



## پودمان چهارم

### لگاریتم و خواص آن



دانشمندان اخیراً موفق به کشف دورترین کهکشان در محدوده شناخته شده جهان هستی شدند. این کهکشان که  $MACS\ 0647\text{-}JD$  - نام‌گذاری شده، تقریباً  $13/3$  میلیارد سال نوری با ما فاصله دارد و از نظر اندازه، جزء کوچکی از کهکشان راه شیری است. به گفته دانشمندان، با توجه به سرعت نور در فضا، آنچه که اکنون ما از زمین می‌بینیم، متعلق به زمانی است که دنیا تنها  $420$  میلیون سال سن داشته است. شاید جالب باشد بدانید که سن فعلی جهان حدود  $13/75$  میلیارد سال است. کار با این گونه اعداد بزرگ وقت و انرژی زیادی از دانشمندان را به خود اختصاص می‌داد؛ اختراع لگاریتم تا قبل از ظهور کامپیوتر کمک مؤثری در تسهیل این محاسبات داشته است. امروزه لگاریتم در حسابداری، شیمی، فیزیک و... مورد استفاده قرار می‌گیرد.



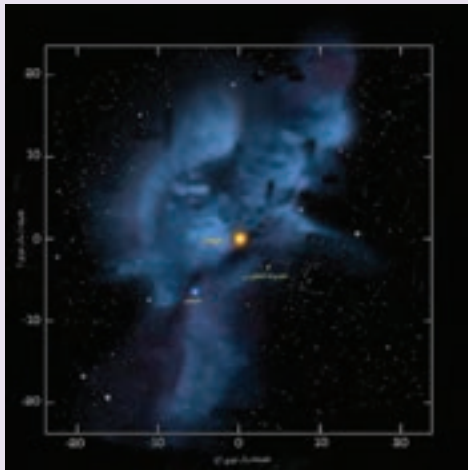
امروز دبیر با ورود به کلاس گفت:

«چه کسی می‌داند کدام موضوع از ریاضیات است که به گفتهٔ لاپلاس طول عمر اختر شناسان را چند برابر کرده است؟»

او همچنین گفت: به نظر من این موضوع نه تنها طول عمر اختر شناسان، بلکه طول عمر دریانوردان، بازرگانان، شیمی‌دانان، ریاضی‌دانان، و زمین شناسان و همهٔ انسان‌های کرهٔ زمین را چند برابر کرده است. طرح این سؤال موجب تعجب هنرجویان شده بود و همه کنجکاو بودند که این چه موضوعی از ریاضی است که موجب افزایش طول عمر می‌شود.

مریم گفت: تاکنون فکر می‌کردم موضوع‌هایی که در زمینهٔ افزایش طول عمر کار می‌شود مربوط به حوزهٔ زیست‌شناسی است، برای من جالب است بدانم ارتباط این موضوع با ریاضی چیست.

دبیر گفت: این موضوع در بسیاری از شاخه‌های علوم نیز کاربرد دارد و برای آشنایی با این موضوع بهتر است فعالیت زیر را انجام دهید.



نزدیک ترین ستاره به زمین که فقط در نیمکره جنوبی قابل رؤیت است پروکسیما قنطورس و نزدیک ترین ستاره که از همه نقاط زمین قابل رؤیت است شباهنگ (سیروس) است.

$n$	$3^n$	حاصل
۰	$3^0$	۱
۱	$3^1$	۳
۲	$3^2$	۹
۳	$3^3$	۲۷
⋮	⋮	⋮
۱۱	$3^{11}$	۱۷۷۱۴۷
۱۲	$3^{12}$	۵۳۱۴۴۱
⋮	⋮	⋮
۱۷	$3^{17}$	۱۲۹۱۴۰۱۶۳
۱۸	$3^{18}$	۳۸۷۴۲۰۴۸۹
⋮	⋮	⋮
۲۷	$3^{27}$	۷۶۲۵۵۹۷۴۸۴۹۸۷
۲۸	$3^{28}$	۲۲۸۷۶۷۹۲۴۵۴۹۶۱
۲۹	$3^{29}$	۶۸۶۳۰۳۷۷۳۶۴۸۸۳

۱ فاصله زمین از خورشید تقریباً ۱۲۹۱۴۰۱۶۳ کیلومتر و فاصله ستاره پروکسیما قنطورس تا زمین تقریباً ۱۷۷۱۴۷ برابر فاصله زمین تا خورشید است. برای تعیین فاصله این ستاره تا زمین باید از کدام چهار عمل اصلی استفاده کرد؟ حدس می‌زنید برای انجام این عمل چقدر زمان نیاز دارید؟

۲ ستاره شباهنگ (سیروس) در فاصله تقریباً ۶۸۶۳۰۳۷۷۳۶۴۸۸۳ کیلومتری از زمین است، اگر بخواهیم بدانیم فاصله ستاره شباهنگ از زمین چند برابر فاصله خورشید تا زمین است چه عملی باید انجام دهید؟ حدس می‌زنید زمان انجام این عمل چقدر است؟

۳ با استفاده از جدول مقابل که در آن توان‌هایی از ۳ محاسبه شده است، جاهای خالی را کامل کنید و حاصل را با استفاده از ضرب اعداد توان‌دار بنویسید.

$$129140163 \times 177147 = 3^{\dots} \times 3^{\dots} = 3^{\dots}$$

$$68630377364883 \div 129140163 = 3^{\dots} \div 3^{\dots} = 3^{\dots}$$

۴ با استفاده از قسمت قبل و جدول مقابل به سؤال‌های (الف) و (ب) پاسخ دهید.

(الف) فاصله پروکسیما قنطورس از زمین چقدر است؟  
 (ب) فاصله ستاره شباهنگ (سیروس) چند برابر فاصله خورشید تا زمین است؟

۵ محاسبه مستقیم ساده‌تر است یا استفاده از جدول؟ زمان انجام کدام روش کمتر است؟

در این فعالیت دیدیم که برای ضرب و تقسیم دو عدد بزرگ، اگر بتوان آنها را به صورت اعداد توان‌دار (با پایه مساوی) نوشت آنگاه با جمع و تفریق توان‌های آنها به نتیجه مورد نظر خواهیم رسید. استفاده از این تکنیک که به جای ضرب و تقسیم اعداد بزرگ، با جمع و تفریق اعداد کوچک‌تر کار می‌کنیم موجب افزایش سرعت و کاهش زمان محاسبات می‌شود و از اشتباهاتی که در محاسبه مربوط به اعداد بزرگ است جلوگیری می‌کند. به نظر می‌رسد جمله معروف لاپلاس نیز به این دلیل بوده که برای انجام این محاسبات، وقت و نیروی بسیار زیادی از دانشمندان تلف می‌شده است و این روش باعث شده که دانشمندان وقت خود را با محاسبات حجیم هدر ندهند.

استفاده از اعداد توان‌دار و توجه به توان آنها برای انجام محاسبات، موجب پیدایش مفهومی به نام **لگاریتم** در ریاضی شده است. در فعالیت (۱) با توجه به تساوی  $3^{11} = 177147$ ، برای انجام عمل ضرب به جای عدد  $177147$  از عدد  $11$  (که توان در  $3^{11}$  می‌باشد) استفاده شده است. بنا به تعریف عدد  $11$  را **لگاریتم**  $177147$  در مبنای  $3$  می‌نامند.

## مثال ۱

**الف)** تساوی  $2^3 = 8$  نمایش عدد  $8$  به صورت یک عدد توان‌دار با پایه  $2$  است؛ بنابراین  $3$  را لگاریتم  $8$  در مبنای  $2$  می‌نامند.

**ب)** اگر عدد  $1000$  را به صورت یک عدد توان‌دار با پایه  $10$  بنویسیم، داریم،  $10^3 = 1000$  بنابراین لگاریتم  $1000$  در مبنای  $10$  عدد  $3$  است.

**پ)** عدد  $64$ ، توان سوم عدد  $4$  است، یعنی  $4^3 = 64$ ، بنابراین لگاریتم  $64$  در مبنای  $4$  عدد  $3$  است.

۱ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) از  $81 = 3^4$  نتیجه می‌شود: لگاریتم ..... در مبنای ..... عدد  $4$  است.

ب) لگاریتم  $10000$  در مبنای  $10$  عدد ..... است؛ زیرا  $10000 = 10^4$ .

پ) ...  $4^2 = 16$  نشان می‌دهد: لگاریتم ..... در مبنای  $4$  عدد ..... است.

۲ عدد  $64$  را به صورت یک عدد توان‌دار با پایه  $2$  نوشته و با استفاده از آن لگاریتم  $64$  در مبنای  $2$  را بنویسید.

کارد کلاس ۱



با معرفی لگاریتم این سؤال مطرح خواهد شد که آیا می‌توان هر عدد حقیقی را به عنوان مبنای لگاریتم در نظر گرفت؟ فعالیت بعد مناسب بودن عدد  $1$  به عنوان مبنای بررسی می‌کند.

فعالیت ۲



تساوی‌های  $1^0 = 1$  و  $1^1 = 1$  و  $1^2 = 1$  و  $1^3 = 1$  و  $1^{-3} = \frac{1}{1^3} = 1$  و  $1^4 = 1$  و ... را در نظر بگیرید،

۱ در تساوی  $1^{\dots} = 1$  به جای نقطه چین چه اعدادی می‌توان قرار داد؟

۲ آیا می‌توان عدد  $a$  را طوری پیدا کرد که:  $1^a = 2$ . به عبارت دیگر آیا لگاریتم ۲ در مبنای ۱ قابل تعریف است؟

۳ آیا عدد  $a$  را می‌توان طوری یافت که در تساوی:  $1^a = 3$  صدق کند. به عبارت دیگر آیا لگاریتم ۳ در مبنای ۱ قابل تعریف است؟

۴ آیا عددی غیر از ۱ را می‌توان به صورت عددی توان‌دار با پایه ۱ نوشت؟ چرا؟

۵ با توجه به نتایج بالا، فکر می‌کنید می‌توان عدد ۱ را به عنوان مبنای لگاریتم انتخاب کرد؟ چرا؟

فعالیت بالا نشان می‌دهد عدد ۱ را نمی‌توان به عنوان مبنا برای لگاریتم در نظر گرفت. تعریف لگاریتم در حالت کلی به شکل زیر است.

تعریف



اگر  $a$  یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و اعداد حقیقی  $b$  و  $c$  به گونه‌ای باشند که:  $b = a^c$  را لگاریتم  $b$  در مبنای  $a$  می‌نامند و با  $\log_a b$  نشان می‌دهند. یعنی  $\log_a b = c$

در تعریف لگاریتم، مبنا همواره عددی مثبت و مخالف ۱ در نظر گرفته می‌شود، زیرا توان‌رسانی به توان اعداد دلخواه فقط با پایه مثبت قابل تعریف است.

نکته

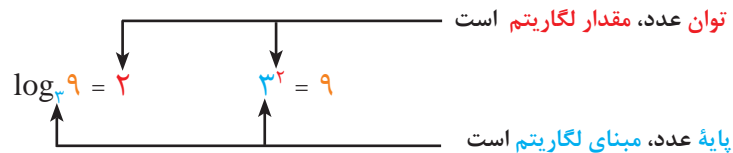


در نماد  $\log_a b$ ، عدد  $b$  توان  $a$  نیست، بلکه  $a$  مبنای لگاریتم است، به عبارت دیگر:  $\log_a b \neq \log a^b$

۱- لگاریتم در زبان انگلیسی logarithm است و آن را به‌طور خلاصه با  $\log$  نمایش می‌دهند.

## مثال ۲

در تساوی  $3^2 = 9$ ، عدد ۹ به صورت یک عدد توان دار با پایه ۳ نمایش داده شده است؛ بنابراین ۲ برابر است با لگاریتم ۹ در مبنای ۳ و می‌نویسیم:  $\log_3 9 = 2$  یعنی:



## مثال ۳

در توان‌رسانی با اعداد گویا دیدیم برخی اعداد رادیکالی را (که زیر رادیکال عددی نامنفی باشد) می‌توان به صورت عددی با توان گویا نوشت. مثلاً  $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$ ، بنابراین لگاریتم  $\sqrt{10}$  در مبنای ۱۰ برابر با  $\frac{1}{2}$  یا  $0/5$  است و می‌نویسیم:

$$\log_{10} \sqrt{10} = 0/5$$

لگاریتم در بسیاری از شاخه‌های علوم نظیر نجوم، فیزیک، زمین‌شناسی، شیمی، ریاضی و همچنین در حسابداری و مسائل مالی کاربرد فراوانی دارد. استفاده از این مفهوم و به‌کارگیری خواص آن در حل مسائل مربوط به این شاخه‌ها، گسترده‌تر از محاسبات مربوط به ضرب و تقسیم اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک می‌باشد.

## مثال ۴

نوعی باکتری را در نظر بگیرید که در هر واحد زمانی ۲ برابر می‌شود، اگر با ۱ گرم از این نوع باکتری شروع کنیم مقدار این باکتری‌ها پس از ۱ واحد زمانی ۲<sup>۱</sup> گرم و پس از ۲ واحد زمانی ۲<sup>۲</sup> گرم خواهد بود. اگر بخواهیم بدانیم پس از چند واحد زمانی مقدار باکتری‌ها ۸ گرم خواهد شد، لازم است بدانیم چه توانی از ۲ مساوی ۸ است و این همان  $\log_2 8$  می‌باشد. به همین ترتیب  $\log_2 16$  مقدار زمانی که لازم است تا این باکتری‌ها به ۱۶ گرم برسد را نشان می‌دهد.



۱ هر سطر جدول زیر، تساوی‌های متناظر را نشان می‌دهد، جدول را کامل کنید.

تساوی برحسب عدد توان دار	تساوی برحسب لگاریتم
$5^3 = 125$	$\log_5 125 = \dots$
$7^2 = \dots$	$\log_7 \dots = \dots$
$3^{\dots} = 81$	$\log_3 81 = \dots$
$4^{\dots} = 64$	$\log_4 64 = 3$
$2^5 = \dots$	$\dots$
$b^3 = 2/1$	$\dots$
$\dots$	$\log_2 27 = \dots$
$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$	$\log_8 2 = \dots$
$\dots$	$\log_a 4 = 3/3$

۲ عدد ۲۵ را به صورت یک عدد توان دار با پایه ۵ نوشته و با استفاده از آن حاصل  $\log_5 25$  را بنویسید.

یک سؤال مهم آن است که آیا می‌توان از همه اعداد لگاریتم گرفت؟ یعنی آیا اعدادی وجود دارند که لگاریتم آنها تعریف نشده باشد؟ فعالیت زیر پاسخ این سؤال را فراهم می‌کند.





۱ اگر  $b = 4^c$ ، جدول زیر را کامل کنید.

c	-۲	-۱	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۲
b	$\frac{1}{16}$	.....	$\frac{1}{2}$	.....	۲	.....	.....

۲ آیا در سطر دوم جدول عددی منفی وجود دارد؟ درباره علامت  $b$  چه می توان گفت؟

.....

۳ با توجه به اینکه تساوی  $b = 4^c$  نشان می دهد  $\log_4 b = c$ ، درباره علامت  $b$  در  $\log_4 b$  چه می توان گفت؟

.....

۴ اگر در پایه به جای ۴، عدد ۳ باشد با یک مثال درستی نتیجه ای که از قسمت قبل به دست آورده اید را بررسی کنید.

.....

۵ اگر  $a$  عددی مثبت و مخالف ۱ باشد و  $b = a^c$  درباره علامت  $b$  چه می توان گفت؟ درباره علامت  $b$  در  $\log_a b$  چه می توان گفت؟ آیا از عدد منفی می توان لگاریتم گرفت؟

.....

با انجام فعالیت (۳) ملاحظه می کنید اعداد مثبت به هر توانی برسند حاصل، همواره عددی مثبت خواهد بود. یعنی هیچ توانی از یک عدد مثبت، عددی منفی نمی باشد، بنابراین:

فقط اعداد مثبت لگاریتم دارند، یعنی عبارت  $\log_a b$  برای  $b > 0$  تعریف می شود.





۱ با توجه به ویژگی‌های توان رسانی اعداد، جملات زیر را کامل کنید.

برای هر عدد مثبت و مخالف ۱ مانند  $a$ :

الف) با توجه به  $a^1 = a$ ، داریم  $\log_a a = \dots$

ب) از  $a^0 = 1$  نتیجه می‌شود:  $\log_a 1 = \dots$

پ) با در نظر گرفتن  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  می‌توان گفت:  $\log_a \frac{1}{a^n} = \dots$

ت) اگر  $b = a^c$ ، آنگاه  $\log_a b = c$ . بنابراین:  $\log_a a^c = \dots$

## مثال ۵

عبارت‌های زیر برقرار هستند:

الف)  $\log_4 4 = 1$  زیرا  $4^1 = 4$  (ب)  $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 1$  (پ)  $\log_5 1 = 0$  زیرا  $5^0 = 1$  (ت)  $\log_{0.4} 1 = 0$

ث) با توجه به اینکه  $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$  داریم  $\log_{10} 0.001 = -3$ .

ج) از  $4^{-1} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0.25$  نتیجه می‌شود:  $\log_4 0.25 = -1$ .

معمولاً برای نمایش لگاریتم در مبنای  $10$  مبنای لگاریتم را نمی‌نویسند. پس  $\log b = \log_{10} b$ .  
 با توجه به تعریف لگاریتم می‌توان دید که لگاریتم اعدادی که توان‌های صحیح یا گویایی از مبنای لگاریتم می‌باشند به سادگی قابل محاسبه است، اما محاسبه لگاریتم سایر اعداد چگونه انجام می‌شود؟  
 مثلاً برای محاسبه  $\log_{10} 9$  باید توانی از  $10$  را پیدا کنیم که مساوی عدد  $9$  باشد، واضح است که این عدد به سادگی قابل محاسبه نیست اما با استفاده از ماشین حساب می‌توان تقریب اعشاری این عدد را پیدا کرد.

## استفاده از ماشین حساب

با استفاده از ماشین حساب حاصل

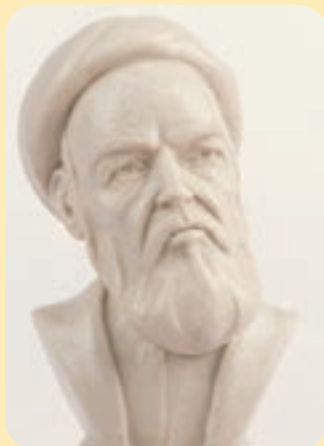
لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $\log 9$

ب)  $\log 0.0016$



خواندنی



خواجه نصیرالدین طوسی منجم، حکیم، متکلم و... دانشمند ایرانی است که در قرن ششم می‌زیسته است. وی رصدخانه و کتابخانه مراغه را تأسیس کرد که در آن حدود چهارصد هزار جلد کتاب وجود داشت.

مطالعه نجوم از دیرباز مورد توجه ایرانیان بوده است. یکی از جلوه‌های آن مطالعات دقیق درباره تعیین طول سال است، ستاره‌شناسان آریایی با ستاره‌ها و طلوع و غروب آن آشنا بوده‌اند، سال نو در ایران باستان با گذر خورشید از نقطه اعتدال بهاری آغاز می‌شد. در دوره اسلامی علم هیئت به‌عنوان یکی از شاخه‌های اصلی نجوم در دایره علوم اسلامی قرار گرفت و دانشمندان بزرگ اسلامی از جمله خواجه نصیرالدین طوسی در این زمینه مشغول به فعالیت شدند. تأسیس رصدخانه‌ها، تدریس علم نجوم و هیئت، ساخت ابزارهای نمایش زمان، اصلاح تقویم و... شاهدهایی از عظمت این علم در دوران اسلامی در ایران است.

فعالیت دانشمندان ایرانی در زمینه نجوم و اشکالاتی که مخصوصاً خواجه نصیرالدین طوسی و شاگردانش بر نظریه "زمین مرکزی" مربوط به بطلمیوس وارد کردند، زمینه فکری کوپرنیک ستاره‌شناس لهستانی - آلمانی را فراهم کرد تا مدل غیر بطلمیوسی "خورشید مرکزی" را ارائه کند در این نظریه خورشید را مرکز عالم در نظر گرفته و سایر اجرام آسمانی به دور آن می‌گردند. محاسبات مورد نیاز برای تنظیم مدل خورشید مرکزی وقت زیادی از دانشمندان را به خود اختصاص می‌داد. این مشکل زمینه‌های ابداع لگاریتم توسط ریاضی‌دان هم‌عصر کوپرنیک یعنی جان نپر را فراهم کرد.



۱ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید:

(الف) از  $64 = 4^3$  نتیجه می‌شود: لگاریتم  $64$  در مبنای  $4$  ..... عدد ..... است.

(ب) لگاریتم  $32$  در مبنای  $2$  عدد ..... است؛ زیرا  $2^5 = 32$ .

(پ) از  $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$  نتیجه می‌شود: لگاریتم  $\sqrt[3]{2}$  در مبنای  $2$  عدد ..... است.

(ت) با توجه به اینکه  $7^4 = 2401$  داریم:  $\log_7 2401 = \dots$

(ث) با توجه به  $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ ، می‌توان گفت:  $\log_8 \frac{1}{2} = \dots$

(ج) تساوی‌های  $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{1000}$  نشان می‌دهند:  $\log_{10} 0.001 = \dots$

۲ مانند قسمت (الف) تساوی شامل لگاریتم متناظر با هر قسمت را بنویسید.

(الف)  $16 = 4^2 \leftrightarrow \log_4 16 = 2$  (ب)  $0.0001 = 10^{-4}$  (پ)  $0.125 = 2^{-3}$

(ت)  $2/1 = a^x$  (ث)  $4/3 = 2^x$  (ج)  $9 = (\frac{1}{3})^{-2}$  (چ)  $(2401)^{\frac{1}{4}} = 7$

۳ در هر کدام از موارد زیر یک تساوی شامل لگاریتم داده شده است، مانند قسمت (الف)

تساوی شامل عدد توان دار متناظر با هر کدام را بنویسید.

(الف)  $\log_4 64 = 6 \leftrightarrow 2^6 = 64$  (ب)  $\log_3 (\frac{1}{9}) = -2$  (پ)  $\log_6 3 = 6$

(ت)  $\log_b C = 2$  (ث)  $\log_3 2 = x$  (ج)  $\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$

۴ حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید:

(الف)  $\log_7 49 = \dots$  (ب)  $\log_5 125 = \dots$  (پ)  $\log_7 128 = \dots$

(ت)  $\log_7 \frac{1}{8} = \dots$  (ث)  $\log_{10} 0.0001 = \dots$

۵ با استفاده از ماشین حساب، حاصل لگاریتم‌های زیر را تا دو رقم اعشار بنویسید:

(الف)  $\log 50 = \dots$  (ب)  $\log 12 = \dots$  (پ)  $\log 2 = \dots$

۶ نوعی باکتری را در نظر بگیرید که وزن آنها پس از  $1$  واحد زمانی  $4$  برابر می‌شود.

(الف) پس از چند واحد زمانی، وزن  $1$  گرم از این باکتری‌ها  $64$  گرم خواهد شد؟

(ب) پس از چند واحد زمانی، وزن این باکتری‌ها  $32$  گرم خواهد شد؟

۷ در هر مورد زیر، یک تساوی شامل عددی توان دار و تساوی لگاریتمی متناظر با آن را طوری

بنویسید که حاصل، لگاریتم عددی با ویژگی خواسته شده باشد.

(الف) عدد طبیعی (ب) عدد صحیح منفی (پ) عدد گویا

## خواص لگاریتم

گفتگو



اگر به کلام لاپلاس، در خصوص نقش لگاریتم در انجام محاسبات با اعداد بزرگ و آشنایی با مفهوم لگاریتم توجه کرده باشید، شاید این سؤال به ذهن شما نیز رسیده باشد که:

« چگونه برای ضرب و تقسیم اعداد بزرگ از لگاریتم استفاده می کنند؟ »

دبیر پرسید: با توجه به فعالیت (۱) که در خصوص فاصله ستارگان و برای معرفی لگاریتم مطرح شد، آیا کسی می تواند پاسخ سؤال فوق را حدس بزند؟

مریم گفت: در فعالیت (۱) برای ضرب دو عدد بزرگ ابتدا آنها را به صورت دو عدد توان دار نوشتیم. سپس توان های آنها را با هم جمع کرده و مقدار عدد توان دار جدید را به دست آوردیم. بنابراین، با استفاده از جدول مقادیر توان های ۳، عمل ضرب اعداد، به جمع توان های آنها تبدیل شد.

دبیر گفت: بله، بنابراین شما به جای ضرب و تقسیم اعداد توان دار، توان های آنها را جمع و تفریق کردید. با توجه به مفهوم لگاریتم، این توان ها چه هستند؟

مریم گفت: این توان ها، لگاریتم آن اعداد در مبنای ۳ بودند. یعنی برای انجام محاسبه مورد نیاز، لگاریتم ها را جمع یا تفریق کردیم.

دبیر گفت: پاسخ نهایی سؤال شما مربوط به خواص لگاریتم است. فعالیت زیر یکی از خواص مهم لگاریتم را نشان می دهد.

فعالیت ۴



۱ جدول زیر را کامل کنید.

$b$	$c$	$\log b$	$\log c$	$bc$	$\log bc$
۱۰	۱۰۰	۱	.....	۱۰۰۰	۳
۱۰۰۰۰	۱۰۰۰	.....	۳	.....	۷
۰/۱	۱۰۰	-۱	.....	۱۰	.....
$\sqrt{10}$	$\sqrt{10}$	.....	.....	.....	۱
$10^x$	$10^y$	$x$	.....	$10^{x+y}$	.....

۲ در هر سطر چه رابطه ای بین اعداد ستون های  $\log b$  و  $\log c$  و ستون  $\log bc$  وجود دارد؟

.....

۳ این رابطه را به صورت یک جمله بیان نمایید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

.....

فعالیت (۴) نشان می‌دهد که لگاریتم حاصل ضرب دو عدد با مجموع لگاریتم‌های آن دو عدد برابر است. این یکی از خواص مهم لگاریتم است و در حالت کلی داریم:

$$\log bc = \log b + \log c \quad \text{برای } b, c > 0 \text{ داریم}$$

نکته



این رابطه برای لگاریتم‌هایی که مبنای غیر از ۱۰ دارند نیز برقرار است.

## مثال ۶

با استفاده از این خاصیت لگاریتم، می‌توانیم بدون آنکه دو عدد را ضرب کنیم لگاریتم حاصل ضرب آنها را به دست آوریم.

$$\text{الف) } \log 100 \sqrt[5]{10} = \log (100 \times \sqrt[5]{10}) = \log 100 + \log \sqrt[5]{10} = 2 + \log 10^{\frac{1}{5}} = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$$

$$\text{ب) } \log 2 + \log 5 = \log (2 \times 5) = \log 10 = 1$$

$$\text{پ) } \log 125 + \log 4 + \log 2 = \log (125 \times 4 \times 2) = \log 1000 = 3$$

اکنون که با لگاریتم و یکی از خاصیت‌های آن آشنا شده‌ایم، می‌توانیم مسئله مربوط به فعالیت (۱) را به کمک لگاریتم حل کنیم.

## مثال ۷

فاصله زمین از خورشید با دقت بیشتر ۱۴۹۶۸۰۰۰۰ کیلومتر و فاصله ستاره پروکسیما قنطورس تا زمین با دقت بیشتر ۲۶۸۶۰۶ برابر فاصله زمین تا خورشید است. برای به دست آوردن فاصله این ستاره تا زمین باید حاصل ضرب ۲۶۸۶۰۶ × ۱۴۹۶۸۰۰۰۰ را حساب کنیم. انجام این ضرب مشکل است ولی محاسبه لگاریتم آن آسان است. کافی است که لگاریتم این دو عدد را حساب کنیم و با هم جمع کنیم. بنابراین ابتدا لگاریتم این دو عدد را به کمک ماشین حساب به دست می‌آوریم:

$$\log 268606 \approx 5/4 \quad \text{و} \quad \log 149680000 \approx 8/2$$

با استفاده از خاصیت لگاریتم داریم:

$$\log (149680000 \times 268606) = \log 149680000 + \log 268606 \approx 8/2 + 5/4 = 13/6$$

$$\text{پس: } \log (149680000 \times 268606) \approx 13/6$$

چون مبنای این لگاریتم  $10$  بوده است، خواهیم داشت:

$$149680000 \times 268606 \approx 10^{13/6}$$

با استفاده از ماشین حساب داریم:  $10^{13/6} \approx 39810717055349$ .

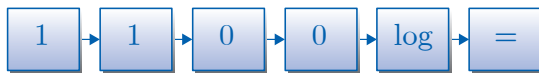
بنابراین فاصله مورد نظر تقریباً  $39810717055349$  کیلومتر است.

این شیوه محاسبه را برای محاسبه حاصل ضرب هر دو عدد بزرگ یا کوچکی می‌توان به کار برد.

#### استفاده از ماشین حساب

با استفاده از ماشین حساب،  $\log 100 + \log 1000$  و  $\log(100 + 1000)$  را با تقریب تا دو رقم اعشار به دست آورید و در مربع علامت مساوی (=) یا نامساوی ( $\neq$ ) قرار دهید:

$$\log(100 + 1000) \square \log 100 + \log 1000$$



در حالت کلی: برای  $a, b > 0$  داریم:  $\log(a + b) \neq \log a + \log b$

نکته



کاردکلاس ۴



۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $\log 4 + \log 25 =$

ب)  $\log 100 \sqrt{10} =$

پ)  $\log \sqrt[3]{20} + \log \sqrt[3]{2} + \log \sqrt[3]{25} =$

۲ فاصله دورترین ستاره‌ای که با چشم غیر مسلح قابل رؤیت است از زمین،  $10^{11} \times 5056119722$  برابر فاصله زمین از خورشید است. فاصله این ستاره از زمین را با استفاده از ماشین حساب به دست آورید.

دیدیم که لگاریتم حاصل ضرب دو عدد مثبت با مجموع لگاریتم‌های آنها برابر است. در مورد لگاریتم تقسیم دو عدد، چه رابطه‌ای برقرار است؟ فعالیت زیر به بررسی این مطلب می‌پردازد.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

$b$	$c$	$\log b$	$\log c$	$\frac{b}{c}$	$\log \frac{b}{c}$
۱۰۰۰	۱۰	۳	.....	۱۰۰	.....
۱۰۰	۱۰	.....	.....	.....	.....
۰/۱	۱۰۰	-۱	.....	۱۰	.....
$۱۰۰\sqrt{۱۰}$	$۱۰\sqrt{۱۰}$	.....	$\frac{۳}{۲}$	.....	.....
$۱۰^x$	$۱۰^y$	$x$	.....	$۱۰^{x-y}$	.....

۲ در هر سطر چه رابطه‌ای بین اعداد ستون‌های  $\log b$  و  $\log c$  و ستون  $\log \frac{b}{c}$  وجود دارد؟ این رابطه را به صورت یک جمله بیان کنید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

فعالیت (۵) نشان می‌دهد که لگاریتم تقسیم دو عدد با لگاریتم مقسوم منهای لگاریتم مقسوم علیه برابر است، در حالت کلی داریم:

$$\log \frac{b}{c} = \log b - \log c \quad \text{برای } b, c > 0$$

نکته



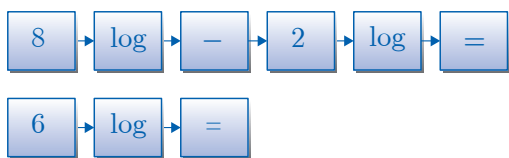
این خاصیت، برای لگاریتم‌هایی که مبنای غیر از ۱۰ دارند نیز برقرار است.

## مثال ۸

الف) با توجه به  $\log 5 \approx 0.7$  و  $\log 20 \approx 1.3$  مقدار تقریبی  $\log 4$  را به دست می‌آوریم:

$$\log 4 = \log \frac{20}{5} = \log 20 - \log 5 \approx 0.6 \quad \text{ب) } \log \frac{1}{100} = \log 1 - \log 100 = 0 - 2 = -2$$

### استفاده از ماشین حساب



با استفاده از ماشین حساب،  $(\log 8 - \log 2)$  و  $\log (8-2)$  را با تقریب دو رقم اعشار به دست آورید و در مربع، علامت مناسب مساوی (=) یا نامساوی ( $\neq$ ) قرار دهید.

$$\log(8-2) \square \log 8 - \log 2$$





در حالت کلی: برای  $a, b > 0$  داریم:  $\log(a-b) \neq \log a - \log b$



۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $\log 2^0 - \log 2 =$       ب)  $\log 0.001 = \log \frac{1}{1000} = \dots$

۲ با تکمیل نقطه چین‌ها، نتیجه فعالیت (۵) را با استفاده از خاصیت لگاریتم ضرب دو عدد به دست آورید ( $b$  و  $c > 0$ ).

$$\log(bc) = \log\left(\frac{bc}{c}\right) = \log\left(\frac{b}{c} \times c\right) = \log\left(\frac{b}{c}\right) + \dots$$

$$\log\left(\frac{b}{c}\right) = \dots - \dots$$

بنابراین:

از رابطه  $(a^m)^n = a^{mn}$  می‌توان استفاده کرد و خاصیت دیگری از لگاریتم را به دست آورد.

۱ جدول زیر را تکمیل کنید.



$b$	$n$	$b^n$	$\log b$	$\log b^n$
۱۰	۵	.....	.....	.....
۱۰۰	۲	.....	۲	.....
۰/۱	۳	.....	-۱	.....
$\sqrt{10}$	۴	.....	.....	.....
$10^x$	$n$	$(10^x)^n = 10^{nx}$	$x$	.....

۲ در هر سطر، چه رابطه‌ای بین اعداد ستون‌های  $n$  و  $\log b$  و عدد ستون  $\log b^n$  وجود دارد؟ این رابطه را به صورت یک جمله بیان کنید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

.....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که لگاریتم  $b^n$  برابر است با  $n$  برابر لگاریتم  $b$ . در حالت کلی داریم:

نکته



برای  $b > 0$  و هر عدد حقیقی  $x$  داریم:  $\log b^x = x \log b$

ویژگی بالا برای لگاریتم‌هایی که مبنای غیر از ۱۰ دارند نیز برقرار است.

### مثال ۹

به کمک خواص لگاریتم، عبارت‌های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید و در صورت امکان ساده کنید ( $a, b, c > 0$ ):

الف)  $3 \log \sqrt[3]{5} + 2 \log \sqrt{2} = \log(\sqrt[3]{5})^3 + \log(\sqrt{2})^2 = \log 5 + \log 2 = \log(5 \times 2) = \log 10 = 1$

ب)  $\frac{1}{4} \log a + 2 \log b - 5 \log c = \log a^{\frac{1}{4}} + \log b^2 - \log c^5 = \log \frac{\sqrt[4]{a} b^2}{c^5}$

### مثال ۱۰

عبارت‌های زیر را به صورت مجموع یا تفاضل چند لگاریتم بنویسید و در صورت امکان ساده کنید ( $x, y, z > 0$ ):

الف)  $\log(5^6 \times 10^3) = \log 5^6 + \log 10^3 = 6 \log 5 + 3$

ب)  $\log \frac{10x^2y^5}{z^4} = \log 10 + \log x^2 + \log y^5 - \log z^4 = 1 + 2 \log x + 5 \log y - 4 \log z$

کارد کلاس ۶



۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $\log 2000^5 - \log 2^5 =$

ب)  $\log 12 + 2 \log 2 - \frac{1}{4} \log 36 + \log 125 =$

۲ عبارت‌های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید ( $b, c, x > 0$ ).

الف)  $4 \log 6 + 5 \log b - \frac{1}{2} \log c =$

ب)  $\log x^2 - \log x =$

اکنون که با مفهوم لگاریتم و برخی از خواص آن آشنا شده‌اید به سؤال صفحه بعد که توسط یکی از هنرجویان مطرح شده است دقت کنید:



مریم گفت: در ماشین حساب‌ها معمولاً کلید لگاریتم در مبنای  $10$  وجود دارد. آیا راهی وجود دارد که لگاریتم در مبنای غیر از  $10$  را نیز با استفاده از این ماشین حساب‌ها به دست آورد؟  
دبیر گفت: در پدیده‌های واقعی معمولاً لازم است لگاریتم اعداد در مبنای غیر از  $10$  را به دست آوریم، محاسبه لگاریتم این اعداد بدون استفاده از ماشین حساب کار ساده‌ای نیست.  
مریم گفت: آیا راهی برای محاسبه مقدار این لگاریتم با استفاده از ماشین حساب وجود دارد؟  
دبیر گفت: با انجام فعالیت زیر با خاصیت دیگری از لگاریتم آشنا خواهید شد، برای محاسبه لگاریتم اعداد در هر مبنا به کمک ماشین حساب از این خاصیت می‌توان استفاده کرد.



۱ جدول زیر را کامل کنید.

$b$	$a$	$\log b$	$\log a$	$\frac{\log b}{\log a}$	$\log_a b$
۱۰۰	۱۰	.....	.....	.....	۲
۱۰	۱۰۰	.....	۲	.....	$\frac{1}{2}$
$\sqrt{10}$	۱۰	.....	۱	.....	.....
۱۰۰۰	۱۰۰	.....	.....	.....	$\frac{3}{2}$

۲ با مقایسه اعداد دو ستون آخر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ چه رابطه‌ای بین  $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$  وجود دارد؟

.....

فعالیت (۷) نشان می‌دهد که لگاریتم یک عدد در مبنای غیر از  $10$  را می‌توان به صورت تقسیم لگاریتم دو عدد در مبنای  $10$  نوشت، در حالت کلی داریم:

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a} \quad \text{برای } a, b > 0 \text{ و } a \neq 1$$



با استفاده از خاصیت بالا، محاسبه لگاریتم اعداد در هر مبنایی با استفاده از ماشین حساب‌هایی که فقط قابلیت محاسبه لگاریتم در مبنای  $10$  را دارند، امکان‌پذیر می‌باشد.

## مثال ۱۱

برای محاسبه  $\log_3 5$  به کمک ماشین حساب داریم:  $\log 5 \approx 0.7$  و  $\log 3 \approx 0.47$  بنابراین:

$$\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} \approx \frac{0.7}{0.47} \approx 1.48$$

استفاده از ماشین حساب



با استفاده از ماشین حساب حاصل  $\log_8 8$  را به دست آورید:

حاصل هر کدام از قسمت‌های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید.

الف)  $\frac{\log 4}{\log 3}$

ب)  $2 + \log_5 3$

کارد کلاس ۷





۱ عبارتهای زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید و در صورت امکان ساده کنید.

الف)  $\log \sqrt{5} + \log \sqrt{2} = \dots$

ب)  $\log 4000 - \log 4 = \dots$

پ)  $2 \log 50 + 2 \log 2 = \dots$

ت)  $5 \log x - \log y = \dots$

ث)  $3 \log a + 2 \log b - \log z - \log a^2 + \log 4 = \dots$

ج)  $4 + \log_4 3$

چ)  $4 - \log_3 5$

۲ اگر  $\log 2 \approx 0.301$  و  $\log 3 \approx 0.477$  حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف)  $\log 4$     ب)  $\log 6$     پ)  $\log 18$     ت)  $\log \frac{2}{3}$     ث)  $\log 5$     ج)  $\log 45$

۳ درستی تساویهای زیر را بررسی کنید.

الف)  $\frac{\log 10}{\log 100} = \frac{1}{10}$     ب)  $\log 100 + \log 0.01 = 0$     پ)  $(\log 1000)^2 = \log 1000^2$

۴ الف) با استفاده از ماشین حساب، تقریب اعشاری اعداد  $\log 20$  و  $\log 30$  و  $\log 600$  را تا دو

رقم اعشار به دست آورید. آیا تساوی  $\log(20 \times 30) = \log 20 + \log 30$  برقرار است؟

ب) به کمک قسمت الف) در مربع علامت مناسب  $\neq$  یا  $=$  را قرار دهید:

برای اعداد مثبت  $a$  و  $b$  در حالت کلی داریم:  $\log(a \times b) \square \log a + \log b$

۵ باکتری‌هایی را در نظر بگیرید که وزن آنها پس از ۱ واحد زمانی ۲ برابر می‌شود. با استفاده

از ماشین حساب تعیین کنید پس از چند واحد زمانی وزن این باکتری‌ها ۲۰ گرم خواهد شد؟