تابع

فصل ۲

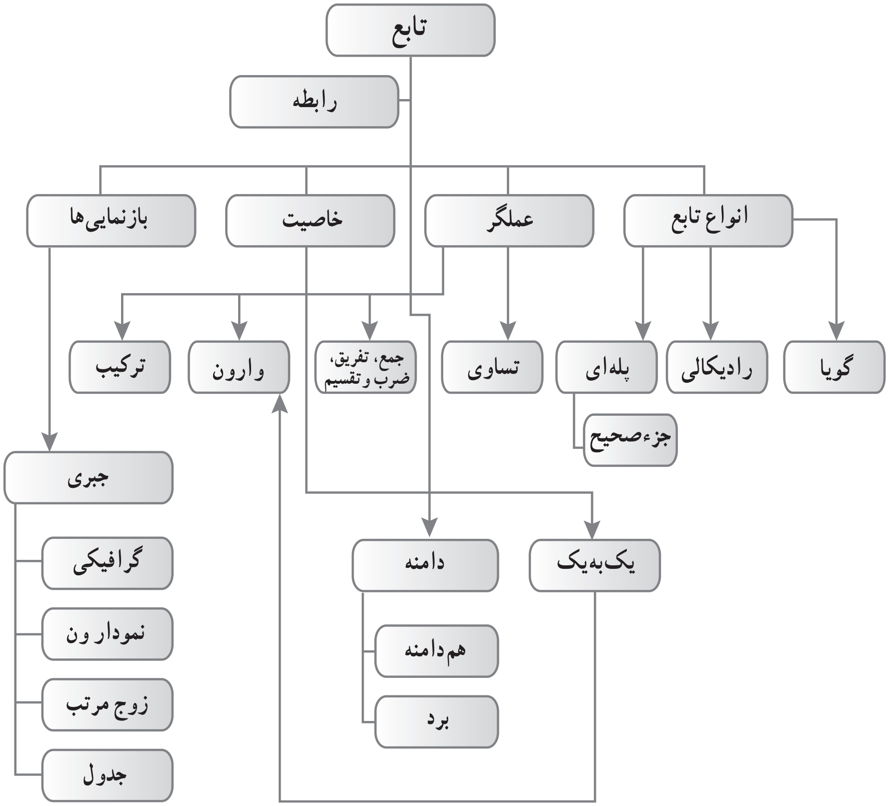
مفهوم تابع در ریاضیات و علوم مختلف دارای کاربردهای فراوانی است. تابع در دنیای واقعی برای توصیف بسیاری از پدیده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌طور نمونه قد متوسط کودکان را می‌توان به‌صورت یک تابع رادیکالی مانند $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ نمایش داد.

تابع

تصویر عنوانی راجع به قد متوسط کودکان است که به‌وسیله یک تابع رادیکالی قابل بیان است و در متن درس فعالیتی در این مورد آورده شده است. و تصاویر متعلق به فرزندان شهدای مدافع حرم است و به عنوان مثالی از کاربرد در دنیای واقعی است معمولاً توابعی که در دنیای واقعی دارای کاربرد هستند، ظاهر پیچیده ندارند. بنابراین توصیه می‌شود که از طرح مباحث دشوار که کاربردی هم در دنیای واقعی ندارند خودداری شود.

مفهوم تابع در ریاضیات و علوم مختلف دارای کاربردهای فراوانی است. تابع در دنیای واقعی برای توصیف بسیاری از پدیده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌طور نمونه قد متوسط کودکان را می‌توان به‌صورت یک تابع رادیکالی مانند $f(x) = ۷\sqrt{x} + ۵۰$ نمایش داد.

نقشه مفهومی فصل ۲



مقدمه‌ای در مورد آموزش تابع

- سیر تکامل مفهوم تابع
- تعریف در ریاضیات
- تعریف تابع
- ویژگی اساسی تابع
- بازنمایی‌های تابع و ارتباط بین آنها

سیر تکامل مفهوم تابع

(دوره اولیه) : مفهوم تابع و مثال‌هایی خاصه از آن را از هزاران سال قبل می‌توان دنبال کرد؛ به‌طور مثال شمردن، چهار عمل اصلی (که توابعی از دو متغیرند)، ریشه‌های دوم، مکعب‌ها و ریشه‌های سوم و موارد زیادی از این دست همگی دربردارنده مفهوم تابع هستند. اگرچه سیر تکامل تابع به ۴۰۰۰ سال قبل برمی‌گردد، اما ریاضی‌دان‌ها تنها طی ۵۰۰ سال گذشته تلاش‌های خود را برای ارائهٔ یک تعریف دقیق از تابع آغاز کرده‌اند.

تسلط ایده‌های هندسی سیر تکامل مفهوم تابع

(دوره دوم) : مطالعه دقیق و ریاضی‌گونه در مورد تابع در پایان قرن هفدهم انجام گرفت. لایپ نیتز (۱۷۱۶ـ۱۶۴۶) اولین کسی بود که اصطلاح تابع را در سال ۱۶۷۳ به کار برد. لایپ نیتز این عبارت را برای توصیف یک کمیت یا مقدار وابسته به یک منحنی، مثلاً طول یک نقطه روی منحنی یا شیب منحنی به کار برد.

اصطلاحات «ثابت»، «متغیر» و «پارامتر» نیز توسط لایپ نیتز معرفی شد.

حساب دیفرانسیل اولیه، حساب دیفرانسیلی از منحنی‌های هندسی بود تا حساب دیفرانسیلی از توابع. در حقیقت بیشتر حساب دیفرانسیل اولیه، با مسائلی در مورد منحنی‌ها و خواص منحنی‌ها از قبیل خط مماس و مساحت‌های تحت آنها سر و کار داشت (جونز ۲۰۰۶ به نقل از کلینر).

دوره ایده‌های جبری

(دوره سوم) : هم‌زمان با تغییر دیدگاه‌های ریاضی‌دانان از ایده‌های هندسی به ایده‌های جبری نماد تابع نیز دستخوش دگرگونی شد.

در سال ۱۷۱۸ برنویی اولین تعریف رسمی از تابع را ارائه کرد. برنویی یک تابع از یک متغیر را یک

کمیت ترکیب شده به هر شیوهٔ دلخواه از این متغیر و تعدادی ثابت می‌داند. اگرچه وی توضیح نمی‌دهد «به هر شیوهٔ دلخواه» به چه معنی است؟ تعاریفی که از تابع تا قرن نوزدهم بیان شد تعاریف دقیقی نیستند و تعاریف جامع و مانع به حساب نمی‌آیند ولی سیر تکامل تعریف را نشان می‌دهد و در تدریس بهتر است در نظر گرفته شود.

اویلر در سال ۱۷۴۸ تعریف زیر را ارائه کرد :

یک تابع از یک کمیت متغیر، عبارتی تحلیلی ترکیب شده به شکل دلخواه از آن کمیت متغیر و اعداد یا کمیت‌های ثابت است.

اویلر اولین کسی است که نماد $f(x)$ را به کار برد. تعریف اویلر تلاشی برای استفاده از جبر در جهت نمایش موضوعات هندسی بود. مشاهدات اویلر به یک دیدگاه وسیع‌تر از تابع منجر شد.

استفاده از جبر در جهت نمایش موضوعات هندسی

تعریف اویلر شبیه تعریف برنویی است. اضافه شدن اصطلاح «عبارت تحلیلی» بااهمیت است، زیرا اندیشه را از هندسه به جبر تغییر می‌دهد. گرچه اویلر به صراحت عبارت تحلیلی را معرفی نمی‌کند ولی از نظر وی عبارت تحلیلی قابل قبول شامل چهار عمل جبری، ریشه‌ها، نماها، لگاریتم‌ها، توابع مثلثاتی، مشتق‌ها و انتگرال‌هاست. به هر حال، روشن است که اویلر عبارت $f(x)=\begin{cases} x & ,x\geq 0 \\ -x & ,x<0 \end{cases}$ را به عنوان دو تابع و نه یک تابع در نظر می‌گرفته است.

ورود نظریهٔ مجموعه‌ها : (دورهٔ چهارم)

در سال ۱۸۲۹ دیریکله مثالی از یک تابع ارائه کرد که در آن یک مقدار به همه اعداد گویا و مقداری دیگر به همه اعداد گنگ نسبت داده می‌شود. این اولین مثال صریح از یک تابع بود که نه قابل نمایش به‌وسیلهٔ یک عبارت تحلیلی بود و نه یک منحنی قابل رسم بدون ابزار بود. این اولین مثال از یک تابع همه جا ناپیوسته بود.

مقارن با پایان قرن نوزدهم، ریاضی‌دان‌ها تلاشی را برای صورت‌بندی همهٔ ریاضیات با استفاده از نظریهٔ مجموعه‌ها کردند.

دیریکله (۱۸۵۹ــ۱۸۰۵) در سال ۱۸۳۷ چهارچوب تعریف یک تابع را برحسب یک تناظر قراردادی بین متغیرهایی که با مجموعه‌های عددی نمایش داده شده‌اند، پی‌ریزی کرد. کلینر (۱۹۸۹) به نقل از لوزین تعریف دیریکله را چنین ذکر می‌کند : y تابعی از متغیر x تعریف شده روی بازه $a<x<b$ است، هرگاه به هر مقدار متغیر x از این بازه یک مقدار معین از متغیر y نظیر شود. دیریکله اولین کسی بود که به‌صورت جدی مفهوم تابع را به عنوان یک تناظر دلخواه در نظر گرفت.

در سال ۱۹۳۹ یک گروه از ریاضی‌دانان با نام مستعار بورباکی تابع را به شیوهٔ زیر تعریف کردند:

فرض کنید که E و F دو مجموعه باشند که ممکن است مجزا یا غیرمجزا باشند. یک رابطه بین یک متغیر x از E و یک متغیر y از F یک رابطهٔ تابع‌گونه در y نامیده می‌شود، هرگاه برای هر x در E، یک y یکتا در F وجود داشته باشد که در رابطه داده شده با x باشد. بورباکی بعداً همچنین تعریف تابع را به عنوان یک زیرمجموعهٔ خاص از حاصل‌ضرب دکارتی E و F داد.

تعریف بورباکی را می‌توان اولین تعریف تابع به عنوان یک مجموعه از زوج‌های مرتب دانست. این دوره را می‌توان حضور یک دیدگاه جدید یعنی مفهوم منطقی (مجرد، ترکیبی، اصل موضوعی) جدید از تابع در برابر مفهوم جبری (محسوس، تحلیلی و ساختنی) قبلی از تابع تلقی کرد. (کلینر ۱۹۸۹).

در حقیقت مفهوم تابع یکی از خصیصه‌های متمایزکننده ریاضیات «مدرن» در برابر ریاضیات «کلاسیک» است (کلینر ۱۹۸۹).

ارائهٔ تعریف در آغاز تدریس

گام آخر در علم ریاضی، صورت‌بندی مسائل از طریق اصل موضوعی ساختن آن است. این نقطهٔ پایانی، نباید به عنوان نقطهٔ آغازین تدریس ریاضی به حساب آید (فرودنتال، ۱۹۹۱).

دانش پداگوژیکی محتوا

اتصال دانش اولیه به دانش جدید ــ ارائهٔ تعریف

درحالی‌که می‌توان تعریفی را در قالب یک جمله بیان کرد، باز کردن یک تعریف یک کار شناختی دشوار است (سلدن ۱۹۹۲).

به نظر تال (۱۹۹۰) به عوض سر و کار داشتن در ابتدا با تعاریف رسمی، که شامل عناصر ناآشنا برای یادگیرنده است، بهتر است کوشش شود تا رویکردی پیدا شود که بر مبنای آن ایده‌هایی نباشند که دارای نقش دوگانه آشنا بودن برای دانش‌آموزان و نیز فراهم ساختن پایه‌ای برای رشد ریاضی بعدی باشند. تال چنین ایده‌ای را ریشه‌شناختی می‌نامد.

یک ریشه‌شناختی از یک بنیان ریاضی متفاوت است. درحالی‌که یک بنیان ریاضی یک نقطهٔ شروع مناسب برای توسعه منطقی یک موضوع است، یک ریشه‌شناختی، مناسب‌تر برای پیشرفت برنامه آموزشی است.

ویژگی اساسی تابع چیست؟

فرودنتال در تحلیل جامع خود (۱۹۸۳) دلخواه بودن و یکتایی (یک بنیانی بودن) را به عنوان ویژگی‌های اساسی تابع، به شکلی که در طول تاریخ تکامل پیدا کرده است در نظر می‌گیرد.

Arbitrariness

طبیعت دلخواه تابع به هم به ارتباط بین دو مجموعه‌ای که به‌وسیلهٔ آنها تابع تعریف می‌شود و هم به خود مجموعه‌ها برمی‌گردد.

Univalence

یکتایی به نوع ارتباط بین اعضای دو مجموعه برمی‌گردد.

بازنمایی‌های مختلف

درک یک مفهوم در یک بازنمایی آن، لزوماً به این معنی نیست که فرد آن را در هر بازنمایی دیگر نیز درک می‌کند. دانش‌آموزان باید مفاهیم را در بازنمایی‌های مختلف آن درک کنند و قادر باشند که آنها را به یکدیگر تبدیل کنند و بین آنها ارتباط برقرار کنند. بازنمایی‌های مختلف بصیرت‌های متفاوتی را به‌دست می‌دهند که امکان یک درک بهتر، عمیق‌تر، نیرومندتر و کامل‌تر از مفهوم را به‌دست می‌دهد.

وقتی فرد با بازنمایی‌های متفاوت یک مفهوم ریاضی سروکار دارد، ممکن است مفهوم را با به چنگ‌آوردن خواص مشترک آن و نادیده گرفتن مشخصه‌های نامربوطی که بر آن بازنمایی به‌خصوص در دسترس تحمیل شده‌اند، انتزاع کند.

اهداف کلی فصل

۱ آشنایی بیشتر با تابع و بازنمایی‌های آن
۲ معرفی برخی از انواع توابع
۳ درک مفهوم وارون تابع و محاسبه تابع وارون
۴ آشنایی با اعمال روی توابع و ترکیب توابع

درس ۱
آشنایی بیشتر با تابع

اهداف درس

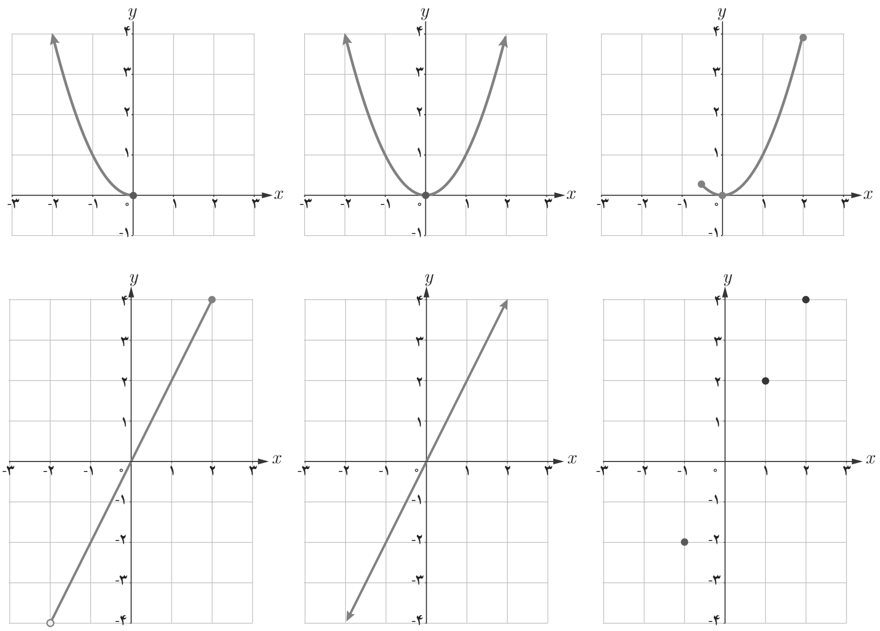
۱ درک ضابطه‌های تابع، دامنه، برد و هم‌دامنه
۲ توانایی در نمایش یک تابع به کمک دامنه، هم‌دامنه و ضابطهٔ تابع
۳ درک تابع به عنوان یک ماشین
۴ توانایی تشخیص تساوی دو تابع
۵ آشنایی با برخی از کاربردهای واقعی تابع

در ابتدا پیش‌نیازهای تابع در کتاب سال قبل را با پرسش و پاسخ مرور کرده و سپس کار در کلاس صفحه ۳۸ را دانش‌آموزان حل نمایند. تأکید بر ارتباط بین دامنه و برد و ضابطه به همراه نمودار در قسمت الف حائز اهمیت است.

کار در کلاس صفحه ۳۸

الف) با توجه به توابع داده شده در جدول زیر، مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است و جدول را نیز کامل کنید. شباهت‌ها و تفاوت‌های نمودارها را با هم مقایسه کنید.

تابع	$k(x)=x^2$	$s(x)=x^2$	$t(x)=x^2$	$h(x)=2x$	$g(x)=2x$	$f(x)=2x$
دامنه تابع	$\left[-\frac{1}{2},2\right]$	$(-\infty,0]$	$\mathbb{R}$	$(-2,2]$	$\{-1,1,2\}$	$\mathbb{R}$
برد تابع	$[0,4)$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-4,4]$	$\{-2,2,4\}$	$\mathbb{R}$



در این کار در کلاس یادآوری مطالبی که در کلاس دهم خوانده‌اند مورد نظر بوده است و همچنین دقت بیشتری در نمایش تابع لحاظ شده است. مطالب این کار در کلاس در کلاس درس باید بحث شود. ممکن است دانش‌آموزان در پاسخ به این سؤالات دچار اشتباه هم شوند، اشتباهات هم می‌تواند بخشی از مسیر آموزش باشد. صرف پیدا کردن جواب برای ما کفایت نمی‌کند. ما می‌خواهیم دانش‌آموزان درگیر حل مسئله شوند، درگیر بحث و گفت‌وگو شوند، مثال نقض بیاورند، استدلال بیاورند، رد کنند، توجیه کنند که همهٔ اینها

فرایندهایی در آموزش ریاضیات هستند که به اندازهٔ جواب و محصول دارای ارزش هستند و شاید ارزش بالاتری داشته باشند. در این مثال مثلاً باید بچه‌ها استدلال کنند که کدام نمودار دامنهٔ $\{-۱,۱,۲\}$ دارد و سپس برد تابع را به‌دست آورند. در پاسخ‌های اشتباه ممکن است نکاتی نهفته باشد که معلم بتواند اشکالات دانش‌آموزان را دریابد. در قسمت ب این کار در کلاس دو تابع داده شده است که ضابطه مشخص است و ممکن است پاسخ‌های دانش‌آموزان برای دامنه جواب‌های متفاوتی باشد و این سؤال از سؤالات باز پاسخ هستند سپس به طرز نمایش تابع پرداخته می‌شود؛ مثلاً در تابع f در قسمت الف داریم :

$$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$$
$$f(x)=۲x$$

و تابع h به‌صورت زیر است :

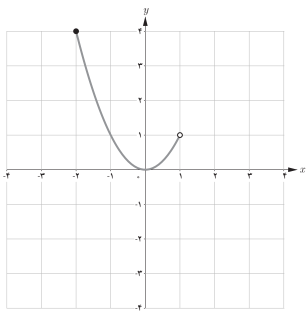
$$h: (-۲,۲]\rightarrow(-۴,۴]$$
$$h(x)=۲x$$

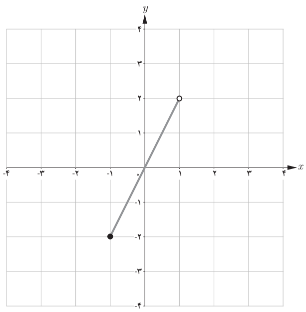
و این نکته باید بیان شود که هم‌دامنهٔ تابع را می‌توان هر مجموعهٔ دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت. به دانش‌آموزان باید اجازه داد که مثال‌های دیگری را خودشان مطرح کنند. که در کار در کلاس صفحهٔ ۴۰ این موضوع در نظر گرفته شده است و با توجه به سطح کلاس دانش‌آموزان می‌توانند پاسخ‌های جدید را نیز بیاورند.

مطلب بعدی از تابع به عنوان یک ماشین تغییر کرده است که موضوع متغیر وابسته و متغیر مستقل را نیز تداعی می‌کند که دانش‌آموزان از دبستان با این مفهوم آشنا هستند. کار در کلاس صفحهٔ ۴۰ نیز برای تسلط بر این مفهوم است.

ب) جدول روبه‌رو را به دلخواه (متفاوت از قسمت الف) کامل و نمودار هر تابع را رسم کنید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. چند پاسخ متفاوت برای f و g می‌توان ارائه کرد؟

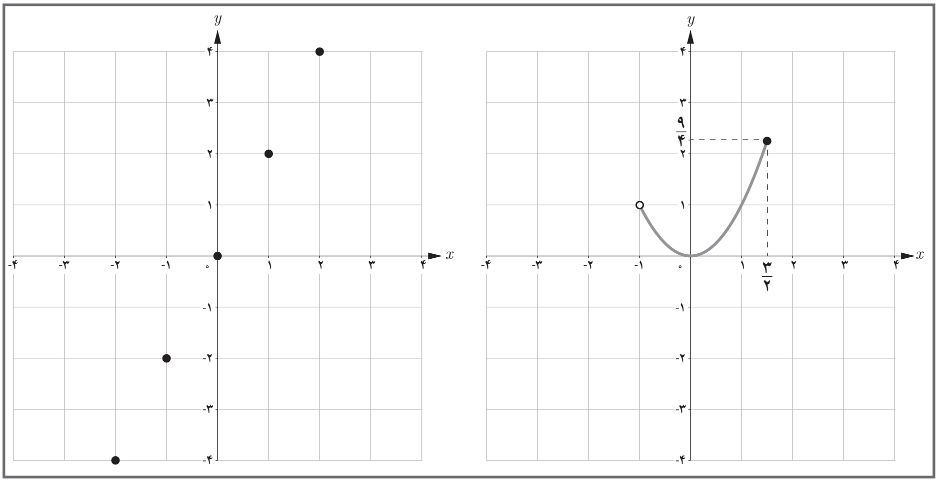
تابع	$f(x)=۲x$	$g(x)=x^۲$
دامنه	$[-۱,۱)$	$[-۲,۱)$
برد	$[-۲,۲)$	$[۰,۴]$





راه‌حل دیگری می‌تواند به‌صورت روبه‌رو باشد :

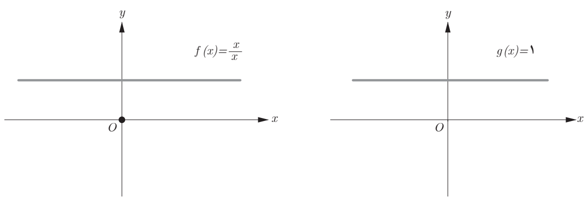
تابع	$f(x)=2x$	$g(x)=x^2$
دامنه	$\mathbb{Z}$	$(-1,\frac{3}{2}]$
برد	$\{2n \mid n\in\mathbb{Z}\}$	$[0,\frac{9}{4}]$



در صفحه ۴۱ تساوی دو تابع ارائه شده و در کار در کلاس و تمرین نیز مثال‌هایی آورده شده است. توصیه می‌شود از مثال‌های خیلی پیچیده خودداری شود تا دانش‌آموزان تساوی دو تابع را با مثال‌های ساده و حتی‌الامکان از روی نمودار و ضابطه درک کنند.

مثال : تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^2}$ و $g(x)=|x|$ با هم برابرند ولی تابع‌های $f(x)=\frac{x}{x}$ و $g(x)=1$ برابر نیستند. چرا؟

حل : تابع $f(x)=\frac{x}{x}$ ، دامنهٔ آن $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ است درحالی‌که تابع $g(x)=1$ دارای دامنهٔ $D_g=\mathbb{R}$ می‌باشد. بنابراین هرچند ضابطه‌ها به ظاهر برابر هستند ولی دامنه‌ها برابر نیستند، پس دو تابع f و g برابر نمی‌باشند، در نمودار نیز می‌بینید که دو تابع بر هم منطبق نیستند (تعریف نشده $=f(0)$ و $g(0)=1$)



در کار در کلاس زیر مثال‌هایی ساده ولی کمی آشنا برای دانش‌آموزان مطرح شده است که با حل آنها درک تساوی دو تابع به‌دست می‌آید.

کار در کلاس صفحه ۴۱

۱ در جدول زیر کدام‌یک از توابع داده شدهٔ زیر باهم برابرند؟ دلیل بیاورید :

۱	$f=\{(۱,۲),(۵,۷)\}$	$g=\{(۱,۷),(۵,۲)\}$	×
۲	$f=\{(a,b),(c,d)\}$	$g=\{(c،d),(a،b)\}$	✓
۳	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=۳x$	$g=\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ $g(x)=۳x$	×
۴	$f(x)=x\|x\|$	$g(x)=x^{۲}$	×
۵	$f(x)=۴x$	$g(x)=\frac{۸x}{۲}$	✓

حل :

۱ دامنه توابع f و g با هم برابرند $D_f=D_g=\{۱,۵\}$ ، ولی به ازای هر x در دامنه مشترکشان، ضابطه‌ها برابر نیستند؛ مثلاً $f(۱)=۲$ و $g(۱)=۷$ و $f(۱)\neq g(۱)$. پس $f\neq g$.

۲ دامنه دو تابع f و g با هم برابرند و به ازای هر x در دامنه مشترکشان، ضابطه‌ها نیز برابرند، بنابراین دو تابع f و g با هم برابرند ($f(a)=g(a)=b$ و $f(c)=g(c)=d$).

۳ دامنه تابع f برابر $\mathbb{R}$ و دامنه تابع g برابر $\mathbb{R}^+$ است، پس دو تابع با هم برابر نیستند، هرچند که ضابطهٔ دو تابع برابرند.

۴ دو تابع دارای دامنهٔ برابر $\mathbb{R}$ ولی ضابطهٔ آنها برابر نمی‌باشد؛ مثلاً $g(-۱)=۱$ و $f(-۱)=-۱$. پس $f\neq g$.

۵ دامنه دو تابع f و g برابر $\mathbb{R}$ است، از طرفی ضابطهٔ آنها نیز برابر است پس دو تابع f و g برابرند.

تمرین ۲ کار در کلاس مثالی از یک پدیده واقعی بیان شده که ضمن حل آن دانش‌آموزان به این نکته توجه می‌کنند که شرط تساوی دو تابع و تأثیر دامنه و برد به چه صورت است.

۲ وقتی در آسمان پدیدهٔ آذرخش رخ می‌دهد، اندکی پس از دیدن نور آن صدای آن را نیز می‌شنویم. صدای ناشی از آذرخش هر ۳ ثانیه حدود یک کیلومتر را طی می‌کند. رابطه بین فاصله ما از مکان وقوع آذرخش و زمانی که طول می‌کشد تا صدای آن را بشنویم در جدول زیر (برای برخی زمان‌ها) داده شده است، اگر $t\in[۴,۱۲]$:

الف) جدول را کامل کنید :

t (ثانیه)	۴	$۴\frac{۱}{۲}$	۵	۶	۸	۹	$۱۰\frac{۱}{۵}$	۱۱	۱۲
h (کیلومتر)	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۵}{۳}$	۲	$\frac{۸}{۳}$	۳	$\frac{۵۱}{۵}$	$\frac{۱۱}{۳}$	۴

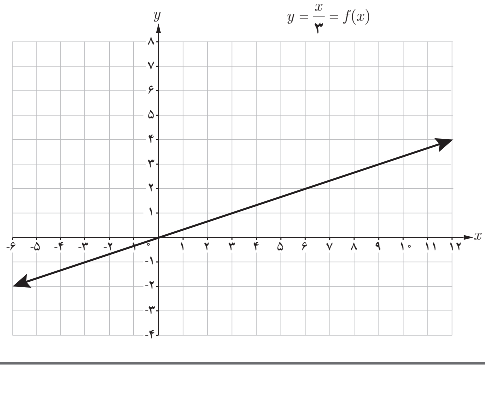
ب) چرا h تابعی از t است؟ آذرخش هر ۳ ثانیه حدود یک کیلومتر را طی می‌کند و فاصله ما از مکان وقوع آذرخش به زمان وابسته است.

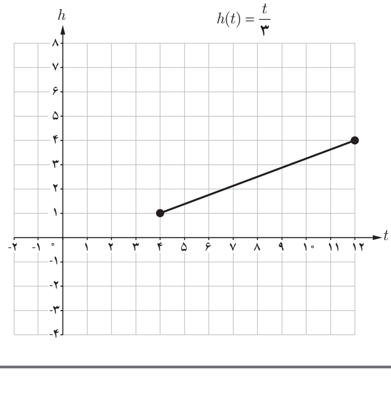
پ) دامنه و برد این تابع را بنویسید. $D=[۴,۱۲]\ ,\ R=[\frac{۴}{۳},۴]$

ت) نمایش مقابل از تابع h کامل کنید :

$$\begin{cases} h:[۴,۱۲]\to[\frac{۴}{۳},۴] \\ h(t)=\frac{t}{۳} \end{cases}$$

ث) نمودار تابع h و نمودار تابع $y=\frac{۱}{۳}x$ را رسم کنید و شباهت‌ها و تفاوت‌های آنها را بیان کنید.





شباهت‌ها

- ضابطهٔ هر دو تابع برابر است. (یک سوم متغیر مستقل برابر متغیر وابسته است.)
- دو تابع در بازهٔ [۴,۱۲] با هم برابر هستند.
- نمودار h بخشی از نمودار $y=\frac{x}{۳}$ است.

تفاوت‌ها

- دامنه دو تابع با هم برابر نیستند. $(D_h=[۴,۱۲]\ ,\ D_f=\mathbb{R})$
- برد دو تابع با هم برابر نیست. $(R_h=[\frac{۴}{۳},۴]\ ,\ R_f=\mathbb{R})$۱۳

۲ درس
انواع توابع

اهداف درس

۱ آشنایی با توابع گویا، رسم تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در دامنه‌های متفاوت

۲ آشنایی با توابع رادیکالی به شکل $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و رسم نمودار آنها

۳ تعیین دامنه و برد توابع $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و رسم نمودار توابع رادیکالی به کمک انتقال

۴ آشنایی با معادلات ساده‌ای که یک تابع را نمایش می‌دهند.

۵ آشنایی با توابع پله‌ای و جزء صحیح و رسم آنها

روش تدریس: انواع توابع

این درس با تعریف تابع گویا شروع می‌شود و سپس در کار در کلاس صفحه ۴۵ مثالی ساده از تابع گویا ارائه شده است که بیشتر در این قسمت توجه به دامنه و آشنایی مختصر با رسم چنین توابعی است. توصیه می‌شود از بیان مثال‌های پیچیده و رسم آنها در این قسمت خودداری شود و سطح سؤالات در همین حد باشد.

کار در کلاس صفحه ۴۵

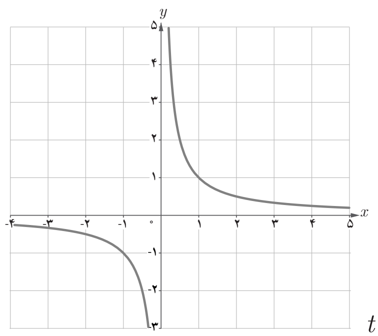
مشخص کنید که هر نمودار زیر متناظر با کدام تابع است؟ دلیل بیاورید.

$$\begin{cases} t:\mathbb{R}-\{۰\}\to\mathbb{R} \\ t(x)=\frac{۱}{x} \end{cases}$$
(ت)

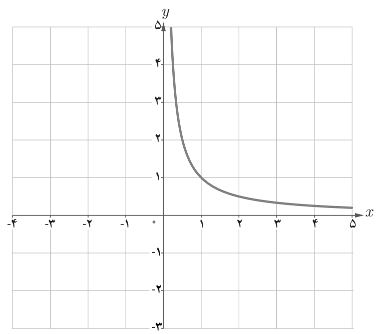
$$\begin{cases} h:\{۱,۲,۳\}\to\mathbb{R} \\ h(x)=\frac{۱}{x} \end{cases}$$
(پ)

$$\begin{cases} g:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R} \\ g(x)=\frac{۱}{x} \end{cases}$$
(ب)

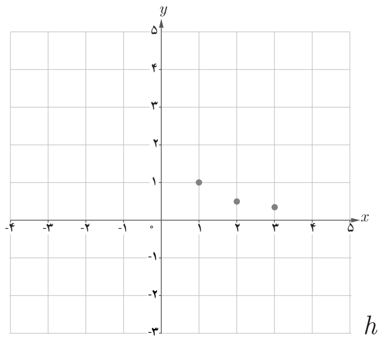
$$\begin{cases} f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\frac{۱}{x} \end{cases}$$
(الف)



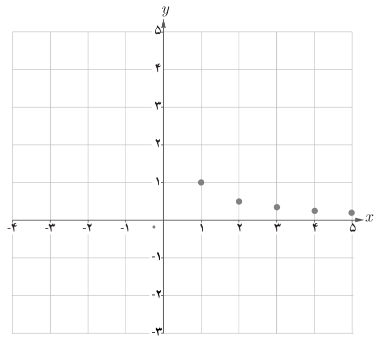
t



g



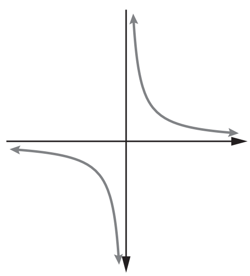
h



f

ضابطهٔ همهٔ توابع یکی است ولی دامنهٔ آنها با هم برابر نیستند، لذا

نمودارهای متفاوتی دیده می‌شود. پایه رسم این توابع، تابع گویای $\begin{cases} f:\mathbb{R}-\{۰\}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\frac{۱}{x} \end{cases}$ است که نمودار آن به‌صورت روبه‌رو است :



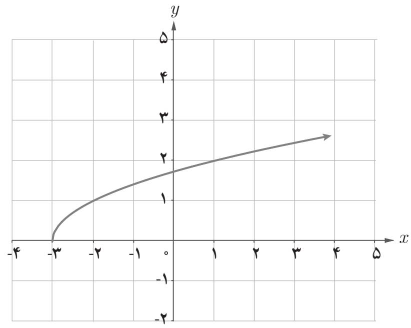
در ادامه با معرفی تابع رادیکالی که زیر رادیکال یک تابع خطی می‌باشد، سعی بر توجه دانش‌آموزان به رسم توابع و پیدا کردن دامنه و برد آنها شده است. رسم این توابع به کمک نقطه‌یابی و انتقال از دیگر اهداف کار در کلاس‌های صفحه ۴۶ و صفحه ۴۷ می‌باشد.

کار در کلاس صفحه ۴۶

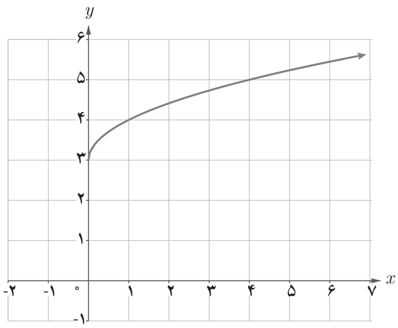
به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نمودار چهار تابع :

الف) $f(x)=\sqrt{x}+۳$, ب) $h(x)=\sqrt{x}-۳$, پ) $g(x)=\sqrt{x-۳}$, ت) $r(x)=\sqrt{x+۳}$

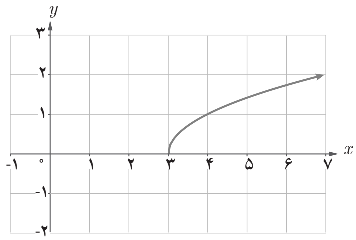
رسم شده‌اند. تابع مربوط به هر نمودار را مشخص و دامنه و برد آن را معلوم کنید.



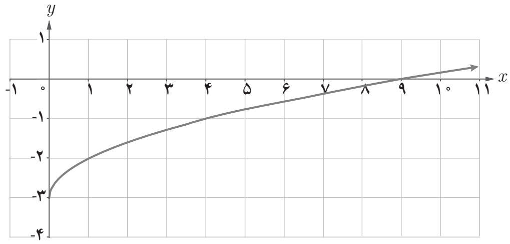
$r(x)=\sqrt{x+۳}$; $D_f=[-۳,+\infty)$, $R_f=[۰,+\infty)$



$f(x)=\sqrt{x}+۳$; $D_f=[-۳,+\infty)$, $R_f=[۳,+\infty)$



$g(x)=\sqrt{x-۳}$; $D_g=[۳,+\infty)$,$R_g=[۰,+\infty)$



$h(x)=\sqrt{x}-۳$; $D_h=[۰,+\infty)$,$R_h=[-۳,+\infty)$

دانش‌آموزان در این کار در کلاس، استدلال می‌کنند که اولاً نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به چه صورت است (در سال گذشته خوانده‌اند)، ثانیاً اگر به کمک انتقال آن را رسم کنند، کدام یک از نمودارهای رسم شده متناظر با صورت سؤال است یعنی با بازنمایی‌های مختلف آن آشنا می‌شوند و در نهایت پس از انتخاب

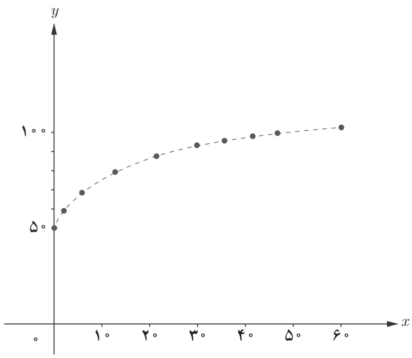
صحیح نمودار، دامنه و برد چگونه از روی نمودار به‌دست می‌آید. پاسخ‌های نادرست آنها در کلاس مورد بررسی قرار گیرد. حدود و ثغور این مطلب نیز در حد انتقال افقی و عمودی است.

دانش‌آموزان باید قادر باشند توابعی به‌صورت $f(x)=\sqrt{ax+b}$ را رسم کنند و دامنه را هم با توجه به نمودار آن و هم با توجه به شرط نامنفی بودن عبارت زیر رادیکال تعیین کنند و برد آن را نیز از روی نمودار مشخص نمایند.

فعالیت صفحه ۴۷

الف) جدول زیر را کامل کنید. در همین صفحه با استفاده از این جدول نمودار تقریبی f را رسم کرده‌ایم.

x	۰	۱	۴	۱۰	۱۶	۲۵	۳۰	۳۶	۴۹	۶۰
$f(x)$	۵۰	۵۷	۶۴	۷۲/۱	۷۸	۸۵	۸۸/۳	۹۲	۹۹	۱۰۴/۲



ب) برد این تابع چیست؟

پ) قد یک کودک چهار ساله تقریباً چقدر است؟

ت) با استفاده از ضابطه تابع یا نمودار آن مشخص کنید که کودکی با قد ۷۵ سانتی‌متر حدوداً چند ماهه است.

ب) برد تابع، مجموعه مقادیر $f(x)$ می‌باشد که با توجه به جدول داریم : $R=[۵۰,۱۰۴/۲]$

پ) هدف این سؤال، تفسیر دانش‌آموزان از نمودارها می‌باشد و اینکه چگونه از روی بازنمایی جدول و نمودار می‌توان مقادیر خواسته شده را پیدا کرد. کودک چهار ساله حدوداً ۴۹ ماه دارد (با توجه به جدول داده شده که برای ۴۹ ماه، ۹۹ سانتی‌متر است) پس حدوداً ۹۹ سانتی‌متر می‌باشد.

ت) ضابطهٔ تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ است. پس : $f(x)=۷۵ \Rightarrow ۷\sqrt{x}+۵۰=۷۵$

$$\Rightarrow ۷\sqrt{x}=۲۵ \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{۲۵}{۷}$$

$$\Rightarrow x=(\frac{۲۵}{۷})^۲ \cong ۱۲/۷۶cm$$

بنابراین حدوداً ۱۳ ماهه است. انتظار می‌رود که دانش‌آموز بتواند نمودار را تجزیه و تحلیل کند.

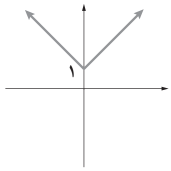
رابطه بین معادلات و توابع در ادامه صفحه ۴۸ و صفحه ۴۹ آورده شده است که توصیه به مثال‌های خیلی سخت نمی‌شود. اینکه هر معادله‌ای بر حسب x و y لزوماً تابع نیست، کافی است. معمولاً برای تأیید تابع بودن از نمودار کمک گرفته و برای رد آن از عددگذاری استفاده می‌کنیم. اثبات تابع بودن از طریق ضابطه در کلاس درس معمولی لزومی ندارد. کار در کلاس صفحه ۴۹ گویای این مطلب است و تشخیص با استفاده از نمودار کفایت می‌کند.

کار در کلاس صفحه ۴۹

کدام‌یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟ دلیل بیاورید.

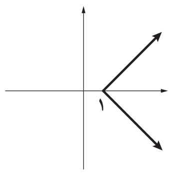
الف) $y = |x| + 1$ ✓

(تابع است زیرا هر خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند).



ب) $x = |y| + 1$ ×

تابع نیست.



روش اول : به کمک نمودار

روش دوم : به ازای یک x، دو مقدار برای y به‌دست می‌آید.

$$|y| = x - 1 \Rightarrow y = \pm(x - 1)$$

روش سوم : مثال نقض : فرض کنید $x=2$، در این صورت $|y|=1$ پس $y=\pm 1$، یعنی به ازای یک مقدار x دو مقدار برای y به دست آمده است.

تابع پله‌ای با بیان یک فعالیت در دنیای واقعی (صفحه ۴۹) و سپس کار در کلاس (صفحه ۵۰) به‌طور کامل معرفی شده است. این نوع تابع در مسائل واقعی نمونه‌های بسیاری دارند که دو نمونه از آنها بیان شده است. نوشتن ضابطه و حل مسائل به کمک آنها و رسم چنین توابعی در فعالیت و کار در کلاس حائز اهمیت می‌باشد. استفاده از مثال‌های مثبت و منفی، یادگیری این مفهوم را آسان‌تر می‌کند.

فعالیت صفحه ۴۹

هزینه ارسال یک بستهٔ پستی به مقصدی معین در جدول زیر داده شده است.

x (وزن بسته) کیلوگرم	۱۰ < x ≤ ۱۲	۵ < x ≤ ۱۰	۲ < x ≤ ۵	۰ < x ≤ ۲
$f(x)$ (هزینه ارسال) برحسب هزار تومان	۲۰	۱۷	۱۰	۵

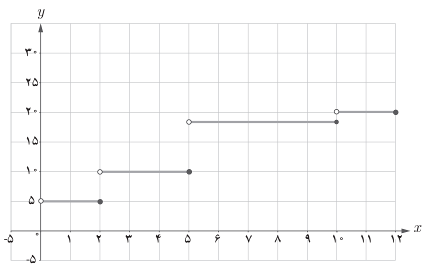
اگر حداکثر وزن بسته‌های ارسالی ۱۲ کیلوگرم باشد،

الف) ضابطهٔ تابعی را که جدول فوق نشان می‌دهد بنویسید و دامنه و برد آن را به‌دست آورید :

$$f(x)=\begin{cases}5 & 0<x\le 2\\ 10 & 2<x\le 5\\ 17 & 5<x\le 10\\ 20 & 10<x\le 12\end{cases}$$

ب) برای ارسال دو بسته به وزن‌های ۹ کیلوگرم و ۱۱/۵ کیلوگرم چه هزینه‌ای باید پرداخت؟

پ) قسمتی از نمودار این تابع در شکل روبه‌رو رسم شده است. بقیه نمودار را رسم کنید.



توابعی مانند تابع فوق را که بتوان دامنه آنها را به تعدادی بازه تقسیم کرد به‌گونه‌ای که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها ثابت باشد، تابع پله‌ای می‌نامند.

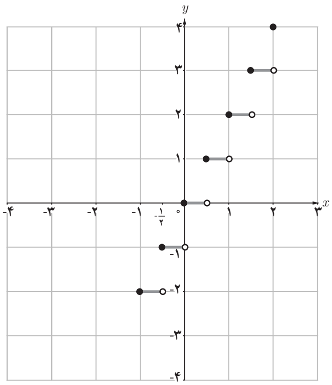
سپس تابع جزءصحیح به عنوان حالت خاص تابع پله‌ای معرفی گردیده است. در کار در کلاس صفحه ۵۱ مثالی ساده و مهم از چگونگی رسم این توابع داده شده است. توصیه می‌شود از بیان تمام ویژگی‌های تابع جزء صحیح و تمام حالت‌های رسم آن در کلاس خودداری شود. البته متناسب با سطح دانش‌آموزان می‌توان برخی ویژگی‌ها را بیان کرد ولی جزء اهداف کتاب نمی‌باشد. برای رسم تابع جزء صحیح ابتدا با توجه به بازه داده شده x را در بازه قرار داده و عبارت درون جزء صحیح را به کمک این بازه تولید می‌کنیم. سپس آنچه به‌وجود آمده را یک واحد یک واحد در بازه‌های مجزا قرار داده و جزء صحیح آن عبارت را محاسبه می‌کنیم و در نهایت بازه‌ها را دوباره به محدوده x تبدیل کرده و نمودار را در این بازه رسم می‌کنیم.

کار در کلاس صفحه ۵۱

۱ نمودار تابع $f(x) = [۲x]$ را در بازهٔ $[-۱, ۲]$ رسم کنید (جدول و نمودار داده شده را کامل کنید).

$$-۱ \le x \le ۲ \Rightarrow -۲ \le ۲x \le ۴$$

$۲x$	$-۲ \le ۲x < -۱$	$-۱ \le ۲x < ۰$	$۰ \le ۲x < ۱$	$۱ \le ۲x < ۲$	$۲ \le ۲x < ۳$	$۳ \le ۲x < ۴$	$۲x = ۴$
$[۲x]$	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴
x	$-۱ \le x < -\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲} \le x < ۰$	$۰ \le x < \frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲} \le x < ۱$	$۱ \le x < \frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۲} \le x < ۲$	$x = ۲$



۲ نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{۱}{۳}x\right]$ را در بازهٔ $[-۳, ۳]$ رسم کنید (کامل کنید).

$$-۱ \le \frac{۱}{۳}x < ۰ \Rightarrow \begin{cases} [\frac{۱}{۳}x] = -۱ \\ -۳ \le x < ۰ \end{cases}$$

$$۰ \le \frac{۱}{۳} < ۱ \Rightarrow \begin{cases} \left[\frac{۱}{۳}x\right] = ۰ \\ ۰ \le x < ۳ \end{cases}$$

$$۰ \le \frac{۱}{۳}x < ۱ \Rightarrow \begin{cases} \left[\frac{۱}{۳}x\right] = ۰ \\ ۰ \le x < ۳ \end{cases}$$

$$\frac{۱}{۳}x = ۱ \Rightarrow \begin{cases} [\frac{۱}{۳}x] = ۱ \\ x = ۳ \end{cases}$$