسه کنید.

(۵) در شکل‌های زیر، نسبت اضلاع متناظر را بنویسید. آیا دو شکل متشابه‌اند؟



فعالیت بالا نشان می‌دهد وقتی دو شکل متشابه هستند، نسبت بزرگ شدن یا کوچک شدن اضلاع یکی

به اضلاع متناظر دیگری مقداری ثابت است. به طور مثال در فعالیت ۱ داریم:

$$\frac{AB}{WX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CD}{YZ} = \frac{AD}{WZ} = k$$

یا

$$\frac{WX}{AB} = \frac{XY}{BC} = \frac{YZ}{CD} = \frac{WZ}{AD} = k'$$

در این صورت می‌گوییم: چهارضلعی $ABCD$ نسبت به چهارضلعی $WXYZ$ با ضریب k بزرگ شده است و آن را **بزرگ‌نمایی با ضریب $k > 1$** می‌نامیم، یا چهارضلعی $WXYZ$ نسبت به چهارضلعی $ABCD$ با ضریب k کوچک شده است و آن را **بزرگ‌نمایی با ضریب $1 < k < \infty$** می‌نامیم. در حالت $k=1$ ، دو شکل هم‌نهشت هستند.

کاردکلاس ۱



۱) نسبت اضلاع متناظر را برای دو شکل زیر بنویسید. آیا دو شکل متشابه‌اند؟ توضیح دهید چرا؟

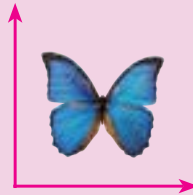


.....

.....



(۲) تصویر زیر را در نظر بگیرید.



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴

الف) اگر عرض هر نقطه روی شکل (۱) را ثابت نگه داشته و طول نقاط آن را ۳ برابر کنیم، کدام شکل به دست می‌آید؟ چرا؟

.....

ب) کدام شکل را می‌توان با ۳ برابر کردن عرض نقاط و ثابت نگه داشتن طول نقاط شکل (۱) به دست آورد؟

.....

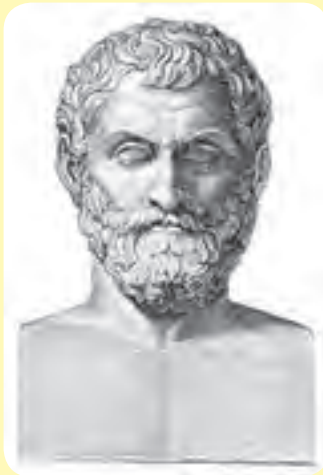
پ) در کدام شکل، طول و عرض تمام نقاط ۳ برابر طول و عرض تمام نقاط متناظر در شکل (۱) است؟

.....



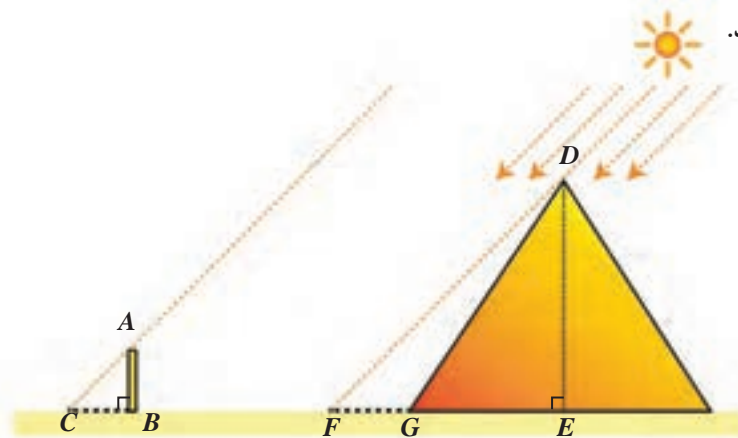
در ادامه، داستان زیر از **تالس** را برایش تعریف کردم. می‌گویند زمانی که **تالس** در مصر اقامت داشت، توانست به کمک تشابه مثلث‌ها، ارتفاع اهرام مصر را اندازه‌گیری کند. او چوبی با طول مشخص را نزدیک اهرام، به طور عمودی در زمین فرو کرد و سپس به هنگام تابش خورشید، هم‌زمان طول سایهٔ چوب و سایهٔ اهرام را اندازه‌گیری کرد.

تالس ملطی در حدود سال ۶۲۴ پیش از میلاد در شهر میلیتوس در «ایونیا» غرب ترکیه



امروزی به دنیا آمد. تالس بیشتر وقت خود را صرف مطالعهٔ ریاضیات و ستاره‌شناسی کرد. عقیده بر آن است که تالس پس از مسافرت به مصر، هندسه را برای یونانیان به ارمغان برد. در ریاضیات، قضیهٔ تالس را به وی نسبت می‌دهند. مورخی به نام پروکلوس گزارش می‌دهد که تالس توانست با کشف این قضیه، فاصلهٔ کشتی‌ها را تا ساحل تعیین کند. تالس در واقع ارتفاع اهرام مصر را از طریق اندازه‌گیری سایهٔ آنها اندازه‌گیری کرد.

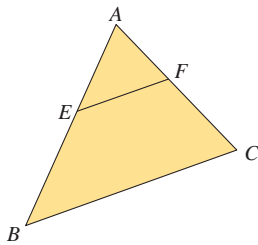
طبق نظر تالس، مثلث‌های DEF و ABC متشابه‌اند، او با داشتن طول چوب (AB) و طول سایهٔ چوب (CB) و طول سایهٔ هرم $(EF - EG)$ ، با مشخص کردن اضلاع متناظر و نوشتن نسبت طول اضلاع متناظر، ارتفاع هرم را به دست آورد.



دوستم پرسید: تالس از کجا می‌دانست آن دو مثلث متشابه‌اند؟ از روی شکل، ما فقط تساوی زاویه‌های متناظر را می‌توانیم ثابت کنیم (چگونه؟). آیا شرط تساوی زاویه‌ها برای تشابه دو مثلث کافی است؟
گفتم: در حالت کلی با داشتن تساوی زاویه‌ها، نمی‌توان تشابه دو شکل را نتیجه گرفت (به سؤال ۵ در فعالیت ۱ توجه کنید)، ولی این شرط برای تشابه دو مثلث کافی است و این از نتایج رابطه‌ای است که تالس بیان کرده است.

مثال ۱

در یک مثلث دلخواه ABC از نقطه E روی ضلع AB ، خطی به موازات ضلع BC رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطه F قطع کند. دو مثلث AEF و ABC زاویه‌های مساوی دارند؛ چرا؟ پس، با هم متشابه‌اند و داریم:



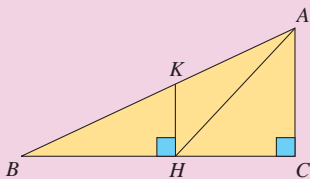
$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC که در رأس C قائمه است، KH بر BC عمود است.
الف) کدام مثلث‌ها متشابه‌اند؟ چرا؟

کاردرکلاس ۲



ب) نسبت‌های اضلاع متناظر را بنویسید.



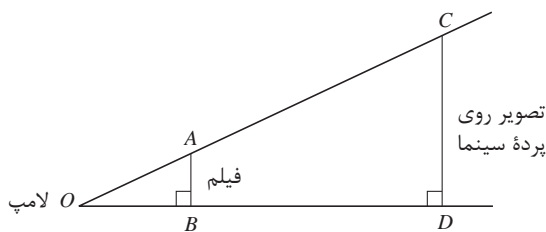
۵-۲- تانژانت یک زاویه

در یکی از هنرستان‌ها، هنرجویان را به همراه دبیر ریاضی به دیدن فیلمی برده بودند. منوچهر که مشغول دیدن فیلم بود، گاهی برمی‌گشت و به پشت سرش نگاه می‌کرد. پس از بازگشت به مدرسه، دبیر از منوچهر پرسید:

چرا به پشت سرت نگاه می‌کردی؟ آیا سؤالی برایت پیش آمده بود؟

منوچهر گفت: بله، می‌خواستم بدانم تصویر به آن بزرگی چگونه روی پرده سینما تشکیل می‌شود. آیا بزرگی یا کوچکی تصویر با فاصله پرده از چشمه نور ارتباط دارد؟

دبیر گفت: برای درک این مطلب، بهتر است شکلی رسم کنیم. شکل زیر می‌تواند اندازه تصویر روی پرده سینما و اندازه فیلم را به شما نشان دهد.



خواندنی



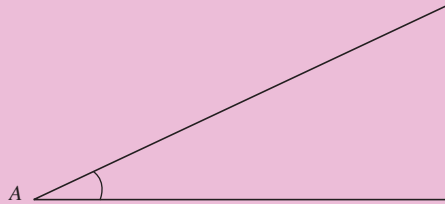
اولین کسانی که از مثلثات استفاده می‌کردند یونانیان بودند. در یونان قدیم از مثلثات برای تعیین طول مدت روز یا طول سال (با مشخص کردن موقعیت ستارگان در آسمان) استفاده می‌شد. بعدها ریاضی‌دانان و منجمان هندی نیز پیشرفت‌هایی در مثلثات به دست آوردند ولی پیشرفت این علم مدیون دانشمندان مسلمان است. مسلمانان بیشترین نقش را در پیشرفت این علم ایفا کردند و سپس این اندوخته‌ها را در قرون وسطی به اروپاییان منتقل کردند. اروپاییان نیز از دانش فراوان مسلمانان در مثلثات استفاده کردند و این علم را توسعه داده و به شکل امروزی درآوردند.

فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا بتوانید رابطه بین اندازه تصویر روی پرده سینما و اندازه فیلم و فاصله با چشمه نور را به دست آورید.

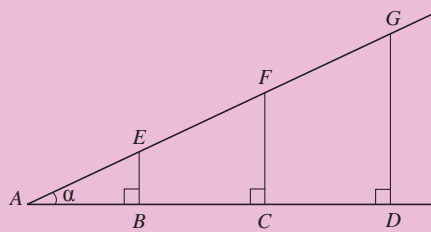
فعالیت ۲



در شکل روبه‌رو، یک زاویه تند به رأس A رسم شده است.



(۱) روی یک ضلع این زاویه چند نقطه دلخواه مانند B و C و D در نظر بگیرید. از این نقاط، عمودهایی بر این ضلع رسم کنید تا ضلع دیگر زاویه را قطع کنند. نقاط تقاطع را به ترتیب E ، F و G بنامید.



(۲) با اندازه‌گیری به کمک خط‌کش، درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

$$\frac{EB}{AB} = \frac{FC}{AC} = \frac{GD}{AD}$$

(۳) تشابه مثلث‌هایی را که در شکل دیده می‌شوند، بررسی کنید و به کمک آن درستی تساوی‌های بالا را نشان دهید.

فعالیت بالا نشان می‌دهد که در مسئله اندازه تصویر در سینما، نسبت اندازه فیلم به فاصله فیلم تا چشمه نور، با نسبت اندازه تصویر روی پرده به فاصله پرده تا چشمه نور مساوی است. پس، هرچه پرده از منبع نور دورتر شود، باید اندازه تصویر بزرگ‌تر شود تا نسبت آنها تغییر نکند و هر چه پرده به منبع نور نزدیک‌تر شود، اندازه تصویر هم کوچک‌تر می‌شود تا نسبت آنها تغییر نکند.

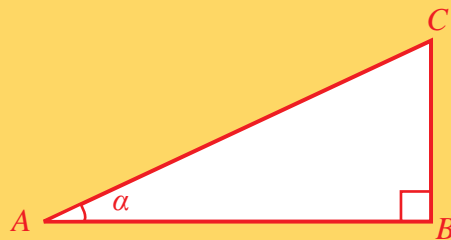
تعریف



با داشتن زاویه رأس A ، مقدار نسبت $\frac{EB}{AB}$ در شکل فعالیت ۲ به انتخاب نقطه B بستگی ندارد و مقدار ثابتی است، این مقدار را **تانژانت** این زاویه می‌نامند.

در مثلث قائم‌الزاویه ABC یک زاویه تند را انتخاب کنید و آن را α بنامید (مثلاً زاویه به رأس A). بنا به تعریف، نسبت $\frac{BC}{AB}$ را تانژانت زاویه α می‌نامند و با $\tan \alpha$ نشان می‌دهند. این نسبت فقط به α بستگی دارد و آن را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\text{تانژانتِ آلفا} = \tan \alpha = \frac{\text{طول ضلع روبه‌رو به } \alpha}{\text{طول ضلع مجاور به } \alpha} = \frac{BC}{AB}$$

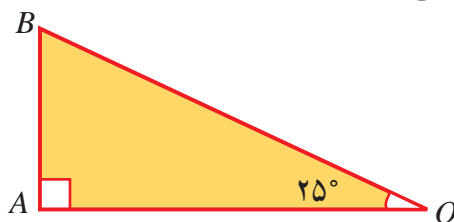


مثال ۲

با رسم مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زاویه‌های آن 25° درجه باشد، تانژانت زاویه 25° درجه را بیابید.

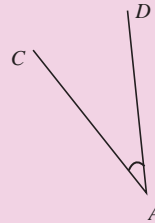
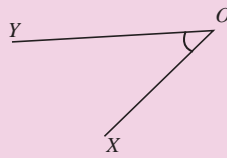
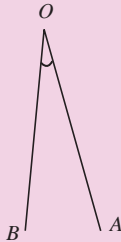
ابتدا به کمک نقاله، یک زاویه 25° درجه رسم می‌کنیم و مطابق شکل، مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که ضلع مجاور زاویه 25° درجه (OA) مقدار مشخصی، مثلاً 10 سانتی‌متر، باشد. طبق شکل، با اندازه‌گیری

طول ضلع AB تقریباً $4/6$ سانتی‌متر است. بنابراین، $\tan 25^\circ$ تقریباً برابر است با $\frac{4/6}{10} = 0/46$.

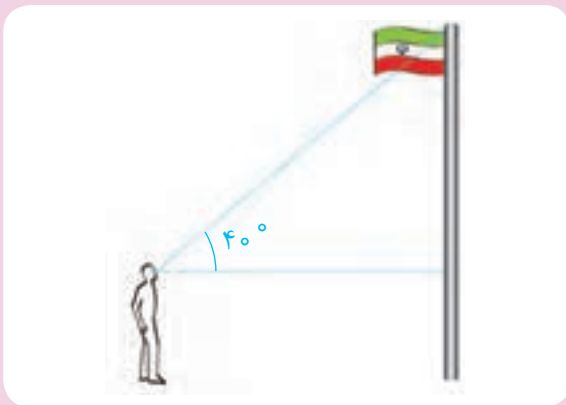




۱) مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های زیر را با اندازه‌گیری به وسیله خط‌کش محاسبه کنید.



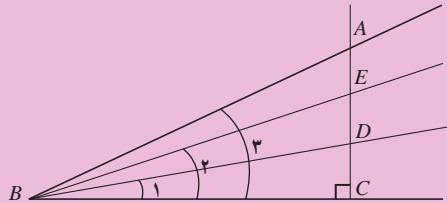
۲) علی با یادگیری مفهوم تانژانت فهمید که می‌تواند طول ارتفاع تیرک پرچم مدرسه‌اش را اندازه‌گیری کند. او زاویه دید خود به نوک تیرک را با سطح افق، تقریباً 40° درجه تخمین زد. قد علی ۱۶۵ سانتی‌متر و فاصله او تا تیرک پرچم ۱۱ متر است. با این اطلاعات، او چگونه می‌تواند طول ارتفاع تیرک را به‌طور تقریبی بیابد؟



سؤال‌هایی که درباره مفهوم تانژانت پیش می‌آید، این است که تانژانت یک زاویه تند چه اعدادی می‌تواند باشد و تغییر اندازه یک زاویه، چه تأثیری در اندازه تانژانت آن زاویه دارد. فعالیت زیر می‌تواند در پیدا کردن جواب این سؤال‌ها به شما کمک کند.



در شکل زیر AC بر BC عمود است.



(۱) هر یک از نسبت‌های $\frac{DC}{BC}$ ، $\frac{EC}{BC}$ و $\frac{AC}{BC}$ چه چیزی را نشان می‌دهند؟

.....

(۲) با بزرگ شدن زاویه‌ای که در رأس B تشکیل می‌شود، این نسبت‌ها چگونه تغییر می‌کنند؟ چرا؟

.....

(۳) با تغییر یک زاویه، تانژانت آن چگونه تغییر می‌کند؟

.....

(۴) آیا می‌توان زاویه‌ای یافت که تانژانت آن برابر ۹ باشد؟ (راهنمایی: در چه صورت نسبت‌های بالا برابر با ۹ است؟) جواب این سؤال برای عددهای مثبت دیگر چیست؟

.....

(۵) زاویه‌ای رسم کنید که تانژانت آن ۹ باشد.

فعالیت بالا نشان می‌دهد که با بزرگ شدن یک زاویه تند، تانژانت آن نیز بزرگ می‌شود و هر عدد مثبتی، می‌تواند تانژانت زاویه‌ای باشد.

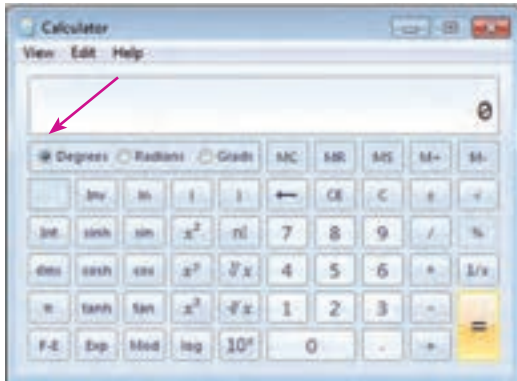
مثال ۳



تانژانت چه زاویه‌ای برابر ۵ است؟

مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که طول اضلاع زاویه قائمه آن ۱ و ۵ واحد باشد. با نقله، زاویه مجاور به ضلع به طول ۱ را اندازه می‌گیریم که تقریباً ۷۸ درجه می‌شود. تانژانت ۷۸ درجه تقریباً ۵ است. برای حل این مسئله می‌توان از هر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که در آن نسبت اضلاع زاویه قائمه ۵ باشد استفاده کرد.

استفاده از ماشین حساب



تانژانت زاویه ۳۰ درجه را با ماشین حساب به دست آورید. توجه داشته باشید که ماشین حساب باید در حالت Degrees (به معنای درجه) باشد.

کاردکلاس ۴



۱) اگر زاویه تندی به صفر نزدیک شود، تانژانت آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ درستی ادعای خود را با رسم شکل نشان دهید.

۲) اگر زاویه تندی به ۹۰ درجه نزدیک شود، در مورد تغییرات اندازه تانژانت آن چه می‌توان گفت؟ (راهنمایی: به کمک ماشین حساب، برای مقادیر تانژانت زاویه‌های نزدیک به ۹۰ درجه جدولی بسازید.)



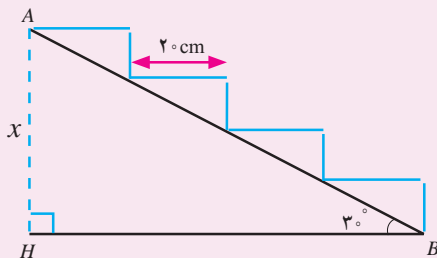
۱) ابتدا به کمک رسم شکل و سپس با ماشین حساب مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های 40° و 50° درجه را پیدا کنید.

.....

۲) تانژانت چه زاویه‌ای برابر ۸ خواهد شد؟

.....

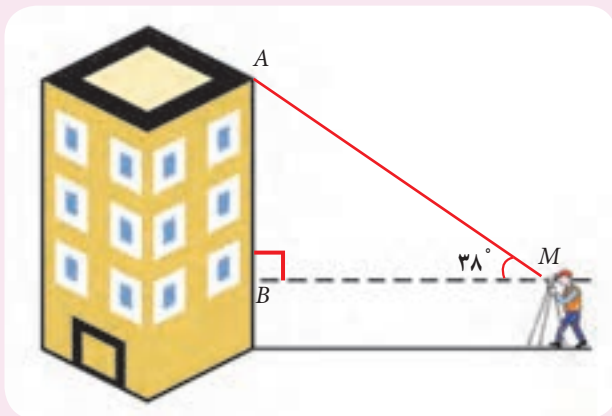
۳) با توجه به شکل روبه‌رو، ارتفاع نقطه A از زمین را بیابید (عرض همه پله‌ها 20 cm است).



.....

.....

۴) برای محاسبه ارتفاع ساختمانی، دوربین زاویه‌یاب را در یک سطح افقی در نقطه M به فاصله 15 متری از ساختمان (نقطه B) مستقر کرده‌ایم و به نقطه بالای ساختمان نشانه می‌رویم. زاویه دید برابر 38° درجه به دست آمده است. اگر ارتفاع دوربین از زمین یک متر و 54 سانتی‌متر باشد، ارتفاع ساختمان را به دست آورید.



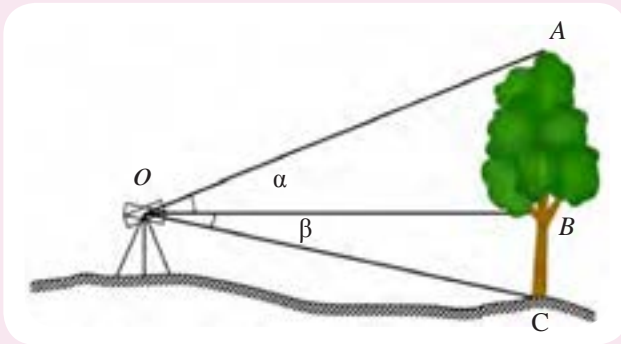
.....

.....

.....

.....

۵) به کمک دوربین زاویه‌یاب، زاویه‌های α و β به ترتیب 23° درجه و 10° درجه به دست آمده‌اند و فاصله افقی دوربین تا درخت 18 متر است. با توجه به شکل، ارتفاع درخت را پیدا کنید.



.....

.....

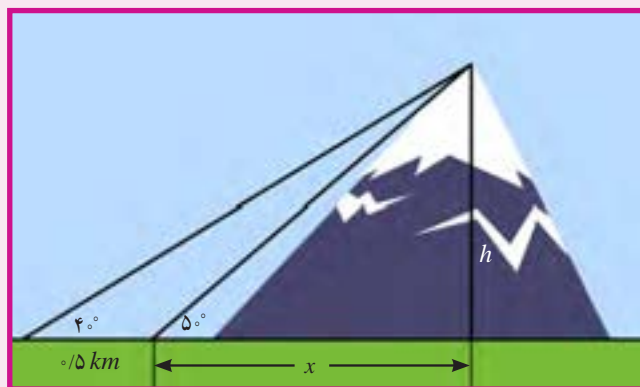
.....

.....

۶) یک مهندس نقشه‌بردار، برای محاسبه ارتفاع یک کوه در نقطه‌ای می‌ایستد و مشاهده می‌کند که در آن نقطه، نوک کوه با زاویه 5° درجه نسبت به افق دیده می‌شود. پس از آنکه نیم‌کیلومتر از کوه دور می‌شود، مشاهده می‌کند که نوک کوه با زاویه 4° درجه دیده می‌شود. ارتفاع کوه چقدر است؟

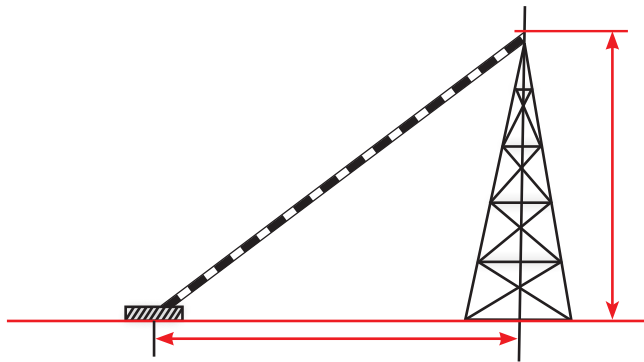
.....

.....



۵-۳- سینوس یک زاویه

فرزانه در راه مدرسه، کارگرانی را دید که در حال نصب یک دکل مخابراتی بودند. او مشاهده کرد که کارگران برای نگهداری دکل‌ها از سیم نگهدارنده‌ای که به زمین متصل شده است، استفاده می‌کنند. با این مشاهدات، او در کلاس ریاضی از دبیر پرسید که مهندسان چگونه می‌فهمند که برای نگهداری دکل چقدر سیم لازم است؟



دبیر گفت: فعالیت صفحهٔ روبه‌رو به شما در حل این مسئله کمک می‌کند.



ابوالوفا محمد بن یحیی بن اسماعیل بن عباس بوزجانی خراسانی، یکی از مفاخر علمی ایران و متولد ۳۲۸ هجری قمری که در سوم رجب سال ۳۸۸ هجری قمری درگذشته است. وی اهل بوژگان کهنویسی بوده که در هجده کیلومتری شرق شهر تربت جام قرار دارد.

فعالیت‌های علمی بوزجانی دامنهٔ وسیعی از علوم مختلف، مانند هندسه، مثلثات، حساب و نجوم را در بر می‌گرفته است و او در تمام این علوم به دستاوردهای بدیع و تازه‌ای رسیده است.

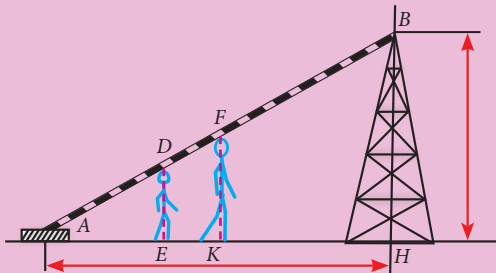
خواندنی





فرض کنید دکلی به ارتفاع ۶۰ متر با سیمی که با سطح افق زاویه 30° درجه ساخته است، مهار می‌شود. کارگری زیر این سیم در نقطه‌ای مانند E چنان می‌ایستد که سیم در نقطه‌ای مانند D با

سرش تماس پیدا کند. کارگر دیگری به وسیله یک متر فلزی، فاصله A تا D را اندازه‌گیری می‌کند و نسبت $\frac{DE}{AD}$ را حساب می‌کند.

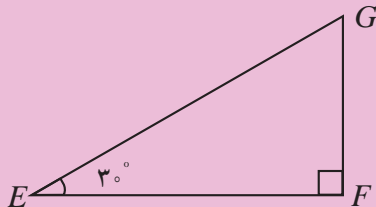


(۱) کارگرانی با طول قد‌های متفاوت، این کار را تکرار

می‌کنند و هر کدام، مقداری را برای نسبت طول قد به فاصله سر تا نقطه A به دست می‌آورند. نشان دهید همه آنها یک مقدار را به دست می‌آورند.

(۲) اگر نسبت $\frac{BH}{AB}$ را حساب کنیم، مقدار آن با نسبتی که کارگران به دست آورده‌اند چه رابطه‌ای دارد؟ چرا؟

(۳) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه، مانند شکل زیر، که یک زاویه آن 30° درجه است، نشان دهید نسبتی که کارگران به دست آورده‌اند، برابر است با $\frac{FG}{EG}$. این نسبت را با اندازه‌گیری با خط‌کش به دست آورید. (راهنمایی: تشابه دو مثلث AHB و EFG را نشان دهید.)

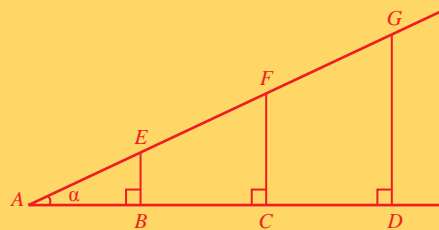


(۴) با استفاده از این نسبت، طول سیم نگهدارنده دکل را حساب کنید.



برای هر زاویه تند α مانند شکل زیر، همه نسبت‌های $\frac{GD}{AG}$ ، $\frac{FC}{AF}$ و $\frac{EB}{AE}$ طبق تشابه مثلث‌ها، با هم مساوی‌اند. مقدار این نسبت‌های برابر را سینوس زاویه α می‌نامند و آن را با $\sin \alpha$ نشان می‌دهند.

$$\sin \alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{CF}{AF} = \frac{DG}{AG} = \frac{\text{طول ضلع روبه‌روی } \alpha}{\text{طول وتر}}$$

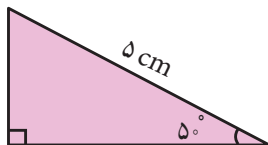


مثال ۴

سینوس زاویه 5° درجه را به دست آورید.

به کمک نقاله، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یک زاویه آن 5° درجه و طول وتر آن ۵ سانتی‌متر باشد. با خط‌کش، طول ضلع روبه‌رو به این زاویه را اندازه می‌گیریم که تقریباً $\frac{3}{8}$ سانتی‌متر است. پس،

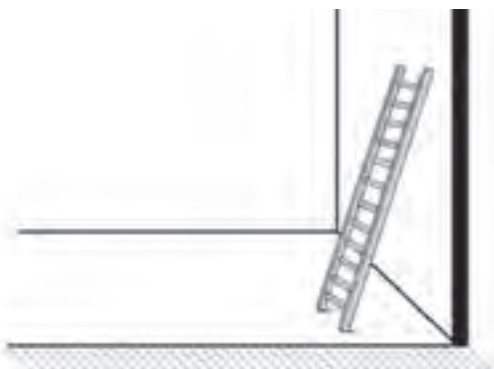
$$\sin 5^\circ \text{ تقریباً برابر است با } \frac{3}{8} = 0.375$$



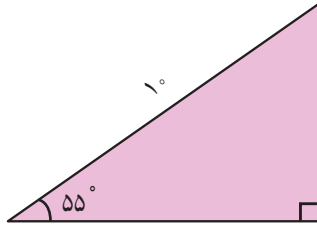
مثال ۵

نردبانی به طول ۶ متر را به دیواری تکیه داده‌ایم. اگر زاویه نردبان با سطح افق 55° درجه باشد، فاصله انتهای نردبان تا سطح زمین را پیدا کنید.

مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یک زاویه آن 55° درجه و وتر آن ۱۰ سانتی‌متر باشد. با اندازه‌گیری



اضلاع این مثلث به کمک خط کش، سینوس زاویه ۵۵ درجه را پیدا می‌کنیم: $\sin 55^\circ \approx 0/82$. بنابراین، فاصله انتهای نردبان تا سطح زمین از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$\sin 55^\circ = \frac{\text{فاصله انتهای نردبان تا سطح زمین}}{6} \Rightarrow \text{فاصله انتهای نردبان تا سطح زمین} = 6 \times 0/82 = 4/92 \text{ m}$$

به کمک نقاله و با رسم چند مثلث قائم الزاویه، مقدار تقریبی سینوس زاویه‌های ۲۰ و ۳۵ و ۴۰ درجه را بیابید.

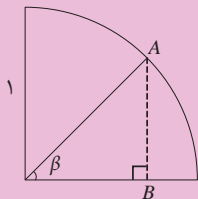
کاردرکلاس ۵



درباره مفهوم سینوس نیز، این سؤال پیش می‌آید که تغییر اندازه یک زاویه چه تأثیری در اندازه سینوس آن زاویه دارد؟ فعالیت زیر می‌تواند در پیدا کردن جواب این سؤال به شما کمک کند.

یک ربع دایره به شعاع ۱ واحد، مانند شکل زیر رسم کنید.

(۱) نقطه A را روی ربع دایره انتخاب کنید و از آن عمود AB را مطابق شکل رسم کنید. طول پاره خط



AB چه رابطه‌ای با زاویه تند β دارد؟.....

(۲) با کم یا زیاد شدن زاویه β ، سینوس آن چگونه تغییر می‌کند؟.....

(۳) با نزدیک شدن اندازه زاویه β به صفر، سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟.....

(۴) با نزدیک شدن زاویه β به ۹۰ درجه، سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟.....

(۵) سینوس β چه عددهایی می‌تواند باشد؟.....

فعالیت ۵



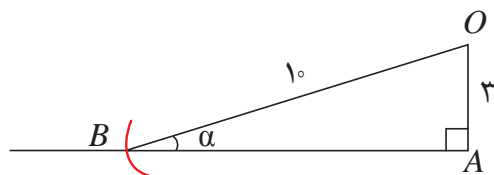
فعالیت ۵ نشان می‌دهد که سینوس زاویه‌های تند، عددهایی بین صفر و ۱ هستند. با بزرگ شدن زاویه، سینوس آن نیز بزرگ می‌شود.

اگر عددی مانند a را به صورت $0 < a < 1$ در نظر بگیریم، آیا زاویه‌ای وجود دارد که سینوس آن برابر a شود؟ مثال زیر می‌تواند پاسخی برای این سؤال فراهم کند.

مثال ۶

زاویه‌ای بسازید که سینوس آن برابر $3/5$ باشد.

یک زاویه راست با رأس A مانند زیر رسم می‌کنیم. روی یک ضلع آن پاره‌خط OA به طول ۳ واحد جدا می‌کنیم. به مرکز نقطه O کمانی از دایره‌ای به شعاع 5 واحد را رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر را در نقطه‌ای که B می‌نامیم، قطع کند. زاویه ABO در رأس B زاویه مورد نظر است و با نقاله آن را اندازه می‌گیریم که تقریباً 37 درجه است.





۱- الف) سینوس زاویه ۲۵ درجه را با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب به طور تقریبی محاسبه کنید.

.....

ب) یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید که زاویه رأس آن 50° درجه باشد. اگر قاعده این مثلث ۱۰ سانتی‌متر باشد، طول ساق آن را تعیین کنید.

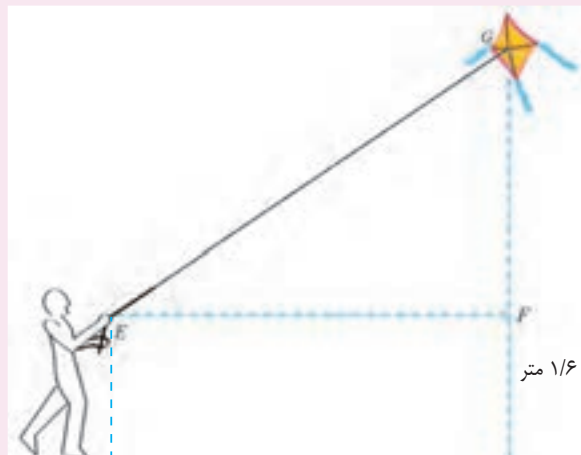
.....

۲) سینوس چه زاویه‌ای برابر $0/8$ است؟

.....

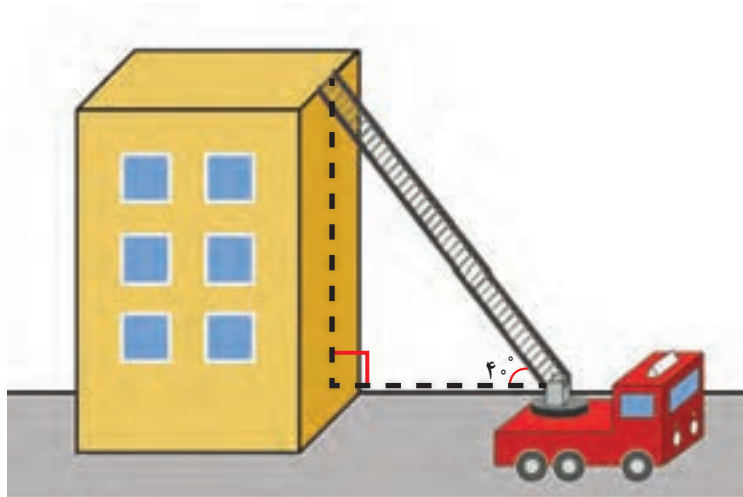
۳) رضا بادبادکی را به هوا فرستاده است. فرض کنید ۴۵ متر نخ بادبادک او رها شده است. طبق شکل، زاویه نخ با سطح افق 39° درجه و فاصله دست رضا از سطح زمین، یک متر و شصت سانتی‌متر است. ارتفاع بادبادک از سطح زمین چقدر است؟

.....



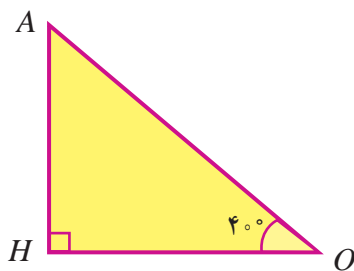
۵-۴- کسینوس یک زاویه

یک روز، دبیر ریاضی در کلاس داستانی دربارهٔ پله‌های نردبان ماشین آتش‌نشانی تعریف کرد. او گفت: دیروز برای خرید از منزل خارج شده بودم که متوجه شدم طبقهٔ اول یک ساختمان سه طبقه، آتش گرفته است. آتش در حال سرایت به طبقات بالاتر بود و همهٔ ساکنان ساختمان در نقطه‌ای در پشت بام جمع شده بودند. پای نردبان ماشین آتش‌نشانی در فاصله حدوداً ۱۵ متری ساختمان قرار داشت. ماشین آتش‌نشانی نردبان خود را با زاویهٔ تقریبی 40° درجه نسبت به افق باز کرد تا به پشت بام رسید. آیا می‌توانید بگویید که نردبان ماشین آتش‌نشانی برای رسیدن به پشت بام چند متر باز شده بود؟



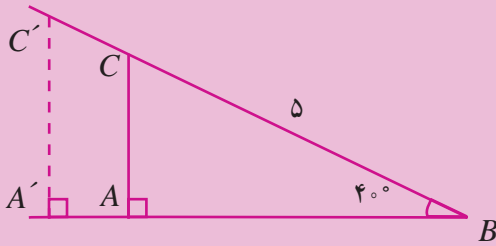
علی گفت: بهتر است یک شکل بکشیم و از روی آن، مسئله را حل کنیم. باید از مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویهٔ آن 40° درجه است، استفاده کنیم. اگر محل تجمع ساکنان ساختمان روی پشت بام نقطه A و پای نردبان، نقطه O و نقطه‌ای در روی ساختمان باشد به طوری که OH سطح افق را نشان دهد، مثلث زیر را می‌توان رسم کرد.

طول OH و اندازهٔ زاویهٔ رأس O را می‌دانیم ولی طول AO را نمی‌دانیم. دبیر گفت: برای ادامهٔ حل این مسئله می‌توانید از فعالیت ۷ کمک بگیرید.





(۱) یک زاویه 40° درجه رسم کنید و مطابق شکل مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازید که وتر آن ۵ سانتی‌متر باشد.



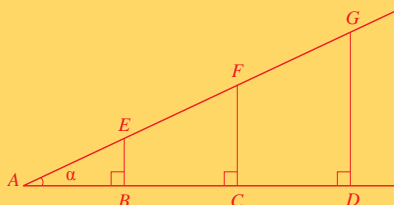
(۲) با اندازه‌گیری اضلاع به کمک خط‌کش، نسبت $\frac{AB}{BC}$ را بیابید.

(۳) مثلث قائم‌الزاویه دیگری مانند $A'BC'$ با همین زاویه و طول وتر متفاوت رسم کنید و نسبت $\frac{A'B}{BC'}$ را محاسبه کنید. نشان دهید $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B}{BC'}$. آیا مقادیر نسبت‌هایی که با اندازه‌گیری به دست آورده‌اید باهم برابرند؟ اگر خیر، چرا؟

(۴) به کمک نسبتی که در بالا به دست آورده‌اید، طول نردبان آتش‌نشانی را حساب کنید.

فعالیت بالا نشان می‌دهد که همه نسبت‌های به دست آمده، با هم مساوی‌اند و مقدار آنها وابسته به زاویه 40° درجه است. این نسبت را **کسینوس زاویه 40°** درجه می‌نامند. برای هر زاویه تند دیگری نیز می‌توان این محاسبات را انجام داد.

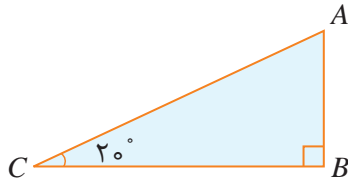
برای هر زاویه تند α مانند شکل زیر، نسبت‌های $\frac{AD}{AG}$ و $\frac{AC}{AF}$ و $\frac{AB}{AE}$ طبق تشابه مثلث‌ها، با هم مساوی‌اند. مقدار این نسبت‌های برابر را **کسینوس زاویه α** می‌نامند و آن را با $\cos \alpha$ نشان می‌دهند.



$$\cos \alpha = \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AG} = \frac{\text{طول ضلع مجاور } \alpha}{\text{طول وتر}}$$



مثال ۷



مقدار تقریبی کسینوس 20° درجه را محاسبه کنید.

ابتدا یک مثلث قائم‌الزاویه دلخواه را که یک زاویه 20° درجه داشته باشد، رسم می‌کنیم. در شکل روبه‌رو، زاویه رأس C ،

20° درجه است. سپس به وسیله خط‌کش طول ضلع BC و وتر AC را اندازه‌گیری می‌کنیم و نسبت

$$\frac{BC}{AC} \text{ را حساب می‌کنیم. نتیجه تقریبی این محاسبه نشان می‌دهد که } \cos 20^\circ \approx 0.93.$$

کارد کلاس ۶



(۱) یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین رسم کنید.

(الف) نشان دهید زاویه‌های تند این مثلث 45° درجه‌اند.

(ب) اگر طول ساق‌ها را به اندازه یک واحد در نظر بگیریم، طول وتر این مثلث چقدر است؟

(پ) با استفاده از محاسبات بالا، سینوس و کسینوس و تانژانت زاویه 45° درجه را به دست آورید.

(۲) مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱ واحد را در نظر بگیرید و یکی از ارتفاع‌های آن را رسم کنید.

(الف) طول ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویه رسم شده را حساب کنید.

(ب) با استفاده از محاسبات انجام شده، سینوس، کسینوس و تانژانت زاویه‌های 30° و 60° درجه را به دست آورید.

(۳) به کمک دو سؤال بالا، جدول روبه‌رو را کامل کنید.

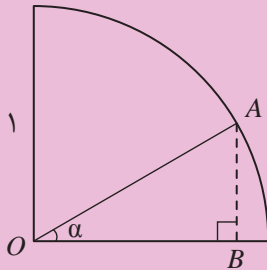
نسبت مثلثاتی \ زاویه	30° درجه	45° درجه	60° درجه
سینوس			
کسینوس			
تانژانت			

در باره مفهوم کسینوس نیز این سؤال پیش می‌آید که تغییر اندازه یک زاویه چه تأثیری در اندازه کسینوس آن زاویه دارد. فعالیت زیر می‌تواند در پیدا کردن جواب این سؤال به شما کمک کند.

فعالیت ۷



یک ربع دایره به شعاع واحد، مانند شکل زیر، رسم کنید.



نقطه A را روی ربع دایره انتخاب کنید. طول پاره خط OB چه رابطه‌ای با زاویه α دارد؟

(۱) با کم یا زیاد شدن زاویه تند α ، کسینوس آن چه تغییری می‌کند؟

(۳) کسینوس زاویه α چه اعدادی می‌تواند باشد؟

(۴) با نزدیک شدن اندازه زاویه α به صفر، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

(۵) با نزدیک شدن زاویه α به 90° درجه، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

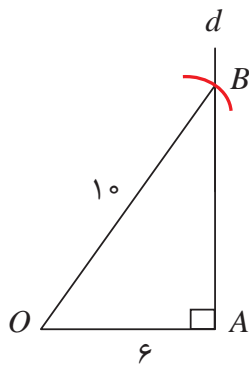
فعالیت بالا نشان می‌دهد که کسینوس زاویه‌های تند، اعدادی بین صفر و ۱ هستند. با بزرگ شدن زاویه، کسینوس آن زاویه کوچک‌تر می‌شود.

اگر عددی مانند b به صورت $0 < b < 1$ در نظر بگیریم، آیا زاویه‌ای وجود دارد که کسینوس آن برابر b شود؟ با حل مثال ۸ می‌توان به این سؤال پاسخ داد.

مثال ۸

زاویه‌ای بسازید که کسینوس آن برابر $1/6$ باشد.

مانند شکل زیر، پاره خطی (OA) به طول ۶ واحد رسم می‌کنیم. در نقطه A ، خط d را عمود بر این پاره‌خط رسم می‌کنیم. کمانی به مرکز O و شعاع 10° واحد رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ای که B می‌نامیم، قطع کند. زاویه به دست آمده در رأس O جواب مسئله است. اگر با نقاله آن را اندازه بگیریم تقریباً 53° درجه است.





(۱) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب، کسینوس زاویه‌های 15° و 75° درجه را حساب کنید.

(۲) روشی بیان کنید که با داشتن یک عدد b به صورت $0 < b < 1$ ، بتوان زاویه‌ای پیدا کرد که کسینوس آن برابر b باشد.

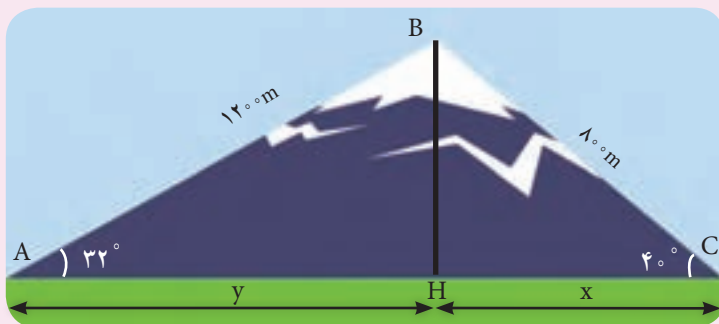
(۳) زمین بزرگی به شکل مثلث متساوی‌الساقین به قاعده 100 متر و با زاویه مجاور به قاعده 50° درجه است.

الف) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب، از طریق اندازه‌گیری با خط‌کش، کسینوس زاویه 50° درجه را به طور تقریبی محاسبه کنید.

ب) طول اضلاع زمین مثلث شکل را بیابید.

پ) مساحت زمین را بیابید.

(۴) حسن و علی در یک روز تعطیل می‌خواهند از دو نقطه متفاوت و هم‌سطح در دو مسیر مختلف از پای کوه تا قله آن بروند. علی با زاویه 32° درجه و حسن با زاویه 40° درجه از کوه بالا می‌روند. علی پس از طی 1200 متر و حسن پس از طی 800 متر به قله کوه می‌رسند. فاصله علی و حسن را در پای کوه محاسبه کنید.



۵) درستی یا نادرستی روابط زیر را بررسی کنید.

الف) $\cos 2^\circ < \cos 4^\circ$

ب) $\tan 2^\circ < \tan 3^\circ$

پ) $\sin 3^\circ < \sin 2^\circ$

۶) مقدار عددی عبارت‌های زیر را پیدا کنید.

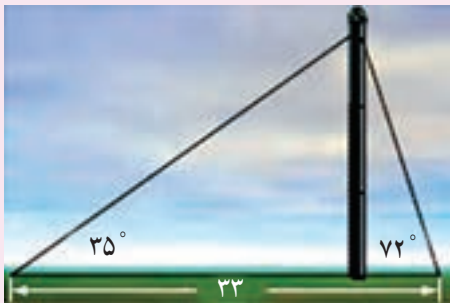
الف) $\frac{\sin 6^\circ + \tan 45^\circ - \cos 3^\circ}{1 + \sin 3^\circ}$

ب) $\frac{\tan 6^\circ + 2\cos 3^\circ - 2\sqrt{3}}{1 + \sin 6^\circ}$

پ) $\sin 3^\circ + \cos 3^\circ$

ت) $\frac{2\cos 3^\circ - 2\sin 3^\circ}{2\tan 45^\circ + 3\cos 6^\circ}$

ث) $1 - 2\sin 3^\circ$



۷) دو کابل فلزی یک برج مخابراتی را نگه داشته‌اند.

زاویه بین زمین و کابل‌ها به ترتیب ۳۵ و ۷۲ درجه و

فاصله بین محل اتصال دو کابل در زمین، ۳۳ متر است.

طول هر یک از این کابل‌ها چقدر است؟

۸) با انجام محاسبات عددی، درستی روابط زیر را بررسی کنید:

الف) $\cos 6^\circ = 2\cos 3^\circ$ ب) $\sin 6^\circ < 2\sin 3^\circ$

پ) $\cos 6^\circ < 2\sin 3^\circ \cos 3^\circ$ ت) $\tan 6^\circ + \tan 3^\circ = \frac{2}{\sin 6^\circ}$

۱. بهادران، امیربهادر، محاسبات فنی ۱، چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۹۲.
۲. یگانه عزیزی، رضا، هندسه (نقشه برداری)، چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۹۲.
۳. نوری فرد، علی اکبر، مشایخی، حمیدرضا، مختاری، مالک، خلیل ارجمندی، محمداسماعیل، شجاعی اردکانی، مجید، محاسبات فنی ساختمان، چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۹۴.
۴. داورپناه، مهدی، سیدحسینی، فرشاد، متینی، امیرحسین، کارگاه محاسبه و ترسیم، چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۹۱.
۵. مجتهدی، حسین. آزمون های ورزشی، چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۹۴.
۶. افتخار، رحیم، ریاضیات امور مالی، چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۹۴.
۷. بخشعلی زاده، شهرناز، بروگردیان، ناصر، دهقانی ابیانه، زین العابدین، دیده ور، فرزاد، طاهری تنجانی، محمدتقی، عالمیان، وحید، مسگرانی، حمید، ریاضیات ۱، چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۸۸.
۸. ایرانمنش، علی، جمالی، محسن، ربیعی، حمیدرضا، ریحانی، ابراهیم، شاهورانی، احمد، عالمیان، وحید، ریاضیات ۲، چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۸۹.

9. Hirsch, Christian R.; Fey, James T.; Hart, Eric W.; Schoen, Harold L.; Watkins, Ann E.; Ritsema, Beth E.; Walker, Rebecca K. and others. Core-plus mathematics –course 2 .1nd Edition.

10. Hirsch, Christian R.; Fey, James T.; Hart, Eric W.; Schoen, Harold L.; Watkins, Ann E.; Ritsema, Beth E.; Walker, Rebecca K. and others. Core-plus mathematics –course 2 .2nd Edition.

11. Hirsch, Christian R.; Fey, James T.; Hart, Eric W.; Schoen, Harold L.; Watkins, Ann E.; Ritsema, Beth E.; Walker, Rebecca K. and others. Core-plus mathematics –course 2 .3rd Edition.

12. Moore-Harris, Beatrice; Bailey, Rhonda; Ott, Jack M.; Pelfrey, Ronald; Howard, Arthur C.; Price, Jack; Vielhaber, Kathleen; McClain, Kay. Mathematics application and concepts – course 2. McGraw-Hill. 2006.

13. Moore-Harris, Beatrice; Bailey, Rhonda; Ott, Jack M.; Pelfrey, Ronald; Howard, Arthur C.; Price, Jack; Vielhaber, Kathleen; McClain, Kay. Mathematics application and concepts – course 3. McGraw-Hill. 2006.

14. Barber, Dianne B. MATH IN CONTEXT: A Tool Kit for Adult Basic Skills Educators. Appalachian State University. NC Community College System. 2007.



دبیران محترم، صاحب نظران، همسرجویان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظرهای اصلاحی خود را درباره مطالب این کتاب از

طریق نامه به شانی تهران - صندوق پستی ۴۸۷۴/۱۵۸۲۵ - گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار tvoccd@roshd.ir

ارسال نمایند. وب‌گاه: www.tvoccd.medu.ir

دفترتالیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کارداش