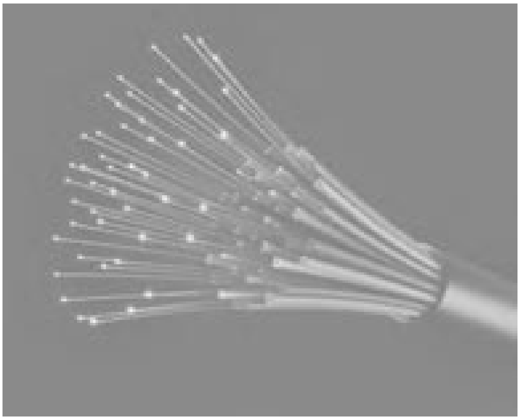
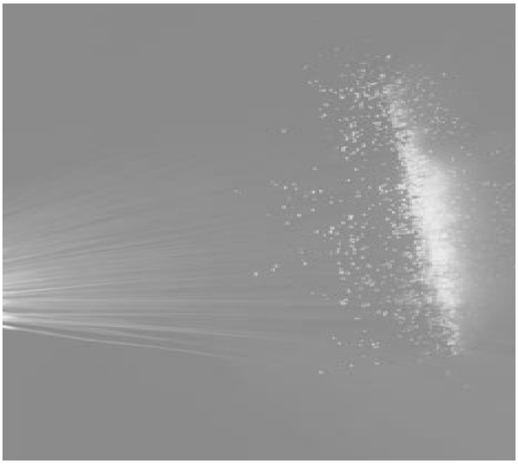
مثلثات

فصل ۴

۱ رادیان
۲ نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا
۳ توابع مثلثاتی
۴ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا





فیبرهای نوری برای انتقال داده‌ها با سرعت بسیار بالا به‌ویژه در خطوط اینترنت استفاده می‌شوند. برای طراحی این فیبرها نیاز است تا امواج نوری به کمک امواج سینوسی شبیه‌سازی شوند.
معمولاً چندین رشته از فیبرهای نوری در یک غلاف پلاستیکی محافظت می‌شود.

نگاه کلی به فصل

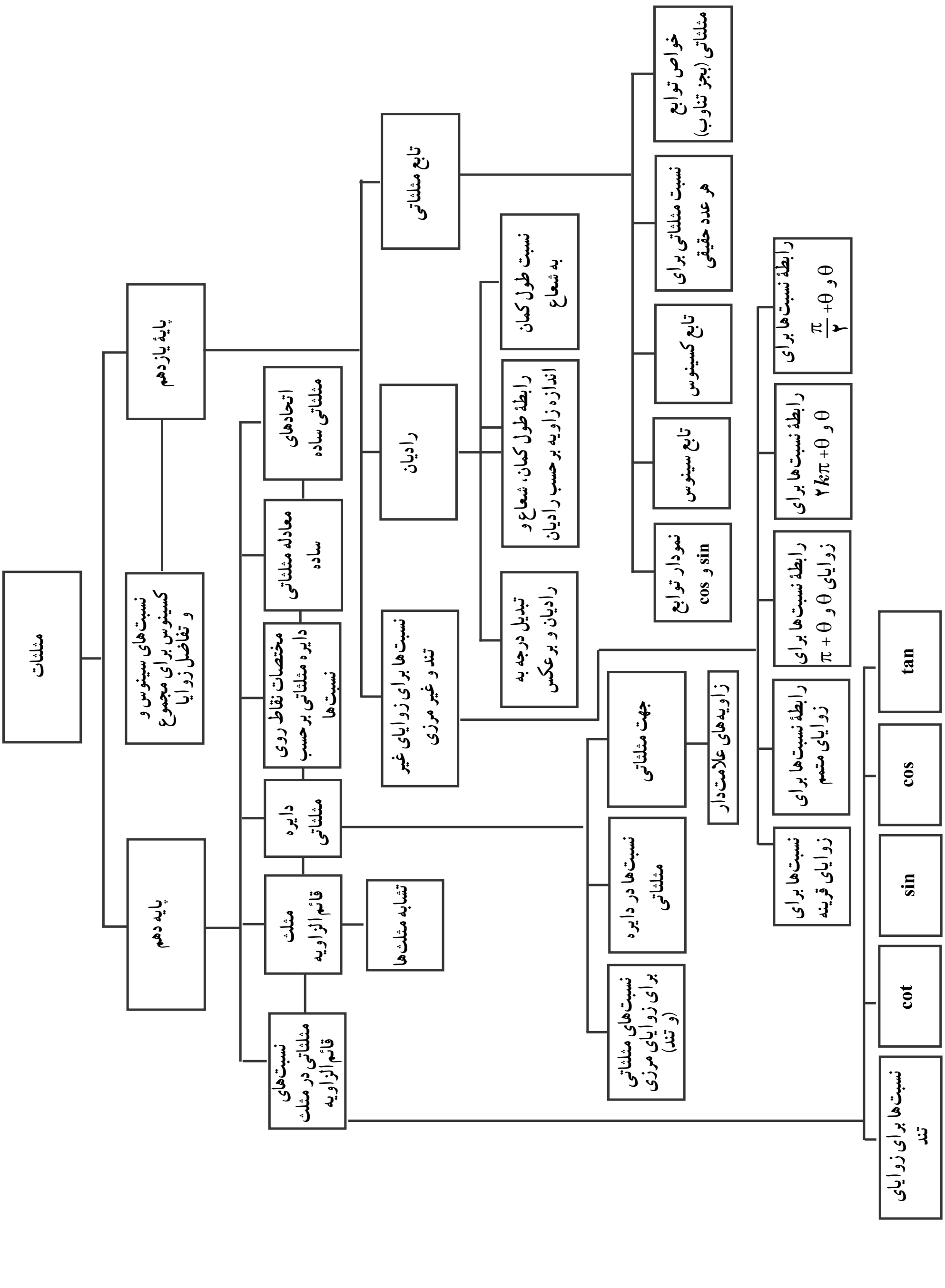
این فصل در ادامه بحث مثلثات کتاب پایهٔ دهم آمده است. در پایهٔ دهم دانش‌آموزان با مفهوم نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه آشنا شده و سپس به تعریف این نسبت‌ها در دایره مثلثاتی پرداخته شده است. همچنین مفهوم زاویهٔ مثلثاتی و جهت مثلثاتی آموزش داده شده است. در ادامه همان فصل از کتاب دهم، آشنایی مقدماتی با برخی معادلات مثلثاتی و اتحادهای مثلثاتی صورت گرفته است. همه مفاهیم فوق برای زوایای تند ۳۰°، ۴۵°، ۶۰° و زوایای مرزی ۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰° و ۳۶۰° انجام گرفته است.

در فصل چهارم از کتاب حسابان ۱ پایهٔ یازدهم ادامه مباحث فوق دنبال می‌شود. به‌طورکلی این فصل بر دو مفهوم اصلی «رادیان» و «تابع مثلثاتی» و یک مهارت اصلی «یافتن مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای زوایای غیرتند و غیرمرزی» تمرکز دارد. بدیهی است در خلال یادگیری این دو مفهوم و مهارت اصلی، دانش‌آموز با خرده مفاهیم و مهارت‌های دیگری نیز آشنا می‌شود.

دو مفهوم اساسی گفته شده در بالا به‌ترتیب در درس‌های اول و سوم مطرح شده است. درس دوم به مهارت اساسی مورد اشاره می‌پردازد. از آنجا که مفاهیم مهارت‌های مدنظر این فصل در ارتباط تنگاتنگ با یکدیگر هستند سعی شده است تابه نوعی پیوستگی بین این مفاهیم و مهارت‌ها لحاظ شود. مثلاً تعمداً مهارت فوق‌الذکر را در درس دوم طرح کرده تا از آن در درس سوم که به مفهوم تابع مثلثاتی می‌پردازد استفاده شود. بنابراین رعایت تقدم و تأخر در ارائه ادامه مطالب به صورتی که در کتاب آمده ضروری است. نکته مهم دیگر این است که وصل کردن مفاهیم به یکدیگر گرچه یادگیری را معنادار و ماندگار می‌کند لیکن نباید در این زمینه افراط شود چرا که ضعف احتمالی دانش‌آموز در یک مفهوم در یادگیری مفاهیم دیگر ایجاد مانع می‌کند. بنابراین رعایت اعتدال در اتصالات مفهومی ضروری است. به عنوان مثال رابطه بین طول کمان، شعاع و اندازه زاویه برحسب رادیان ($\theta = \frac{l}{r}$) که در درس اول این فصل مطرح شده گرچه با مفهوم رادیان در ارتباط است لیکن همانطورکه در مثال‌های این درس آمده، دانش‌آموز می‌تواند طول کمان روبه‌رو به یک زاویه را بدون دانستن اندازهٔ زاویه برحسب رادیان و تنها با یک نسبت و تناسب ساده (و بدون تبدیل از درجه به رادیان) به‌دست آورد. بنابراین اصرار برحفظ این فرمول و تبدیل اندازه زاویه از درجه به رادیان و سپس به‌کارگیری فرمول غیرضروری سبب ایجاد درکی ناقص از این رابطه می‌شود.

در توضیح تصویر عنوان فصل باید گفت که توابع مثلثاتی که موضوع اصلی و محوری این فصل می‌باشد در آنالیز فوریه نقش کلیدی دارند. از بسط‌های فوریه که براساس توابع مثلثاتی هستند برای مدل‌سازی امواج نوری در فوتونیک استفاده بسیار می‌شود. یکی از کاربردهای بسط‌های فوریه در مدل‌سازی فیبرهای نوری است.

نقشه مفهومی فصل ۴



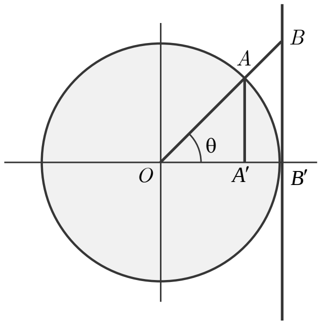
درس ۱
رادیان

اهداف درس

۱ آشنایی با مفهوم رادیان
۲ درک و استفاده از رابطه بین طول کمان، شعاع دایره و اندازه زاویه برحسب رادیان
۳ توانایی تبدیل واحدهای اندازه‌گیری زاویه (درجه رادیان) به یکدیگر

یکی از سؤالات اساسی مبحث مثلثات لزوم استفاده از واحد رادیان به‌جای درجه است. این سؤال اغلب از سوی دانش‌آموزان مطرح می‌شود که چرا باید از رادیان به‌جای زاویه استفاده کنیم. از زاویه دید آموزشی گام اول در آموزش یک مفهوم ایجاد انگیزه در یادگیرنده است و چنانچه دانش‌آموز به نحو مناسبی احساس نیاز به یادگیری مفهوم جدید نکرده و برانگیخته نشود در ادامه بحث نیز با کلاس درس همراهی نخواهد کرد. متأسفانه در مورد برخی مفاهیم ریاضی از جمله واحد رادیان امکان پاسخ‌گویی دقیق به این سؤال برای دانش‌آموز وجود ندارد. دلیل این امر نیاز به دانستن برخی مفاهیم دیگر است که هنوز دانش‌آموز با آنها آشنایی ندارد. در واقع عمده مفاهیم زمانی که در یک شبکه مفهومی ارائه می‌شوند معنا پیدا می‌کند و لزوم آموزش هر کدام هویدا می‌شود. ولی در فرایند آموزش ناچاراً باید تقدم و تأخری (ولو مصنوعی) را برای ارائه بخش‌های مختلف یک شبکه مفهومی در پیش گرفت تا دانش‌آموز به یکباره با حجمی زیاد از مفاهیم مواجه نشود. از این رو لزوم یادگیری برخی مفاهیم در زمان آموزش آنها به‌طور کامل قابل بیان نیست. برخی مفاهیم مثلثاتی از جمله رادیان از این دست است. واحد درجه هنگامی که با مسائل هندسی مواجه می‌شویم اغلب کافی و حتی مناسب‌تر است. در این نوع مسائل اغلب بحث از نسبت‌های مثلثاتی است (که معمولاً به‌صورت نسبت اضلاع در یک مسئله هندسی ظاهر می‌شوند) و نه تابع مثلثاتی به مفهومی که در جبر و آنالیز مطرح است. مفهوم رادیان هنگامی که می‌خواهیم عملیات‌های آنالیزی مانند مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری بر روی توابع مثلثاتی انجام دهیم مناسب‌تر است و موجب ساده‌تر شدن روابط می‌شود. در این موارد چنانچه تابع مثلثاتی را برحسب درجه تعریف کرده باشیم اغلب هنگام مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری ضرایبی تولید می‌شود که در محاسبات آزاردهنده است.

θ برحسب رادیان :



$\theta = \frac{s}{R}$ برحسب رادیان

$\frac{\theta_r \text{ رادیان}}{\pi} = \frac{\theta_O \text{ درجه}}{۱۸۰}$

با توجه به اصول هندسی می‌توان نشان داد که (به مساحت مثلث‌ها و قطاع ایجاد شده توجه کنید.)

$$\begin{cases} AA' = \sin\theta \\ BB' = \tan\theta \\ \overset{\frown}{AB'} = \text{طول کمان} = \theta R'' = \theta \end{cases}$$

شعاع زاویه برحسب رادیان

$$AA' < \overset{\frown}{AB'} < BB'$$

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta \xrightarrow{\theta\neq ۰ \Rightarrow \sin\theta \neq ۰} \frac{\sin\theta}{\sin\theta} < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{\tan\theta}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow ۱ < \frac{\theta}{\sin\theta} < \cos\theta \overset{\text{معکوس‌سازی}}{\Rightarrow} \frac{۱}{\cos\theta} < \frac{\sin\theta}{\theta} < ۱$$

$$\overset{\text{قضیه فشردگی}}{\Rightarrow} \lim_{\theta\to ۰} \frac{۱}{\cos\theta} < \lim_{\theta\to ۰}\frac{\sin\theta}{\theta} < \lim_{\theta\to ۰} ۱ \Rightarrow ۱ < \lim_{\theta\to ۰}\frac{\sin\theta}{\theta} < ۱$$

$$\Rightarrow \lim_{\theta\to ۰}\frac{\sin\theta}{\theta} = ۱$$

θ برحسب درجه :

$$\frac{\theta_r \text{ رادیان}}{\pi} = \frac{\theta_d \text{ درجه}}{۱۸۰} \Rightarrow \theta_r \text{ رادیان} = \frac{\pi}{۱۸۰}\theta_d$$

$$\overset{\frown}{AB'} = \text{طول کمان روبه‌رو به } \theta = \underset{\text{رادیان}}{\theta} R = \frac{\pi}{۱۸۰}\theta_d R = \frac{\pi}{۱۸۰}\theta_d$$

مشابه قبل داریم :

$$AA' < \overset{\frown}{AB'} < BB' \Rightarrow \sin\theta_d < \frac{\pi}{۱۸۰}\theta_d < \tan\theta_d$$

$$\xRightarrow{\theta_d \neq \theta^\circ_\circ \Rightarrow \sin\theta_d \neq ۰} \frac{\sin\theta_d}{\sin\theta_d} < \frac{\pi}{۱۸۰} < \frac{\theta_d}{\sin\theta_d} < \frac{\tan\theta_d}{\sin\theta_d}$$

$$\Rightarrow ۱ < \frac{\pi}{۱۸۰}\frac{\theta_d}{\sin\theta_d} < \cos\theta_d \overset{\text{معکوس‌سازی}}{\Rightarrow} \frac{۱}{\cos\theta_d} < \frac{۱۸۰}{\pi}\frac{\sin\theta_d}{\theta_d} < ۱$$

$$\Rightarrow \lim_{\theta_d\to ۰}\frac{۱}{\cos\theta_d} < \lim_{\theta_d\to ۰}\frac{۱۸۰}{\pi}\frac{\sin\theta_d}{\theta_d} < \lim_{\theta_d\to ۰} ۱$$

$$\Rightarrow ۱ < \frac{۱۸۰}{\pi}\lim_{\theta_d\to ۰}\frac{\sin\theta_d}{\theta_d} < ۱ \overset{\text{قضیه فشردگی}}{\Rightarrow} \frac{۱۸۰}{\pi}\lim_{\theta_d\to ۰}\frac{\sin\theta_d}{\theta_d} = ۱$$

$$\Rightarrow \lim_{\theta_d\to ۰}\frac{\sin\theta_d}{\theta_d} = \frac{\pi}{۱۸۰}$$

اکنون به مشتق تابع y=sin$x$ توجه کنید.

$$(\sin x)' = \lim_{h\to ۰}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{\sin x \overset{۱}{\cancel{\cos h}} + \cos x\sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{\sin x} + \cos x\sin h - \cancel{\sin x}}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{\cos x\sin h}{h} = \cos x\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}$$

اکنون بسته به اینکه در تابع y=sin$x$ متغیر x و به تبع آن متغیر h را برحسب رادیان گرفته‌ایم با درجه حد $\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}$ می‌تواند متفاوت باشد و لذا برای مشتق تابع y=sin$x$ خواهیم داشت

$$\cos x\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h} \begin{cases} x \text{ و } h \text{ برحسب رادیان} \Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h} = ۱ \Rightarrow (\sin x)' = \cos x \\ x \text{ و } h \text{ برحسب درجه} \Rightarrow \lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h} = \frac{\pi}{۱۸۰} \Rightarrow (\sin x)' = \frac{\pi}{۱۸۰}\cos x \end{cases}$$

اکنون فرض کنید که بخواهیم از تابعی که شامل توابع مثلثاتی متعدد است مشتق بگیریم. در این صورت ضرایب مختلفی ایجاد خواهد شد که به‌ویژه در مشتقات مراتب بالاتر باعث پیچیده شدن غیرضروری عبارت می‌شوند. به‌هرحال ذکر دلایل فوق برای دانش‌آموزان ممکن نیست و باید به طریق دیگری لزوم استفاده از رادیان مطرح شود.

به‌هرحال باید یادآور شد که در هر مسئله‌ای که بتوان از درجه استفاده کرد قطعاً همان مسئله با مفهوم رادیان نیز قابل حل است و برعکس (از رابطه تبدیل واحدها استفاده کنید) و هدف تنها ساده‌سازی روابط است. این مشابه استفاده از دو واحد سانتی‌گراد و فارنهایت برای دما است. بدیهی است که همه مسائل فیزیکی را با هر دو می‌توان حل کرد اما گاهی استفاده از یکی راحت‌تر است. از آنجا که در درس اول از این فصل هنوز بخشی راجع به تابع مثلثاتی و همچنین مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری مطرح نشده، بنابراین بیان دلیل اصلی معرفی و لزوم استفاده از واحد رادیان ساده نیست.

روش تدریس

به هر حال برای ایجاد انگیزه سؤالی در فعالیت اول این درس مطرح شده که از دانش‌آموز کشف رابطه‌ای بین اندازه زاویه و طول کمان روبه‌رو به آن مطالبه شده است و نهایتاً مفهوم رادیان در پایان این فعالیت تولید می‌شود. توصیه می‌شود که قبل از ورود به فعالیت توضیح چندانی راجع به دلیل معرفی رادیان داده نشود و به‌جای آن به فعالیت پرداخته شود.

فعالیت ص ۹۲

در سؤال ۱ از این فعالیت ابتدا از دانش‌آموز خواسته می‌شود تا طول ضلع PQ را با اطلاعات داده شده در شکل به‌دست آورند. این سؤال فرصتی برای مرور مفاهیم سال گذشته فراهم می‌کند. توصیه می‌شود که چنانچه دانش‌آموز برخی مفاهیم سال گذشته را فراموش کرده در همین‌جا توقف کوتاهی صورت گرفته و در چارچوب این سؤال مفاهیم یادآوری شود.

مثلاً پاسخ این سؤال مستلزم استفاده از نسبت سینوس است. اما معلم می‌تواند از دانش‌آموز طول ضلع OQ را نیز مطالعه کند تا نسبت کسینوس نیز یادآوری شود. همین‌طور می‌توان نسبت‌های دیگر را درخواست کرد و سپس برای زاویه دیگری از شکل یعنی زاویه $O\hat{P}Q$ همان روابط را جویا شد. پس از حصول اطمینان از یادآوری مطالب سال گذشته به‌صورت سریع و اشاره‌وار مجدداً به جریان اصلی فعالیت باز می‌گردیم. در سؤال ۱ محاسبه طول ضلع روبه‌رو به زاویه α خواسته شده بود که با نسبت سینوس قابل محاسبه است. در سؤال ۲ از دانش‌آموز خواسته می‌شود که با همان داده‌ها طول کمان روبه‌رو به همان زاویه را بیابد. گرچه یک دانش‌آموز تیزهوش با دانش قبلی خود و بدون مدد از مفهوم رادیان می‌تواند این رابطه را کشف کند لیکن سطح این مسئله برای دانش‌آموزان متوسط به حد کافی چالشی و برانگیزاننده است و لزوم ارائه مفهوم جدیدی به نام رادیان را در ذهن آنها منطقی جلوه می‌دهد. این فعالیت به‌صورت گام‌به‌گام به سمت معرفی رادیان حرکت می‌کند. این سؤال در ادامه پاسخ داده شده و از دانش‌آموزان خواسته شده تا به‌طور مشابه محاسبات را برای دایره‌های دیگری انجام دهند (قسمت الف سؤال ۲).

محاسبات قسمت ب اندک‌اندک دانش‌آموزان را به این سو سوق می‌دهد که برای کشف رابطهٔ بین اندازه زاویه و طول کمان روبه‌رویش می‌بایست اندازه زاویه را به‌گونه‌ای دیگر بیان کنیم. ادامه فعالیت در واقع به دانش‌آموز پیشنهاد می‌کند که نسبت طول کمان روبه‌رو به زاویه به طول شعاع دایره می‌تواند معیاری جایگزین برای اندازه‌گیری زاویه باشد چرا که مستقل از دایره است و تا زمانی که اندازه زاویه تغییر نکند این نسبت نیز تغییر نمی‌کند (در دایره‌های با شعاع مختلف نسبت یکسان است). دانش‌آموز با تعمیم این نسبت به حالت کلی (یعنی در هر دایره دلخواه) مطمئن می‌شود که مادامی که زاویه تغییر نکند، این نسبت نیز تغییر

نمی‌کند و لذا می‌تواند معیاری برای اندازه‌گیری زاویه باشد که با این نوع اندازه‌گیری، ارتباط بین زاویه و طول کمان روبه‌رو به آن به‌طور طبیعی پیدا می‌شود (البته با وساطت طول شعاع). در پایان فعالیت این نسبت را که برای حالت تعمیم یافته (یعنی در دایره دلخواه) بررسی شد برای زاویه‌ای خاص که همان زاویه یک رادیان است بررسی می‌کنیم. این به آن دلیل است که در ریاضیات رادیان را تعریف نمی‌کنند بلکه «یک رادیان» را تعریف می‌کنند. یادآور می‌شود که سیر فعالیت به‌صورت زیر قابل بخش‌بندی است.

گام اول : یافتن نسبت طول کمان به شعاع برای یک زاویه خاص (برحسب درجه) در یک دایره خاص (به شعاع ۲) : سادگی محاسبات

گام دوم : یافتن نسبت برای همان زاویه (برحسب درجه) در یک دایره تعمیم یافته (شعاع r) : استقلال مفهوم از ابعاد دایره

گام سوم : یافتن نسبت برای یک زاویه خاص (این بار برحسب رادیان است و اندازه آن برحسب درجه داده نشده است) در یک دایره تعمیم یافته : مفهوم یک رادیان.

پس از فعالیت، تعریف ریاضی یک رادیان که پیش از آن در بخش پایانی فعالیت کشف شده است به‌طور صریح آورده شده است. سپس زوایای ۱ تا ۶ رادیان را رسم کرده تا اختلاف بین واحدهای رادیان و درجه برجسته‌تر شود و شهود اولیه دانش‌آموزان از رادیان کامل‌تر شود. در ادامه بر مبنای بحث‌های صورت‌گرفته در فعالیت، رابطه بین اندازه زاویه برحسب رادیان و نسبت طول کمان روبه‌رو به زاویه به شعاع و نیز به رابطه تبدیل درجه به رادیان و برعکس پرداخته شده و مثال‌هایی برای هر کدام آورده شده است. برای پرهیز از حفظ صرف فرمول‌ها ابتدا مثال‌ها آورده شده و برمبنای دانش کسب شده در فعالیت‌ها و مثال‌ها به‌رابطه‌ها پی برده و نهایتاً در پایان تصریح شده است. بنابراین لازم است تا به همین شیوه دانش‌آموزان در مسیر کشف رابطه‌ها هدایت شوند و نه صرفاً با مواجه آنی و تکیه برحفظ کردن مکانیکی روابط، این مفاهیم منتقل شوند.

کار در کلاس ص۹۵

در این کار در کلاس دانش‌آموزان زاویه‌هایی را که در مثلثات پایهٔ دهم فراگرفته مجدداً بررسی می‌کنند و ضمن یادآوری مفاهیم قبلی با تبدیل زاویه‌ها به رادیان مفاهیم فراگرفته شده در این درس را مرور می‌کنند.

در کتاب درسی ممکن است تعداد و تنوع مثال‌ها کافی نباشد. همکاران گرامی می‌توانند با ارائه مثال‌های بیشتر و متناسب با سطح دانش‌آموزان خود و نیز رعایت اصول مدنظر کتاب، این بخش را غنی‌تر کنند. نکته مورد تأکید در اینجا استفاده از مثال‌های کاربردی است.

۱ در زیر برخی از زاویه‌ها بر حسب رادیان داده شده است. مانند نمونه، آنها را با زوایای داده شده در دایره‌های مثلثاتی زیر نظیر کنید.

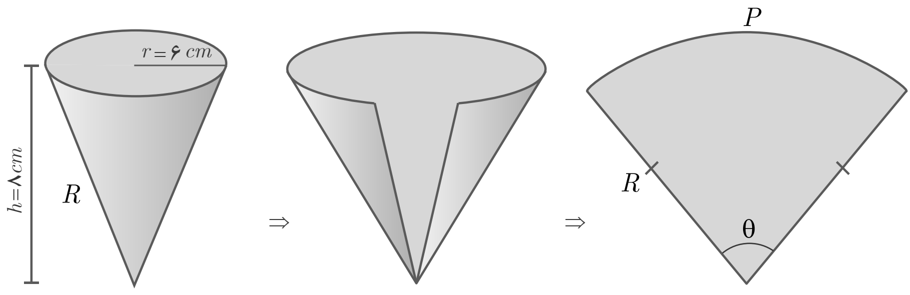
الف) $\frac{۲\pi}{۶} = \theta_۶$ ب) $\frac{۲\pi}{۵} = \theta_۳$ پ) $\frac{۲\pi}{۴} = \theta_۵$ ت) $\frac{۲\pi}{۳} = \theta_۴$ ث) $\frac{۲\pi}{۲} = \theta_۱$

ج) $۲\pi = \theta_۲$ چ) $۳\pi = \theta_۸$ ح) $۴\pi = \theta_۷$ خ) $۵\pi = \theta_۹$ د) $۶\pi = \theta_{۱۰}$

حل تمرین‌های برگزیده

۲ شکل فضایی و گستردهٔ یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط r=۶cm و ارتفاع آن h=۸cm می‌باشد. اندازهٔ زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟

رابطه فیثاغورس :
$$\begin{matrix} R = \sqrt{۶^۲ + ۸^۲} = ۱۰ \\ P = ۲\pi \times ۶ = ۱۲\pi \end{matrix} \Rightarrow \theta = \frac{P}{R} = \frac{۱۲\pi}{۱۰} = \frac{۶\pi}{۵} rad$$



درس ۲ نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

اهداف درس

۱ رابطه مقدار نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم

۲ به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه و مکمل

۳ به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\frac{\pi}{۲}+\theta$

گاهی بین دو زاویه ارتباطی وجود دارد، در این صورت معمولاً بین مقدار نسبت‌های مثلثاتی آنها نیز رابطه‌ای برقرار است. اهمیت درک این ارتباط‌ها به دو دلیل عمده برمی‌گردد. دلیل اول آن است که درک و استفاده از این روابط بعداً در حل معادلات مثلثاتی نیاز می‌شود. از سوی دیگر برای پیدا کردن مقدار نسبت‌های مثلثاتی زوایای غیرتند و غیرمرزی (مثلاً زاویه ۱۲۰° که پرکاربرد نیز است) نیاز به دانستن این روابط می‌باشیم.

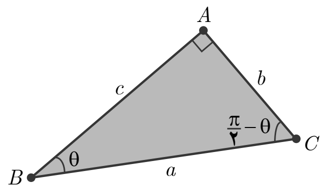
روش تدریس

فعالیت ص ۹۸

این فعالیت به کشف رابطه بین مقادیر نسبت‌های مثلثاتی برای دو زاویه متمم می‌پردازد. دقت شود که در مورد زاویه‌های متمم خود رابطه مهم است و از این رابطه برای محاسبه استفاده نمی‌شود. مثلاً این‌گونه نیست که برای یافتن مقدار $\sin ۶۰^\circ$ ابتدا مقدار $\cos ۳۰^\circ$ را یافته و سپس از طریق رابطهٔ بین این دو به

مقدار $\sin ۶۰^\circ$ دست یابیم! این در حالی است که بقیه روابط مطرح شده در این درس عموماً جهت محاسبه نسبت‌های دیگر زوایا به‌کار گرفته می‌شود. بنابراین رابطه بین نسبت‌های زوایای متمم از این جهت که در محاسبه نسبت‌های دیگر زوایا به‌کار نمی‌رود استثنا است و به همین دلیل آن را در ابتدای این درس مطرح کرده و سپس به بیان دیگر روابط و محاسبات مربوط به آنها پرداخته‌ایم.

یک مثلث قائم‌الزاویه دلخواه مانند شکل زیر را در نظر بگیرید.



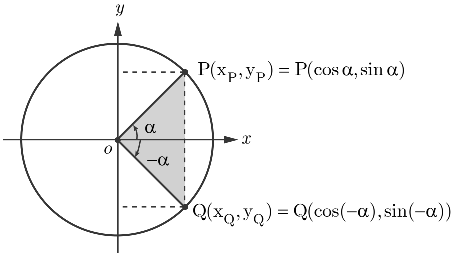
با توجه به شکل، دو ستون روبه‌رو را همانند نمونه کامل و سپس مقادیر مساوی در دو ستون را با هم نظیر کنید.

$\sin\theta = \frac{b}{a}$	$\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta) = \frac{c}{a}$
$\cos\theta = \frac{c}{a}$	$\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta) = \frac{b}{a}$
$\tan\theta = \frac{b}{c}$	$\tan(\frac{\pi}{۲}-\theta) = \frac{c}{b}$
$\cot\theta = \frac{c}{b}$	$\cot(\frac{\pi}{۲}-\theta) = \frac{b}{c}$

فعالیت ص ۹۹

در این فعالیت به نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه می‌پردازیم. توجه شود که در مثلثات پایهٔ دهم دانش‌آموزان با محورهای سینوس و کسینوس و نیز نمایش مختصات یک نقطه برحسب زاویه مربوطه آشنا شده‌اند. در اینجا معلم می‌تواند در صورت نیاز مطالب سال قبل را ابتدا مرور کرده و سپس به این فعالیت بپردازد. دقت شودکه نحوهٔ پیدا کردن روابط بین زوایای قرینه از طریق دایره مثلثاتی است در حالی‌که برای یافتن رابطه برای زوایای متمم از مثلث قائم‌الزاویه استفاده شده بود. دلیل این امر آن است که یافتن رابطه برای زوایای متمم از طریق دایره مثلثاتی دشوارتر از مثلث قائم‌الزاویه است و ضمناً به این صورت دو روش مختلف (استفاده از مثلث قائم‌الزاویه و استفاده از دایره مثلثاتی) را به دانش‌آموز آموزش می‌دهیم.

در دایره مثلثاتی روبه‌رو نقطه P انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α است. مختصات نقطه P برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه α که در سال گذشته آموختید، داده شده است. همچنین با توجه به دستگاه مختصات واضح است که قرینه نقطه $P(x_P, y_P)$ نسبت به محور xها نقطه $Q(x_Q, y_Q)=Q(x_P, -y_P)$ می‌باشد.



الف) باتوجه به رابطهٔ بین مختصات نقاط P و Q روابط مثلثاتی زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = x_P \Rightarrow \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$y_Q = -y_P \Rightarrow \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

ب) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط به‌دست آمده از قسمت الف کامل کنید.

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha$$

فعالیت ص ۱۰۰

روش فعالیت قبل مجدداً برای دو زاویه مکمل در این فعالیت نیز استفاده شده است. سپس روابط برای α و $\pi + \alpha$ مشابهاً توضیح داده شده است. توصیه می‌شودکه برای حالت α و $\pi + \alpha$ نیز دبیر محترم دایره مثلثاتی را رسم و محاسبات را همانند α و $\pi - \alpha$ به کمک دانش‌آموزان به‌دست آورد.

در صفحه ۱۰۱ ابتدا روابط برای زوایای α و $\alpha + ۲\pi$ بحث شده و سپس آن را برای زوایای $\alpha + ۲k\pi$ تعمیم داده‌ایم. توجه می‌شود که برای زوایای مکمل، ضلع پایانی دو زاویه در دایره مثلثاتی بر روی هم قرار

می‌گیرد. بنابراین توصیه می‌شود که در شکل بالایی صفحه ۱۰۱ ابتدا زاویه α به تنهایی در دایره مثلثاتی رسم شود. (پای تابلو یا به کمک نرم‌افزار) و سپس به کمک دانش آموزان زاویه دوم که همان $\alpha + 2\pi$ است ترسیم گردد تا وجود دو زاویه در شکل برجسته‌تر گردد. آنگاه به یافتن روابط بین نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه پرداخته شود.

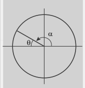
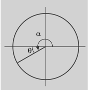
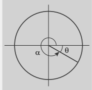
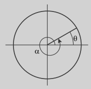
از آنجا که زوایای $-\alpha$ و $2\pi - \alpha$ نیز هم انتها هستند با روشی مشابه می‌توان رابطه نسبت‌های مثلثاتی بین آنها را به‌دست آورد. سپس با توجه به رابطه بین زوایای قرینه که پیش‌تر در فعالیت ص ۹۹ به آن پرداخته شده می‌توان رابطه بین $2\pi - \alpha$ و α را به‌دست آورد.

کار در کلاس ص ۱۰۲

این کار در کلاس به نوعی جمع‌بندی مطالب فرا گرفته شده در فعالیت‌های قبل است. گفتنی است در برخی منابع آموزشی مفهومی به نام «زاویه مرجع»[1] مطرح می‌شود. این زاویه برخلاف زوایای مثلثاتی جهت (یا علامت) ندارد و همواره یک زاویه تند است. برای پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه داده شده در این منابع ابتدا نحوه پیدا کردن زاویه مرجع برای زاویه داده شده آموزش داده می‌شود و سپس نشان می‌دهند که مقدار نسبت مثلثاتی برای یک زاویه همواره به کمک مقدار نسبت مثلثاتی برای زاویه مرجع آن به‌دست می‌آید. زاویه مرجع کوچک‌ترین زاویه‌ای است که ضلع پایانی زاویه با محور xها (نه لزوماً بخش مثبت محور) می‌سازد. اگر به جدول داده شده در سؤال ۲ این کار در کلاس دقت شود، زاویه θ در این جدول برای زوایای مختلف همان زاویه مرجع می‌باشد که با یافتن آن می‌توان مقدار نسبت‌های زوایای داده شده را یافت. در این جدول از دانش‌آموز خواسته می‌شود تا θ که همان زاویه مرجع می‌باشد را نیز مشخص کند. همان‌طور که در نمونه کامل شده آمده برای زاویه θ جهت مشخص نشده است در حالی‌که برای زاویه α داده شده که یک زاویه مثلثاتی است جهت رسم شده است. (به پیکان‌ها دقت کنید). به‌هر حال متذکر می‌شود که آموزش زاویه مرجع جزء اهداف کتاب درسی نیست و بدون ذکر نام آن و با کمک جدول فوق نحوه محاسبه مقدار نسبت‌های مثلثاتی آموزش داده می‌شود. مطالب فوق راجع به زاویه مرجع جهت دانش‌افزایی دبیران محترم مطرح شده است.

۱ــ Reference Angel

۲ جدول زیر را همانند نمونه کامل کنید. $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

زاویه / نسبت	$\alpha = \pi - \theta$	$\alpha = \pi + \theta$	$\alpha = 2k\pi - \theta$	$\alpha = 2k\pi + \theta$
انتهای کمان	ربع دوم	.....	.....	.....
ترسیم زاویه α و تشخیص علامت نسبت‌ها	 نسبت / + / − $\sin\alpha$ / ✓ / $\cos\alpha$ / / ✓ $\tan\alpha$ / / ✓	 نسبت / + / − $\sin\alpha$ / / ✓ $\cos\alpha$ / / ✓ $\tan\alpha$ / ✓ /	 نسبت / + / − $\sin\alpha$ / / ✓ $\cos\alpha$ / ✓ / $\tan\alpha$ / / ✓	 نسبت / + / − $\sin\alpha$ / ✓ / $\cos\alpha$ / ✓ / $\tan\alpha$ / ✓ /
$\sin\alpha$	$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$	$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$	$\sin(2k\pi-\theta) = -\sin\theta$	$\sin(2k\pi+\theta) = \sin\theta$
$\cos\alpha$	$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$	$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$	$\cos(2k\pi-\theta) = \cos\theta$	$\cos(2k\pi+\theta) = \cos\theta$
$\tan\alpha$	$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$	$\tan(2k\pi-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(2k\pi+\theta) = \tan\theta$
$\cot\alpha$	$\cot(\pi-\theta) = -\cot\theta$	$\cot(\pi+\theta) = \cot\theta$	$\cot(2k\pi-\theta) = -\cot\theta$	$\cot(2k\pi+\theta) = \cot\theta$

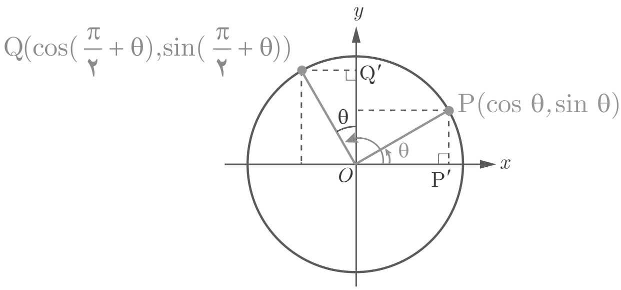
۳ برای زوایای قرینهٔ $(\alpha=-\theta)$ از کدام ستون جدول بالا می‌توان کمک گرفت؟ چرا؟ از ستون $2k\pi-\theta$ چون ضلع انتهایی آنها بر روی هم منطبق می‌شود و لذا مختصات نقطه پایانی کمان‌ها یکسان است.

فعالیت ص ۱۰۳

برای به‌دست آوردن رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه θ و $\frac{\pi}{2}+\theta$ که هدف این فعالیت است از روشی متفاوت با فعالیت‌های قبلی استفاده شده است. در اینجا ابتدا همنهشتی دو مثلث $O\overset{\Delta}{P}P'$ و $O\overset{\Delta}{Q}Q'$ به حالت وتر (که شعاع دایره است) و یک زاویه تند (θ) به تساوی اضلاع آنها پی می‌بریم. سپس با توجه به اینکه نقطه پایانی هر کدام از دو زاویه در چه قسمتی از صفحه مختصات هستند علامت مختصه‌های x و y برای این نقاط مشخص و از طریق تساوی اضلاع مثلث‌های همنهشت رابطه بین مختصات P و Q کامل می‌شود. با تکمیل رابطه بین مختصه‌های طول و عرض این نقاط و بازنویسی هر کدام برحسب نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس زوایای مربوطه، رابطه‌های مثلثاتی مدنظر برای نسبت‌های سینوس و

کسینوس کشف می‌شوند. در قسمت ب از این روابط برای پیدا کردن روابط دو نسبت تانژانت و کتانژانت استفاده شده است. روش ارائه شده در این فعالیت را می‌توان برای به‌دست آوردن روابط فعالیت‌های قبلی نیز به‌کار برد. معلم محترم می‌تواند از دانش‌آموزان بخواهد تا نحوه به‌دست آوردن روابط قبلی را به کمک این روش بررسی کنند.

در دایرهٔ مثلثاتی زیر زاویه‌های θ و $\frac{\pi}{۲}+\theta$ رسم شده‌اند.



الف) با توجه به شکل، نشان دهید دو مثلث $O\overset{\Delta}{P}P'$ و $O\overset{\Delta}{Q}Q'$ هم‌نهشت هستند.

ب) از تساوی اضلاع نظیر در دو مثلث فوق روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = -y_p \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۲}+\theta) = -\sin\theta$$

$$y_Q = x_P \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۲}+\theta) = \cos\theta$$

پ) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط قسمت ب کامل کنید.

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}+\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

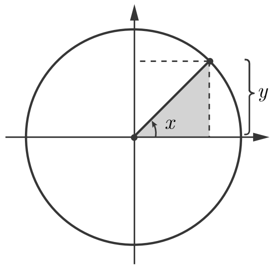
۳ درس
توابع مثلثاتی

اهداف درس

۱ آشنایی با مفهوم تابع مثلثاتی
۲ درک رفتار تابع مثلثاتی از روی نمودار
۳ رسم توابع مثلثاتی ساده (فقط سینوسی یا کسینوسی)

تا قبل از این درس دانش‌آموزان با مفهوم نسبت‌های مثلثاتی به‌خوبی آشنا شده‌اند و می‌توانند مقدار نسبت‌های مثلثاتی را برای زوایای مختلفی بیابند. گذر از مفهوم نسبت مثلثاتی به مفهوم تابع مثلثاتی مستلزم عبور از گردنه «تعریف نسبت مثلثاتی برای هر عدد حقیقی است.» چنانچه دانش‌آموز به این درک برسد که نسبت‌های مثلثاتی برای هر عدد حقیقی قابل تعریف هستند می‌توان ادعا کرد که او به درک نسبتاً روشنی از مفهوم تابع مثلثاتی دست پیدا کرده است. در برخی منابع از مفهوم زاویه در دایره مثلثاتی به‌صورت زیر استفاده می‌کنند.

در دایرهٔ زیر زاویهٔ x داده شده است. اکنون طول ضلع y برحسب x چگونه به‌دست می‌آید؟



در پاسخ به این سؤال دانش‌آموز رابطه‌ای را که قبلاً فراگرفته یعنی $y = \sin x$ را به‌دست می‌آورد و بعد توضیح داده می‌شود که x هر مقداری می‌تواند باشد و y متناسب با سینوس آن تغییر می‌کند. معمولاً روش فوق در قالب یک سناریوی نسبتاً واقعی (یا کاربردی) مانند محاسبه ارتفاع یک نقطه از یک چرخ و فلک یا دیگر اشیای دایره‌ای شکل ارائه می‌شود. به‌هرحال قلب اصلی داستان پیداکردن رابطه‌ای مشابه فوق است.

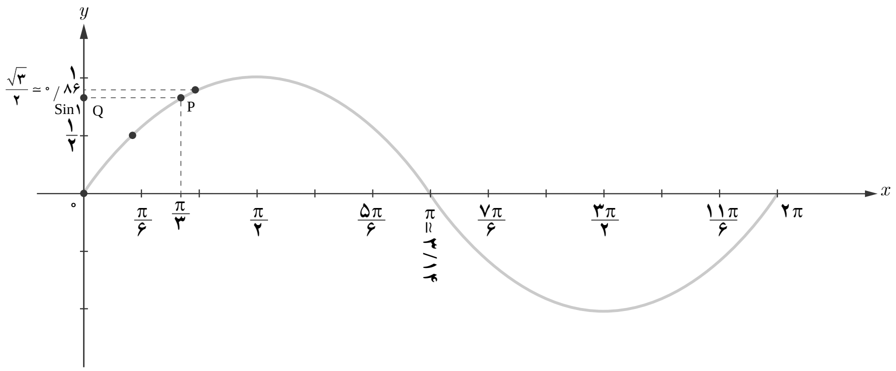
ضعف این شیوه‌ها در این است که دانش‌آموز درک روشنی از اینکه زاویه x می‌تواند اعداد گنگ مانند $\sqrt{۲}$ و یا حتی ساده‌تر از آن اعدادی مانند ۳ و ۵− و ... باشد را پیدا نمی‌کند. ضمناً ارتباط بین تابع مثلثاتی با محور اعداد حقیقی اغلب مغفول می‌ماند.

روش تدریس

فعالیت ص ۱۰۵

در این فعالیت برای آموزش مفهوم تابع مثلثاتی از ساده‌ترین بازنمایی توابع که همان بازنمایی به کمک رسم چند نقطه از تابع (بازنمایی زوج مرتبی) است بهره گرفته شده است. دانش‌آموزان در فصل تابع در پایهٔ دهم با انواع بازنمایی‌های مختلف یک تابع آشنا شده‌اند. در این کتاب توابعی مانند تابع رادیکالی (در فصل ۲) و توابع نمایی (در فصل ۳) نیز به کمک بازنمایی زوج مرتبی تابع، آموزش داده شده است. در این شیوه بازنمایی ابتدا از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا به کمک دانش قبلی خود مقدار تابع را در چند نقطه که قبلاً یادگرفته به‌دست آورد و سپس آنها را در یک دستگاه مختصات مشخص کند. در این فعالیت به همین شیوه از دانش‌آموز خواسته شده تا مقدار سینوس را (بدون ذکر نام تابع سینوس) در یک سری از نقاط در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ بیابد و آنها را در یک نمایش زوج مرتبی ارائه دهد. برای راهنمایی بیشتر نمودار تابع به‌صورت کم‌رنگ ترسیم شده تا نقاط برجسته‌تر دیده شوند. پس از نمایش نقاط در دستگاه مختصات دانش‌آموز پی می‌برد که این نقاط بر روی منحنی داده شده قرار می‌گیرند و لذا به ازای هر نقطه از محور xها در بازه $[۰,۲\pi]$ می‌توان نقطه‌ای از منحنی یافت. در سؤال ۳ به‌طور مشخص از دانش‌آموز خواسته شده تا عدد ۱ را روی محور xها یافته و سپس نقطه $\sin ۱$ را برروی محور yها بیابد. برای این منظور او باید از منحنی داده شده کمک بگیرد. در واقع او ابتدا نقطه ۱ را یافته و موازی با محور yها با خط‌چین به منحنی رسم می‌کند تا نقطه‌ای روی منحنی نظیر عدد ۱ بیابد. آنگاه از آنجا به سمت محور yها عمودی رسم می‌کند. چون منحنی سینوس اعداد را نمایش می‌دهد لذا مکان یافته شده بر روی محور yها متناظر با $\sin ۱$ است. این فرایند ممکن است نیاز به کمک معلم باشد که هرجا دانش‌آموز دچار ابهام شد آن را رفع کند. توصیه می‌شود که معلم این کار را برای اعدادی دیگر (فقط

گویا) دربازه [۰,۲π] تکرار نماید. در سؤال ۴ از این فعالیت تمایز بین رادیان و درجه و نسبت‌های مثلثاتی برحسب آنها برجسته شده تا این موضوع که در توابع مثلثاتی همواره (مگر خلاف آن تصریح شود) متغیر برحسب رادیان است. این موضوع در خواندنی مربوط به ماشین حساب نیز اشاره شده است.

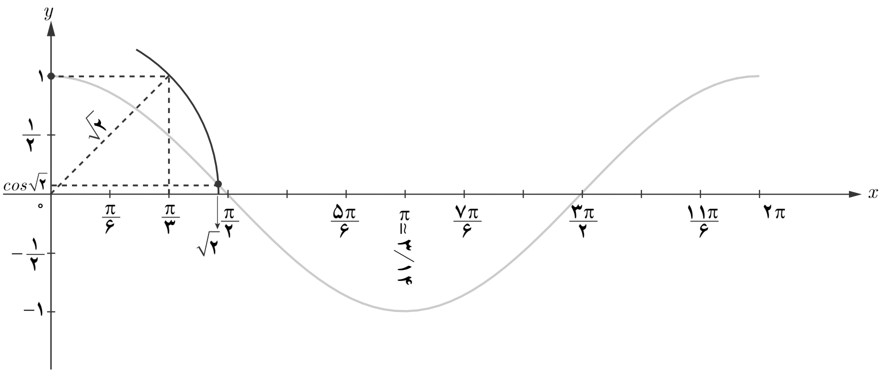


۳ نمودار داده شده در سؤال قبل منحنی تابع $y=\sin x$ در بازه [۰,۲π] می‌باشد. با توجه به نمودار، مقدار sin۱ کجای محور yها قرار می‌گیرد؟ کافی است به‌طور تقریبی مکان $x=۱$ را روی محور xها مشخص کرده و سپس به موازات محور yها به نمودار $\sin x$ وصل کرده تا نقطه P مشخص شود. سپس از نقطه P به موازات محور xها رسم کرده تا محور yها را در نقطه Q قطع کند. نقطه Q روی محور yها متناظر sin۱ است.

فعالیت ص ۱۰۶

گام بعدی و تکمیلی در خصوص تابع مثلثاتی در این فعالیت آورده شده است. در فعالیت قبل تمرکز بر یافتن مقدار توابع مثلثاتی (به‌طور خاص تابع سینوس) برای اعداد ساده مانند sin۱ و sin۲ بود. در این فعالیت مهارت قبلی را برای اعداد گنگ تعمیم می‌دهیم. برای این منظور از منحنی کسینوس استفاده شود تا این منحنی نیز معرفی گردد. در سؤال ۳ از این فعالیت تعمیم مفهوم تابع مثلثاتی به بازه‌های بزرگ‌تر از [۰,۲π] مدنظر است. دقت شود که ارائه مفهوم دوره تناوب در اینجا به هیچ وجه مطرح نیست و نباید به‌کار گرفته شود. بحث توابع متناوب در سال آینده مطرح خواهد شد. در اینجا فقط به رفتار تکراری (با همین لفظ) اشاره (و نه تأکید بیش از حد) می‌شود. در سؤال ۴ از این فعالیت به برخی خواص توابع مثلثاتی

سینوس و کسینوس پرداخته شده است. البته این خواص فقط برای تابع کسینوس بحث شده که توصیه می‌شود معلم بررسی این خواص برای تابع سینوس را نیز از دانش‌آموز مطالبه کند.



۲ در نمودار بالا ابتدا نقطه نظیر $\sqrt{۲}$ رادیان را بر روی محور xها یافته و سپس مکان $\cos\sqrt{۲}$ را بر روی محور yها به طور تقریبی پیدا کنید. درستی پاسخ خود را با ماشین حساب بررسی کنید.
کافی است مربعی به طول ضلع ۱ همانند شکل رسم کنیم. از قضیه فیثاغورث نتیجه می‌شود که طول قطر آن $\sqrt{۲}$ است. اکنون اگر کمانی به شعاع طول این قطر (همانند شکل) رسم کنیم آنگاه محل تقاطع این کمان با محور xها متناظر $x = \sqrt{۲}$ است. ادامه فرایند مشابه سؤال ۳ از فعالیت قبل است.

کار در کلاس ص ۱۰۸

این کار در کلاس درصدد تصحیح بدفهمی‌ها یا رفع نواقص مربوط به مفهوم تابع مثلثاتی است. این کار در کلاس به نوعی به دنبال ایجاد تفاوت بین مفهوم نسبت مثلثاتی و تابع مثلثاتی و ارائه مفهوم تابع مثلثاتی به‌عنوان یک مفهوم مستقل (و البته در ارتباط تنگاتنگ با مفهوم نسبت مثلثاتی) است. لذا در این اینجا هیچ اشاره‌ای به زاویه نشده و همه‌جا صحبت از اعداد حقیقی است. مثلاً در قسمت ث پرسیده شده آیا عددی (و نه زاویه‌ای) می‌توان یافت که سینوس آن برابر ۲− باشد. مشابه همین سؤال در پایه دهم آورده شده بود اما با لفظ زاویه به‌دلیل اینکه آنجا صحبت از نسبت مثلثاتی بود و نه تابع.

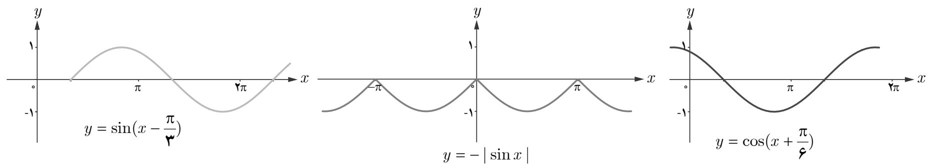
مثال‌های ص ۱۰۸

در ادامه فعالیت ص ۱۱۰ چند مثال از نمودارهای مثلثاتی آورده شده که برای سهولت مراحل به‌طور گام به گام و از کم‌رنگ به پررنگ ترسیم شده‌اند و یک کاربرد واقعی از مثلثات در صنایع آورده شده است. حالت تعمیم یافته این مثال کاربردی در آخرین تمرین این درس داده شده است که مشابه این مثال با اندکی تعمیم قابل حل است. به هر حال چنانچه تمرین داده شده برای دانش‌آموزان دشوار است می‌توان از ارائه آن صرف‌نظر کرد.

حل تمرین‌های برگزیده

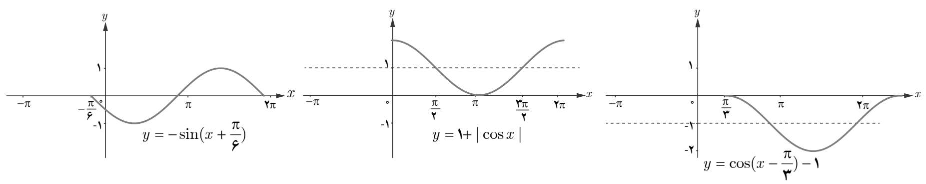
۱ توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

الف) $y = -|\sin x|$ ب) $y = \cos(x + \frac{\pi}{۶})$ پ) $y = \sin(x - \frac{\pi}{۳})$



۲ در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

الف) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{۶})$ ب) $y = \cos(x - \frac{\pi}{۳}) - ۱$ پ) $y = ۱ + |\cos x|$



۳ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در چه نقاطی رخ می‌دهد؟

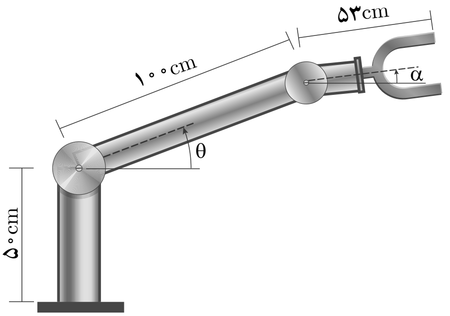
الف) min= −۱ , max= ۱

ب) min= −۲ , max= ۰

ج) min= ۰ , max= ۲

۴ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، کدام‌یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در بازۀ $(\circ, \pi)$ یک به یک است؟

الف) یک به یک نیست　　　ب) یک به یک است　　　ج) یک به یک است



۵ در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیرند.

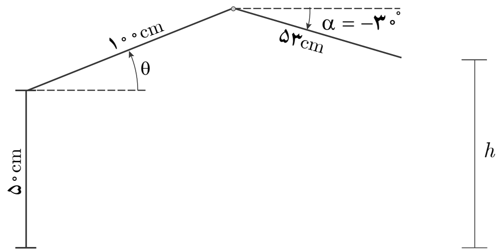
الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل‌سازی کنید.

$$(-\frac{\pi}{۲} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{۲} \, , \, \circ \leq \theta \leq \frac{\pi}{۲})$$

$$h = ۵\circ + h_۱ + h_۲ = ۵\circ + ۱\circ\circ \sin\theta + ۵۳\sin\alpha$$

توجه شود که حل معادلات ساده در پایه دهم مطرح شده است.

ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع $۲۳/۵cm$ مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -۳\circ^\circ$ قرار داده است. تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟



$$۲۳/۵ = ۵\circ + ۱\circ\circ\sin\theta + ۵۳\sin(-۳\circ^\circ)$$

$$\Rightarrow ۲۳/۵ = ۵\circ + ۱\circ\circ\sin\theta - ۲۶/۵$$

$$\Rightarrow ۵\circ = ۵\circ + ۱\circ\circ\sin\theta$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \circ \xrightarrow[\circ\leq\theta\leq\frac{\pi}{۲}]{} \theta = \circ$$

درس ۴
روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

اهداف درس

۱ آشنایی با روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا (فقط سینوس و کسینوس)

هدف از این درس صرفاً ارائه روابطی است که در سال آینده برای یافتن مشتق توابع سینوس و کسینوس براساس تعریف حدی مشتق نیاز است، یعنی محاسبه

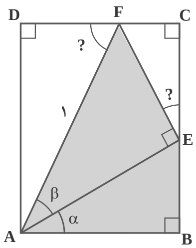
$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x-h)-\sin x}{x-h}$$

بنابراین هدف از این درس را نباید با مبحث مشابهی که در سال‌های گذشته به‌طور سنتی آموزش داده می‌شد یکی گرفت. در گذشته روابط مثلثاتی متنوعی آموزش داده می‌شد که در اینجا هیچکدام از آنها مورد توجه نیست. لذا این درس که سبک‌ترین و ساده‌ترین درس فصل مثلثات است را نباید تبدیل به مفصل‌ترین درس این فصل نمود. رعایت چارچوب ارائه شده در این درس موجب حفظ تناسب در ساعات تخصیص یافته به محتوای ارائه شده در کل کتاب می‌گردد.

روش تدریس

فعالیت ص ۱۱۰

در این فعالیت با تکمیل روابط طولی خواسته شده برحسب نسبت‌های مثلثاتی زوایای گفته شده، به‌سادگی می‌توان درستی هر دو رابطه مثلثاتی $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ را به‌دست آورد. برای سادگی در محاسبات ضلع AF ابتدا برابر ۱ فرض می‌شود و در سؤال ۲ از دانش‌آموز خواسته می شود که روابط به دست آمده را در حالتی که این ضلع برابر ۱ نباشد بررسی کند. با این بررسی مشخص می‌شود که اندازه این ضلع هرچه باشد (مثلاً l) در نهایت از طرفین رابطه ساده می‌شود و همان روابط قبل برقرار می‌شوند.



۱ در شکل روبه‌رو، چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است و اندازه پاره خط AF برابر ۱ و زوایای α و β داده شده است.

الف) با تکمیل روابط زیر اندازه $F\hat{E}C$ و $A\hat{F}D$ را برحسب α و β به‌دست آورید.

$$\left.\begin{array}{ll} F\hat{E}C+90^\circ+A\hat{E}B=180 & \text{: زاویه } E \text{ نیم صفحه است.} \\ \alpha+90^\circ+A\hat{E}B=180 & \text{: مجموع زوایای داخلی } ABE \end{array}\right\} \Rightarrow F\hat{E}C=\alpha$$

$\Rightarrow A\hat{F}D = \alpha + \beta$ اضلاع AB و DC باهم موازی و پاره خط AF به‌صورت مورب آن را قطع کرده است.

ب) اندازه اضلاع AD و DF از $\overset{\Delta}{ADF}$ را با توجه به اینکه $AF=1$، برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس $D\hat{F}A$ بنویسید.

$AD=\sin(\alpha+\beta)$ $\qquad$ $DF=\cos(\alpha+\beta)$

ج) اضلاع AE و EF از مثلث قائم‌الزاویه AEF ، که وتر آن برابر ۱ است را برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه β بنویسید.

$EF=\sin(\beta)$ $\qquad$ $AE=\cos(\beta)$

د) اندازهٔ پاره خط‌های BE، EC، FC و AB را برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه α به‌دست آورید.

$EC=EF\times\cos\alpha=\sin\beta\cos\alpha$ $\qquad$ $BE=AE\times\sin\alpha=\cos\beta\sin\alpha$

$AB=AE\times\cos\alpha=\cos\beta\cos\alpha$ $\qquad$ $FC=EF\times\sin\alpha=\sin\beta\sin\alpha$

هـ) از تساوی اضلاع روبه‌رو در مستطیل بالا روابط زیر به‌دست می‌آید. آنها را باتوجه به قسمت‌های الف تا د کامل کنید.

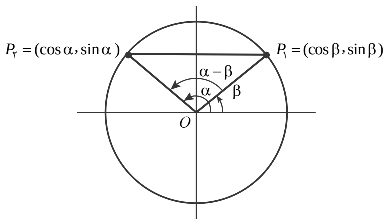
$AD = BE+EC \Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$DF = AB-FC \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

۲ توضیح دهید چرا اگر اندازهٔ پاره خط AF برابر یک نباشد کماکان روابط فوق برقرار است. اگر $AF=r$ باشد آنگاه مقدار r از طرفین رابطه‌های فوق ساده می‌شود. بررسی کنید.

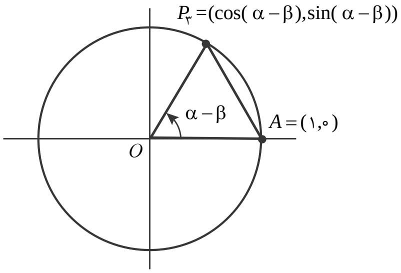
برای به‌دست آوردن روابط خواسته شده می‌توان فعالیت جایگزین زیر را نیز به‌کار برد.

فعالیت جایگزین



در روش زیر ابتدا روابط تفاضل به‌دست می‌آیند و سپس به کمک آنها روابط حاصل جمع زوایا.

در شکل مقابل دو زاویه β و α رسم شده و نقاط انتهایی کمان‌ها را به‌ترتیب $P_۱$ و $P_۲$ نامیده‌ایم. زاویه $\alpha-\beta$ بین این دو زاویه و وتر روبه‌رو به آن نیز رسم شده‌اند.



برای سادگی همهٔ زوایا را به اندازه زاویه β در خلاف جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم تا شکل زیر به‌دست آید. نقطهٔ A و $P_۳$ به‌ترتیب دوران یافته $P_۱$ و $P_۲$ می‌باشند. با مشاهده مثلث $OP_۱P_۲$ از شکل قبل و مثلث $OAP_۳$ از این شکل معلوم می‌شود که این دو مثلث به حالت دو ضلع و زاویه بین هم نهشت هستند (چرا؟) بنابراین وتر $P_۱P_۲$ با وتر $AP_۳$ برابر است. پس فاصله نقطه $P_۱$ تا $P_۲$ برابر فاصله نقطه A تا $P_۳$ است.

اکنون از رابطه فاصله دو نقطه که در فصل اول آمده داریم : $d(A,P_۳)=d(P_۱,P_۲)$

رابطه فاصله دو نقطه :

$$\sqrt{[\cos(\alpha-\beta)-۱]^۲+[\sin(\alpha-\beta)-۰]^۲}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^۲+(\sin\alpha-\sin\beta)^۲}$$

به توان ۲ رساندن (دقت شود که عبارات زیر رادیکال همگی بزرگ‌تر یا مساوی صفر هستند و لذا قدر مطلق حذف می‌شود) :

$$[\cos(\alpha-\beta)-۱]^۲+\sin^۲(\alpha-\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^۲+(\sin\alpha-\sin\beta)^۲$$

$$\cos^۲(\alpha-\beta)-۲\cos(\alpha-\beta)+۱+\sin^۲(\alpha-\beta)$$
$$=\cos^۲\alpha-۲\cos\alpha\cos\beta+\cos^۲\beta+\sin^۲\alpha-۲\sin\alpha\sin\beta+\sin^۲\beta$$

(اتحاد مربع)

سه بار استفاده از اتحاد $\sin^۲x+\cos^۲x=۱$ $\quad ۲-۲\cos(\alpha-\beta)=۲-۲\cos\alpha\cos\beta-۲\sin\alpha\sin\beta$

ساده کردن ۲ از طرفین $\quad -۲\cos(\alpha-\beta)=-۲\cos\alpha\cos\beta-۲\sin\alpha\sin\beta$

تقسیم طرفین بر ۲ $\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

از رابطه اخیر و با استفاده از $\alpha+\beta=\alpha-(-\beta)$ می‌توان رابطه حاصل‌جمع زوایا را نیز به‌دست آورد.

نمونه سؤالات ارزشیابی

۱ زاویه‌های داده شده زیر را برحسب رادیان به‌دست آورید. (تا دو رقم اعشار)

الف) ۶۴° ب) ۲۵° ج) $۲۰۳/۰۹^\circ$

۲ زاویه‌های داده شده زیر را برحسب درجه به‌دست آورید (تا دو رقم اعشار)

الف) ۲/۳۵- ب) ۳/۰۷ ج) ۷

۳ فرض کنید اندازه شعاع چرخ‌های بزرگ و کوچک یک تراکتور به ترتیب ۱۵۰ و ۸۰ سانتی‌متر باشد. اگر این تراکتور نیم متر به سمت جلو حرکت کند آنگاه هر یک از چرخ‌های آن چند رادیان حرکت کرده‌اند؟

۴ مقدار نسبت‌های مثلثاتی را برای زاویه‌های داده شده به‌دست آورید.

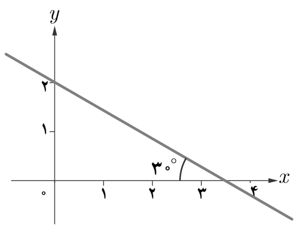
الف) $-\frac{۹\pi}{۲}$ ب) $\frac{۱۱\pi}{۲}$ ج) -۱۲۰° د) ۳۱۵°

۵ توابع مثلثاتی زیر را رسم کنید.

$$y=\sin(x-\frac{\pi}{۶})+۲$$

$$y=-\cos(x+\frac{\pi}{۳})$$

۶ معادله خط زیر را به‌دست آورید.



۷ مقدار نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه‌های زیر به‌دست آورید.

الف) ۷۵° ب) -۱۵° ج) -۱۰۵°

۸ اگر $\cos y=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ و $\sin x=-\frac{۲}{۳}$ و x زاویه‌ای در ربع سوم و y زاویه‌ای در ربع چهارم باشد آنگاه مقدار $\sin(x-y)$ را به‌دست آورید.