درس ۳

وارون تابع

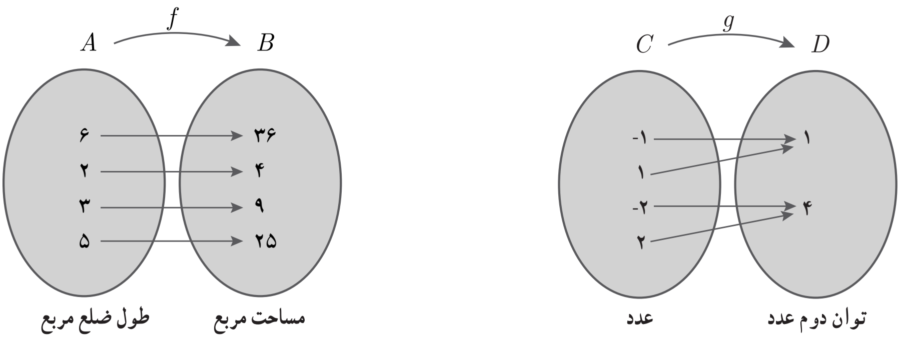
اهداف درس

۱ درک مفهوم وارون یک تابع (رابطه)
۲ محاسبه تابع وارون برخی از توابع
۳ آشنایی با توابع یک به یک
۴ رسم نمودار تابع وارون و ارتباط آن با تابع ابتدایی

فعالیت ص ۵۵ به معرفی وارون یک تابع و تابع وارون پرداخته است که با انجام آن، دانش‌آموزان به دامنه و برد تابع و وارون یک تابع و شرط وارون‌پذیری یک تابع به کمک شما معلمان گرامی پی می‌برند. انجام فعالیت به کمک خود دانش‌آموزان به درک بهتر این موضوع کمک بسزایی می‌کند. با توجه به سطح کلاس می‌توانید این فعالیت را غنی‌تر کنید. ولی نکتهٔ مهم این است که دانش‌آموز فعالیت را حل کند.

فعالیت ص ۵۵

دو تابع f و g را در نظر بگیرید :



الف) f و g را به‌صورت زوج‌های مرتب نمایش دهید و دامنه و برد هر یک را بنویسید.

f = {(۶,۳۶) , (۲,۴) , (۳,۹) , (۵,۲۵)}

g = {(−۱,۱) , (۱,۱) , (−۲,۴) , (۲,۴)}

D_f = {۲, ۳ , ۵ , ۶}　　　D_g = {−۲, −۱ , ۱ , ۲}

R_f = {۴, ۹ , ۲۵ , ۳۶}　　　R_g = {۱, ۴}

ب) اگر جای دو مؤلفهٔ هر زوج مرتب در f و g را عوض کنیم، روابط جدیدی به‌دست می‌آید. آنها را به ترتیب h و k بنامید. h و k را وارون رابطه‌های f و g می‌نامیم. h و k را به‌صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید.

h = {(۳۶,۶) , (۴,۲) , (۹,۳) , (۲۵,۵)}

k = {(۱,−۱) , (۱,۱) , (۴,−۲) , (۴,۲)}

کدام‌یک از رابطه‌های h و k تابع است؟ دلیل بیاورید.

h تابع است زیرا مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب همگی متمایز هستند. اما k تابع نیست زیرا $k\in$(۱,−۱) و $k\in$(۱,۱) یعنی به ازای یک x، دو مقدار برای y وجود دارد پس تابع نیست. همچنین می‌توان در مورد $k\in$(۴,۲) و $k\in$(۴,−۲) صحبت کرد که باز هم نشان می‌دهد k تابع نیست.

فعالیت و کار در کلاس ص ۵۶ و ص ۵۷ نیز جهت تثبیت یادگیری معنادار مفهوم تابع یک به یک ارائه شده است. تصمیم‌گیری دانش‌آموز در مورد اینکه چه تابعی وارون‌پذیر است و گفتمان در مورد اینکه چه ویژگی‌های مشترکی وجود دارد از اهداف این فعالیت است.

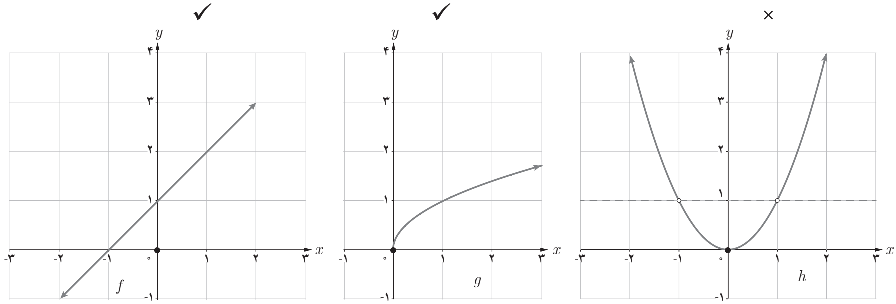
با انجام کار در کلاس زیر (ص ۵۶)، درک دانش‌آموزان از تابع یک به یک به کمک بازنمایی نمودار بررسی می‌شود و سپس یک کاربرد واقعی از مفهوم تابع یک به یک یاد می‌گیرد.

توصیه آموزشی: در این قسمت از بیان تمام نکات در مورد تابع یک به یک در کلاس درس پرهیز شود و فقط به بازنمایی از طریق نمودار بسنده کنید. البته بستگی به شرایط کلاس، بازنمایی‌های دیگر تابع یک به یک را هم می‌توانید ارائه کنید ولی از اهداف کتاب نمی‌باشد.

کار در کلاس ص ۵۶

۱ کدام‌یک از توابع زیر یک به یک هستند؟

خط موازی محور xها ($y=۱$)، نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند پس یک به یک نمی‌باشد.



$\checkmark\ k=\{(۱,۲),(۳,۴),(۸,۹)\}$ $\quad\quad$ $\times\ l=\{(۳,۷),(۲,۵),(۱,۵)\}$

$(۲,۵)\in l$

$(۱,۵)\in l$ $\quad \Rightarrow \quad$ l یک به یک نیست

۲ فرض کنید به هر یک از اعضای یک کلاس کد ملی آنها را نسبت دهیم. توضیح دهید که چگونه رابطهٔ بین افراد و کد ملی آنها تابعی یک به یک را معلوم می‌کند.

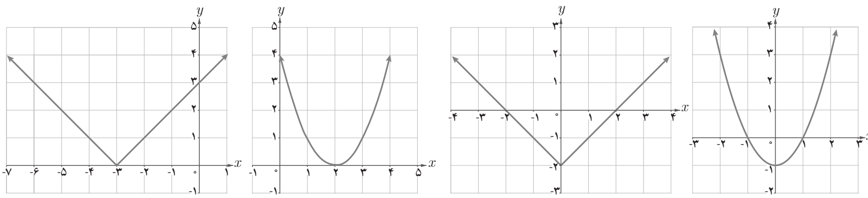
هر شخص فقط دارای یک کد ملی است و به ازای هر کد ملی، یک نفر مشخص می‌شود پس تابعی یک‌به‌یک بین افراد و کد ملی وجود دارد.

در ادامهٔ بحث تابع یک به یک به این نکته توجه شود که برخی توابع یک به یک نیستند ولی می‌توان دامنه آنها را طوری محدود کرد که یک به یک شوند. از دانش‌آموزان بخواهید که در ابتدا خودشان روی محدود کردن دامنه بحث کنند و پاسخ‌های آنها را در کلاس با هم مقایسه کنید.

کار در کلاس ص ۵۷

تابع‌های زیر یک به یک نیستند. چرا؟ با محدود کردن دامنه هریک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y=|x+۳|$ ب) $y=(x-۲)^۲$ پ) $y=|x|-۲$ ت) $y=x^۲-۱$



این مسئلهٔ جالب نیز باز پاسخ است و جواب‌های متفاوتی ممکن است داده شود.

الف) تابع $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=|x+۳| \end{cases}$ یک به یک نیست، حال اگر $\begin{cases} f_۱:A\to\mathbb{R} \\ f_۱(x)=|x+۳| \end{cases}$ در نظر بگیریم و A را بازه‌های $[-۳,+\infty)$ یا $(-\infty,-۳]$ و یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه در نظر بگیریم، تابع $f_۱$، یک‌به‌یک می‌شود.

ب) تابع $\begin{cases} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ g(x)=(x-۲)^۲ \end{cases}$ یک به یک نیست، حال اگر $\begin{cases} g_۱:A\to\mathbb{R} \\ g_۱(x)=(x-۲)^۲ \end{cases}$ در نظر بگیریم و A را بازه‌های $[۲,+\infty)$ یا $(-\infty,۲]$ و یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه در نظر بگیریم، تابع $g_۱$، یک‌به‌یک می‌شود.

پ) تابع $\begin{cases} K:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ K(x)=|x|-۲ \end{cases}$ یک به یک نیست، حال اگر $\begin{cases} K_۱:A\to\mathbb{R} \\ K_۱(x)=|x|-۲ \end{cases}$ در نظر بگیریم و A را بازه‌های $[۰,+\infty)$ یا $(-\infty,۰]$ و یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه در نظر بگیریم، تابع $K_۱$، یک‌به‌یک می‌شود.

ت) تابع $\begin{cases} L:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ L(x)=x^۲-۱ \end{cases}$ یک به یک نیست، حال اگر $\begin{cases} L_۱:A\to\mathbb{R} \\ L_۱(x)=x^۲-۱ \end{cases}$ در نظر بگیریم و A را بازه‌های $[۰,+\infty)$ یا $(-\infty,۰]$ و یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه در نظر بگیریم، تابع $L_۱$، یک‌به‌یک می‌شود.

تذکر : در مورد انتخاب بازه‌هایی که تابع در آن بازه‌ها یک به یک می‌شود، می‌توان از روی نمودار در حالت کلی آنها را پیدا کرد و یا در توابع درجه دوم به طول رأس سهمی و در توابع قدر مطلقی به ریشه سادهٔ درون قدر مطلق توجه کرد.

محاسبه وارون یک تابع در صورت یک به یک بودن به کمک نمودار ص ۵۷ از زیبایی‌های این فصل است. با انجام این فعالیت ص ۵۷ به کمک دانش‌آموزان روش محاسبه تابع وارون درک می‌شود.

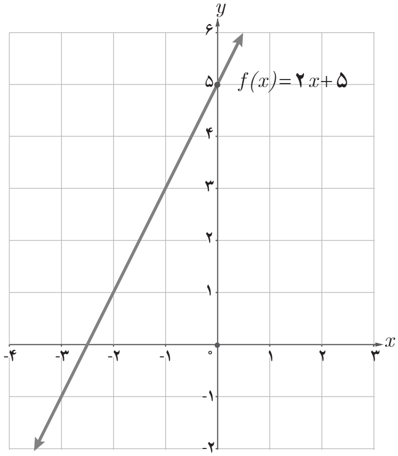
قسمت الف این فعالیت نیز با رسم خط موازی محور xها قابل انجام است.

فعالیت ص ۵۷

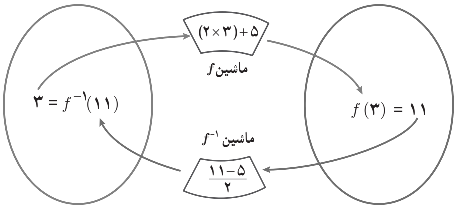
تابع $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=۲x+۵ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.

هر خط موازی محور xها رسم کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین نمودار یک تابع یک به یک است.



برای اینکه دانش‌آموزان درک کنند که کار تابع وارون چیست و با تابع چه ارتباطی دارد، انجام ادامه فعالیت توسط خود او حائز اهمیت است. درصورتی‌که دانش‌آموزان تشخیص ندادند، با راهنمایی سعی کنید خود آنها به پاسخ صحیح برسند.

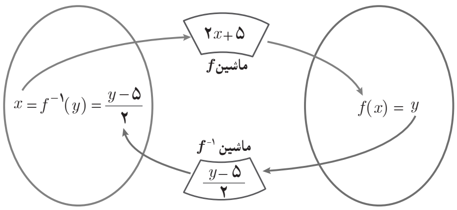


ب) نمودار روبه‌رو را توضیح دهید :

$(۳,۱۱) \in f$ و $(۱۱,۳) \in f^{-۱}$

به عبارت دیگر $f\,(۳) = ۱۱$ و $f^{-۱}(۱۱) = ۳$

اگر به ماشین f، عدد ۳ را بدهیم، آن را ۲ برابر کرده و سپس به‌علاوه ۵ می‌کند و عدد ۱۱ در برد می‌دهد. حال اگر بخواهیم بدانیم عدد ۱۱ توسط ماشین f به ازای چه عددی در دامنه آورده شده است، کافی است عدد ۱۱ را منهای ۵ و تقسیم بر ۲ کنیم که حاصل ۳ می‌شود یعنی $f(۳) = ۱۱$ و $f^{-۱}(۱۱) = ۳$. این توضیحات باید با راهنمایی و هدایت معلم توسط دانش‌آموز گفته شود.



پ) در حالت کلی برای هر عنصر $x \in D_f$، نمودار مقابل را مانند ب کامل کنید.

این فعالیت طوری طراحی شده است که قسمت‌هایی را دانش‌آموز بنویسد و به‌صورت مکاشفه‌ای از حل آن لذت ببرد.

در این قسمت روش محاسبه تابع وارون و بازنمایی‌های مختلف جبری آن متذکر شده است. دانش‌آموزان در پایان محاسبه تابع وارون اکثراً این پرسش را می‌کنند که چرا به‌جای y، x قرار می‌دهید. در این فعالیت به آن پاسخ داده شده است و متذکر شوید که این یک نمایش است و محدوده xها می‌تواند متفاوت باشد.

ت) بنابراین می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} f(x) = ۲x + ۵ & (x \in D_f) \\ f^{-۱}(y) = \dfrac{y-۵}{۲} & (y \in R_f) \end{cases}$$

$f^{-۱}$ را به‌صورت‌های دیگری هم می‌توانیم نمایش دهیم. یک نمایش دیگر را بنویسید :

$$\begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(x) = \dfrac{x-۵}{۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(t) = \dfrac{t-۵}{۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(y) = \dfrac{y-۵}{۲} \end{cases}$$

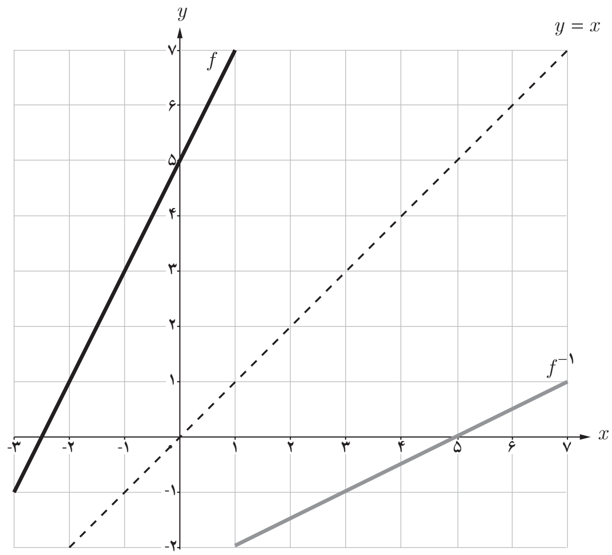
انتظار می‌رود که در نهایت $f^{-۱}(x)$ را بنویسند ولی درک کنند که این x همان xهای دامنه نیست.
آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه $f^{-۱}$ همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای $f^{-۱}$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} f^{-۱}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(x) = \dfrac{x-۵}{۲} \end{cases}$$

سپس در کار در کلاس ص ۵۹ روش محاسبه تابع وارون به کمک جبری و نموداری در کلاس تثبیت می‌شود. توجه به رسم تابع و تابع وارون در یک دستگاه و ارتباط آن با نیم‌ساز ناحیه اول و سوم از اهمیت بالایی برخوردار است.

کار در کلاس ص ۵۹

۱ با توجه به فعالیت قبل اگر داشته باشیم $f(x) = ۲x+۵$، نمودار f و $f^{-۱}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.



۲ اگر داشته باشیم $f(x)=\sqrt{x-۲}$ ، دامنه و برد f را به‌دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

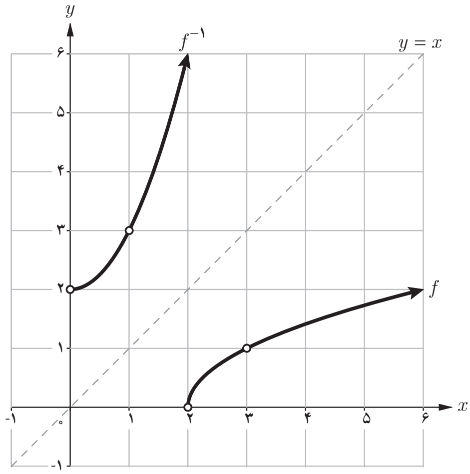
$D_f=[۲,+\infty)$ و $R_f=[۰,+\infty)$

در معادلهٔ $y=\sqrt{x-۲}$ ضابطه $f^{-۱}$ را بنویسید. نمودار $f^{-۱}$ را رسم و دامنه و برد $f^{-۱}$ را معلوم کنید.

$y^۲=x-۲ \longrightarrow x=y^۲+۲ \longrightarrow f^{-۱}(x)=x^۲+۲$

$D_{f^{-۱}}=[۰,+\infty)$

$R_{f^{-۱}}=[۲,+\infty)$

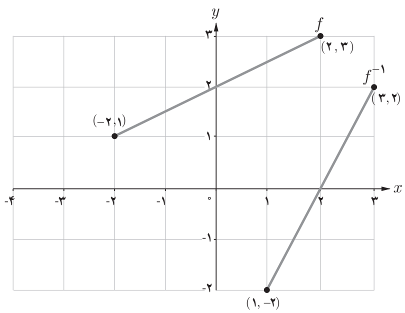


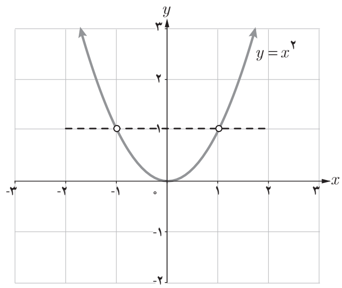
توجه شود که جای دامنه و برد تابع و تابع وارون با هم عوض می‌شود.

کار در کلاس ص ۵۹

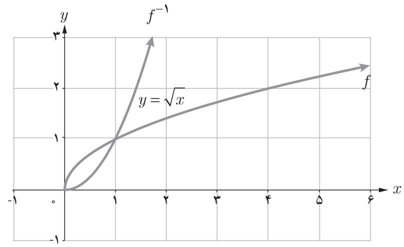
با انجام این کار در کلاس بازنمایی نموداری تابع وارون برای دانش‌آموزان تثبیت می‌گردد.

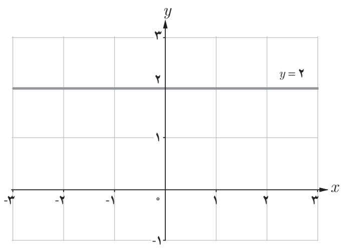
نمودار «تابع وارون» هر کدام از تابع‌های زیر را که یک به یک است در همان دستگاه مختصات رسم کنید.





تابع یک به یک نیست زیرا خط y=۱ نمودار را در ۲ نقطه قطع می‌کند پس وارون‌پذیر نمی‌باشد.





تابع یک به یک نمی‌باشد زیرا خط y=۲ نمودار را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند، پس وارون‌پذیر نیست.

برای رسم بهتر تابع وارون بدون داشتن ضابطه، کافی است خط y=x را رسم کنید و نمودار تابع f را نسبت به خط y=x قرینه می‌کنیم.

حل مثال ص ۶۱ برای درک معنادار تابع وارون دانش‌آموزان در کلاس ضروری می‌باشد.

سطح دشواری مثال‌ها توابع خطی، توابع درجه ۲ و توابع ساده رادیکالی است. اگر دشواری فقط در سطح تکنیک‌ها باشد و درک خاصی توسط دانش‌آموز انجام نشود ارزش خاصی ندارد.

درس ۴
اعمال روی توابع

اهداف درس

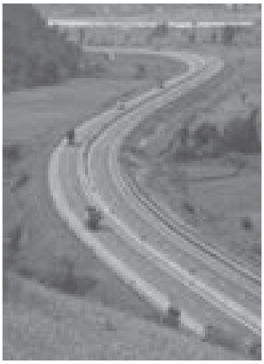
۱ درک اعمال روی توابع شامل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو تابع
۲ درک مفهوم ترکیب دو تابع و محاسبهٔ آن

روش تدریس

مفهوم جمع دو تابع با انجام فعالیت ص ۶۳ طرح شده است. مثالی کاربردی در دنیای واقعی با اهداف درک مدل‌سازی و مفهوم جمع دو تابع بیان شده است. سعی شود خود دانش‌آموزان مسئله را حل کنند و معلم نقش راهنما را داشته باشد.

فعالیت ص ۶۳

فاصله زمانی لحظه‌ای که راننده با یک مانع روبه‌رو می‌شود تا لحظه فشار دادن پدال ترمز را «زمان عکس‌العمل» می‌نامند.



مجموع فاصلهٔ طی شده در طول زمان عکس‌العمل و فاصله طی شده پس از ترمزکردن را «فاصله دید توقف[1]» می‌نامند. این فاصله در طراحی جاده‌ها و بزرگراه‌ها کاربرد دارد.

فرض کنید اتومبیلی با سرعت ثابت در بزرگراهی درحال حرکت است. اگر اتومبیل با سرعت x کیلومتر بر ساعت حرکت کند، مسافتی که در «زمان عکس‌العمل» طی می‌کند از تابع $f(x)=\frac{۷}{۱۰}x$ به‌دست می‌آید که در آن مقدار تابع برحسب متر است.

همچنین مسافتی که اتومبیل پس از فشار دادن پدال ترمز تا توقف کامل طی می‌کند از تابع $g(x)=\frac{۱}{۱۰۰}x^{۲}$ به‌دست می‌آید که در آن مقدار تابع برحسب متر است و x سرعت اتومبیل برحسب کیلومتر بر ساعت است.

الف) اگر اتومبیلی با سرعت ۱۰۰ کیلومتر برساعت حرکت کند، پس از دیدن مانع، تا توقف کامل چه مسافتی طی می‌شود؟

$$f(۱۰۰)+g(۱۰۰)=$$

$$(\frac{۷}{۱۰}\times ۱۰۰)+(\frac{۱}{۱۰۰}\times ۱۰۰^{۲})=۱۷۰m$$

ب) اگر سرعت اتومبیل x کیلومتر بر ساعت باشد، تابعی بنویسید که مسافت طی شده توسط اتومبیل پس از رؤیت مانع توسط راننده و ترمز کردن را نمایش دهد. این تابع را با $h(x)$ نمایش دهید.

$$h(x)=f(x)+g(x)=\frac{۷}{۱۰}x+\frac{۱}{۱۰۰}x^{۲}$$

پ) اگر این اتومبیل پس از پیمودن ۶۰ متر متوقف شود، با چه سرعتی درحال حرکت بوده است؟

$$h(x)=\frac{۷}{۱۰}x+\frac{۱}{۱۰۰}x^{۲}=۶۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۷۰x=۶۰۰۰$$

$$\Rightarrow x^{۲}+۷۰x-۶۰۰۰=۰$$

$$\Rightarrow \Delta=۴۹۰۰+۲۴۰۰۰=۲۸۹۰۰$$

$$\Rightarrow x_{۱,۲}=\frac{-۷۰\pm ۱۷۰}{۲}\rightarrow x=\frac{-۷۰+۱۷۰}{۲}=۵۰\,\mathrm{km/h}$$

۱ــ برای تعیین فاصله دید توقف، فاصله عکس‌العمل ترمز مبتنی بر زمان ۲/۵ ثانیه و شتاب کاهنده ۳/۴ متر بر مجذور ثانیه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فعالیت ص ۶۵

الف) دامنهٔ تابع g بازهٔ $[-۴,۵]$ و ضابطهٔ آن به‌صورت $g(x) = x+۲$ می‌باشد.

ب)

$D_{f+g}=D_f \cap D_g = [-۴,۵]$ $\qquad (f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+۵$

$D_{f-g}=D_f \cap D_g = [-۴,۵]$ $\qquad (f-g)(x)=f(x)-g(x)=۱-x$

$D_{f.g}=D_f \cap D_g = [-۴,۵]$ $\qquad (f.g)(x)=f(x).g(x)=۳x+۶$

$D_{f/g}=D_f \cap D_g - \{x|g(x)=۰\} = [-۴,۵]-\{-۲\}$ $\qquad (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{۳}{x+۲}$

پ)

روش اول : برای رسم تابع $f+g$، ابتدا دامنه مشترک آنها را پیدا می‌کنیم، سپس نقاطی در دامنه مشترکشان انتخاب کرده و عرض آنها را با هم جمع می‌کنیم. به دلیل اینکه f و g خطی هستند پس مجموع آنها نیز تابع خطی القا و بنابراین با داشتن دو نقطه از مجموع می‌توان نمودارش را رسم کرد.

روش دوم : ضابطه $f+g$ را پیدا کرده و در دامنه مشترک آنها رسم می‌کنیم.

ت) می‌توان به روش اول که در بالا توضیح داده شد، بقیه توابع را نیز مشابه روش بالا رسم کرد و یا اینکه از طریق پیدا کردن ضابطهٔ آنها رسم کنیم.

کار در کلاس ص ۶۶

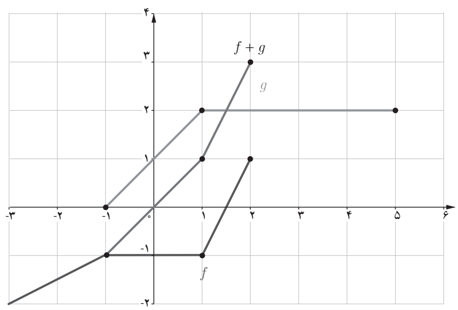
نمودارهای توابع f و g داده شده است.

الف) مقادیر $(f+g)(۱)$ و $(f+g)(-۱)$ را به‌دست آورید.

ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.

پ) ضابطه توابع $f+g$ و f ، g را به‌دست آورید.

ت) نمودار $f+g$ را به کمک ضابطهٔ آن رسم کنید و با (ب) مقایسه کنید.



الف)

$$(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=-۱+۲=۱$$

$$(f+g)(-۱)=f(-۱)+g(-۱)=-۱+۰=-۱$$

ب) ابتدا دامنه مشترک f و g را پیدا می‌کنیم. $D_f \cap D_g=[-۱,۲]$

سپس در این دامنه مشترک با پیدا کردن چند نقطه و محاسبه مجموع، نمودار را رسم می‌کنیم.

$$(f+g)(۰)=f(۰)+g(۰)=۱-۱=۰ \qquad (f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=۱+۲=۳$$

پ)

$$f(x)=\begin{cases}-۱ & -۱\leq x\leq ۱\\ ۲x-۳ & ۱<x\leq ۲\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x+۱ & -۱\leq x\leq ۱\\ ۲ & ۱<x\leq ۵\end{cases}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}x & -۱\leq x\leq ۱\\ ۲x-۱ & ۱<x\leq ۲\end{cases}$$

ت) نمودار هردو یکی است. البته در حالت کلی رسم نمودار به کمک ضابطه دقیق‌تر از رسم به کمک چند نقطه است.

مفهوم ترکیب دو تابع با انجام فعالیت ص ۶۶ به خوبی بیان شده است. کار در کلاس و مثال ص ۶۸ نیز به تثبیت این مفهوم کمک می‌کند.

توصیه آموزشی: مفهوم ترکیب دو تابع و پیدا کردن دامنه برای دانش‌آموزان در ابتدا شاید کمی مشکل باشد. بهتر است با مثال‌های ساده این مفهوم برای دانش‌آموزان روشن شود و از بیان مثال‌های پیچیده در کلاس خودداری گردد.

فعالیت ص ۶۶

تابع $f(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند.

الف) $f(۳۲)=۰$ به چه معنی است؟ ۵۰ درجهٔ فارنهایت چند درجه سانتی‌گراد است؟ ۳۲ درجه فارنهایت معادل صفر درجه سانتی‌گراد است.

ب) تابع $g(x)=x+۲۷۳$ درجه سانتی‌گراد را به درجهٔ کلوین تبدیل می‌کند. $g(۰)=۲۷۳$ به چه معنی است؟

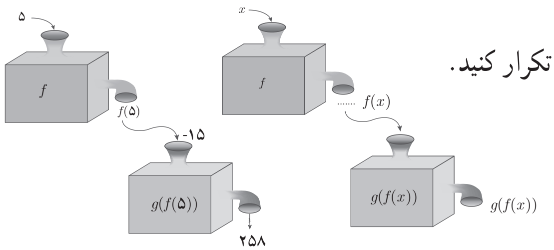
پ) مطابق نمودارهای داده شده می‌توانیم f و g را همانند دو ماشین درنظر بگیریم. یکی از ماشین‌ها فارنهایت را به سانتی‌گراد و دیگری سانتی‌گراد را به کلوین تبدیل می‌کند. به کمک نمودارها نشان دهید که

۵ درجهٔ فارنهایت معادل چند درجهٔ کلوین است؟

$$f(۵)=\frac{۵}{۹}(۵-۳۲)=\frac{۵}{۹}\times(-۲۷)=-۱۵$$
$$g(f(۵))=g(-۱۵)=۲۵۸$$

ت) اگر x ورودی تابع f باشد، خروجی آن $f(x)$ است و اگر ورودی تابع g، $f(x)$ باشد خروجی آن $g(f(x))$ است.

ث) ت را با تکمیل نمودارهای زیر تکرار کنید.



الف) $f(۳۲)=۰$ یعنی ۳۲ درجه فارنهایت معادل صفر درجه سانتی‌گراد است. بنابراین ۵۰ درجه فارنهایت معادل ۱۰ درجه سانتی‌گراد است. $f(۵۰)=\frac{۵}{۹}(۵۰-۳۲)=\frac{۵}{۹}\times۱۸=۱۰ \Rightarrow$

ب) یعنی صفر درجه سانتی‌گراد معادل ۲۷۳ درجه کلوین است.

پ) بنابراین ۵ درجه فارنهایت معادل ۲۵۸ درجه کلوین است.

کار در کلاس ص ۶۸

اگر $f(x)=x^۲+۱$ و $g(x)=۲x+۳$

الف) دامنه و ضابطه تابع‌های fog و gof را به‌دست آورید.

ب) آیا تابع‌های gof و fog مساوی‌اند؟

حل الف)

$$(fog)(x)=f(g(x))=(۲x+۳)^۲+۱=۴x^۲+۱۲x+۱۰$$
$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}\mid ۲x+۳\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=۲(x^۲+۱)+۳=۲x^۲+۵$$
$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x^۲+۱\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

ب) دو تابع fog و gof با هم برابر نیستند زیرا ضابطهٔ آنها متفاوت است.

کار در کلاس ص ۶۸

اگر $g=\{(۲,۱۱),(۴,-۲),(۶,۳),(۳,۲)\}$ و $f=\{(۱۱,۷),(-۲,۴),(۳,-۵),(۲,-۵)\}$، ابتدا D_{fog} و D_{gof} و سپس توابع fog و gof را محاسبه کنید.

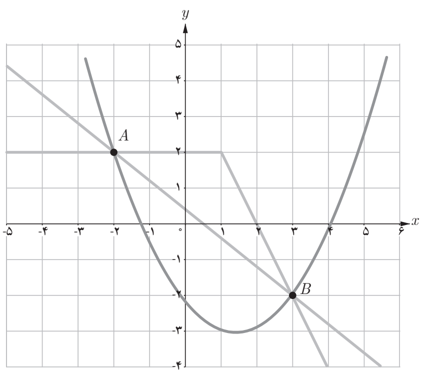
$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{۲,۴,۶,۳\}$$
$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{-۲\}$$
$$fog=\{(۲,۷),(۴,۴),(۶,-۵),(۳,-۵)\}$$
$$gof=\{(-۲,-۲)\}$$

برای یافتن ضابطه fog، ابتدا به سراغ دامنه آن می‌رویم، مثلاً $x=۲$. سپس در تابع g، ببینیم $(۲,۱۱)$ داریم پس عدد ۲ توسط تابع g به عدد ۱۱ می‌رود و سپس به سراغ تابع f می‌رویم و می‌بینیم که عدد ۱۱ توسط f به عدد ۷ می‌رود. بنابراین در تابع fog، عدد ۲ به ۷ می‌رود یعنی $(۲,۷)\in fog$. به همین ترتیب برای عضوهای دیگر بررسی می‌کنیم.

حل تمرین‌های فصل تابع

الف) درس ۱ : تمرین ص ۴۲

۱ در صفحه مختصات زیر تابعی رسم کنید که نقاط A و B روی آن قرار داشته باشند. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟



حل : این یک مسئله بازپاسخ است و می‌تواند بی‌شمار جواب صحیح داشته باشد. پاسخ‌های دانش‌آموزان را می‌توان با یکدیگر در یک فرصت مناسب بررسی کرد. به‌عنوان نمونه، سه نوع تابع رسم شده است.

۲ کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.
الف) اگر دامنه دو تابع باهم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.
ب) برد و هم‌دامنهٔ تابع می‌توانند یکی باشند.
پ) هم‌دامنهٔ تابع زیر مجموعه‌ای از برد آن است.
ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنهٔ آن بازهٔ $[\circ,۳]$ است.

حل : الف نادرست است.

مثال : ۱

$$\begin{cases} f=\{(۱,۲),(۳,۵)\} \\ g=\{(۱,۵),(۳,۲)\} \end{cases} \qquad D_f=D_g=\{۱,۳\} \qquad R_f=R_g=\{۲,۵\}$$

ولی $g \neq f$

مثال : ۲ تابع $f(x)=x$ و $g(x)=x^۳$ دارای دامنه و برد برابر $\mathbb{R}$ هستند ولی با هم برابر نیستند.

ب) درست است. هم‌دامنه هر تابع می‌تواند مجموعهٔ برد یا هر مجموعهٔ دیگری شامل برد باشد.

پ) نادرست است. برد یک تابع نهایتاً می‌تواند برابر هم‌دامنه شود و نمی‌تواند هم‌دامنه زیرمجموعه برد باشد.

ت) درست است. به‌عنوان نمونه :

$$\begin{cases} f_۱:[\circ,۳]\to\mathbb{R} \\ f_۱(x)=\sqrt{x} \end{cases} ، \begin{cases} f_۲:[\circ,۳]\to\mathbb{R} \\ f_۲(x)=۲\sqrt{x} \end{cases} ، \begin{cases} f_۳:[\circ,۳]\to\mathbb{R} \\ f_۳(x)=۳\sqrt{x} \end{cases} \text{ و } \dots$$

$$\begin{cases} g_۱:[\circ,۳]\to\mathbb{R} \\ g_۱(x)=x \end{cases} ، \begin{cases} g_۲:[\circ,۳]\to\mathbb{R} \\ g_۲(x)=۲x \end{cases} ، \begin{cases} g_۳:[\circ,۳]\to\mathbb{R} \\ g_۳(x)=۳x \end{cases} \text{ و } \dots$$

۳ تابعی مثال بزنید که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟

حل : به‌عنوان نمونه :

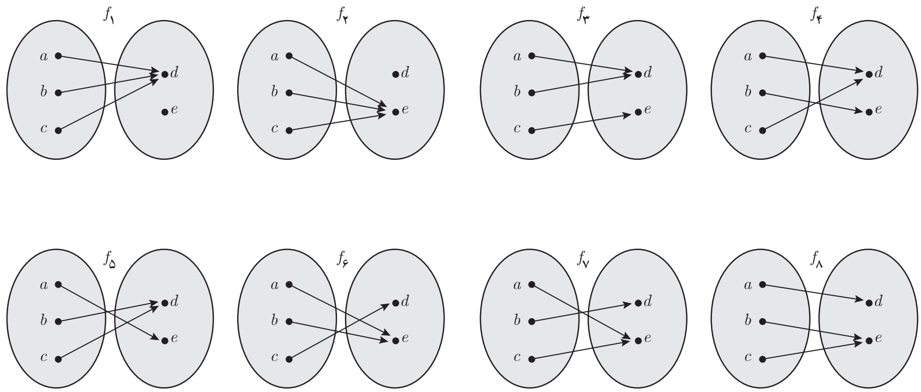
$$\begin{cases} f_۱:\mathbb{R}\geq\circ\to\mathbb{R} \\ f_۱(x)=x \end{cases} ، \begin{cases} f_۲:\mathbb{R}\geq\circ\to\mathbb{R} \\ f_۲(x)=x^۲ \end{cases} ، \begin{cases} f_۳:\mathbb{R}\geq\circ\to\mathbb{R} \\ f_۳(x)=x^۳ \end{cases} \text{ و } \dots$$

$$\begin{cases} g_۱:\mathbb{R}\geq\circ\to\mathbb{R} \\ g_۱(x)=-|x| \end{cases} ، \begin{cases} g_۲:\mathbb{R}\geq\circ\to\mathbb{R} \\ g_۲(x)=\sqrt{x} \end{cases} ، \begin{cases} g_۳:\mathbb{R}\geq\circ\to\mathbb{R} \\ g_۳(x)=۲ \end{cases} \text{ و } \dots$$

بی‌شمار از این نوع توابع وجود دارد. این سؤال نیز بازپاسخ است و پاسخ‌های متفاوتی از دانش‌آموزان خواهید دید.

۴ همه تابع‌های از مجموعه $A=\{a,b,c\}$ به مجموعه $B=\{d,e\}$ را بنویسید (از نمودار پیکانی کمک بگیرید).

حل : تعداد توابع از یک مجموعهٔ m عضوی به یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با n^m. بنابراین در این تمرین $۸=۲^۳$ تابع وجود دارد.



۵ تابع‌های مساوی را مشخص کنید.

$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\|x\| \end{cases}$	$\begin{cases} r:[۰,+\infty)\to\mathbb{R} \\ r(a)=۵a \end{cases}$
$\begin{cases} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ g(x)=۵x \end{cases}$	$\begin{cases} s:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ s(a)=۵a \end{cases}$
$\begin{cases} h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ h(x)=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases} \end{cases}$	$\begin{cases} t:\mathbb{R}-\{۰\}\to\mathbb{R} \\ t(x)=۵x \end{cases}$

حل : تابع‌های $f=h$ و $g=s$ توابع مساوی هستند و تابع t با هیچ‌کدام برابر نیست.

۶ تابع f در همهٔ شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(۲) = ۳$ و $f(-۵) = -۲$

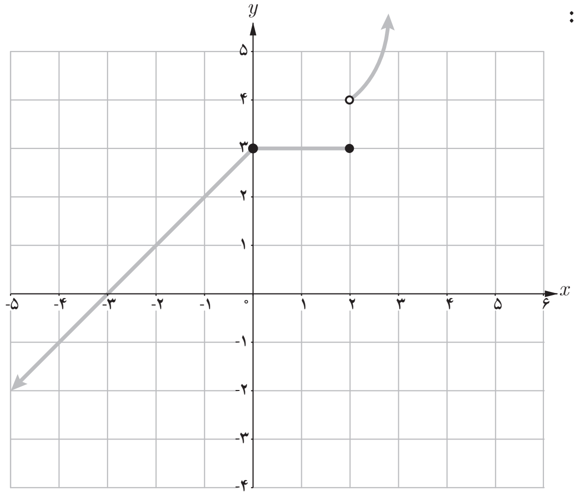
ب) f در بازه $[۰,۲]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳− قطع می‌کند.

حل:

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x > ۲ \\ ۳ & ۰ \leq x \leq ۲ \\ x + ۳ & x < ۰ \end{cases}$$



۷ با استفاده از یک تابع خطی و با در دست داشتن طول استخوان بازو (از آرنج تا شانه) می‌توان طول قد یک انسان بزرگ‌سال را برآورد کرد:

تابع خطی برای مردان $M(x) = ۲/۸۹x + ۷۰/۶۴$

تابع خطی برای زنان $F(x) = ۲/۷۵x + ۷۱/۴۸$

که در آنها x طول استخوان بازو برحسب سانتی‌متر است.

الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۵ سانتی‌متر باشد، طول قد او چقدر است؟

ب) اگر قد یک مرد ۱۸۵ سانتی‌متر باشد، طول استخوان بازوی او چقدر است؟

حل :

الف) $M(۳۵) = (۲/۸۹ \times ۳۵) + ۷۰/۶۴ = ۱۷۱/۷۹ \text{ cm}$

ب) $M(x) = ۲/۸۹x + ۷۰/۶۴ = ۱۸۵$

$$\Rightarrow ۲/۸۹x = ۱۱۴/۳۶ \Rightarrow x = \frac{۱۱۴/۳۶}{۲/۸۹} \cong ۳۹/۵۷$$

مثال فوق یک مثال کاربردی از توابع خطی می‌باشد که برای محاسبهٔ طول قد به‌کار می‌رود.

ب) درس ۲ :

تمرین ص ۵۲

۱ دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \frac{x-۱}{۲-x}$ ب) $f(x) = \frac{-۳x}{x^۲+۱}$ پ) $f(x) = \frac{۲x+۳}{x^۲+x-۱۲}$

ت) $f(x) = \sqrt{۳x+۱}$ ث) $f(x) = ۲\sqrt{x} - ۳$ ج) $f(x) = \sqrt{۸-x}$

الف) $۲-x=۰ \longrightarrow x=۲ \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{۲\}$

ب) $x^۲+۱ \neq ۰ \Rightarrow D = \mathbb{R}$

پ) $x^۲+x-۱۲=۰ \longrightarrow (x+۴)(x-۳)=۰ \longrightarrow \begin{cases} x=-۴ \\ x=۳ \end{cases}$

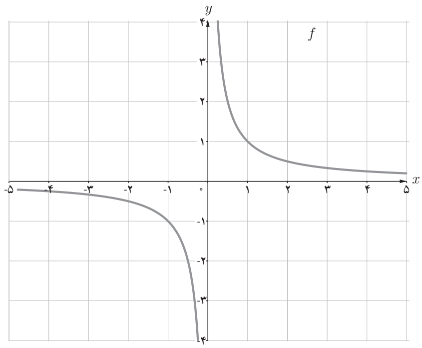
$\Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-۴,۳\}$

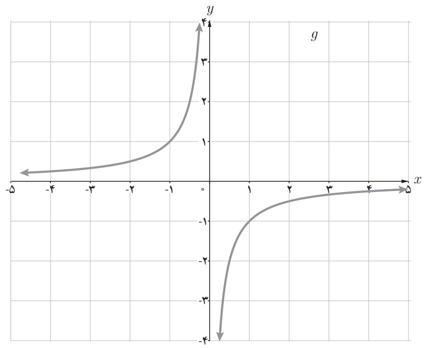
ت) $۳x+۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -\frac{۱}{۳} \Rightarrow D = [-\frac{۱}{۳}, +\infty)$

ث) $x \geq ۰ \Rightarrow D = [۰, +\infty)$

ج) $۸-x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۸ \Rightarrow D = (-\infty, ۸]$

۲ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ می‌توان نمودار تابع $g(x)=-\frac{۱}{x}$ را رسم کرد.

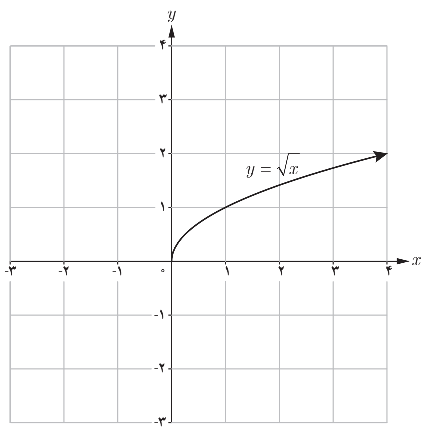


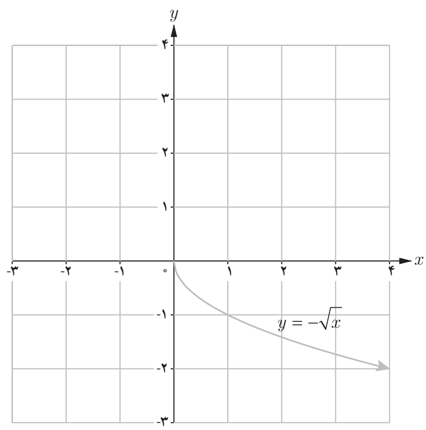


حل : دامنه توابع f و g با هم برابر هستند ولی عرض‌ها قرینه شده‌اند. پس برای رسم با معلوم بودن تابع f، کافی است نمودار را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

۳ نمودار تابع $y=-\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

حل : کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم تا نمودار $y=-\sqrt{x}$ رسم شود.





۴ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{x} & x>۰\\ x-۲ & x\leq ۰\end{cases}$

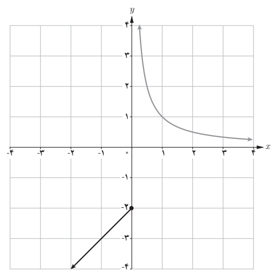
ب) $f(x)=\sqrt{x-۲}+۵$

پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۲ & x>۰\\ \sqrt{x+۲} & -۲\leq x\leq ۰\end{cases}$

ت) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{۱}{x} & x<۰\\ -\sqrt{x+۲} & x\geq ۰\end{cases}$

حل :

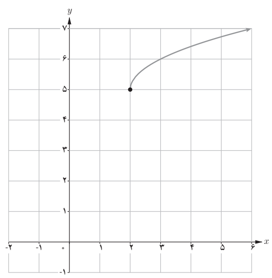
الف)



$D=\mathbb{R}$

$R=(-\infty,-۲]\cup(۰,+\infty)$

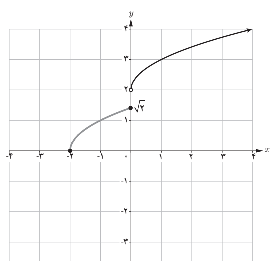
ب)



$D=[۲,+\infty)$

$R=[۵,+\infty)$

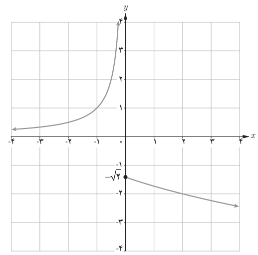
پ)



$D=[-۲,+\infty)$

$R=[۰,+\infty)-(\sqrt{۲},۲]$

ت)



$D=\mathbb{R}$

$R=(-\infty,-\sqrt{2}\,]\cup(0,+\infty)$

۵ کدام‌یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟

الف) $3x+2y=12$ ✓

ب) $x=1$ ×

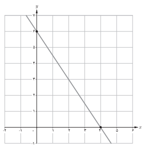
پ) $y=-2$ ✓

ت) $f(x)=\begin{cases} x+3 & x\le 0 \\ x-1 & x\ge 0 \end{cases}$ ×

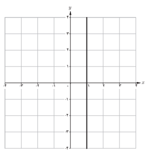
ث) $y^2=x^2$ ×

ج) $y=|x|$ ✓

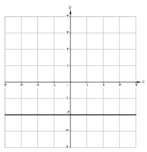
حل



الف) y تابعی از x می‌باشد و $y=\dfrac{12-3x}{2}$ زیرا هر خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

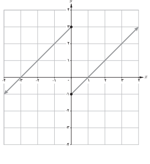


ب) خط $x=1$ به‌عنوان تابع y از x نمی‌باشد زیرا به ازای $x=1$، حداقل ۲ مقدار $y=\pm 1$ وجود دارد پس تابع نیست و یا خط $x=1$ موازی محور yها، نمودار را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند.

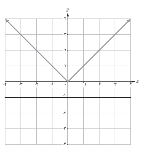


پ) خط $y=-2$، به‌عنوان یک تابع y برحسب x می‌باشد و به آن تابع ثابت گوییم.

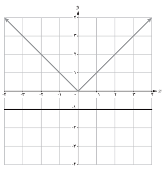
دو خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.



ت) با توجه به نمودار خط $x=0$، نمودار را در ۲ نقطه قطع می‌کند پس تابع y برحسب x نیست و یا طبق ضابطه به ازای $x=0$، دو مقدار ۳ به‌دست می‌آید پس تابع نیست.



ث) $y=\pm x \longrightarrow y^2=x^2$ یعنی به ازای یک x دو مقدار برای y است پس تابع نیست و یا نمودار آن به‌صورت روبه‌رو می‌باشد و تابع نیست.



ج) y تابعی از x است زیرا نمودار آن به‌صورت روبه‌رو است و هر خط موازی محور yها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۶ هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای، به‌وسیله تابع $f(x)=\frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است.

الف) هزینه پاک‌سازی ۵۰٪ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟

ب) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

حل :

الف) میلیون تومان $f(۵۰) = ۲۵۵$ ب) $[۰,۱۰۰)$

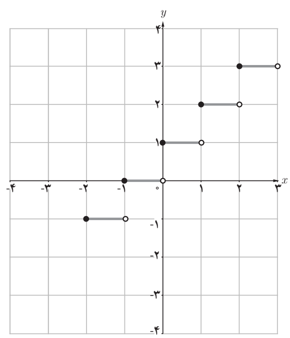
۷ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = [x]+۱ \quad , \quad -۲\leq x<۳$ ب) $f(x) = [\frac{۱}{۲}x] \quad , \quad -۴ \leq x < ۴$

حل :

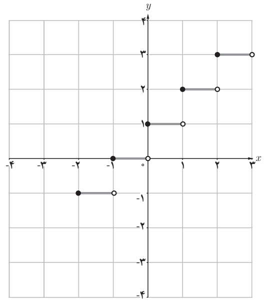
الف)

$$-۲\leq x<۳ \rightarrow \begin{cases} -۲\leq x<-۱ \rightarrow [x]=-۲ \rightarrow y=-۲+۱=-۱ \\ -۱\leq x<۰ \rightarrow [x]=-۱ \rightarrow y=-۱+۱=۰ \\ ۰\leq x<۱ \rightarrow [x]=۰ \rightarrow y=۰+۱=۱ \\ ۱\leq x<۲ \rightarrow [x]=۱ \rightarrow y=۱+۱=۲ \\ ۲\leq x<۳ \rightarrow [x]=۲ \rightarrow y=۲+۱=۳ \end{cases}$$

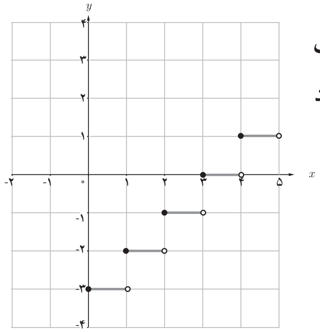


ب)

$$-۴ \le x < ۴ \rightarrow -۲ \le \frac{x}{۲} < ۲ \rightarrow \begin{cases} -۲ \le \frac{x}{۲} < -۱ \rightarrow [\frac{x}{۲}] = -۲ \rightarrow y = -۲ \quad (-۴ \le x < -۲) \\ -۱ \le \frac{x}{۲} < ۰ \quad \rightarrow [\frac{x}{۲}] = -۱ \rightarrow y = -۱ \quad (-۲ \le x < ۰) \\ ۰ \le \frac{x}{۲} < ۱ \quad \rightarrow [\frac{x}{۲}] = ۰ \quad \rightarrow y = ۰ \quad (۰ \le x < ۲) \\ ۱ \le \frac{x}{۲} < ۲ \quad \rightarrow [\frac{x}{۲}] = ۱ \quad \rightarrow y = ۱ \quad (۲ \le x < ۴) \end{cases}$$



۸ نمودارهای دو تابع $y = [x-۳]$ و $y = [x]-۳$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین این دو تابع وجود دارد؟



حل : دو تابع با هم برابرند.

نتیجه : $[x]-۳=[x-۳]$

۹ اگر تعداد افرادی که،طی یک مدت معین، به‌وسیله یک نوع ویروس آلوده می‌شوند با دستور $n(t) = \frac{۹۵۰۰t - ۲۰۰۰}{۴+t}$ به‌دست آید که در آن $t>۰$ زمان برحسب ماه است :

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟

ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

حل :

الف) ۵۰۵۶ نفر

$$n(۵) = \frac{۹۵۰۰ \times ۵ - ۲۰۰۰}{۴+۵} = ۵۰۵۵/۵$$

ب) $۵۵۰۰ = \frac{۹۵۰۰t - ۲۰۰۰}{t+۵} \rightarrow t = ۶$

پ) درس ۳ :

تمرین ص ۶۲

۱ تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک به یک نباشد.

حل : تابع‌های زیادی می‌توان مثال زد که یک به یک نیستند.
ـ فرض کنید علی و فاطمه فرزند رضا هستند پس {(رضا و فاطمه),(رضا و علی)}=f یک تابعی است که یک به یک نمی‌باشد.
ـ دمای هوا و ساعات روز یک تابع است که ممکن است دمای ساعت ۷ صبح با دمای ساعت ۲۰ شب با هم برابر باشند. در این صورت این تابع یک به یک نمی‌باشد.

۲ آیا تابع $f(x)=\frac{۲}{۵}$ وارون تابع $g(x)=\frac{۵}{۲}$ است؟

حل : خیر. تابع $f(x)=\frac{۲}{۵}$ یک تابع ثابت با دامنه $\mathbb{R}$ است و یک به یک نمی‌باشد بنابراین وارون‌پذیر هم نیست.

۳ به کمک رسم نمودار وارون‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون‌پذیرند، به‌دست آورید :

الف) $f(x)=(x+۵)^۲ \quad , \quad x\geq -۵$ ب) $f(x)=-|x-۱|+۱ \quad , \quad x\geq ۲$

پ) $f(x)=(x-۳)^۲$ ت) $f(x)=\sqrt{x+۲}-۳$

حل : الف) تابعی یک به یک است پس وارون‌پذیر می‌باشد.

$y=(x+۵)^۲ \qquad x\geq -۵$

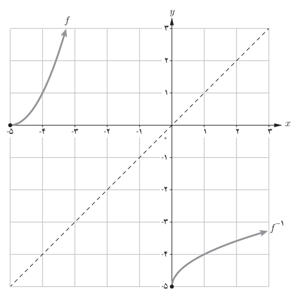
$x+۵=\pm\sqrt{y}\xrightarrow{x\geq -۵}x+۵=\sqrt{y}$

$\rightarrow x=\sqrt{y}-۵$

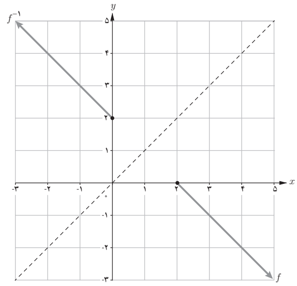
$\rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x}-۵$

$D_{f^{-۱}}=[۰,+\infty)$

$R_{f^{-۱}}=[-۵,+\infty)$

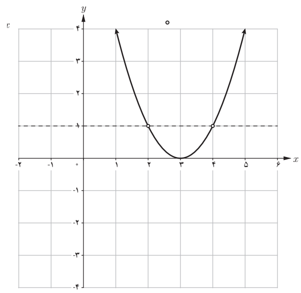


ب) تابعی یک به یک است پس وارون‌پذیر می‌باشد.



$$y=-|x-1|+1 \qquad x\geq 2$$
$$y=-(x-1)+1=-x+2$$
$$x=-y+2 \longrightarrow f^{-1}(x)=-x+2$$
$$D_{f^{-1}}=(-\infty,0]$$
$$R_{f^{-1}}=[2,+\infty)$$

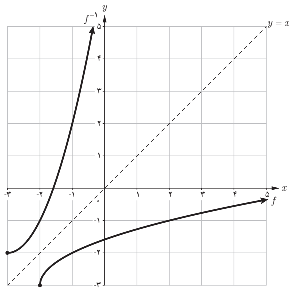
پ) این تابع یک به یک نیست زیرا خط $y=1$ نمودار را در ۲ نقطه قطع می‌کند پس وارون‌پذیر هم نمی‌باشد.



$$y=(x-3)^2$$

$$(x-3)^2=1 \longrightarrow x-3=\pm 1 \longrightarrow \begin{cases} x=4 \\ \text{یا} \\ x=2 \end{cases}$$

ت) تابع f یک به یک است پس وارون‌پذیر می‌باشد.



$$y=\sqrt{x+2}-3 \rightarrow \sqrt{x+2}=y+3$$
$$\longrightarrow x+2=(y+3)^2$$
$$\longrightarrow x=(y+3)^2-2$$
$$\longrightarrow f^{-1}(x)=(x+3)^2-2$$
$$D_{f^{-1}}=[-3,+\infty)$$
$$R_{f^{-1}}=[-2,+\infty)$$

۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h برحسب متر) بعد از t ثانیه از رابطهٔ $h(t)=100-5t^2$ به‌دست می‌آید.

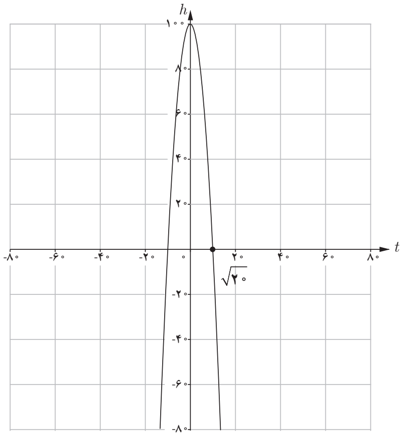
الف) دامنه و برد h را به‌دست آورید. ب) چرا h تابعی یک به یک است؟

پ) تابع وارون h را به‌دست آورید.

حل : الف) $R=[0,100]$ و $D=[0,\sqrt{20}\,]$

ب) زیرا سنگ در هر زمان یک ارتفاع منحصربه‌فرد دارد پس تابع ارتفاع برحسب زمان یک‌به‌یک است.

پ)



$$y=100-5t^2$$
$$5t^2=100-y$$
$$t^2=\frac{100-y}{5}$$
$$t=\pm\sqrt{\frac{100-y}{5}}$$

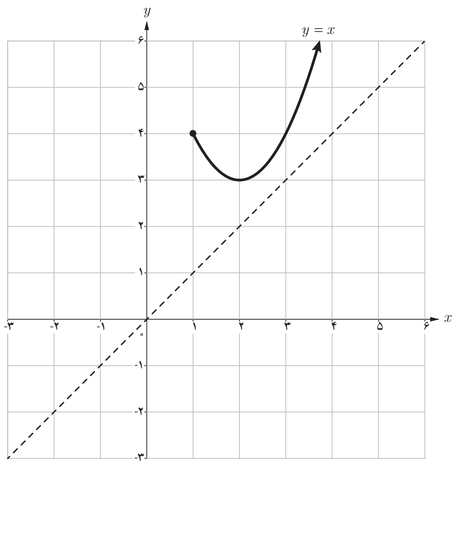
از طرفی $t>0$ پس $t=\sqrt{\frac{100-y}{5}}$ یعنی $h \quad (t) \quad \sqrt{\frac{100}{\quad}}$.

$$D_{h^{-1}}=[0,100]$$
$$R_{h^{-1}}=[0,\sqrt{20}\,]$$

---

۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون‌پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x، $x<f(x)$.

حل : این سؤال بازپاسخ می‌باشد و بی‌شمار تابع می‌توان مثال زد. برای پاسخ‌گویی بهتر، می‌توان خط $y=x$ را رسم کرد و سپس تابع را طوری بالای خط $y=x$ رسم کنید که یک به یک نباشد. به‌عنوان یک نمونه به صورت روبه‌رو است.



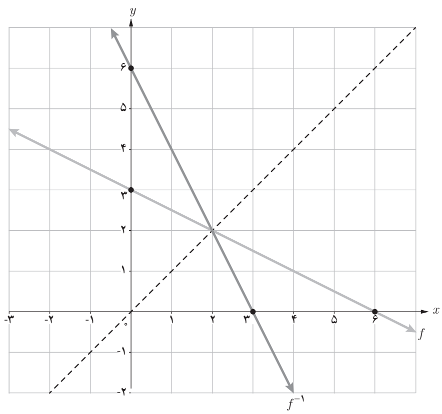
۶ وارون تابع $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

حل : تابع خطی $y=-\frac{۱}{۲}x+۳$ یک به یک است پس وارون‌پذیر می‌باشد.

$$y=-\frac{۱}{۲}x+۳ \to y-۳=\frac{۱}{۲}x \to x=-۲y+۶$$

$$\to f^{-۱}(x)=-۲x+۶$$

$$D_{f^{-۱}}=\mathbb{R} \quad , \quad R_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$$



تمرین ص ۶۹

۱ اگر $f(x)=۴x$ و $g(x)=۲-x$، توابع $\frac{f}{g}$ ، $f-g$ و fog را به همراه دامنهٔ آنها به‌دست آورید.

حل : $D_f=\mathbb{R} \quad , \quad D_g=\mathbb{R}$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۴x}{۲-x} \quad D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}=\mathbb{R}-\{۲\}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=۴x-(۲-x)=۵x-۲ \quad D_{f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=۴(۲-x)=۸-۴x$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}\mid ۲-x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

۲ برای دو تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۳}$ و $g(x)=\frac{۴}{x}$ تابع fog و دامنهٔ آن را به‌دست آورید.

حل :

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{۱}{\frac{۴}{x}-۳}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in \mathbb{R}-\{۰\} \mid \frac{۴}{x}\in \mathbb{R}-\{۳\}\}=\mathbb{R}-\{۰,\frac{۴}{۳}\}$$

$$\frac{۴}{x}\neq ۳$$

$$x\neq \frac{۴}{۳}$$

۳ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $g(۴)=۷$ و $f(۷)=۵$، آن‌گاه $(fog)(۴)=۳۵$

ب) اگر $f(x)=x+۴$ و $g(x)=۳x$، آن‌گاه $(\frac{f}{g})(۲)=۱$

پ) اگر $g(x)=۲x-۱$ و $f(x)=\sqrt{x}$ ، آن‌گاه $(fog)(۵)=g(۲)$

ت) برای هر دو تابع f و g داریم : $fog=gof$

ث) اگر $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ ، آن‌گاه $(fog)(۵)=-۲۵$ و $(fog)(x)=-x^۲$

ج) برای هر دو تابع f و g داریم : $fg=gf$

حل : الف) نادرست است زیرا : $(fog)(۴)=f(g(۴))=f(۷)=۵\neq ۳۵$

ب) درست است زیرا : $(\frac{f}{g})(۲)=\frac{f(۲)}{g(۲)}=\frac{۲+۴}{۳(۲)}=\frac{۶}{۶}=۱$

پ) درست است زیرا : $(fog)(۵)=f(g(۵))=f(۹)=۳=g(۲)$

ت) نادرست است زیرا اگر $f(x)=x^۲+۱$ و $g(x)=\sqrt{x}$ ، آن‌گاه :

$$(fog)(x)=f(g(x))=(\sqrt{x})^۲+۱=x+۱$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{x^۲+۱}$$

$$\Rightarrow fog\neq gof$$

ث) نادرست است زیرا :

$$(fog)(x)=f(g(x))=(\sqrt{x^۲-۴})^۲-۴=x^۲-۸\neq -x^۲$$

ج) درست است زیرا : $(fg)(x)=f(x)g(x)=g(x)f(x)=(gf)(x)\longrightarrow fg=gf$

۴ فرض کنیم $\begin{cases} g:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ g(n)=۲n \end{cases}$ و $f: A\to \mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود :

$f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷)\}$ که در آن : $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، توابع $f+g$ و gof را به‌دست آورید.

حل : برای تعریف تابع $f+g$، ابتدا بایستی دامنهٔ g را محدود کنیم زیرا دامنه f برابر $\{۱,۲,۳,۴\}$ است پس :

$$g=\{(۱,۲)\,,(۲,۴)\,,(۳,۶)\,,(۴,۸)\}$$

$$\Rightarrow f+g=\{(۱,۴)\,,(۲,۷)\,,(۳,۱۱)\,,(۴,۱۵)\}$$

در مورد تابع gof داریم :

$$D_{gof}=\{x\in D_f | f(x)\in D_g\}=\{۱,۲,۳,۴\}$$

$$gof=\{(۱,۴)\,,(۲,۶)\,,(۳,۱۰)\,,(۴,۱۴)\}$$

۵ اگر $f=\{(-۴,۱۳)\,,(-۱,۷)\,,(۰,۵)\,,(\frac{۵}{۲},۰)\,,(۳,-۵)\}$ و

$g=\{(-۴,-۷)\,,(-۲,-۵)\,,(۰,-۳)\,,(۳,۰)\,,(۵,۲)\,,(۹,۶)\}$

توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

حل : برای محاسبه $f\pm g$ و $\frac{f}{g}$ ابتدا بایستی دامنه اشتراک آنها را بیابیم.

$$D_f\cap D_g=\{-۴,۰,۳\}$$

$$f+g=\{(-۴,۶)\,,(۰,۲)\,,(۳,-۵)\}$$

$$f-g=\{(-۴,۲۰)\,,(۰,۸)\,,(۳,-۵)\}$$

$$\frac{f}{g}=\{(-۴,\frac{-۱۳}{۷}),(۰,\frac{-۵}{۳})\}$$

۶ اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۵}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

حل :

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in[-۲,۲] \mid \sqrt{۴-x^۲}\in\mathbb{R}\}=[-۲,۲]$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{۴-x^۲+۵}=\sqrt{۹-x^۲}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R} \mid \sqrt{x^۲+۵}\in[-۲,۲]\}=\varnothing$$

$$۰\le\sqrt{x^۲+۵}\le۲$$

$$x^۲+۵\le۴$$

$$x^۲\le-۱$$

بنابراین gof تعریف نمی‌شود.

---

۷ اگر $f(x)=x^۲-۹$ و $g(x)=x+۳$، ضابطه $\frac{f}{g}$ و دامنهٔ آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۲-۹}{x+۳}=\frac{(x-۳)(x+۳)}{x+۳}=x-۳\quad,\quad D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}$$

حل : $x+۳$ ساده شده است در حالی که اجازه ساده کردن را نداریم. در حالی می‌توان $x+۳$ را در صورت و مخرج یک کسر ساده کرد که $x\neq-۳$. بنابراین راه حل درست به‌صورت زیر است :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۲-۹}{x+۳}=\frac{(x-۳)(x+۳)}{x+۳}=x-۳\qquad x\neq-۳$$

$$\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{-۳\}$$

---

۸ اگر $f(x)=۲x+۵$، $f^{-۱}(x)$، $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را به‌دست آورید.

حل :

$$y=۲x+۵\rightarrow۲x=y-۵\rightarrow x=\frac{y-۵}{۲}\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۵}{۲}$$

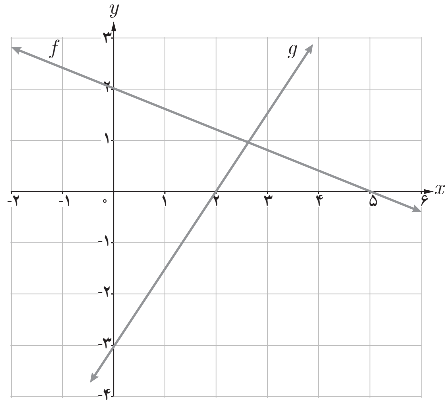
$$(fof^{-۱})(x)=f(f^{-۱}(x))=۲(\frac{x-۵}{۲})+۵=x\quad;\quad x\in D_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$$

$$(f^{-۱}of)(x)=f^{-۱}(f(x))=\frac{۲x+۵-۵}{۲}=x\quad;\quad x\in D_f=\mathbb{R}$$

بنابراین $fof^{-۱}=f^{-۱}of$.

۹ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f+g$ ، $f-g$ و fg را محاسبه کنید.

حل :



$$f(x)=۲-\frac{۲}{۵}x \quad ; \quad D_f=\mathbb{R}$$

$$g(x)=-۳+\frac{۳}{۲}x \quad ; \quad D_g=\mathbb{R}$$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-۱+\frac{۱۱}{۱۰}x$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=۵-\frac{۱۹}{۱۰}x$$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=(۲-\frac{۲}{۵}x)(-۳+\frac{۳}{۲}x)$$

$$D_{f\pm g \atop \cdot}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}$$

۱۰ با توجه به نمودار مقابل، هرکدام از عبارت‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(۲)$

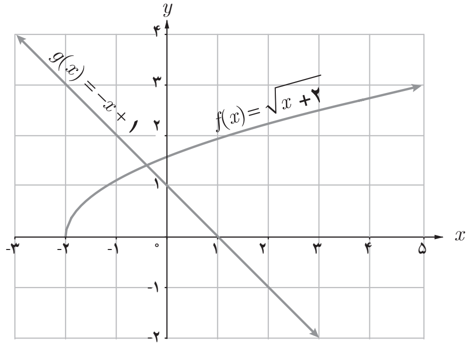
ب) $(f+g)(-۳)$

پ) $(fg)(\frac{۱}{۲})$

ت) $(fog)(-۴)$

ث) $(\frac{f}{g})(۰)$

ج) $(gof)(-۱)$



حل : الف) $(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=۲+(-۱)=۱$

ب) $(f+g)(-۳)=f(-۳)+g(-۳)=$ تعریف نشده

پ) $(f.g)(\frac{۱}{۲})=f(\frac{۱}{۲}).g(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\frac{۵}{۲}}.\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۵}{۲}}$

ت) $(fog)(-۴)=f(g(-۴))=$ تعریف نشده

ث) $(\frac{f}{g})(۰)=\frac{f(۰)}{g(۰)}=\frac{\sqrt{۲}}{۱}=\sqrt{۲}$

ج) $(gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(۱)=۰$

۱۱ نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به‌صورت $y = ax + b$ ($a \neq ۰$) باز هم یک تابع خطی است.

حل : تابع خطی $y = ax + b$ که $a \neq ۰$ در نظر بگیرید.

$$ax = y - b \rightarrow x = \frac{۱}{a}y - \frac{b}{a} \rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{a}x - \frac{b}{a}$$

بنابراین $f^{-۱}$ نیز یک تابع خطی است.

۱۲ تابع $f(x) = \frac{۵}{۹}(x - ۳۲)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. تابعی بنویسید که درجه سانتی‌گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجه فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

حل : برای این منظور بایستی تابع وارون f را پیدا کنیم.

$$y = \frac{۵}{۹}(x - ۳۲) \rightarrow x - ۳۲ = \frac{۹}{۵}y$$

$$\rightarrow x = \frac{۹}{۵}y + ۳۲ \rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۹}{۵}x + ۳۲$$

x : برحسب درجه سانتی‌گراد

$f^{-۱}(x)$: برحسب درجه فارنهایت

۱۳ در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پرفروش در حوزهٔ خاطرات دفاع مقدس را می‌بینید :

یکی از این کتاب‌ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های دیگر ۷هزار نسخه تولید شده است.

کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های بعدی ۹ هزار نسخه به‌چاپ رسیده است.

الف) تابع‌هایی بنویسید که تعداد نسخه‌های چاپ شده هر یک از این دوکتاب را برحسب شماره چاپ نمایش دهند.

ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه‌های چاپ شدهٔ هر دو کتاب را نمایش دهد.

ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

حل :

الف) $f(x)=10000+(x-1)(70000) \qquad x\geq 1$

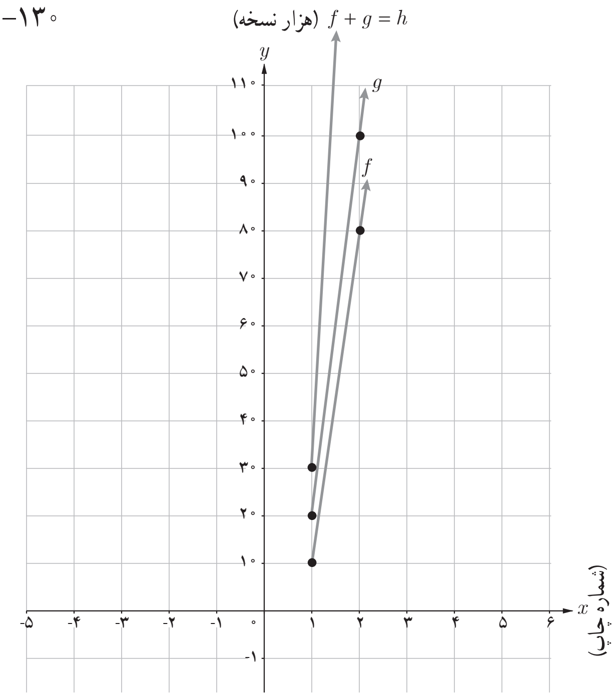
$g(x)=20000+(x-1)(90000) \qquad x\geq 1$

ب) $h(x)=f(x)+g(x)=30000+160000(x-1) \qquad x\geq 1$

پ) $y=f(x)=70x-70+10=70x-60$

$y=20+90x-90=90x-70$

$y=30+160x-160=160x-130$



نمونه سؤالات ارزشیابی فصل ۲

۱ نمایشی دیگر برای تابع $\begin{cases} f:[-1,2]\to\mathbb{R} \\ f(x)=\dfrac{5x-3}{2} \end{cases}$ بنویسید.

۲ دو تابع بنویسید که دامنه یکی $(-2,1]$ و دامنه دیگری $[-1,2]$ باشد. سپس هریک را جداگانه رسم کنید و برد آنها را به‌دست آورید.

۳ کدام دسته توابع زیر با هم مساوی‌اند؟ دلیل بیاورید.

الف) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3} \\ g(x)=x+3 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}} \\ g(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} \end{cases}$

ج) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x-2} \\ g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

د) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \\ g(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \end{cases}$

هـ) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^2-2x} \\ g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-2} \end{cases}$

و) $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1} \\ g(x)=x^2+x+1 \end{cases}$

ی) $\begin{cases} f(x)=|x| \\ g(x)=\sqrt{x^2} \end{cases}$

ل) $\begin{cases} f(x)=\left[\dfrac{x^2}{x^2+1}\right] \\ g(x)=0 \end{cases}$

۴ آیا دو تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{2+\sqrt{4+x^2}}$ و $g(x)=\sqrt{4+x^2}-2$ با هم مساوی‌اند؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۵ دو تابع مساوی تابع $f(x)=|x-2|$ بنویسید.

۶ اگر $f(x)=x+1$ و $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1 \\ 3k^2 & x=1 \end{cases}$ ، مقدار k چقدر باشد تا به ازای هر x داشته باشیم $f(x)=g(x)$ ؟

۷ کدام درست و کدام نادرست است؟ برای هرکدام دلیل بیاورید.

الف) دامنه و هم‌دامنه تابع باید با هم برابر باشند.

ب) از مجموعهٔ $\{a,b,c\}$ به مجموعه $\{d,e\}$ تابعی یک به یک وجود دارد.

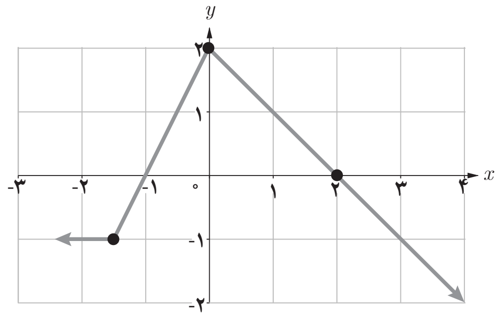
ج) هم‌دامنهٔ تابع زیرمجموعه‌ای از برد آن است.

د) اگر f و g دو تابع یک به یک باشند، $f+g$ یک به یک است.

۸ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۲ & x\leq ۰ \\ -۴ & ۰<x<۲ \\ x+۳ & x\geq ۲ \end{cases}$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

۹ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{۱}{x} & x<۰ \\ \sqrt{x-۱}+۲ & x\geq ۱ \end{cases}$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۱۰ ضابطهٔ نمودار روبه‌رو را بنویسید.



۱۱ در کدام معادلهٔ زیر y، تابعی از x است؟ دلیل بیاورید.

الف) $x^{۲}+y^{۲}=۱۰$

ب) $xy=۲$

ج) $|x-۱|+y=۳$

د) $x^{۲}-y^{۲}=۱۰$

هـ) $|x-۱|+|y|=۰$

و) $|x^{۲}-۴|+|y-۱|=۰$

ز) $|x|+|y^{۲}-۱|=۰$

ر) $\sqrt{x-۱}+\sqrt{y}=۰$

س) $[x]+y=۰$

ش) $|[x]|+|y|=۰$

ص) $x^{y}=y^{x}$

ض) $\sqrt{x^{۲}-۹}+\sqrt{y+۱}=۰$

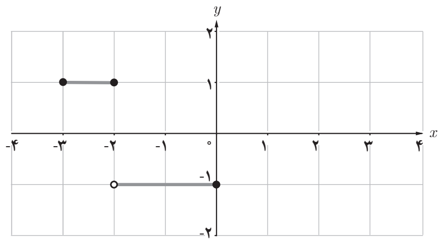
ط) $x^{۲}+(y-۳)^{۲}=۰$

ظ) $(x-۱)y=۰$

ع) $|x|+|y|=۱$

غ) $[y]=x$

۱۲ نمودار روبه‌رو را در بازهٔ $[-۳,۵)$ به دلخواه کامل کرده و سپس ضابطهٔ آن را بنویسید و دامنه و برد مشخص کنید.



۱۳ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=۲[x]-۱ \quad -۱\le x<۲$

ب) $y=[۲x]-۱ \quad -۱\le x<۲$

ج) $y=[۲x-۱] \quad -۱\le x<۲$

د) $y=[\frac{x}{۳}] \quad -۳\le x\le ۳$

هـ) $y=x+[x] \quad -۱\le x<۲$

و) $y=x-[x] \quad ۰\le x\le ۳$

۱۴ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) اگر $f(x)=[x-۳]$ باشد، در این صورت حاصل $f(-۱+\sqrt{۲})$ برابر .... است.

ب) حاصل $\left[\frac{x}{x+۱}\right]$ به ازای $x=\frac{۱}{۵}$ برابر .... است.

ج) اگر $f(x)=[x]$ باشد، حاصل $f(x-f(x))$ برابر .... است.

د) اگر $n\in\mathbb{N}$، حاصل $\left[\sqrt{۴n^۲+۴n}\right]$ برابر .... است.

۱۵ الف) آیا تابع $f(x)=x^۲-۴x$ یک به یک است؟ چرا؟

ب) آیا می‌توانید دامنه آن را طوری محدود کنید که یک به یک شود؟ در صورت این عمل، وارون آن را بیابید.

۱۶ در صورت یک به یک بودن تابع $f(x)=-(x-۲)^۲$ برای $x\le ۲$، وارون آن را بیابید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

۱۷ وارون تابع $f(x)=\sqrt{۳x-۱}$ را در صورت وجود بیابید و نمودار تابع و تابع وارون را رسم کنید.

۱۸ وارون تابع $(x\neq ۱)$ $f(x)=\frac{x-۲}{x-۱}$، تابع .... است.

۱۹ آیا دو تابع $f(x)=۵+\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\frac{۱}{x-۵}$ وارون یکدیگرند؟ چرا؟

۲۰ اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-۱}+۲ & x\ge ۱\\ x+k & x<۱\end{cases}$ معکوس‌پذیر باشد، بیشترین مقدار k را بیابید.

۲۱ اگر خروجی ماشین زیر ۱۴ باشد، ورودی آن را بیابید.

$$x \rightarrow \boxed{۲\sqrt{x+۱}-۳} \rightarrow \boxed{۵x-۱} \rightarrow y$$

۲۲ اگر $\begin{cases} f:[a,+\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x)=۲|x-۳|+۱ \end{cases}$ معکوس‌پذیر باشد، کمترین مقدار a را بیابید.

۲۳ وارون تابع $y=x+[x]$ را در صورتی که بدانیم یک به یک است، پیدا کنید.

۲۴ اگر $f=\{(-۲,۱),(۳,۵),(۱,۴),(۶,۰)\}$ و

$g=\{(۱,۹),(۵,۰),(۷,۳),(۲,-۲),(۶,\sqrt{۲})\}$ دو تابع باشند، مطلوب است :

الف) $f+g$ ب) $۲f-۳g$ ج) fog

د) $(f-g)of$ هـ) $\frac{g}{f}$ و) fof

۲۵ اگر $f(x)=\sqrt{x^۲-۳x}$ و $g(x)=\sqrt{x}+۵$ مطلوب است :

الف) دامنه $f-g$ ب) ضابطه $f-g$

۲۶ اگر $f(x)=\frac{۱}{x+۱}$ و $g(x)=\sqrt{x-۲}$ باشد،

الف) مقدار $(f+g)(۳)$ را محاسبه کنید.   ب) دامنه $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

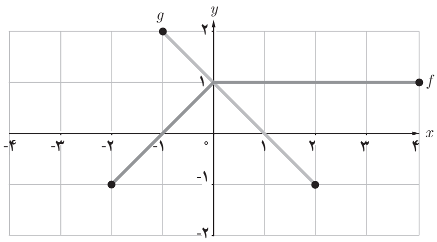
۲۷ اگر $f(x)=۲x-۳$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$ باشد، مطلوب است :

الف) دامنه gof بدون محاسبهٔ $(gof)(x)$

ب) ضابطه $(gof)(x)$ را بنویسید.

ج) $(\frac{۲f+g}{g})(۱)$ را به‌دست آورید.

۲۸ با توجه به نمودارهای f و g، نمودار $f+g$ را رسم کنید.



۲۹ اگر $f(x)=\frac{x}{۲x-۱}$ و $g(x)=\frac{۱}{x+۲}$ باشد، مطلوب است :

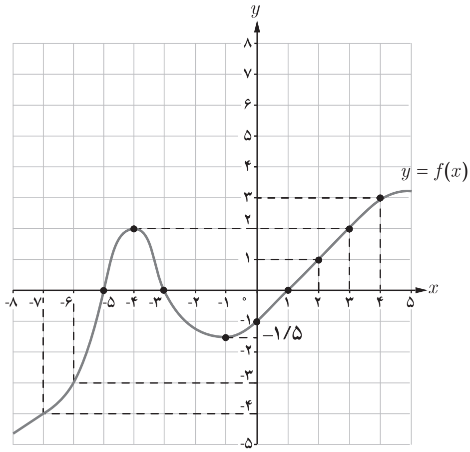
الف) دامنه fog بدون محاسبه ضابطه $(fog)(x)$.

ب) ضابطه $(fog)(x)$

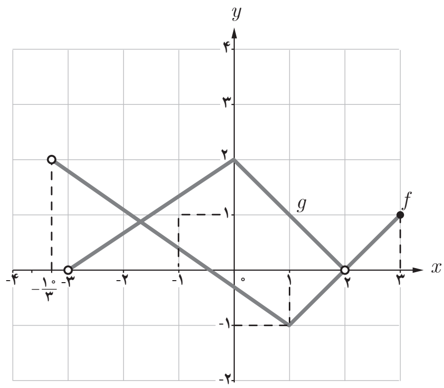
۳۰ اگر $f(x)=\sqrt{x-1}+1$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ باشد، مطلوب است :

الف) دامنه $\frac{f}{g}$ ب) $(f+g)(-1)$ ج) ضابطه $(\frac{f}{g})(x)$

۳۱ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد، جواب معادلهٔ $(fof)(x)=0$ را به‌دست آورید.



۳۲ اگر نمودار دو تابع f و g به‌صورت روبه‌رو باشد. نمودار $f-g$ را رسم کنید و دامنه تابع $y=\frac{1}{f-g}$ را به‌دست آورید.



۳۳ اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ باشد. دامنه تابع $(f-g)og$ را بیابید.

۳۴ اگر $f=\{(1,4),(2,3),(5,1)\}$ و $g=2|x|+1$ باشد و $f^{-1}(g(a))=2$، a را بیابید.

۳۵ اگر $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}+1 & x\geq 2\\ x-2 & x<1\end{cases}$ ، مطلوب است $f^{-1}(x)$.