

پودمان پنجم

آمار توصیفی



آنترپومتری (Anthropometry) به معنای مردم‌سنجی یا انسان‌سنجی است که در آن به اندازه‌گیری بخش‌های مختلف بدن انسان به منظور شناسایی تفاوت‌ها و دسته‌بندی فیزیکی مردمان پرداخته می‌شود. نظریه‌های مختلفی در ارتباط با اندازه‌بخش‌های مختلف اعضای بدن انسان وجود دارد. کاربرد اولیه این اندازه‌گیری‌ها در مردم‌شناسی جسمانی یا دیرین مردم‌شناسی بود تا از این طریق به درک بهتری از طبقه‌بندی انسان‌ها برسند. بررسی تخصصی مجموعه یا مجموعه‌سنجی نیز شاخه‌ای از این دانش است. طرح‌هایی از اندازه‌گیری بخش‌های بدن انسان در دفترچه خاطرات لئوناردو داوینچی نیز دیده می‌شود. از سال‌های دهه ۱۹۵۰ میلادی، مهندسی آنترپومتری با هدف اندازه‌گیری، تحلیل و به‌کارگیری اندازه‌بخش‌های مختلف بدن انسان، برای طراحی و ارزیابی محصولات، ابزار و محیط‌های کاری معرفی شد. امروزه مردم‌سنجی در زمینه‌های طراحی صنعتی، طراحی پوشاک، ارگونومی و معماری کاربردهای بسیاری دارد.

خط بهترین برزش

علی در کارگاه پیراهن‌دوزی مردانه مشغول کار است. او پارچه‌ها را برای بُرش آماده می‌کند. روزی امیر، مسئول کارگاه، وارد شد.

امیر گفت: علی صبر کن. برش‌ها را متوقف کن. باز هم مرجوعی داریم.

علی گفت: دوباره چه اشکالی پیش آمده؟

امیر گفت: مثل دفعه‌های قبل. یکی می‌گوید یقه‌اش اندازه است ولی مچ آن تنگ است و دیگری می‌گوید مچ اندازه است ولی یقه‌اش تنگ است. بالاخره نفهمیدیم باید با اندازه چه کسی کار کنیم! ولی باید فکری کرد. اگر همین‌طور پیش برویم، مشتری‌هایمان را از دست می‌دهیم.



علی گفت: این جدول اندازه‌هایی است که معمولاً طبق آن برش می‌زنم.

| | | | | |
|------|------|------|------|---------------|
| ۵۲ | ۵۰ | ۴۸ | ۴۶ | سایز |
| ۴۵ | ۴۵ | ۴۵ | ۴۵ | قد بالا تنه |
| ۲۴ | ۲۳ | ۲۲ | ۲۱ | نصف کارور پشت |
| ۲۴ | ۲۳ | ۲۲ | ۲۱ | نصف دور پشت |
| ۶+۵۲ | ۶+۵۰ | ۶+۴۸ | ۶+۴۶ | نصف دور سینه |
| ۴۲ | ۴۰ | ۳۸ | ۳۶ | دور گردن |
| ۷۸ | ۷۷ | ۷۶ | ۷۵ | قد پیراهن |
| ۴۴ | ۴۲ | ۴۰ | ۳۸ | کادر آستین |
| ۶۱ | ۶۱ | ۶۰ | ۶۰ | قد آستین |
| ۲۶ | ۲۵ | ۲۴ | ۲۳ | دور مچ |

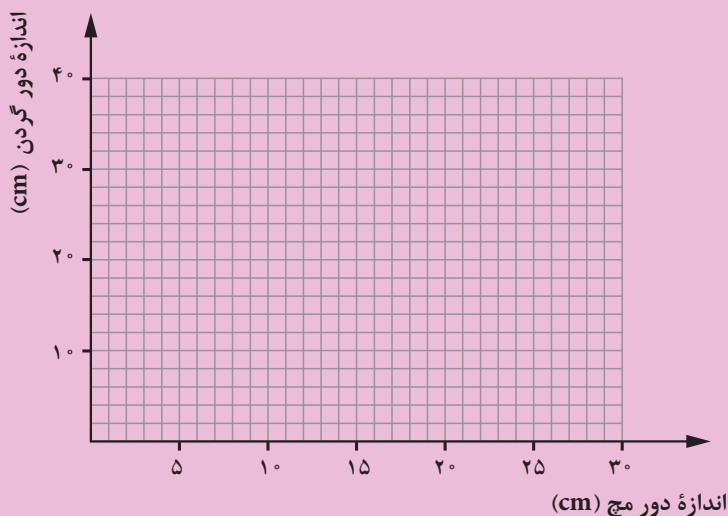


امیر گفت: ظاهراً این اندازه‌ها مناسب نسل جدید ما نیست. باید فکری کرد.
 علی گفت: یعنی باید برویم پسرهای شهر را ردیف کنیم و دور گردن و دور مچ دستشان را اندازه بگیریم؟!
 امیر گفت: اگر برای نجات کسب و کارم مجبور به این کار شوم، شاید هم بله!
 فکر می‌کنید آیا امیر مجبور به انجام چنین کاری می‌شود؟ اصولاً در وضعیت‌های مشابه آیا امکان دارد که همه افراد جامعه را اندازه‌گیری کنیم؟ در چنین وضعیت‌هایی شرکت‌های تولیدی چه می‌کنند؟
 فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا فرایندی را که تولیدکنندگان بزرگ طی می‌کنند بهتر درک کنید.

نظریه‌ای وجود دارد که نشان می‌دهد بین اندازه دور مچ دست و اندازه دور گردن افراد یک رابطه خطی وجود دارد. تولیدکنندگان با داشتن این رابطه می‌توانند اندازه‌های مناسبی برای محصولات خودشان در نظر بگیرند. برای آشنایی با فرایند پیدا کردن این رابطه، اندازه دور گردن و دور مچ دست ۱۵ نفر در جدول زیر آورده شده است.

| اندازه دور گردن (y بر حسب cm) | اندازه دور مچ (x بر حسب cm) |
|----------------------------------|--------------------------------|
| ۳۳/۵ | ۱۴/۸ |
| ۳۳ | ۱۵ |
| ۳۵/۲ | ۱۵/۴ |
| ۳۴/۲ | ۱۵/۷ |
| ۳۳/۷ | ۱۶/۱ |
| ۳۲/۲ | ۱۶/۲ |
| ۳۵/۵ | ۱۶/۲ |
| ۳۵/۸ | ۱۶/۲ |
| ۳۶/۴ | ۱۶/۳ |
| ۳۷/۳ | ۱۶/۷ |
| ۳۵/۵ | ۱۶/۹ |
| ۳۶/۶ | ۱۷/۱ |
| ۳۸/۵ | ۱۷/۲ |
| ۴۶/۸ | ۱۷/۶ |
| ۳۸/۳ | ۱۷/۸ |

۱ در صفحه مختصات زیر، نقطه‌هایی را مشخص کنید که طول هر نقطه، نشان‌دهنده اندازه دور میچ و عرض آن نشان‌دهنده اندازه دور گردن یک نفر است.



۲ آیا نقاط، روی یک خط راست قرار دارند؟

۳ خطی (به‌طور تقریبی) رسم کنید که تا حد ممکن با نقاط مشخص شده در صفحه، کمترین فاصله را داشته باشد. سعی کنید نیمی از نقاط در بالای خط و نیمی دیگر زیر خط و با فاصله یکسان از خط قرار گیرند.

۴ اطلاعات جدول را در excel وارد کنید و طبق دستورالعمل صفحه ۱۱۸، به کمک excel خطی رسم کنید که کمترین فاصله را با نقاط مشخص شده روی صفحه داشته باشد.

۵ اگر x اندازه دور میچ و y اندازه دور گردن باشد، معادله خط رسم شده را به کمک excel طبق دستورالعمل صفحه بعد پیدا کنید.

۶ ستون y' را با دو رقم اعشار کامل کنید. (y' اندازه دور گردن به کمک معادله خط است).

| اندازه دور مچ (x بر حسب cm) | اندازه دور گردن (y بر حسب cm) | y' | خطا: $e = y - y'$ | e^2 | y'' | خطا: $e' = y - y''$ | e'^2 |
|--------------------------------|----------------------------------|-------|----------------------|-------|-------|------------------------|--------|
| ۱۴/۸ | ۳۳/۵ | ۳۱/۹۵ | -۱/۵۶ | ۲/۴۲ | ۳۲/۸۶ | ۰/۶۴ | ۰/۴۱ |
| ۱۵ | ۳۳ | | | | | | |
| ۱۵/۴ | ۳۵/۲ | ۳۳/۶۱ | ۱/۵۹ | ۲/۵۲ | ۳۳/۹۱ | ۱/۲۹ | ۱/۶۵ |
| ۱۵/۷ | ۳۴/۲ | ۳۴/۴۵ | -۰/۲۵ | ۰/۰۶ | ۲۴/۴۴ | -۰/۲۳۵ | ۰/۰۶ |
| ۱۶/۱ | ۳۳/۷ | | | | | | |
| ۱۶/۲ | ۳۲/۲ | ۳۵/۸۴ | -۳/۶۴ | ۱۳/۲۲ | ۳۵/۳۱ | -۳/۱۱ | ۹/۶۷ |
| ۱۶/۲ | ۳۵/۵ | ۳۵/۸۴ | -۰/۳۴ | ۰/۱۲ | ۳۵/۳۱ | ۰/۱۹ | ۰/۰۴ |
| ۱۶/۲ | ۳۵/۸ | ۳۵/۸۴ | -۰/۰۴ | ۰ | ۳۵/۳۱ | ۰/۴۹ | ۰/۲۴ |
| ۱۶/۸۳ | ۳۶/۴ | | | | | | |
| ۱۶/۷ | ۳۷/۳ | | | | | | |
| ۱۶/۹ | ۳۵/۵ | | | | | | |
| ۱۷/۱ | ۳۶/۶ | ۳۸/۳۴ | -۱/۷۴ | ۳/۰۲ | ۳۶/۸۶ | -۰/۲۹ | ۰/۰۸ |
| ۱۷/۲ | ۳۸/۵ | | | | | | |
| ۱۷/۶ | ۴۶/۸ | ۲۹/۷۳ | ۷/۰۷ | ۵۰/۰۱ | ۳۷/۷۶ | ۹/۰۴ | ۸۱/۷۲ |
| ۱۷/۸ | ۳۸/۳ | ۴۰/۲۸ | -۱/۹۹ | ۳/۹۴ | ۳۸/۱۱ | ۰/۱۹ | ۰/۰۴ |

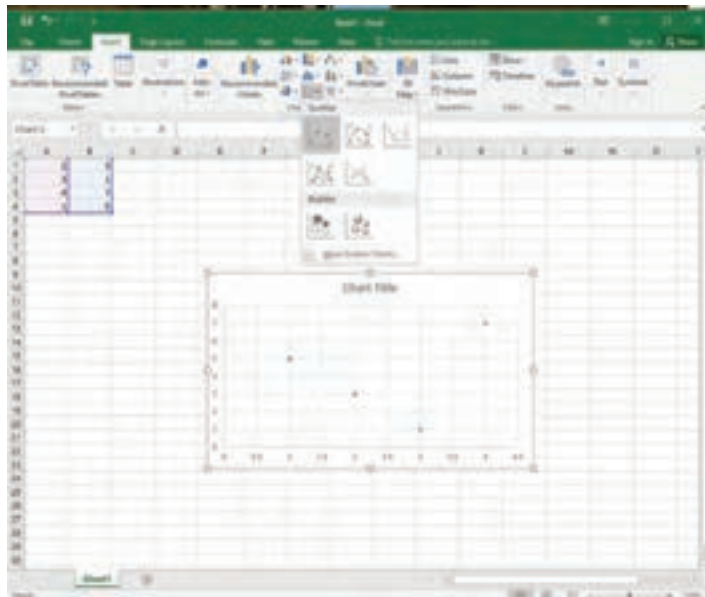
۷ آیا مقادیر به دست آمده به کمک معادله خط، با مقادیر اندازه‌گیری شده برابرند؟ چرا؟

۸ ستون خطا (e)، اختلاف مقدار واقعی و مقدار تخمین زده شده را کامل کنید.

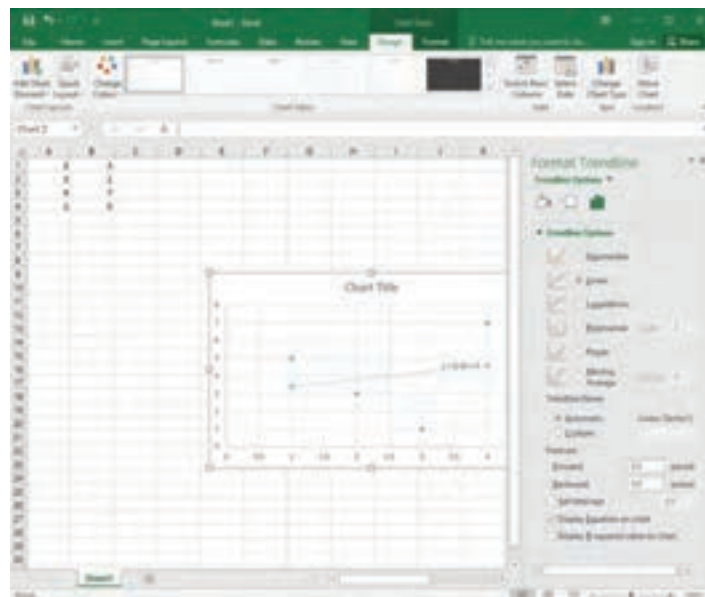
۹ مجموع خطاها (ستون e) را به دست آورید. آیا این عدد مجموع واقعی خطاها را نشان می‌دهد؟ چرا؟

۱۰ مجموع مجذور خطاها را به دست آورید.

۱۱ فکر می‌کنید چرا مجذور خطاها را به دست می‌آوریم؟



یک کاربرگ در excel باز کنید. در ستون اول اندازه‌های دور مچ (محور x ها) و در ستون دوم اندازه‌های دور گردن (محور y ها) را وارد کنید. به منظور رسم نمودار، اطلاعات دو ستون را گرفته، از منوی insert، chart type (نوع نمودار) و سپس scatter (پراکنش) را انتخاب کنید.



به منظور پیدا کردن معادله خط بهترین برازش، روی یکی از نقطه‌ها، راست کلیک کنید و گزینه Add TrendLine را انتخاب کنید و در پنجره‌ای که باز می‌شود، گزینه Display Equation on Chart را انتخاب کنید.

در آمار، نموداری را که در فعالیت (۱) رسم کردید، نمودار پراکنش می‌نامند. خطی که در فعالیت (۱) به کمک excel رسم شد، خط بهترین برازش نام دارد. این نام‌گذاری به این دلیل است که این خط، بهترین رابطه خطی ممکن بین دو کمیت «اندازه دور میچ» و «اندازه دور گردن» را نشان می‌دهد. شیب مثبت خط نشان می‌دهد که با افزایش اندازه دور میچ، اندازه دور گردن نیز افزایش می‌یابد. از نمودار پراکنش و خط بهترین برازش برای بررسی رابطه بین دو کمیت استفاده می‌شود. در نمودار فعالیت (۱)، هر نقطه در صفحه مختصات، نشان‌دهنده اندازه دور میچ دست (طول نقطه) و اندازه دور گردن (عرض نقطه) یک نفر است.

نمودار پراکنش دو کمیت، مجموعه‌ای از نقاط در صفحه مختصات است که طول و عرض هر نقطه، داده‌های مربوط به اندازه‌گیری‌های متناظر دو کمیت است.

تعریف



ادریان لژاندر در سال ۱۸۰۵ با یافتن ضریب زاویه و عرض از مبدأ آن خط، روشی برای رسم خط بهترین برازش پیدا کرد. او در این روش سعی کرد تا مجموع مجذور خطاهای بین مقدار واقعی و مقدار محاسبه شده، کمترین مقدار شود. خط به‌دست آمده با این روش را خط بهترین برازش و این روش را روش کمترین مجذورات می‌نامند. همان‌طور که در فعالیت (۱) مشاهده کردید، اگر این خط را رسم کنیم، متوجه می‌شویم که مجموع خطاها (اختلاف مقدار واقعی و مقدار تخمین زده شده به کمک خط بهترین برازش) صفر است. به همین دلیل مجموع مجذور خطاها را به‌دست می‌آوریم تا علامت خطا تأثیرگذار نباشد. برای رفع این مشکل می‌توان از قدر مطلق خطاها نیز استفاده کرد، ولی به دلیل دشواری انجام محاسبات با قدر مطلق، از مجذور خطاها استفاده می‌کنیم. در فعالیت (۱) به دلیل وجود خطا در گردگردن اعداد، مجموع خطاها صفر نشد و عددی نزدیک به صفر به‌دست آمد.



۱ در فعالیت (۱) با حذف سطر مربوط به $17/6$ (در ستون اول)، نقطه $\begin{bmatrix} 17/6 \\ 46/8 \end{bmatrix}$ را از داده‌هایتان خارج کنید؛ و خطی رسم کنید که کمترین فاصله را با نقاط داشته باشد.

۲ ستون y'' را با دو رقم اعشار کامل کنید. (y'' اندازه دور گردن به کمک معادله جدید خط است).

۳ ستون e' را کامل کنید.

۴ مجموع مجذور خطاها را برای مقادیر به دست آمده برای y'' به دست آورید و با جواب قسمت ۱۰ در فعالیت (۱) مقایسه کنید.

۵ فکر می‌کنید کدام خط برای پیش‌بینی مناسب‌تر است؟ چرا این اتفاق می‌افتد؟

در آمار، نقطه $\begin{bmatrix} 17/6 \\ 46/8 \end{bmatrix}$ را که با بقیه داده‌ها تفاوت قابل ملاحظه‌ای دارد، داده پرت^۱ می‌نامند. معمولاً

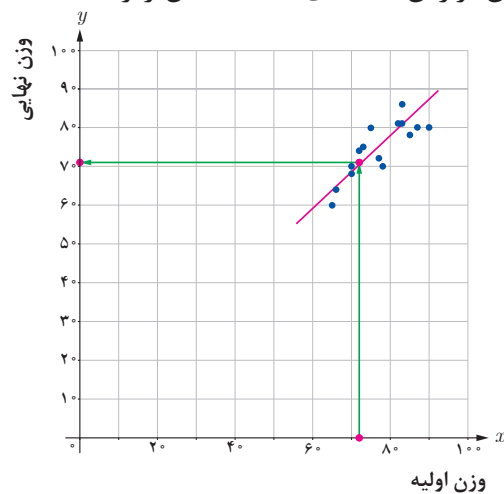
اگر داده‌های پرت را از داده‌ها خارج کنیم درک بهتری از وضعیت به دست می‌آوریم. در بسیاری از موارد خط بهترین برازش، رابطه خطی مناسبی را بین دو کمیت به ما می‌دهد، و از طریق آن می‌توان مقادیرهای متناظر بین این کمیت‌ها را پیش‌بینی و از این پیش‌بینی‌ها در برنامه‌ریزی‌ها استفاده کرد. معمولاً تولیدکنندگان، از این روش برای تولید محصولات می‌کنند. عرضه می‌شود، استفاده می‌کنند.

مثال ۱

در یک مطالعه، تأثیر مصرف یک داروی خاص بر کاهش وزن، بررسی شده است. وزن اولیه و وزن نهایی ۱۵ شرکت‌کننده در این مطالعه برحسب کیلوگرم در جدول زیر نشان داده شده است.

| وزن اولیه | وزن نهایی |
|-----------|-----------|
| ۸۳ | ۸۱ |
| ۸۲ | ۸۱ |
| ۷۰ | ۶۸ |
| ۷۳ | ۷۵ |
| ۷۰ | ۷۰ |
| ۸۵ | ۷۸ |
| ۷۷ | ۷۲ |
| ۷۲ | ۷۴ |
| ۶۵ | ۶۰ |
| ۷۸ | ۷۰ |
| ۷۵ | ۸۰ |
| ۸۳ | ۸۶ |
| ۶۶ | ۶۴ |
| ۹۰ | ۸۰ |
| ۸۷ | ۸۰ |

نمودار پراکنش و خط بهترین برازش داده‌های بالا به شکل زیر است.



از روی نمودار می‌توان پیش‌بینی کرد که اگر فردی با وزن ۷۲ کیلوگرم از این دارو استفاده کند، پس از زمان تجویز شده برای مصرف، ۷۱ کیلوگرم خواهد شد.

مثال ۲

در نمودارهای زیر، هر نقطه نشان‌دهنده مقادیر متناظر بین دو کمیت است. در کدام نمودارها، بین این دو کمیت رابطه‌ای وجود دارد؟ رابطه بین این دو کمیت را در هر نمودار، از لحاظ افزایشی یا کاهش‌ی بودن یکی بر حسب دیگری، توصیف کنید.

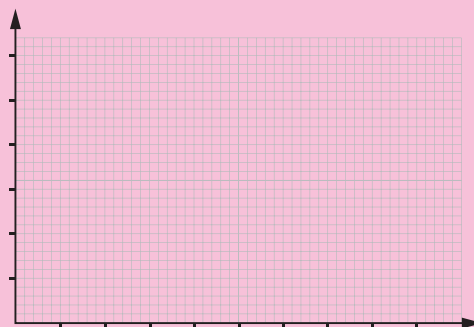


همان‌طور که مشاهده می‌شود، نقاط مشخص شده در نمودار (الف)، روی یک خط راست قرار دارند و با افزایش مقادیر روی محور x ، مقادیر روی محور y کاهش می‌یابد. نقاط مشخص شده در نمودار (ب)، روی یک خط راست قرار ندارند ولی با افزایش مقادیر روی محور x ، عموماً مقادیر روی محور y افزایش می‌یابد. در این وضعیت می‌توان رابطه بین دو کمیت را به طور تقریبی با خط نشان داد. با دقت روی نقاط مشخص شده در نمودار (پ)، متوجه می‌شویم که تغییرات مقادیر روی محور x هیچ‌گونه اطلاعاتی درباره تغییرات مقادیر روی محور y به ما نمی‌دهد. در این وضعیت احتمالاً بین دو کمیت رابطه‌ای وجود ندارد. دقت پیش‌بینی از روی نمودار (الف) بیشتر از دقت پیش‌بینی از روی نمودار (ب) است.



برخی از هنرآموزان عقیده دارند که درصد قبولی هنرجویان در یک کلاس با تعداد هنرجویان در کلاس رابطه دارد. جدول زیر تعداد هنرجویان در کلاس‌های مختلف یک هنرستان و درصد قبولی آنها در امتحان پایان سال را نشان می‌دهد.

| تعداد هنرجویان در کلاس | درصد قبولی |
|------------------------|------------|
| ۱۰ | ۸۰ |
| ۱۵ | ۶۰ |
| ۳۰ | ۵۰ |
| ۱۲ | ۸۰ |
| ۲۵ | ۵۰ |
| ۲۴ | ۵۰ |
| ۱۵ | ۷۰ |
| ۶۰ | ۷۰ |
| ۲۸ | ۴۰ |
| ۱۲ | ۸۰ |



۱ نمودار پراکنش را رسم کنید.

۲ خط بهترین برازش را رسم کنید.

۳ پیش‌بینی می‌کنید چند درصد از هنرجویان در یک کلاس ۴۰ نفره قبول می‌شوند.

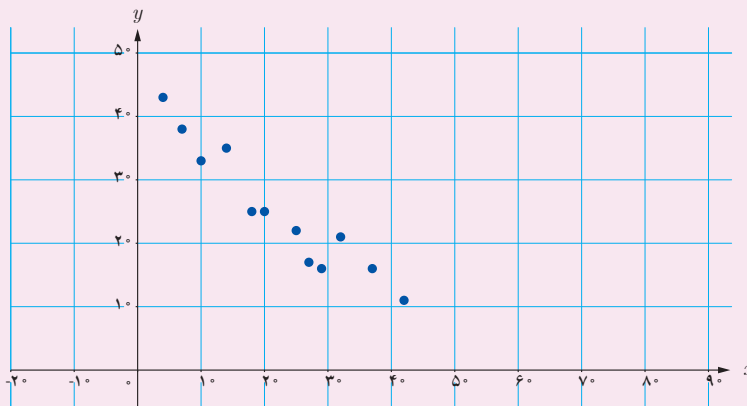
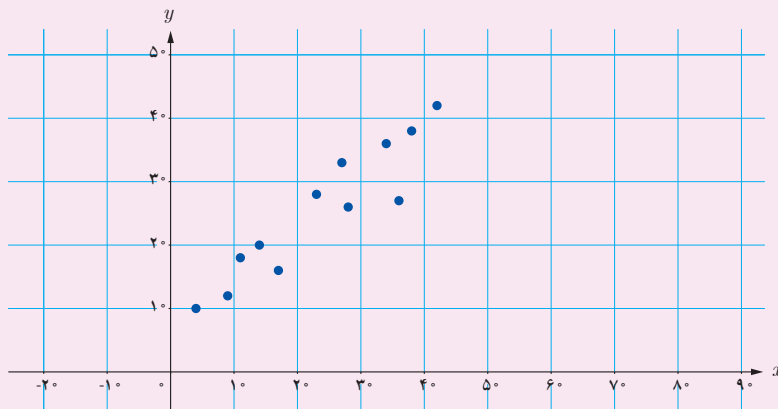
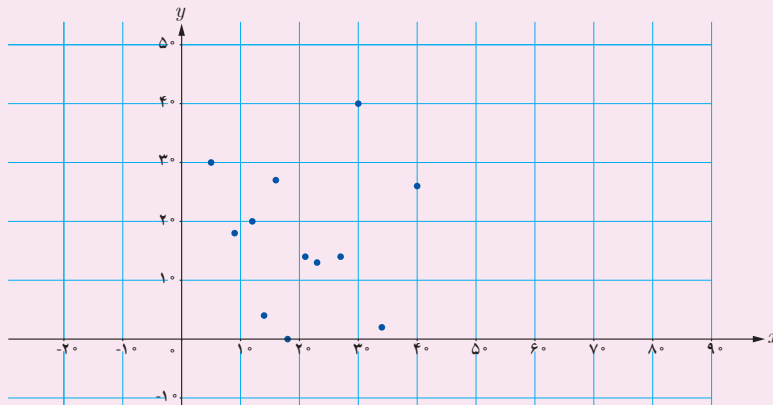
۴ برخی عقیده دارند نقطه $\begin{bmatrix} ۶۰ \\ ۷۰ \end{bmatrix}$ (اطلاعات مربوط به یک کلاس ۶۰ نفره) یک داده پرت

(مربوط به یک وضعیت غیر معمول) است. فکر می‌کنید اگر در تحلیل خود این داده را کنار بگذارید، بهتر است یا خیر؟ توضیح دهید چرا؟

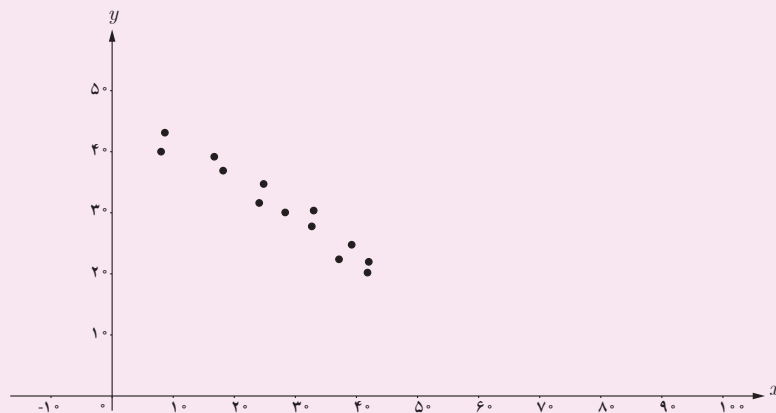
۵ این داده را خارج کنید و پاسخ سؤال (۳) را مجدداً به دست آورید.



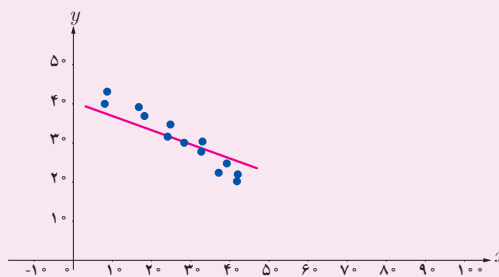
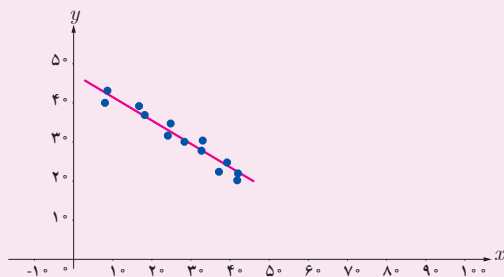
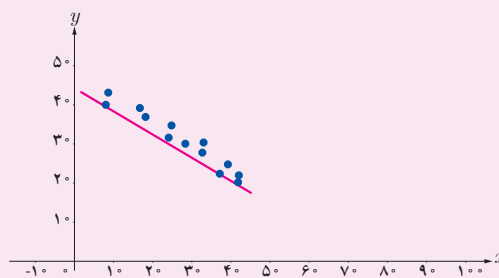
۱ در نمودارهای زیر، هر نقطه نشان‌دهنده مقادیر متناظر بین دو کمیت است. در کدام نمودارها، بین این دو کمیت رابطه‌ای وجود دارد؟ رابطه بین این دو کمیت را در هر نمودار، از لحاظ افزایشی یا کاهششی بودن یکی بر حسب دیگری، توصیف کنید.



۲ نمودار زیر رابطه بین مدت زمانی که فرد رانندگی می‌کند و مسافت باقی مانده تا مقصد را نشان می‌دهد.



کدام یک از نمودارهای زیر، خط بهترین برازش برای نمودار پراکنش بالا را نشان می‌دهد؟ توضیح دهید.



| فاصله بین نوک انگشتان | طول قد |
|-----------------------|--------|
| ۱۸۱ | ۱۸۰ |
| ۱۵۴ | ۱۵۶ |
| ۱۶۸ | ۱۶۸ |
| ۱۴۸ | ۱۴۷ |
| ۱۳۸ | ۱۳۱ |
| ۱۶۰ | ۱۵۹ |
| ۱۴۲ | ۱۵۴ |
| ۱۵۴ | ۱۵۵ |
| ۱۸۱ | ۱۷۸ |
| ۱۷۵ | ۱۷۵ |
| ۱۳۰ | ۱۳۵ |
| ۱۷۵ | ۱۸۰ |
| ۱۸۶ | ۱۷۸ |
| ۱۵۸ | ۱۶۱ |
| ۱۳۹ | ۱۳۹ |
| ۱۴۸ | ۱۵۴ |
| ۱۵۶ | ۱۵۶ |
| ۱۵۴ | ۱۵۲ |
| ۱۷۵ | ۱۷۰ |
| ۱۵۲ | ۱۵۶ |

۲ جدول روبه‌رو طول قد و فاصله نوک دو انگشت وسط ۲۰ نفر را (در حالتی که دست‌ها از طرفین کاملاً باز است) برحسب سانتی‌متر نشان می‌دهد.

الف) نمودار پراکنش این داده‌ها را رسم کنید.
 ب) آیا رابطه‌ای بین طول قد و فاصله نوک دو انگشت وسط افراد دیده می‌شود؟ توضیح دهید.
 پ) خط بهترین برازش را رسم کنید و معادله آن را به دست آورید.

ت) به کمک معادله یا نمودار، با داشتن طول قد خودتان، فاصله نوک دو انگشت وسط خودتان را تخمین بزنید.
 ث) فاصله نوک دو انگشت وسط خودتان را اندازه بگیرید. آیا با مقدار تخمین زده شده تفاوت دارد؟ اگر بله، توضیح دهید چرا؟

۴ سینا می‌گوید: اگر ریاضی شما خوب باشد، علوم شما نیز خوب است. علی می‌خواهد درستی این گفته را بررسی کند. به همین دلیل نمره ریاضی و علوم ۷ نفر را پرسید. داده‌هایی که علی به دست آورده در جدول زیر ثبت شده است.

| | | | | | | | |
|------------|----|-----|----|----|----|-----|----|
| نمره ریاضی | ۱۷ | ۵/۵ | ۹ | ۱۶ | ۱۰ | ۶/۵ | ۸ |
| نمره علوم | ۱۵ | ۸ | ۱۰ | ۱۵ | ۱۱ | ۹ | ۱۰ |

الف) نمودار پراکنش این داده‌ها را رسم کنید.

ب) آیا با گفته سینا موافق‌اید؟ دلیل خود را توضیح دهید.
 پ) خط بهترین برازش را رسم کنید.

ت) پیش‌بینی می‌کنید نمره علوم دانش‌آموزی که در آزمون ریاضی ۱۴ شده است، چند باشد؟

۵ جدول زیر، نمرات ریاضی و زبان ۱۰ دانش‌آموز را نشان می‌دهد.

| | | | | | | | | | | |
|------------|----|-----|---|----|----|---|----|----|----|---|
| نمره ریاضی | ۱۹ | ۴/۵ | ۹ | ۱۳ | ۲ | ۱ | ۱۷ | ۱۴ | ۱۳ | ۸ |
| نمره زبان | ۱۰ | ۸ | ۶ | ۱۸ | ۱۸ | ۲ | ۱۲ | ۱۳ | ۹ | ۹ |

الف) نمودار پراکنش این داده‌ها را رسم کنید. (طول هر نقطه نمره ریاضی و عرض هر نقطه نمره زبان یک دانش‌آموز است).

ب) آیا بین نمره ریاضی و نمره زبان دانش‌آموزان رابطه‌ای مشاهده می‌کنید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

پ) خط بهترین برازش را رسم کنید و به کمک معادله آن و یا نمودار، نمره زبان دانش‌آموزی را که در آزمون ریاضی ۱۵ گرفته است، پیش‌بینی کنید.

ت) نقطه‌های نشان‌دهنده نمره ریاضی و زبان کدام دو دانش‌آموز با نمرات بقیه دانش‌آموزان هماهنگی ندارد؟

ث) این دو داده را از داده‌هایتان حذف کنید و خط بهترین برازش را رسم کنید و این بار نمره زبان دانش‌آموزی را که در آزمون ریاضی ۱۵ گرفته است، پیش‌بینی کنید.

| سایز کفش | قد (سانتی‌متر) |
|----------|----------------|
| ۴۴ | ۱۷۵ |
| ۴۳ | ۱۸۲ |
| ۴۰ | ۱۷۰ |
| ۴۴ | ۱۷۳ |
| ۴۲ | ۱۷۰ |
| ۴۶ | ۱۸۵ |
| ۴۶ | ۱۷۷ |
| ۴۳ | ۱۷۲ |
| ۴۲ | ۱۶۵ |
| ۴۲ | ۱۷۸ |
| ۴۴ | ۱۷۵ |
| ۴۶ | ۱۸۳ |

ج) آیا تفاوتی بین دو پیش‌بینی شما وجود دارد؟ دلیل خود را توضیح دهید.

۶ جدول مقابل داده‌های مربوط به اندازه کفش و قد ۱۲ مرد را نشان می‌دهد.

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را به کمک excel رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار، اندازه کفش مردی را که قد او ۱۸۰ سانتی‌متر است پیش‌بینی کنید.

پ) باستان‌شناسان رد پای به اندازه ۵۸ سانتی‌متر پیدا کرده‌اند. پیش‌بینی می‌کنید طول قد این انسان چقدر بوده است؟

۷ دانش‌آموزی برای توصیف داده‌هایش، نمودار پراکنش را رسم کرد. او برای رسم نمودن خط بهترین برازش، اولین نقطه و آخرین نقطه را به هم وصل کرد. آیا او خط بهترین برازش را درست رسم کرده است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

درون‌یابی و برون‌یابی

گفتگو



پس از آنکه علی و امیر رابطه بین اندازهٔ مچ دست و دور گردن نمونهٔ ۱۵ نفری خودشان را بررسی کردند. امیر پرسید: اگر بخواهیم برای افرادی که اندازهٔ دور گردنشان خیلی بیشتر است پیراهن بدوزیم، از چه اندازه‌هایی باید استفاده کنیم؟

علی گفت: چطور است خط بهترین برازش را ادامه دهیم و از روی آن اندازهٔ دور مچ را تخمین بزنیم. امیر گفت: فکر نمی‌کنم هر چقدر دلمان بخواهد، بتوانیم خط را ادامه دهیم. علی پرسید: چرا؟

امیر گفت: فرض کن بین وزن و سن افراد هم رابطه‌ای وجود داشته باشد، آن وقت می‌دانی وزن یک آدم ۹۰ ساله چقدر زیاد می‌شود؟

پس از یافتن خط برازش، این سؤال قابل طرح است که خط برازش در چه محدوده‌ای اعتبار دارد؟ آیا پس از مدل‌سازی رابطه بین دو کمیت برای نمونه‌ای مشخص، می‌توان این رابطه را برای تمام جامعه تعمیم داد و از آن مدل، برای همهٔ اعضای جامعه استفاده کرد؟ این سؤالی است که برنامه‌ریزان نیز از خود می‌پرسند. برای پاسخ به این سؤال فعالیت زیر را انجام دهید.

برخی تحقیقات در حوزهٔ بانکداری نشان می‌دهند بین نرخ سود بانکی و میزان سرمایه‌ای که بانک جذب می‌کند همبستگی وجود دارد. یکی از بانک‌ها، میزان سرمایهٔ خود را در زمان‌های مختلف که سود بانکی مختلفی پرداخت می‌کرده است، بررسی و در جدول زیر ثبت کرده است.

فعالیت ۳



| نرخ سود بانکی (درصد) | سرمایه (میلیون تومان) |
|----------------------|-----------------------|
| ۱۰ | ۲۵ |
| ۸ | ۲۶ |
| ۹ | ۲۱ |
| ۱۱ | ۱۵ |
| ۱۱ | ۱۷ |
| ۱۱ | ۱۹ |
| ۱۰ | ۲۷ |
| ۹ | ۲۶ |
| ۷ | ۳۱ |
| ۶ | ۳۶ |
| ۶ | ۳۹ |
| ۵ | ۴۰ |

۱ به کمک excel خط بهترین برازش را برای این اطلاعات رسم کنید.

۲ اگر نرخ سود ۱۰/۵ درصد تعیین شود، مقدار سرمایه جذب شده را پیش‌بینی کنید.

۳ اگر نرخ سود به ۱۲ درصد افزایش یابد، مقدار سرمایه جذب شده را پیش‌بینی کنید.

۴ اگر نرخ سود به ۱۸ درصد افزایش یابد، مقدار سرمایه جذب شده را پیش‌بینی کنید.

۵ در کدام حالت پیش‌بینی شما به واقعیت نزدیک‌تر خواهد بود؟ توضیح دهید.

در وضعیت بالا در جدول داده‌ها، مقادیر درصد سود پرداختی (x) در بازه بسته $[۵,۱۱]$ قرار دارد. در قسمت (۲) می‌خواهیم سرمایه جذب شده با پرداخت ۱۰/۵ درصد سود را پیش‌بینی کنیم. توجه داشته باشید که ۱۰/۵ در بازه تغییرات x قرار دارد. ولی در قسمت‌های (۳) و (۴) می‌خواهیم سرمایه جذب شده را برای درصد سودهای پرداختی خارج از این بازه پیش‌بینی کنیم. پیش‌بینی‌هایی مانند وضعیت (۲) را درون‌یابی و پیش‌بینی‌هایی مانند وضعیت‌های (۳) و (۴) را برون‌یابی می‌نامند. در برون‌یابی هرچه از ابتدا یا انتهای بازه دورتر شویم، ممکن است پیش‌بینی‌ها با خطاهای زیاد همراه و حتی غیر واقعی شوند.

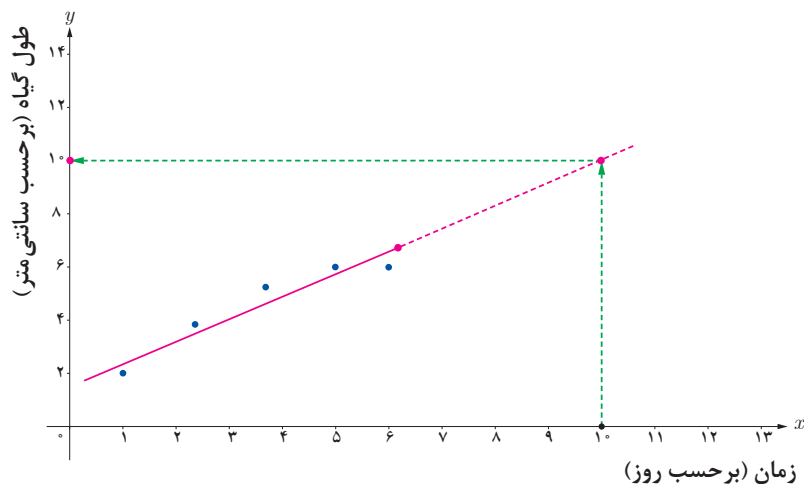
x و y دو کمیت مرتبط هستند. اگر مقادیر این دو کمیت برای برخی از x ها در یک بازه، مشخص باشد، پیش‌بینی مقادیر y به ازای x های مشخص در این بازه به کمک خط برازش را درون‌یابی و پیش‌بینی مقادیر y به ازای x های مشخص در خارج از این بازه را برون‌یابی می‌نامند.

تعریف



مثال ۳

نمودار زیر میزان رشد گیاه را پس از ۵ روز نشان می‌دهد. می‌خواهیم طول گیاه را بعد از ۱۰ روز پیش‌بینی کنیم.

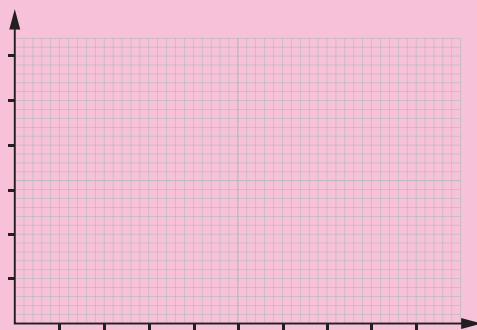


با توجه به اینکه بعد از مدتی، معمولاً رشد طولی متوقف می‌شود و یا میزان افزایش طول در واحد زمان کاهش می‌یابد، پیش‌بینی طول گیاه با استفاده از این نمودار بعد از ۱۰ روز (برون‌یابی)، ممکن است دقیق نباشد.

میزان مصرف اکسیژن توسط خرچنگ‌ها و دمای آب با هم رابطه دارند. نرخ مصرف اکسیژن نوعی خرچنگ در زیر آب در جدول زیر آورده شده است.

| | | | | | | |
|---|----|------|----|------|-----|-----|
| دما (°C) | ۲۰ | ۱۷/۵ | ۱۵ | ۱۲/۵ | ۱۰ | ۵/۵ |
| نرخ مصرف اکسیژن (Mmol / Kg / Min) ^۱ | ۲۳ | ۱۷ | ۱۲ | ۹ | ۵/۵ | ۴/۵ |

۱ نمودار پراکنش و خط بهترین برازش این داده‌ها را رسم کنید.



کار در کلاس ۲



۲ به کمک نمودار، مقدار تقریبی دما را در حالتی که نرخ مصرف اکسیژن $14 \text{ Mmol / Kg / Min}$ است، پیدا کنید.

۳ به کمک معادله خط بهترین برازش، نرخ مصرف اکسیژن این خرچنگ را در زیر آب در دماهای 0°C ، 17°C ، 50°C و 150°C پیش‌بینی کنید.

۴ برای پیش‌بینی مقدار اکسیژن در کدام دماها از درون‌یابی و برای کدام دماها از برون‌یابی استفاده کردید؟

۵ پیش‌بینی در کدام وضعیت با خطای زیاد همراه و یا آنکه غیر واقعی است؟ توضیح دهید.



۱ مه‌رناز می‌خواهد آزمایشی انجام دهد که به کمک آن، تأثیر نور را بر سرعت غذاسازی توسط گیاه از طریق فتوسنتز بررسی کند.

مه‌رناز لامپ را در ۱۰۰ متری گیاه قرار داد و تعداد حباب‌هایی را که توسط گیاه در یک دقیقه تولید شد شمرد. سپس لامپ را نزدیک‌تر کرده و در هر حالت، تعداد حباب‌های ایجاد شده توسط گیاه در دقیقه را شمرد. او نتایج را در جدول زیر ثبت کرد.

| تعداد حباب‌ها در دقیقه | فاصله لامپ از گیاه بر حسب متر |
|------------------------|-------------------------------|
| ۱۰ | ۱۰۰ |
| ۲۰ | ۸۰ |
| ۲۸ | ۷۰ |
| ۳۲ | ۶۰ |
| ۳۷ | ۴۰ |
| ۳۷ | ۲۰ |

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را برای این داده‌ها رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار، جمله زیر را کامل کنید:

هر چه فاصله لامپ از گیاه باشد، سرعت فتوسنتز است.

پ) اگر لامپ در ۱۰ سانتی‌متری گیاه قرار داشته باشد، تعداد حباب‌ها در دقیقه را پیش‌بینی کنید.

ت) اگر لامپ را در ۲ سانتی‌متری گیاه قرار دهیم، برای پیدا کردن تعداد حباب‌هایی که گیاه تولید می‌کند از برون‌یابی استفاده می‌کنیم یا درون‌یابی؟ فکر می‌کنید در این وضعیت این پیش‌بینی چقدر درست باشد؟

۲ ایمان برای شرکت در مسابقات دو ۱۰۰ متر، تمرین می‌کند. جدول زیر، زمان به پایان رساندن مسیر را بر حسب ثانیه در پایان هر هفته تمرین نشان می‌دهد.

| تعداد هفته‌های تمرین | زمان به پایان رساندن مسیر |
|----------------------|---------------------------|
| ۱ | ۱۳ |
| ۲ | ۱۲ |
| ۳ | ۱۱/۵ |
| ۴ | ۱۱/۲۵ |
| ۵ | ۱۱ |

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را برای این داده‌ها رسم کنید.
 ب) به کمک نمودار یا معادله خط بهترین برازش، زمان به پایان رساندن مسیر توسط ایمان پس از ۱۴ هفته را پیش‌بینی کنید.
 پ) آیا پیش‌بینی شما درست است؟ برای پاسخ به این سؤال رکورد جهانی دو ۱۰۰ متر مردان را از اینترنت پیدا کنید.
 ت) برای این پیش‌بینی از درون‌یابی استفاده کردید یا برون‌یابی؟ آیا پاسخ به دست آمده معنادار است؟ توضیح دهید چرا؟

۲ جدول زیر تعداد کشورهای شرکت‌کننده در المپیک تابستانی را از سال ۱۹۴۸ تا سال ۲۰۰۰ نشان می‌دهد.

| سال | تعداد کشورها | سال | تعداد کشورها |
|------|--------------|------|--------------|
| ۱۹۴۸ | ۵۹ | ۱۹۷۶ | ۹۲ |
| ۱۹۵۲ | ۶۹ | ۱۹۸۰ | ۸۰ |
| ۱۹۵۶ | ۷۲ | ۱۹۸۴ | ۱۴۰ |
| ۱۹۶۰ | ۸۳ | ۱۹۸۸ | ۱۶۰ |
| ۱۹۶۴ | ۹۳ | ۱۹۹۲ | ۱۶۹ |
| ۱۹۶۸ | ۱۱۲ | ۱۹۹۶ | ۱۹۷ |
| ۱۹۷۲ | ۱۲۱ | ۲۰۰۰ | ۱۹۹ |

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را برای این داده‌ها رسم کنید.
 ب) به کمک معادله خط بهترین برازش، تعداد کشورهای شرکت‌کننده در المپیک ۲۰۰۴ و المپیک ۲۰۱۶ را پیش‌بینی کنید.
 پ) با مراجعه به اینترنت، تعداد کشورهای شرکت‌کننده در سال ۲۰۰۴ و سال ۲۰۱۶ را پیدا کنید. این تعداد را با پیش‌بینی‌های خودتان مقایسه کنید. در صورت وجود اختلاف، توضیح دهید چرا این اختلاف وجود دارد.
 ت) به کمک معادله یا نمودار، تعداد کشورهای شرکت‌کننده در سال ۲۰۲۸ را پیش‌بینی کنید. آیا این پیش‌بینی معنادار است؟ دلیل خود را توضیح دهید.



عموی طاها حسابدار یک شرکت خصوصی بود. طاها پس از مصاحبه استخدامی، قرار شد در آن شرکت به عنوان مسئول فنی مشغول به کار شود. مدیر عامل شرکت حقوق طاها را یک میلیون و پانصد هزار تومان در نظر گرفت.

طاها به عمویش گفت: قبلاً به من گفته بودید میانگین حقوق افراد این شرکت ۲ میلیون تومان است، فکر نمی کنید حقوق من کم باشد؟
عموی طاها گفت: اگر به لیست حقوق کارکنان نگاه کنی، متوجه می شوی که حقوقی که به شما پیشنهاد شده است، حقوق خوبی است.
طاها با دیدن لیست حقوق کارکنان گفت: شما به چه دلیلی می گوئید که حقوق من خوب است؟
عمویش گفت: حقوق شما از حقوق بیش از نیمی از کارکنان بیشتر است.
طاها با تعجب گفت: چگونه می توانم حقوق خود را با حقوق دیگران مقایسه کنم و بفهمم جایگاه حقوق من در بین حقوق دیگران چگونه است؟

| عنوان شغلی | میزان حقوق به میلیون تومان |
|-------------------|----------------------------|
| مدیر عامل | ۵/۸ |
| معاون | ۳/۲ |
| کارمند قراردادهای | ۱/۷ |
| روابط عمومی | ۱/۳ |
| حسابدار | ۱/۸ |
| مسئول فناوری | ۱/۲ |
| بایگانی | ۱ |
| منشی | ۱/۱ |
| نگهبان | ۰/۹ |

شما با انجام فعالیت زیر متوجه می شوید که آماردانها چگونه داده ها را با هم مقایسه می کنند.



۱ داده های ارائه شده در لیست حقوق کارکنان را از کم به زیاد مرتب کنید.

۲ عددی را پیدا کنید که تعداد حقوق های قبل از آن، با تعداد حقوق های بعد از آن برابر باشد.

اگر حقوق کارکنان را از کم به زیاد مرتب کنیم، عدد ۱/۳ (میلیون) در وسط قرار می گیرد، یعنی تعداد حقوق های قبل از عدد ۱/۳ (میلیون) با تعداد حقوق های بعد از آن برابر است؛ این عدد را میانه می نامند. در لیست حقوقی مرتب شده، حقوقی که قرار است طاها بگیرد بعد از عدد ۱/۳ (میلیون) است که از حقوق نیمی از کارکنان بیشتر است. با دقت بیشتر متوجه می شویم که اگر حقوق ها را از زیاد به کم نیز مرتب می کردیم، همین نتیجه به دست می آمد.



پس از مرتب کردن مقادیر داده‌ها، عددی را که تعداد داده‌های قبل از آن با تعداد داده‌های بعد از آن برابر است می‌نامند.

میانگین داده‌ها ۲ میلیون تومان است و این عدد نشان نمی‌دهد چه تعداد از داده‌ها بیشتر یا کمتر از آن است. می‌دانیم عدد میانگین ممکن است در بین داده‌ها نباشد؛ برای مثال، عدد دو میلیون تومان در لیست حقوق کارکنان نیست. همچنین به علت وجود داده پرت (حقوق مدیر عامل ۵/۸ میلیون تومان است) در لیست حقوق، میانگین، خیلی بالا رفته است که تصویری اشتباه دربارهٔ میزان دریافت حقوق کارکنان در ما ایجاد می‌کند؛ زیرا فقط ۲ نفر حقوق بیشتر از میانگین دارند و ۷ نفر حقوق کمتر از میانگین دریافت می‌کنند.

میانگین و میانه، هر دو به توصیف وضعیت داده‌ها می‌پردازند و هر کدام ویژگی‌هایی از داده‌ها را بیان می‌کنند.

مثال ۴

ساعت‌هایی را که علی در روزهای یک هفته مطالعه کرده است به صورت زیر است:

۲ ، ۳ ، ۳ ، ۴ ، ۱ ، ۵ ، ۸

برای پیدا کردن میانه، ابتدا داده‌ها را به شکل زیر مرتب می‌کنیم.

۱ ، ۲ ، ۳ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۸

عدد ۳ میانه است. جایگاه این عدد مشخص می‌کند که تعداد داده‌های قبل از جایگاه عدد ۳، با تعداد داده‌های بعد از آن، برابرند.

دبیر به دانش‌آموزان گفت: اگر به لیست حقوق کارکنان آن شرکت، حقوق طاها را هم اضافه کنیم، میانگین و میانه آن، چه تغییری می‌کند؟

سعید گفت: من حساب کردم، میانگین ۱/۹۵ میلیون می‌شود ولی برای به دست آوردن میانه، حقوق‌ها را که مرتب کردم داده‌ای در وسط ندیدم.

دبیر گفت: توجه کنید همانطور که ممکن است میانگین بین داده‌ها نباشد، میانه هم لزوماً در بین داده‌ها نیست.

سعید گفت: پس برای آنکه تعداد داده‌های بعد از میانه با تعداد داده‌های قبل از میانه برابر باشد، باید عددی بین ۱/۳ و ۱/۵ میلیون انتخاب کنیم. آیا فرقی نمی‌کند چه عددی را انتخاب کنیم؟

دبیر گفت: نه فرقی نمی‌کند ولی در این صورت، میانه به طور دقیق مشخص نخواهد بود. برای هماهنگی، طبق قرارداد، میانگین این دو عدد را به عنوان میانه انتخاب می‌کنند.

سعید گفت: پس، میانه ۱/۴ میلیون است.



مثال ۵

مصرف شیر ۱۰ خانواده ۴ نفره در یک ماه برحسب لیتر به صورت زیر است:

۱۴ ، ۵ ، ۴ ، ۸ ، ۱۱ ، ۱۳ ، ۳ ، ۱۰ ، ۵ ، ۱۵

برای پیدا کردن میانه، ابتدا داده‌های مسئله را مرتب می‌کنیم.

$$\text{میانه} = \frac{۸+۱۰}{۲} = ۹$$

مثال ۶

تعداد نان مصرفی ۷ خانواده در یک هفته به صورت زیر است:

۸ ، ۱۳ ، ۱۳ ، ۱۴ ، ۱۰ ، ۱۴ ، ۱۵

میانه مصرف این خانواده‌ها برابر با ۱۳ است.

مثال ۷

در یک مطالعه، ۵ داده به دست آمده است. اگر ۶، ۱۲، ۱۲ و ۱۴ چهارتا از این داده‌ها باشند، داده پنجم را به گونه‌ای پیدا کنید که میانگین و میانه این داده‌ها با هم برابر باشند.

چون ۵ داده داریم، میانه در جایگاه سوم قرار دارد. پس فرقی نمی‌کند که داده مورد نظر از ۶ کوچک‌تر، یا بین ۶ و ۱۲، یا بین ۱۲ و ۱۴ و یا از ۱۴ بزرگ‌تر باشد؛ در هر صورت، میانه ۱۲ خواهد بود. فرض برابری میانه و میانگین نشان می‌دهد که میانگین هم برابر با ۱۲ است. پس مجموع ۵ داده باید $۶۰ = ۱۲ \times ۵$ باشد. یعنی داده پنجم برابر است با: $۱۶ = (۱۴+۱۲+۱۲+۶) - ۶۰$

۱ تعداد روزهای مسافرت چند خانواده به صورت مقابل است. ۸، ۳، ۶، ۴، ۳، ۷، ۵، ۲

میانه این داده‌ها را بنویسید.

۲ اگر تعداد داده بدون تکرار و (فرد / زوج) باشد، میانه در داده‌ها قرار ندارد.

۳ داده‌های زیر تعداد شرکت‌کنندگان شهرهای مختلف را در یک مسابقه نشان می‌دهد و میانه داده‌ها عدد ۱۷ است. در دایره و مربع چه اعدادی می‌توانند قرار بگیرند؟ چرا؟

۲۰ ، ۲۰ ، ۱۹ ، ۱۹ ، ۱۸ ، □ ، ○ ، ۱۵ ، ۱۴ ، ۱۳ ، ۱۳ ، ۱۲ ، ۱۱

کاردرکلاس ۳





۱) مثالی بزنید که میانه در بین داده‌ها نباشد و مثالی بزنید که میانه در بین داده‌ها باشد.

۲) اگر همهٔ داده‌ها ۲ برابر شوند، میانه چه تغییری می‌کند؟

۳) در جلسه‌های تمرین پرتاب نیزه، دو ورزشکار، پرتاب‌های مختلفی انجام داده‌اند. مسافت پرتاب شده توسط آنها بر حسب متر به صورت زیر است:

۷۰ ، ۷۰ ، ۶۶ ، ۵۵ ، ۶۶ ، ۵۸ ، ۶۹ ، ۶۶ ، ۷۱ ، ۶۳ ، ۷۲ ، ۶۰ ، ۶۵ ، ۷۰ : ورزشکار اول

۷۰ ، ۶۸ ، ۵۹ ، ۵۸ ، ۶۸ ، ۶۵ ، ۷۱ ، ۶۵ ، ۷۲ ، ۷۰ ، ۶۰ ، ۷۵ : ورزشکار دوم

میانه پرتاب دو ورزشکار را با هم مقایسه کنید. توضیح دهید در این مسئله، میانه چه چیزی را نشان می‌دهد. عملکرد کدام یک را بهتر ارزیابی می‌کنید؟

۴) داده‌های مقابل را در نظر بگیرید: ۳ ، ۵ ، ۸

الف) میانگین و میانهٔ این داده‌ها را حساب کنید.

ب) در داده‌ها به جای عدد ۸، عدد ۹۰ را بنویسید و مجدداً میانگین و میانه را حساب کنید. با توجه به تغییرات انجام شده در قسمت «ب»، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

پ) با تغییر یکی از داده‌ها (میانه / میانگین) همواره تغییر می‌یابد.

ت) میانه به کوچکی و بزرگی داده‌های قبل و بعد از خود بستگی (دارد / ندارد).

۵) میانه نمرات دانش‌آموزان یک کلاس ۲۵ نفری، برابر ۱۷ است. میانه چه اطلاعاتی درباره نمره‌های کلاس به شما می‌دهد؟

۶) میانهٔ نمرات ریاضی در دو کلاس، ۱۷ و ۱۲ است. وضعیت نمرات دو کلاس را توصیف کنید.

۷) میانگین ۵ داده برابر با ۱۷ و میانهٔ آنها ۱۴ است. ۵ عدد مثال بزنید که این شرایط را داشته باشند. این مسئله چند جواب می‌تواند داشته باشد؟

نمودار جعبه‌ای

در هنرستانی دو کلاس ۱۶ نفری به نام‌های «تلاش» و «کوشش» بود که بین آنها آزمون هماهنگ درس ریاضی برگزار شد. دبیران این دو کلاس نتایج کار هنرجویان خود را برای ارائه در جلسه دبیران آماده کردند. روز جلسه، مدیر از دبیران خواست نتایج این آزمون را گزارش کنند تا عملکرد کلاس‌ها مشخص شوند. دبیران این دو کلاس، فهرست نمرات را به همراه میانگین و میانۀ نمرات به شکل زیر ارائه کردند:

کلاس تلاش: میانگین ۱۶ و میانۀ ۱۴/۵ کلاس کوشش: میانگین ۱۵ و میانۀ ۱۶

کلاس تلاش

| نمره هنرجویان |
|---------------|
| ۱۸ |
| ۱۴/۵ |
| ۱۸ |
| ۱۴ |
| ۱۹ |
| ۹ |
| ۱۴ |
| ۱۹/۵ |
| ۱۴/۵ |
| ۱۹ |
| ۱۸ |
| ۱۴ |
| ۱۳ |
| ۱۴ |
| ۱۴ |
| ۱۹/۵ |

کلاس کوشش

| نمره هنرجویان |
|---------------|
| ۱۰ |
| ۱۷ |
| ۱۲ |
| ۱۵ |
| ۲۰ |
| ۱۰ |
| ۱۷ |
| ۱۷ |
| ۱۰ |
| ۱۰ |
| ۱۵ |
| ۱۹ |
| ۱۷ |
| ۱۲ |
| ۱۹ |
| ۲۰ |

مدیر گفت: درک عملکرد هنرجویان از طریق این فهرست دشوار است، بهتر است نموداری رسم شود تا درک بهتری داشته باشیم.

یکی از دبیرانی که آمار درس می‌داد گفت: بهتر است از نمودار جعبه‌ای استفاده کنیم.



شما با انجام فعالیت زیر می‌توانید با مفهوم نمودار جعبه‌ای و کاربردهای آن آشنا شوید.

نمره‌های مرتب شدهٔ درس ریاضی کلاس «کوشش» به صورت زیر است.

۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۲، ۱۲، ۱۵، ۱۵، ۱۷، ۱۷، ۱۷، ۱۷، ۱۹، ۱۹، ۲۰، ۲۰

۱ میانۀ نمره‌ها را با نقطه‌ای به نام M روی خط‌چین زیر مشخص کنید.



۲ برای اعداد قبل از میانه، دوباره میانه را پیدا کنید و آن را روی خط‌چین با نقطهٔ C مشخص کنید همچنین برای اعداد بعد از میانه، دوباره میانه را پیدا کنید و آن را روی خط‌چین با نقطهٔ D مشخص کنید.

۳ کمترین نمره را با نقطهٔ A و بیشترین نمره را با نقطهٔ B روی خط‌چین مشخص کنید.

۴ مستطیلی رسم کنید که نقاط C و D روی عرض‌های این مستطیل (جعبه) قرار گیرند. پاره‌خطی از A به C و پاره‌خطی از B به D وصل کنید. درصد تعداد نمرات دانش‌آموزان در هر بازه را پیدا کرده و در جدول زیر را کامل کنید.

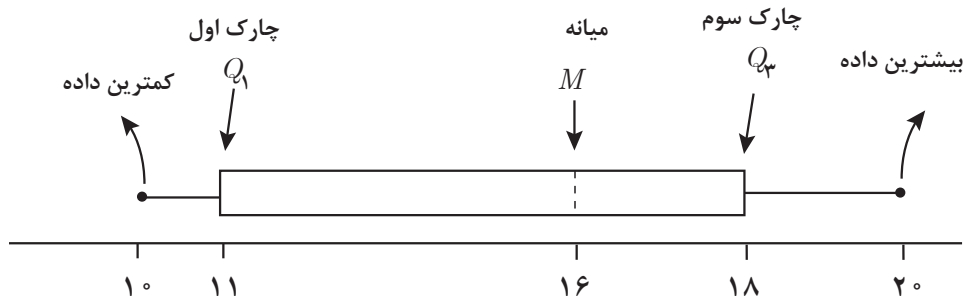
| بازه نمرات | قبل از C | بین C و D | قبل از D | بعد از D |
|---------------------------|------------|---------------|------------|------------|
| درصد تعداد نمرات هنرجویان | | | | |

در فعالیت (۴)، میانه^۱ برابر ۱۶ است، یعنی $M = 16$. میانۀ اعداد قبل از M برابر ۱۱ است، یعنی $C = 11$. تعداد نمره‌های قبل از C ، $\frac{1}{4}$ کل نمرات است؛ به همین دلیل آن را چارک اول می‌نامند و با Q_1 نشان می‌دهند. تعداد نمره‌های بعد از Q_1 ، سه برابر تعداد نمرات قبل از آن است. میانۀ اعداد بعد از M برابر ۱۸ است، یعنی $D = 18$. تعداد نمره‌های قبل از D ، $\frac{3}{4}$ تعداد کل نمره‌ها است؛ به همین دلیل آن را چارک سوم می‌گویند و با Q_3 نشان می‌دهند. تعداد نمره‌های قبل از Q_3 سه برابر تعداد نمره‌های

۱- M حرف اول کلمه Median به معنی میانه است.

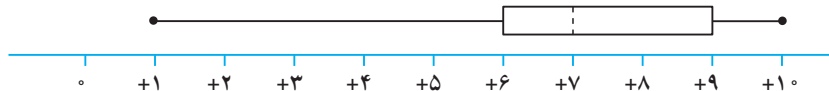
۲- Q حرف اول کلمه Quartile به معنی چارک است.

بعد از آن است. تعداد نمره‌های بین Q_1 و Q_3 ، یعنی آنهایی که درون جعبه قرار دارند، تقریباً ۵۰ درصد تعداد کل نمره‌ها است.



مثال ۸

نمودار جعبه‌ای زیر را در نظر بگیرید.



در این نمودار میانه برابر با ۷ است. نزدیک‌تر بودن میانه به چارک اول (۶)، نسبت به چارک سوم (۹) نشان می‌دهد تمرکز داده‌ها در سمت چپ میانه بیشتر از سمت راست میانه است (زیرا تعداد داده‌ها در هر دو طرف برابر است ولی در سمت چپ، ۵۲ درصد داده‌ها بین ۶ و ۷ است. در صورتی که در سمت راست، ۵۲ درصد داده‌ها بین ۷ تا ۹ است). به همین ترتیب بلندتر بودن دنباله سمت چپ نسبت به دنباله سمت راست نشان می‌دهد که پراکندگی داده‌ها در سمت چپ بیشتر از پراکندگی داده‌ها در سمت راست است.

مثال ۹

پلیس راهور، در یک شهر، آمار تصادفات نوروز را از چهار روز قبل از تعطیلات طی ۲۰ روز به صورت زیر گزارش کرده است:

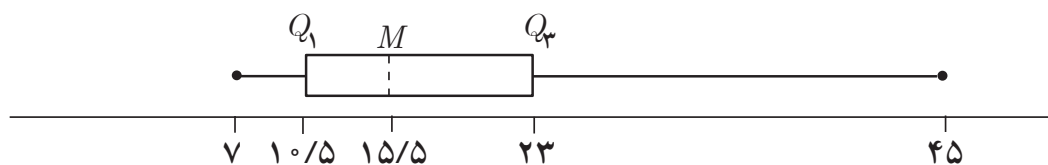
۱۷، ۸، ۲۴، ۱۶، ۸، ۹، ۲۶، ۲۰، ۱۴، ۱۸، ۷، ۱۲، ۱۳، ۱۱، ۱۵، ۱۰، ۲۸، ۳۳، ۲۲، ۴۵

نمودار جعبه‌ای را برای این داده‌ها رسم می‌کنیم.

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

۷، ۸، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۲۰، ۲۲، ۲۴، ۲۶، ۲۸، ۳۳، ۴۵

کمترین داده برابر ۷ و بیشترین داده برابر ۴۵ است، پس دامنه تغییرات داده‌ها برابر با ۳۸ است.
 میانه $M=15/5$ و چارک اول $Q_1 = 10/5$ و چارک سوم $Q_3 = 23$ است.

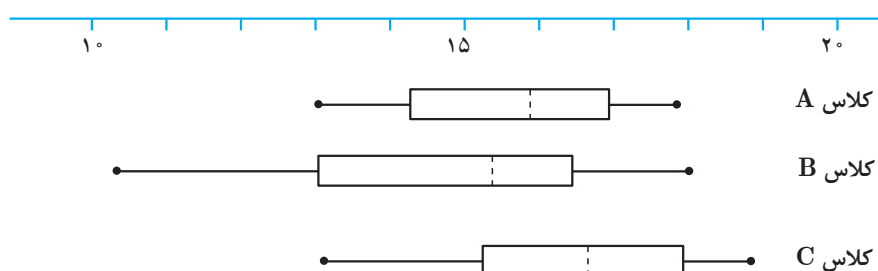


میانه $M=15/5$ است. این عدد نشان می‌دهد که تقریباً ۵۰ درصد از این روزها، تعداد تصادف‌های روزانه بیشتر یا مساوی ۱۶ است (تعداد تصادف‌ها عدد طبیعی است).
 چارک اول، $Q_1 = 10/5$ نشان می‌دهد که تقریباً ۲۵ درصد از این روزها، تعداد تصادف‌های روزانه کمتر یا مساوی ۱۰ است.
 چارک سوم، $Q_3 = 23$ نشان می‌دهد که تقریباً ۷۵ درصد از این روزها، تعداد تصادف‌های روزانه کمتر یا مساوی ۲۳ است.

هر یک از دو دنباله رسم شده در دو طرف جعبه نشان دهنده تقریباً ۲۵٪ داده‌ها است و بلندتر بودن دنباله سمت راست نشان می‌دهد پراکندگی تعداد تصادف‌ها در این قسمت بیشتر است. در این مثال تقریباً ۲۵٪ از داده‌ها از ۷ تا ۱۰/۵ است. همچنین نزدیک بودن M به Q_1 نشان می‌دهد پراکندگی تعداد تصادف‌ها بین آنها کمتر از پراکندگی تعداد تصادف‌های بین M تا Q_3 است.
 در نمودار جعبه‌ای، تقریباً ۵۰ درصد داده‌ها درون جعبه قرار می‌گیرند. اگر M در وسط جعبه قرار داشته باشد، نشان می‌دهد پراکندگی داده‌ها از Q_1 تا M همانند پراکندگی از M تا Q_3 است. هر چقدر M از وسط جعبه به Q_3 نزدیک‌تر شود پراکندگی بین آن دو کمتر از پراکندگی بین Q_1 تا M خواهد شد.

مثال ۱۰

نمودار زیر عملکرد سه کلاس A، B و C را در امتحان ریاضی نشان می‌دهد.





این نمودار نشان می‌دهد که نیمی از هنرجویان کلاس C از ۷۵٪ هنرجویان کلاس B عملکرد بهتری داشته‌اند. همه هنرجویان کلاس A و همه هنرجویان کلاس C از ۲۵٪ هنرجویان کلاس B عملکرد بهتری داشته‌اند. تقریباً نمره نیمی از هنرجویان کلاس B بیشتر یا مساوی ۱۶ است. در حالی که نمره نیمی از هنرجویان کلاس C بیشتر یا مساوی ۱۷/۵ است. گرچه کمترین نمره در کلاس A با کمترین نمره در کلاس C برابر است، ولی نمره نیمی از هنرجویان کلاس C بیشتر از نمره نیمی از هنرجویان کلاس A است.

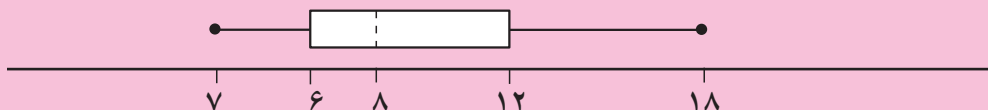
۱ میزان بارندگی (بر حسب میلی‌متر) در یک شهر طی ۱۵ روز به صورت زیر گزارش شده است:

۱۶، ۳، ۲، ۸، ۰، ۵، ۲۵، ۱۵، ۱۲، ۰، ۹، ۱، ۵، ۰، ۲

الف) چارک اول، میانه و چارک سوم چه اعدادی هستند؟

ب) تقریباً چند درصد داده‌ها بین Q_1 و Q_3 قرار دارند؟
پ) نمودار جعبه‌ای داده‌ها را رسم و آن را تفسیر کنید.

۲ یک شرکت بیمه می‌خواهد بررسی‌هایی را برای پرداخت هزینه‌های بستری بیماران دچار حمله قلبی انجام دهد. بعد از آنکه مدت بستری شدن (بر حسب روز) تعدادی بیمار پس از حمله قلبی در یک بیمارستان مشخص شد نمودار جعبه‌ای آن را به صورت زیر رسم کرده‌اند:



الف) میانه داده‌ها چند است؟

ب) چارک اول چند است؟ چند درصد داده‌ها قبل از آن و چند درصد بعد از آن قرار دارند؟

پ) مقدار Q_3 چند است؟ این عدد نشان‌دهنده چیست؟

ت) چند درصد داده‌ها درون جعبه قرار دارند؟

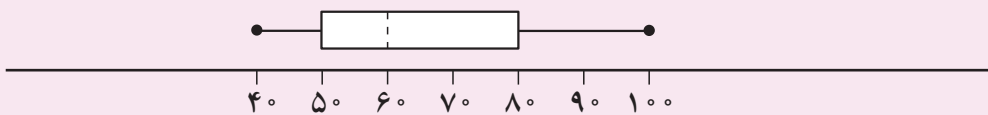
ث) بلندتر بودن دنباله سمت راست جعبه نشان‌دهنده چیست؟

نمودار جعبه‌ای فهرست نمرات کلاس‌های تلاش و کوشش (در ابتدای این بخش) را رسم کنید.

سپس با مقایسه این نمودارها، به نظر شما کدام کلاس عملکرد بهتری دارد؟ چرا؟



۱ نمودار جعبه‌ای نمره‌های زبان انگلیسی در یک کلاس به صورت زیر است:

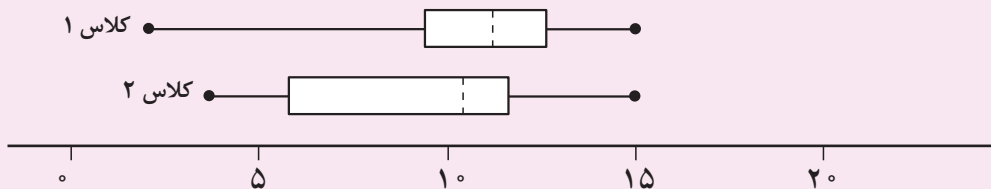


الف) میانه برابر چه عددی است؟

ب) فاصله بین Q_1 و Q_3 چقدر است؟

پ) چند درصد از نمره‌ها قبل از Q_3 قرار دارند؟

۲ نمودارهای زیر عملکرد دو کلاس را در درس عربی نشان می‌دهد.



الف) در کدام کلاس نمره دانش‌آموزان پراکندگی کمتری دارد؟

ب) نیمی از دانش‌آموزان کلاس ۱، نمره‌شان بیشتر از چند است؟

پ) کدام کلاس عملکرد بهتری دارد؟ چرا؟

ت) آیا می‌توان گفت ۷۵ درصد دانش‌آموزان کلاس ۱ از همه دانش‌آموزان کلاس ۲ بهتر عمل کرده‌اند؟

۳ در یک تیم والیبال، کوتاه‌ترین قد ۱۶۸ و بلندترین قد ۲۰۳ سانتی‌متر و میانه برابر

۱۸۴ سانتی‌متر است. اگر فاصله بین Q_3 و Q_1 برابر ۱۱ باشد، آیا می‌توان نمودار جعبه‌ای

قد افراد این تیم را رسم کرد؟

۴ غلظت قند خون ۱۲ نفر (برحسب mM dm^{-3})، ۳۰ دقیقه پس از مصرف غذا اندازه‌گیری

شده است. نتایج به دست آمده به شرح زیر است.

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ۳/۷ | ۵/۱ | ۴/۶ | ۳/۹ | ۳/۸ | ۴/۲ |
| ۳/۹ | ۴/۰ | ۵/۲ | ۴/۷ | ۴/۰ | ۳/۸ |

الف) میانه و چارک‌های اول و سوم را پیدا کنید.

ب) اگر غلظت قند خون شما، ۳۰ دقیقه پس از مصرف غذا ۴/۱ باشد، وضعیت خود را نسبت به این افراد توصیف کنید.

۵ سجاد در رشته کشاورزی تحصیل می‌کرد. او تنوع تعداد نخودهای موجود در غلاف‌ها را بررسی کرد. تعداد نخودهای موجود در ۱۷ غلاف به شرح زیر است.

۷، ۹، ۱۰، ۷، ۸، ۹، ۵، ۶، ۵، ۱۱، ۳، ۴، ۱۰، ۱۲، ۸، ۵، ۴



نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را رسم و تفسیر کنید.

- ۱- بخشعلی زاده، شهرناز؛ بروجردیان، ناصر؛ پناهنده، سوسن؛ دهقانی ابیانه، زین العابدین و فانی، زیبا. (۱۳۹۵). ریاضی ۱. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
- ۲- بروجردیان، ناصر. (تابستان ۱۳۹۲). تابع و حد تابع در نگاه جدید و نگاه قدیم. مجله ریاضی پایا، شماره ۲ دوره یکم.
- ۳- بخشعلی زاده، شهرناز. (۱۳۸۴). آمار و مدلسازی. محراب قلم.
- ۴- Hirsch, Christian R.; Fey, James T.; Hart, Eric W.; Schoen, Harold L.; Watkins, Ann E.; Ritsema, Beth E.; Walker, Rebecca K. and others. Core-plus mathematics- course ۲.۱nd Edition.
- ۵- Hirsch, Christian R.; Fey, James T.; Hart, Eric W.; Schoen, Harold L.; Watkins, Ann E.; Ritsema, Beth E.; Walker, Rebecca K. and others. Core-plus mathematics- course ۲.۲nd Edition.
- ۶- Hirsch, Christian R.; Fey, James T.; Hart, Eric W.; Schoen, Harold L.; Watkins, Ann E.; Ritsema, Beth E.; Walker, Rebecca K. and others. Core-plus mathematics- course ۲.۳nd Edition.
- ۷- Moore- Harris, Beatrice; Bailey, Rhonda; Ott, Jack M.; Pelfrey, Ronald; Howard, Arthur C.; Price, Jack; Vielhaber, Kathleen; McClain, Kay. Mathematics application and concepts-course ۲. McGraw-Hill. ۲۰۰۶
- ۸- Moore- Harris, Beatrice; Bailey, Rhonda; Ott, Jack M.; Pelfrey, Ronald; Howard, Arthur C.; Price, Jack; Vielhaber, Kathleen; McClain, Kay. Mathematics application and concepts-course ۳. McGraw-Hill. ۲۰۰۶
- ۹- Barber, Dianne B. MATH IN CONTEXT: A Tool Kit for Adult Basic Skills Educators. Appalachian State University. NC Community College System. ۲۰۰۷



هنرآموزان محترم، هنرجویان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظرهای اصلاحی خود را درباره مطالب این کتاب از طریق نامه
 بدشانی تهران - صندوق پستی ۴۸۷۴ / ۱۵۸۷۵ - گروه درسی مربوط و یا پیام نگار tvoccd@roshd.ir ارسال نمایند.

وبگاه: www.tvoccd.medu.ir

دفترتالیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کار دانش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان درباره کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانه راهبری دروس نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائه نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

همکاران هنرآموز که در فرایند اعتبارسنجی این کتاب مشارکت نموده‌اند.

| | |
|--|--|
| استان کردستان: مریم عبدالملکی | استان آذربایجان شرقی: نسرین سربخشی |
| استان چهارمحال و بختیاری: کامران کبیری | استان مازندران: سیده صدیقه علوی |
| استان کرمان: محسن امیری بیدشکی | استان قزوین: فرزانه توکلی |
| استان ایلام: ابراهیم بهرامی | استان خراسان رضوی: شهره معلمی |
| استان سیستان و بلوچستان: مصطفی امیدی | استان همدان: بهروز اسکندری |
| استان خراسان شمالی: محمد صادقی | استان کرمانشاه: فریبا سجادی فر |
| استان آذربایجان غربی: ایرج پویا | شهرستان‌های استان تهران: زهره یاسری، سیدجلال جعفری |

شهر تهران: سعیده خانعلی، سپیده انجامی، افسانه اشقلی فراهانی، زهرا جلال، حمیدرضا کیانی نژاد، احسان ضیال‌الدین‌الحق، هاجر کرمانی، حامد افخم، طاهر ملائی، پرویز خزائی، داریوش نصیری.