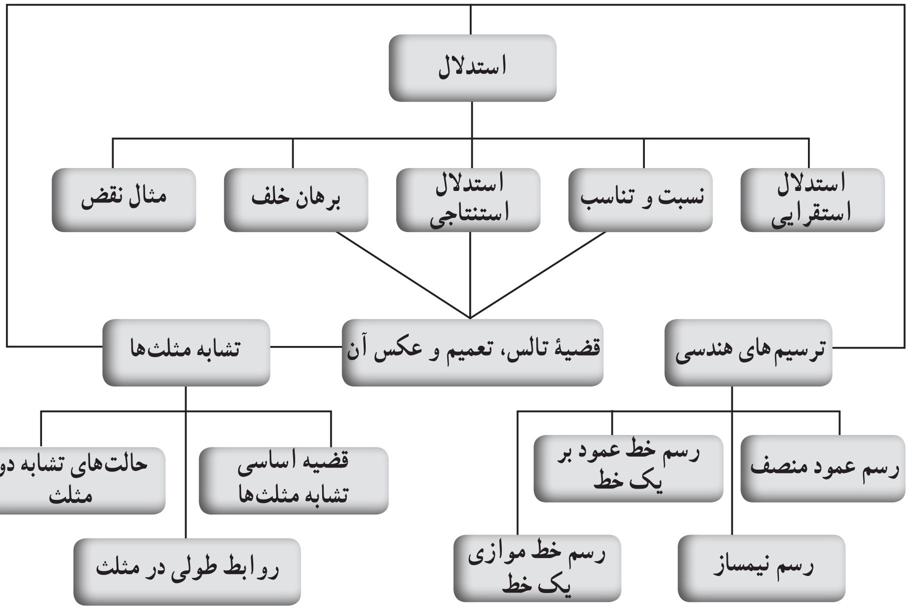
فصل ۲

هندسه

نقشه مفهومی فصل



تصویر عنوانی

سی‌وسه‌پل اصفهان یا پل اللّه وردی خان شاهکاری بی‌نظیر از آثار دوره شاه عباس صفوی است که در انتهای جنوبی خیابان چهارباغ واقع شده است این پل به هزینه و نظارت سردار معروف شاه‌عباس، اللّه‌وردی‌خان بنا شده است از این رو به نام بانی و سازنده آن نیز خوانده می‌شود. سی‌وسه‌پل اصفهان نزدیک به ۳۰۰ متر درازا و ۱۴ متر پهنا دارد و طولانی‌ترین پل زاینده رود است که در سال ۱۰۰۵ هجری ساخته شده است. پل اللّه وردی خان (سی‌وسه پل اصفهان) برای اتصال خیابان چهارباغ کهنه عباسی به خیابان چهارباغ بالا و باغ هزار جریب و عباس‌آباد ساخته شده بود. این پل در جشن آبریزگان و آب پاشان محل اجتماع شاه و بزرگان و شعرا و رجال و سایر مردم بوده است. در دوره صفویه، مراسم جشن آبریزان یا آبپاشان ارامنه در کنار این پل صورت می‌گرفت. در این جشن که در ۱۳ تیر ماه هر سال برگزار می‌شد مردم با پاشیدن آب و گلاب روی یکدیگر در این مراسم شرکت می‌کرده‌اند :

سی‌وسه پل اصفهان یک از شاهکارهای معماری وپل‌سازی ایران و جهان در عصر خویش محسوب می‌شود.

این پل اصفهان را به نام‌های : پل شاه عباسی، پل اللّٰه وردی خان، پل جلفا، پل چهل چشمه، پل سی و سه چشمه و پل زاینده رود خوانده‌اند و وجه تسمیه هر یک چنین است : پل شاه عباسی از آن جهت گویند که شاه عباس اول دستور بنای آن را داده است و چون به مباشرت و اهتمام اللّٰه وردی خان ساخته شده به پل اللّٰه وردی خان معروف گردیده و از لحاظ اینکه معبر مردم به جلفا بوده آن را پل جلفا هم گفته‌اند و چون در ابتدا چهل چشمه داشته پل چهل چشمه و چون هفت دهانه این پل گرفته شده و اکنون ۳۳ دهانه دارد اینک سی‌وسه چشمه می‌نامند و سرانجام چون بر روی زاینده رود این پل قرار دارد و بزرگ‌ترین پل زاینده رود است آن را «پل زاینده رود» نیز می‌نامند.

سی‌وسه پل دارای یک پیاده‌رو برای گردش در بالا و یک پیاده رو در پایین است. پیاده‌رو پایین گذرگاه مسقفی است که میان پایه‌های مرکزی پل و به فاصله کمی از بستر رودخانه ایجاد شده است.

از تمام دهانه‌های زیر پل به واسطه درهایی که به هر چشمه گذاشته‌اند می‌توان عبور نمود از پلکانی که در قطر پایه پل ساخته شده از روی پل به زیر چشمه‌ها و طاق‌ها پایین می‌روند و همین‌طور پله‌هایی در دو طرف دارد که به بالای مهتابی روی راهروها صعود می‌نمایند و در دو طرف نرده و محافظی کشیده‌اند که از پرت شدن جلوگیری می‌کنند.

این اثر تاریخی اصفهان در تاریخ ۱۵ دی ۱۳۱۰ با شمارهٔ ثبت ۱۱۰ به‌عنوان یکی از آثار ملی ایران به ثبت رسید.

توصیه‌های آموزشی

به همکاران محترمی که قصد دارند این کتاب را تدریس نمایند پیشنهاد می‌شود حتماً با کتب ریاضی پایه‌های قبل آشنایی پیدا کنند. از آنجا که دانش‌آموزان رشتهٔ تجربی در پایهٔ دهم هندسه نداشته‌اند، مطالعهٔ مفاهیم هندسی ارائه شده در پایه‌های قبل، به‌خصوص متوسطهٔ اول و آشنایی با رویکرد آموزش هندسه در آن پایه‌ها بسیار مفید خواهد بود.

دانش‌آموزان در سال‌های گذشته با مفاهیمی مانند نیمساز، عمود منصف توازی و تعامد آشنا هستند اما ترسیمات مرتبط با این مفاهیم را فرا نگرفته‌اند. در این فصل رسم خطوط موازی و عمود و نیمساز یک زاویه و عمودمنصف یک پاره‌خط مطرح شده و برخی خواص آنها بررسی می‌شود. در ادامهٔ مطالب این فصل مفاهیمی از استدلال، قضیهٔ تالس و نیز تشابه مثلث‌ها مطرح می‌شود. در برخی موارد قضیه‌ها و کاربرد آن بدون وارد شدن به اثبات ریاضی خودِ قضیه‌ها مدنظر است. لذا در این موارد اثبات قضیه‌ها آورده نشده است. لازم به ذکر است که دانش‌آموزان از پایهٔ نهم با مفهوم تشابه آشنا شده‌اند و در این کتاب مطالب بیشتری دربارهٔ تشابه مثلث‌ها فرا خواهند گرفت.

درس اول

ترسیم‌های هندسی

اهداف درس

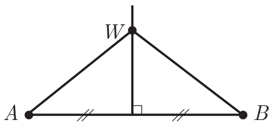
- توانایی رسم مثلث، با مشخص بودن اندازهٔ سه ضلع آن
- توانایی رسم عمود منصف یک پاره‌خط
- درک خاصیت مشترک همهٔ نقاط واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط (یکسان بودن فاصله‌شان از دو سر پاره‌خط)
- توانایی رسم نیمساز یک زاویه
- درک خاصیت مشترک همهٔ نقاط واقع بر نیمساز یک زاویه (یکسان بودن فاصله‌شان از دو ضلع زاویه)
- توانایی رسم خط موازی با یک خط داده شده، از نقطه‌ای خارج آن خط
- توانایی رسم خط عمود بر یک خط داده شده، از نقطه‌ای غیرواقع بر آن خط
- توانایی رسم خط عمود بر یک خط داده شده، از نقطه‌ای واقع بر آن خط

پیش‌نیازها

- تعاریف خط، نیم‌خط، پاره‌خط، دایره، زاویه، نیمساز، عمودمنصف، دو خط موازی، دو خط عمود بر هم را بدانند و مثلث و اجزای آن را بشناسند.
- هم‌نهشتی مثلث‌ها و حالت‌های آن و قضیه خطوط موازی را بدانند.

شرح برخی از فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها

برخی خواص عمود منصف و ترسیم آن



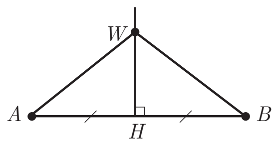
۱ در شکل مقابل پاره‌خط AB و عمود منصف آن مشخص شده‌اند. نقطه‌ای دلخواه مانند W روی عمودمنصف AB در نظر بگیرید و نشان دهید W از دو سرِ AB به یک فاصله است.

نشان می‌دهیم دو مثلث AWH و BWH هم‌نهشت هستند

$$\begin{cases} \hat{H}_{\text{۱}} = \hat{H}_{\text{۲}} = \text{۹۰}^\circ \\ WH = WH \quad (\text{ضلع مشترک}) \\ AH = BH \quad \left(\text{فرض مسئله } WH \text{ عمودمنصف است}\right) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} A\overset{\Delta}{W}H \cong B\overset{\Delta}{W}H \Rightarrow AW = BW$$

نتیجهٔ ۱ : هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

سؤال ۲ : این قسمت عکس خاصیت عمودمنصف را بیان خواهد کرد و نتیجه ۲ آن را در قالب یک ویژگی ارائه می‌دهد.



۲ پاره‌خط AB و نقطهٔ W مانند شکل مقابل به‌گونه‌ای قرار دارند که W از دوسر AB به‌یک فاصله است (یعنی $AW = BW$). نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.

(**راهنمایی** : از W به A و B و به وسط AB وصل کنید و با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.)

نشان می‌دهیم دو مثلث AWH و BWH هم‌نهشت هستند.

$$\begin{cases} AH = BH \quad (H \text{ وسط } AB \text{ است}) \\ AW = BW \quad (\text{فرض مسئله}) \\ WH = WH \quad (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} A\overset{\Delta}{W}H \cong B\overset{\Delta}{W}H \Rightarrow \hat{H}_{\text{۱}} = \hat{H}_{\text{۲}}$$

$$\text{و} \xrightarrow{\hat{H}_{\text{۱}} + \hat{H}_{\text{۲}} = \text{۱۸۰}^\circ} \hat{H}_{\text{۱}} = \hat{H}_{\text{۲}} = \text{۹۰}^\circ$$

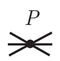
بنابراین WH عمودمنصف AB است لذا W روی عمودمنصف AB قرار گرفته است.

نتیجهٔ ۲ : هر نقطه که از دوسر یک پاره‌خط به فاصلهٔ یکسان باشد روی عمودمنصف پاره‌خط است.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد ازدو سر پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

فعالیت صفحه ۲۷ با رسیدن به این نتیجه که برای مشخص کردن یک خط داشتن ۲ نقطه از آن لازم و کافی است، به رسم عمودمنصف یک پاره‌خط می‌پردازد.

فعالیت صفحه ۲۷



۱ نقطهٔ P در صفحه مشخص شده است. چند خط می‌توانید رسم کنید که از نقطهٔ P عبور نمایند؟ بی‌شمار خط می‌توان رسم کرد.

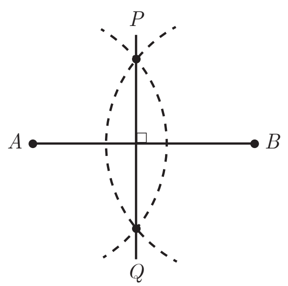
۲ دو نقطهٔ A و B در صفحه مشخص شده‌اند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطهٔ A و B عبور نمایند؟ تنها یک خط می‌توان رسم کرد.

۳ به‌نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن باید مشخص شده باشد؟ ۲ نقطه

در ادامه در پایین صفحه ۲۷ روش رسم عمودمنصف پاره‌خط AB بیان می‌شود.

رسم عمود منصف یک پاره‌خط داده شده

می‌خواهیم عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم.



۱ دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار به مرکز نقطهٔ A و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز B کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند P و Q قطع کنند.

۲ آیا نقاط P و Q نقاطی متعلق به عمودمنصف AB هستند؟ چرا؟

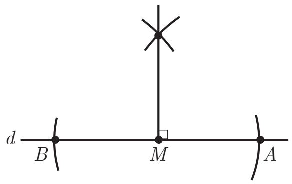
بله ــ زیرا از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله هستند.

۳ آیا با داشتن نقاط P و Q می‌توان عمودمنصف AB را مشخص کرد؟ چرا؟ بله ــ زیرا طبق فعالیت قبل هر خط با داشتن دو نقطه از آن کاملاً مشخص می‌شود.

۴ حال عمودمنصف AB را رسم کنید. با رسم خطی که از دو نقطه P و Q عبور می‌کند عمودمنصف AB رسم می‌شود.

در صفحه ۲۸ روش رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن و از نقطه‌ای غیرواقع بر آن توضیح داده شده است. بهتر است دانش‌آموزان به‌صورت انفرادی یا گروه‌های ۴ــ۳ نفری مراحل را انجام دهند و در نهایت شما نظر کامل و دقیق را بیان کنید.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن



خط d و نقطهٔ M روی آن مانند شکل مشخص شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.

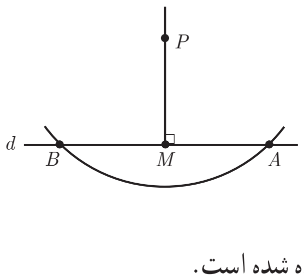
۱ به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d بیابید که $AM=MB$ باشد. دهانه پرگار را به میزان دلخواه باز می‌کنیم و کمان می‌زنیم. محل برخورد کمان با خط d را A و B می‌نامیم در این صورت $NA = MB$

۲ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید. روش رسم توضیح داده شده است.

۳ عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d عمود است و از نقطهٔ M می‌گذرد.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن

خط d و نقطهٔ P مانند شکل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d عمود باشد.



۱ به کمک پرگار نقاطی مانند A و B را بر خط d به‌گونه‌ای بیابید که از نقطهٔ P به یک فاصله باشند. دهانه پرگار را کمی بیشتر از فاصله نقطه P تا خط d باز می‌کنیم و کمان می‌زنیم محل برخورد کمان با خط d را A و B می‌نامیم در این صورت $PA = PB$.

۲ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید. روش رسم توضیح داده شده است.

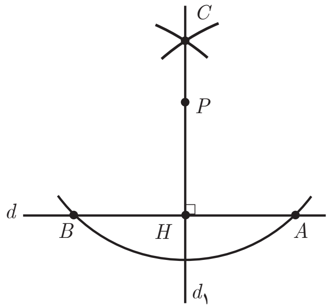
۳ آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطهٔ P می‌گذرد؟ چرا؟ بله. زیرا نقطه P از دو نقطه A و B به یک فاصله است لذا روی عمودمنصف AB قرار دارد.

عمودمنصف پاره‌خط AB بر خط d عمود است و از نقطهٔ P عبور می‌کند.

در ادامه صفحه ۲۸ رسم خط موازی با یک خط بیان شده است. و روش آن استفاده از دو خط عمود متوالی است. با توجه به وقت‌گیر بودن این رسم، زمان مناسب برای اجرای آن در کلاس را درنظر داشته باشید.

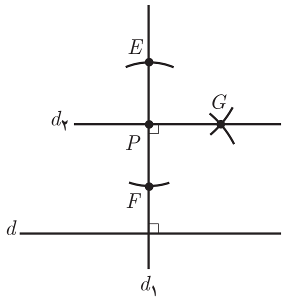
رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه‌ای غیر واقع بر آن

خط d و نقطهٔ P مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و با خط d موازی باشد.



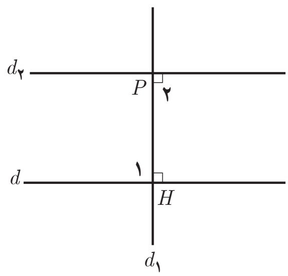
۱ خط d_1 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

از نقطه P عمود برخط d رسم می‌کنیم و آن را d_1 می‌نامیم روش رسم توضیح داده شده است.



۲ خط d_2 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

خطی رسم می‌کنیم که از نقطه P عبور کند و بر d_1 عمود باشد این خط را d_2 می‌نامیم.

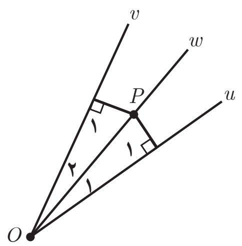


۳ خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب درنظر بگیرید).

با استفاده از قضیه عکس خطوط موازی چون $\hat{P}_2 = \hat{H}_1$ لذا دو خط d و d_2 با هم موازی هستند.

در پایین صفحه ۲۸ دانش‌آموز به درک «خاصیت نیمساز» می‌رسد و ادامه این قسمت در صفحه ۲۹ «عکس خاصیت نیمساز» را آموزش می‌دهد. نتیجه سومی که در صفحه ۲۹ قرار دارد، ترکیب خاصیت و عکس خاصیت نیمساز در صورت یک قضیه دو شرطی است. بکوشید این نتیجه با جمله‌بندی صحیح خود دانش‌آموزان تکمیل شود.

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن



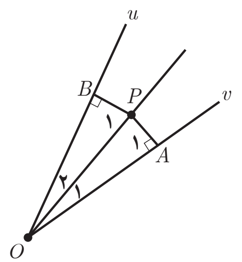
۱ در شکل مقابل نیم‌خط Ow نیمساز زاویهٔ vOu است. فرض کنید P یک نقطهٔ دلخواه روی Ow باشد. ثابت کنید فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ vOu یکسان است. (یعنی اگر از نقطهٔ P عمودهایی بر Ov و Ou رسم کنیم، طول آنها باهم برابر است.)

ابتدا نشان می‌دهیم دو مثلث AOP و BOP هم‌نهشت هستند.

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 90^\circ \\ OP = OP \ (\text{مشترک}) \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \ (\text{نیمساز } OW \text{ است } vOu) \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر یک زاویه حاده}} \overset{\Delta}{AOP} \cong \overset{\Delta}{BOP} \Rightarrow AP = BP$$

لذا فاصله نقطه P از دو ضلع زاویه vOu یکسان است.

نتیجه۱ : هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.



۲ در شکل مقابل فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ vOu یکسان است. نشان دهید که نقطهٔ P روی نیمساز زاویه قرار دارد.

(**راهنمایی** : پاره‌خط OP را و دو عمود از نقطهٔ P بر Ou و Ov رسم کنید و با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دهید OP همان نیمساز زاویهٔ uOvاست.)

ابتدا نشان می‌دهیم دو مثلث AOP و BOP هم‌نهشت هستند.

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 90^\circ \\ OP = OP \ (\text{مشترک}) \\ AP = BP \ (\text{فرض مسئله}) \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{BOP} \cong \overset{\Delta}{AOP} \Rightarrow P\hat{O}v = P\hat{O}u$$

لذا OP نیمساز زاویه uOv است.

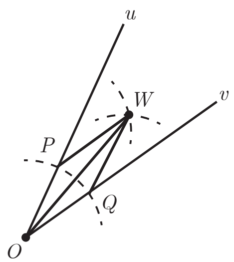
نتیجه ۲ : هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصلهٔ یکسان باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

قسمت شماره **۳** صفحه **۲۹** روش رسم نیمساز را توضیح می‌دهد. می‌توانید پس از انجام مرحله به مرحله این فعالیت از یک یا چند دانش‌آموز بخواهید تا روش رسم نیمساز را برای کل کلاس توضیح دهند.

رسم نیمساز یک زاویه

الف) زاویهٔ uOv را درنظر بگیرید. به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم‌خط‌های Ou و Ov را در نقاطی مانند P و Q قطع کند.



ــ طول پاره‌خط‌های OP و OQ نسبت به هم چگونه‌اند؟ با یکدیگر برابرند.

ب) دهانهٔ پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره‌خط PQ باز کنید و یک بار به مرکز P و بار دیگر به مرکز Q کمانی رسم کنید تا دو کمان مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع کنند. طول پاره‌خط‌های PW و QW نسبت به هم چگونه‌اند؟ با هم برابرند.

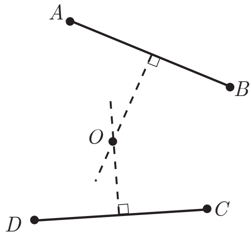
پ) پاره‌خط‌های WP، WO و WQ را رسم کنید. دو مثلث OPW و OQW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ با یکدیگر هم‌نهشت هستند زیرا :

$$\begin{cases} OP = OQ \ (\text{الف}) \\ PW = QW \ (\text{ب}) \\ OW = OW \ (\text{مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} O\overset{\Delta}{Q}W \cong O\overset{\Delta}{P}W$$

ــ اندازهٔ زاویه‌های POW و QOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ برابرند. چون مثلث POW و OQW هم‌نهشت هستند. لذا $P\hat{O}W = Q\hat{O}W$

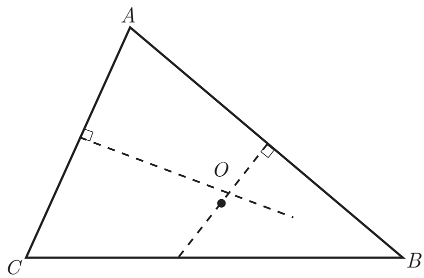
ــ پاره‌خط OW نیمساز زاویهٔ uOv است.

حل تمرین‌های درس اول

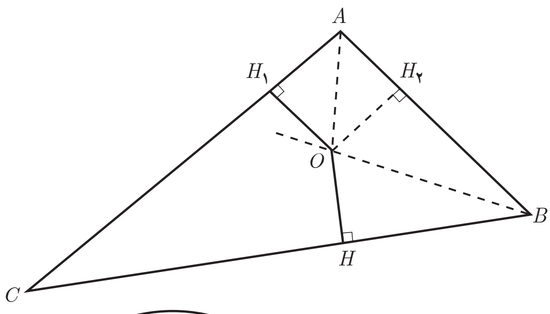


۱ الف) با توجه به صورت سؤال نقطهٔ موردنظر باید هم بر عمودمنصف AB و هم بر عمودمنصف CD واقع باشد، پس محل برخورد این دو عمودمنصف است.

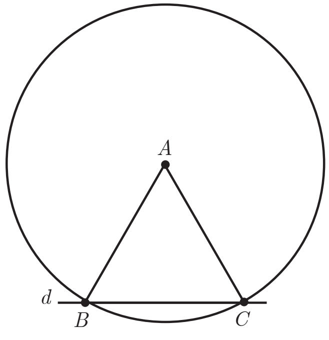
ب) طبق (الف) داریم $OD = OC$ و $OA = OB$، حال اگر نقطهٔ O روی عمودمنصف BC نیز باشد، در این‌صورت داریم $OB = OC$ بنابراین دایره‌ای که به مرکز O و به شعاع OA رسم شود از هر ۴ نقطهٔ A و B و C و D خواهد گذشت.



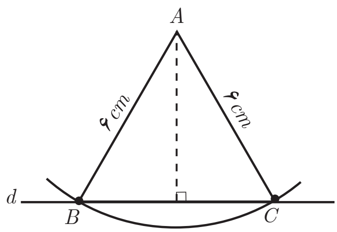
۲ از آنجا که نقطهٔ O روی عمودمنصف AB است داریم $OA = OB$ و از آنجا که نقطهٔ O روی عمودمنصف CD است داریم $OA = OC$ بنابراین $OB = OA = OC$، لذا دایره‌ای که به مرکز O و به شعاع OA رسم شود از هر سه رأس مثلث می‌گذرد یعنی دایرهٔ محیطی برای مثلث ABC است.



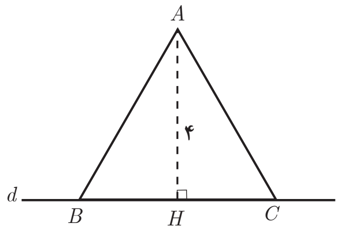
۳ چون O روی نیمساز زاویهٔ A است، پس $OH_1 = OH_2$ و چون O روی نیمساز زاویهٔ B است، پس $OH_2 = OH$ بنابراین $OH_1 = OH_2 = OH$ و لذا دایره‌ای که به مرکز O و شعاع OH رسم می‌شود از هر سه نقطهٔ H و H_1 و H_2 می‌گذرد و لذا هر سه ضلع مثلث بر این دایره مماس‌اند.



۴ الف) کافی است دایره‌ای به مرکز A و به شعاع بیش از ۴ سانتی‌متر رسم کنیم و نقاط برخورد این دایره با خط d را B و C بنامیم. در این صورت $\overset{\Delta}{ABC}$ ، جواب مسئله است.



ب) مانند قسمت الف مسئله را حل می‌کنیم ولی این‌بار دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۶ سانتی‌متر رسم می‌کنیم.



پ) اگر چنین مثلثی رسم شده باشد، داریم :

$$S = \frac{AH \times BC}{۲} \Rightarrow ۸ = \frac{۴ \times BC}{۲} \Rightarrow BC = ۴$$

لذا ۲ =HC و بنابراین $AC = \sqrt{۴^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۵}$. بنابراین کافی است کمانی به مرکز A و شعاع $۲\sqrt{۵}$ بزنیم.

درس دوم

استدلال و قضیه تالس

اهداف کلی فصل دوم:

- ❑ درک برخی خواص تناسب
- ❑ درک قضیهٔ تالس، عکس و تعمیم آن و توانایی کاربرد آن در حل مسائل
- ❑ درک استدلال استقرایی، استدلال استنتاجی، برهان خلف، مثال نقض، عکس قضیه و قضیه‌های دو شرطی

دانش‌آموزان با نسبت و تناسب در سال‌های قبل آشنا شده‌اند. با یادآوری خواصی که می‌توانند در اثبات قسمت‌های مختلف کار در کلاس از آنها استفاده کنند سعی کنید به آنها در انجام اثبات کمک نمایید و سپس با هدایت آنها به انجام کار در کلاس سعی کنید تسلط آنها را در درک و انجام خواص مختلف در تناسب‌ها بالا ببرید. توجه داشته باشید که دانستن این ویژگی‌ها در سایر اثبات‌های ریاضی کاربرد دارد لذا داشتن فهم درست از این مفاهیم توسط دانش‌آموزان مهم است اما با این حال وارد شدن به حیطه‌های غیرمفید و طرح سؤال‌های تستی ناکارا از اهداف این درس نیست.

شرح برخی از فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها

کار در کلاس صفحه ۳۱ و ۳۲

۱ با فرض اینکه تمام مخرج‌ها مخالف صفرند و با توجه به نکات گفته شده در بالا هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

(طرفین وسطین) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$ (الف

طرفین تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را در عدد غیرصفر bd ضرب می‌کنیم

$$\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd \Rightarrow ad=bc$$

(تبدیل حاصل‌ضرب به تناسب) ب) $ad=bc \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

طرفین تساوی $ad=bc$ را بر عدد غیرصفر bd تقسیم می‌کنیم

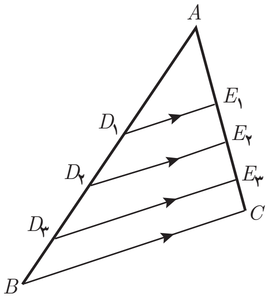
$$ad \div bd = bc \div bd \Rightarrow ad\times\frac{۱}{bd}=bc\times\frac{۱}{bd}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

(معکوس کردن تناسب) پ) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

در ادامهٔ مفاهیم این درس سعی شده آنچه در مورد استدلال، دانش‌آموز باید فرا گیرد در دل مفاهیم هندسی‌ای که باید یاد بگیرد آورده شود، زیرا طبق برنامه‌ریزی انجام شده این مفاهیم از استدلال باید در فصل هندسه آورده می‌شدند و اختصاص دادن فصلی جداگانه به آنها باعث بالا رفتن حجم کتاب می‌شد. بنابر آنچه گفته شد معلم محترم باید دقت نماید که یادگیری هم در مفاهیمی از استدلال که بیان شده‌اند و هم در مفاهیم هندسی بیان شده صورت گیرد. ممکن است برای درک مفاهیم استدلال که در این درس آورده شده‌اند به تشخیص معلم و با توجه به وضعیت کلاس نیاز به مطرح کردن مثال‌هایی بیشتر باشد. البته دانش‌آموزان با استدلال‌های استنتاجی و استقرایی بدون مطرح شدن نام آنها آشنا شده‌اند. همچنین با مثال نقض نیز از پایهٔ نهم آشنایی دارند.

پیش از ورود به تدریس، درباره اهمیت استدلال در زندگی و قضاوت عادلانه با دانش‌آموزان سخن بگویید و ریاضیات و هندسه را به عنوان علمی بنا شده بر پایه استدلال و منطق، به آنها معرفی کنید.

صفحه ۳۳ با چند پرسش آغاز شده است که دانش‌آموزان را به یک حدس کلی در مورد خط موازی در مثلث و نسبت‌های به وجود آمده هدایت می‌کند اما برای این حدس اثباتی آورده نمی‌شود.

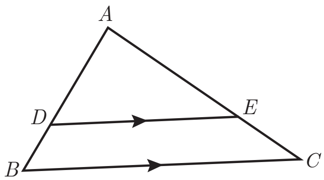


ــ اندازهٔ پاره‌خط‌های زیر را با خط‌کش مشخص کرده و در کسرها جایگزین کنید و نسبت‌های برابر در ستون‌های متمایز را مشخص نمایید.

$$\frac{AD_۱}{D_۱B} \longleftrightarrow \frac{AE_۱}{E_۱C}$$

$$\frac{AD_۲}{D_۲B} \qquad \frac{AE_۳}{E_۳C}$$

$$\frac{AD_۳}{D_۳B} \qquad \frac{AE_۲}{E_۲C}$$



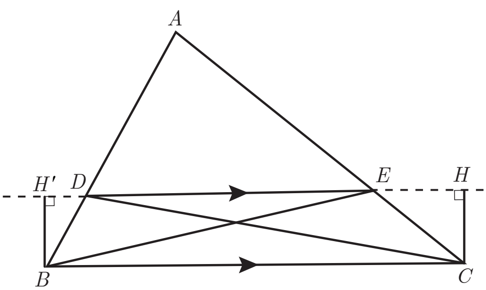
ــ اگر پاره‌خط DE مانند شکل روبه‌رو موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، حدس می‌زنید نسبت کدام پاره‌خط‌ها با هم برابر باشند؟

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

آیا می‌توان نتیجه گرفت اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود، همواره تساوی مشابه بالا برقرار است؟ خیر ــ زیرا با دیدن چند مثال، مسئله ثابت نمی‌شود.

پس از این قسمت تعریف استدلال استقرایی و استنتاجی آورده می‌شود. معلم می‌تواند با درنظر گرفتن شرایط کلاس مثال‌های دیگری از استدلال‌ها مطرح کند.

فعالیت صفحه ۳۴

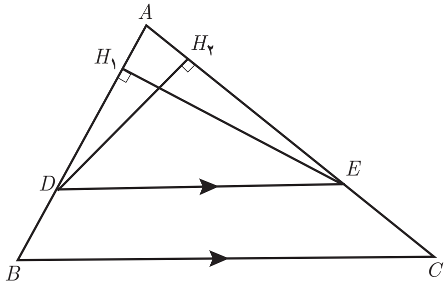


فرض کنید مانند شکل مقابل پاره‌خط DE موازی ضلع BC باشد.

می‌خواهیم نشان دهیم : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

۱ از نقطهٔ D به C و از E به B وصل کنید. مساحت‌های مثلث‌های DEC و DEB که آنها را با S_{DEC} و S_{DEB} نشان می‌دهیم، با هم برابرند. چرا؟ از B و C بر امتداد DE عمود رسم می‌کنیم. چهارضلعی $BCHH'$ مستطیل است. بنابراین دو ضلع BH' و CH برابر هستند.

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{DEC}}}{S_{\overset{\Delta}{DEB}}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\times \cancel{CH}\times \cancel{DE}}{\cancel{\frac{1}{2}}\times \cancel{BH'}\times \cancel{DE}}=1\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{DEC}}=S_{\overset{\Delta}{DEB}}$$



۲ از نقطهٔ E به ضلع AB عمود کنید و پای عمود را H_1 بنامید. سپس از D به ضلع AC عمود کنید و پای عمود را H_2 بنامید.

۳
$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{\frac{1}{2}EH_1\times AD}{\frac{1}{2}EH_1\times DB}=\frac{AD}{DB}$$

۴
$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}=\frac{\frac{1}{2}DH_2\times AE}{\frac{1}{2}DH_2\times EC}=\frac{AE}{EC}$$

۵ از (۱) و (۳) و (۴) نتیجه می‌شود $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$. چرا؟ طبق قسمت۱ داریم

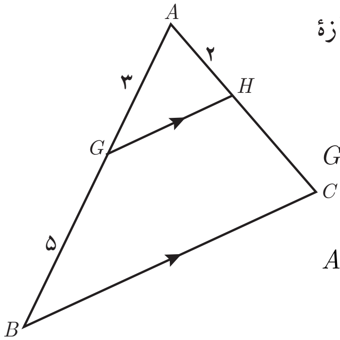
$$S_{\overset{\Delta}{DEB}}=S_{\overset{\Delta}{DEC}}$$

بنابراین

$$\Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}\xrightarrow{4,3}\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

پس از اینکه قضیه تالس بیان شد از دانش‌آموزان خواسته شود کار در کلاس صفحه ۳۴ را حل کنند. معلم می‌تواند در این قسمت مثال‌های بیشتری را برای استفاده از قضیه تالس مطرح کند.

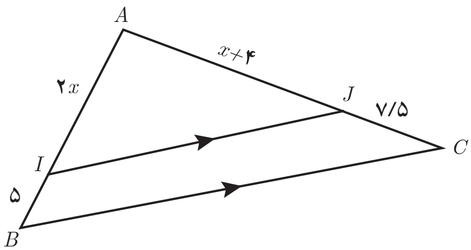
کار در کلاس صفحه ۳۴



۱ در شکل پاره‌خط‌های GH و BC موازی‌اند. اندازهٔ پاره‌خط‌های AC و HC را به دست آورید.

$$GH \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AG}{GB} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۲}{HC} \Rightarrow HC = \frac{۱۰}{۳}$$

$$AC = AH + HC = ۲ + \frac{۱۰}{۳} = \frac{۱۶}{۳} \Rightarrow AC = \frac{۱۶}{۳}$$



۲ با تشکیل یک معادله، مقدار x و اندازهٔ پاره‌خط‌های AI و AJ را به دست آورید.

$$IJ \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AI}{IB} = \frac{AJ}{JC} \Rightarrow$$

$$\frac{۲x}{۵} = \frac{x+۴}{۷/۵} \Rightarrow ۱۵x = ۵x + ۲۰ \Rightarrow x = ۲$$

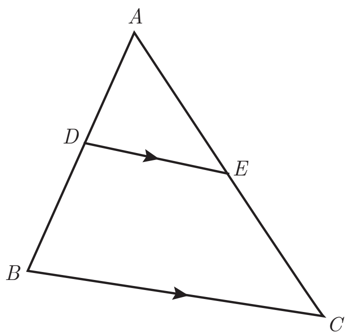
در ادامه در فعالیت صفحه ۳۵ تعمیم و نتایج قضیه تالس خواسته شده است که بهتر است معلم کمک کند دانش‌آموزان گام به گام به سؤالات پاسخ دهند. پس از انجام کار در کلاس می‌توانید مسائل بیشتری از قضیه تالس و تعمیم و نتایج آن در کلاس مطرح نمایید.

فعالیت صفحه ۳۵

۱ در شکل مقابل $DE \parallel BC$.

الف) تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



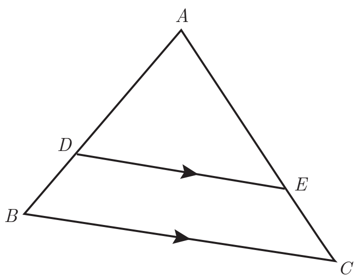
ب) به کمک ترکیب نسبت در مخرج تناسب $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{AD}{DB+AD}=\frac{AE}{EC+AE}\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

پ) به کمک تفضیل نسبت در صورت از تناسب به‌دست آمده در (ب) تناسب $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

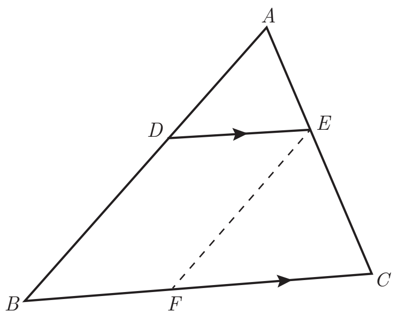
$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{AB-AD}{AB}=\frac{AC-AE}{AC}\Rightarrow\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$$

۲ در مثلث ABC پاره‌خط DE موازی ضلع BC است. ابتدا تناسبِ قضیهٔ تالس را بنویسید. سپس با توجه به ویژگی‌های تناسب و تکمیل تساوی‌های زیر، تناسب‌های دیگری را از قضیهٔ تالس نتیجه بگیرید.



$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\begin{cases}\frac{DB}{DA}=\frac{EC}{EA} & \frac{BD}{BA}=\frac{CE}{CA} \quad \frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}\\ \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} & \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}\end{cases}$$

۳



الف) در شکل پاره‌خط‌های DE و BC موازی‌اند. با توجه به قضیهٔ تالس داریم : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

ب) پاره‌خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم.
بنابراین داریم :

$$\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}$$

پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) داریم : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}$

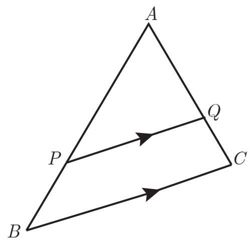
ت) چهارضلعی $DEFB$ چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ متوازی‌الاضلاع. زیرا اضلاع آن دو به دو موازی هستند.

پاره‌خط BF با کدام پاره‌خط برابر است؟ $BF=DE$

ث) با توجه به قسمت‌های (پ) و (ت) داریم : $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

کار در کلاس صفحه ۳۶

در شکل پاره‌خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.



الف) $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}=\frac{PQ}{BC}$ نادرست

ب) $\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}$ درست

پ) $\frac{PB}{AP}=\frac{QC}{AC}$ نادرست

ت) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}=\frac{PQ}{BC}$ نادرست

ث) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}$ درست

ج) $\frac{AB}{AP}=\frac{AC}{AQ}=\frac{BC}{PQ}$ درست

صفحه ۳۶ با تعریف «عکس یک قضیه» و ارائه چند مثال، درس را ادامه می‌دهد.

صرف وقت در این موضوع برای رسیدن به تسلط، حائز اهمیت است. لازم است دانش‌آموزان بتوانند فرض و حکم مسئله را یافته و با جابه جایی آنها، عکس قضیه را به وجود آورند.

استدلال غیرمستقیم با برهان خلف، نوعی از استدلال است که با فرض نادرست بودن حکم آغاز می‌شود و به تناقض با یکی از فرض‌های مسئله یا حقایق دانسته شده ریاضی می‌رسد. مسائلی که در این درس مطرح شده‌اند، هر دو نوع تناقض را پوشش می‌دهد. در مثال صفحه ۳۷ و مثال‌های صفحه ۳۸ با فرض مسئله به تناقض می‌رسیم و در تمرین ۸ صفحه ۴۱ با تناقض با حقایق دانسته به تناقض می‌رسیم.

در ادامه عکس قضیه تالس نیز با برهان خلف اثبات می‌شود.

در پایین صفحه ۳۸ قضیه تالس و عکس آن به‌صورت یک قضیه دو شرطی بیان شده است. قضیه‌های دوشرطی با نماد « $\Leftrightarrow$ » نوشته شده و اصطلاح‌های «اگر و تنها اگر» یا «اگر و فقط اگر» برای بیان کلامی آن استفاده می‌شود. در کار در کلاس صفحه ۳۹ عکس قضیه فیثاغورس بیان و اثبات می‌شود و در انتها قضیه فیثاغورس و عکس آن به صورت قضیه دو شرطی نوشته می‌شود.

مثال نقض، مثالی است که یک حکم کلی را باطل می‌کند، گاهی اوقات مثال نقض نشان می‌دهد حدسی که از طریق استدلال استقرایی به آن رسیده‌ایم نادرست است و دارای نمونه‌ای است که در آن حدس کلی صدق نمی‌کند.

حتماً دانش‌آموزان را به این نکته توجه دهید که اگر برای یک حدس با حکم کلی نتوانستیم مثال نقض بیاوریم، دلیل بر درستی آن حدس نیست. ممکن است تلاش بیشتر، ما را به مثال نقض برساند. ضمن آنکه برای اثبات حکم کلی نیازمند به استدلال استنتاجی هستیم.

حل تمرین‌های درس دوم

۱ $$S=\frac{AH\times BC}{۲}\ ,\ S=\frac{AB\times AC}{۲}\Rightarrow AH\times BC=AB\times AC\Rightarrow \frac{BC}{AC}=\frac{AB}{AH}$$

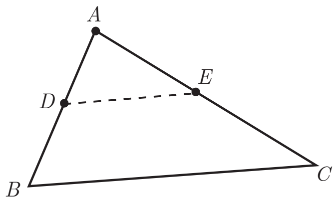
۲ الف) $$\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b}\Rightarrow \frac{a}{۱۰+a-a}=\frac{b}{۸+b-b}\Rightarrow \frac{a}{۱۰}=\frac{b}{۸}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۵}{۴}$$

ب) $$\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b}\Rightarrow \frac{(۳a+۱۰)-(۱۰+۲a)}{۱۰+۲a}=\frac{(۳b+۷)-(۷+۲b)}{۷+۲b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۱۰+۲a}=\frac{b}{۷+۲b}\xrightarrow{\times ۲}\frac{۲a}{۱۰+۲a}=\frac{۲b}{۷+۲b}$$

$$\Rightarrow \frac{۲a}{۱۰+۲a-۲a}=\frac{۲b}{۷+۲b-۲b}\Rightarrow \frac{۲a}{۱۰}=\frac{۲b}{۷}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۱۰}{۷}$$

۳ داریم $AB=۲AD$ و $AC=۲AE$ پس $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{۱}{۲}$
و بنابر قضیهٔ تالس و تعمیم آن داریم :



$DE\|BC$ و $\frac{۱}{۲}=\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

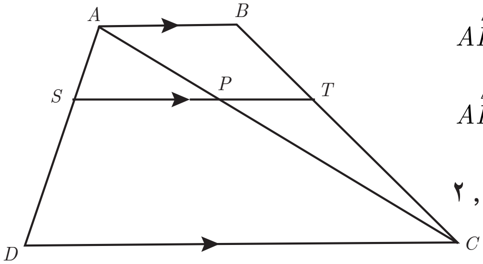
و بنابراین $DE=\frac{BC}{۲}$

۴ $$PQ\|BC\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}\Rightarrow \frac{AP}{۶}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow AP=۴$$

$$PQ\|BC\xrightarrow{\text{نتایج تالس}}\frac{PQ}{BC}=\frac{AQ}{AC}\Rightarrow \frac{PQ}{۹}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow PQ=۳/۶$$

۵ $$\frac{AS}{AB}=\frac{AT}{AC}=\frac{ST}{BC}\Rightarrow \frac{۸}{۱۲}=\frac{۶}{۴x+۱}=\frac{۳y+۳}{۳y+۹}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴x+۱=\frac{۶\times ۱۲}{۸}=۹\Rightarrow x=۲ \\ ۲۴y+۷۲=۳۶y+۳۶\Rightarrow ۳۶=۱۲y\Rightarrow y=۳ \end{cases}$$



۶ ۱ $\overset{\Delta}{ADC}:\ SP \parallel DC \Rightarrow \frac{AS}{SD}=\frac{AP}{PC}$

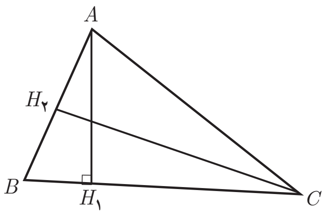
۲ $\overset{\Delta}{ABC}:\ PT \parallel AB \Rightarrow \frac{AP}{PC}=\frac{BT}{TC}$

$۲\,,۱ \Rightarrow \frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$

۷ الف) اگر در مثلثی سه زاویه برابر باشند، آنگاه سه ضلع آن مثلث نیز برابر خواهند بود.

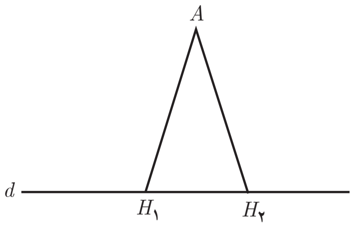
ب) اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل با هم برابر باشند آنگاه اضلاع مقابل موازی‌اند.

پ) اگر زوایای مقابل در یک چهارضلعی مکمل باشند آنگاه رأس‌های آن چهارضلعی روی یک دایره قرار می‌گیرند.



ت) $AH_۱ < AH_۲ \Rightarrow BC > AB$

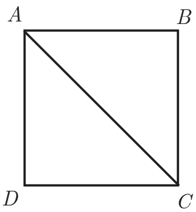
عکس آن : $BC > AB \Rightarrow AH_۱ < AH_۲$



۸ فرض کنیم برخلاف، بتوان از نقطه‌ای مانند A دو ارتفاع $AH_۱$ و $AH_۲$ را بر خط d رسم کرد.

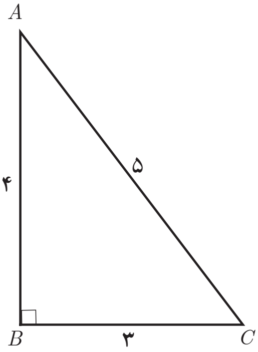
بنابراین مجموع دو زاویه از مثلث $AH_۱H_۲$ برابر ۱۸۰° است و لذا مجموع سه زاویه از ۱۸۰° بیشتر است که غیرممکن است لذا فرض امکان رسم دو ارتفاع از نقطهٔ A غلط است.

۹ الف) ۱۳۱ یک عدد اول و بزرگ‌تر از ۱۲۷ است.

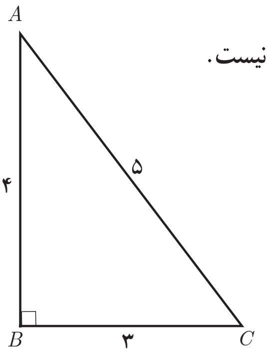


ب) در شکل مقابل مساحت $\overset{\Delta}{ABC}$ از مساحت $ABCD$ کمتر است.

پ) AB ارتفاع است و از BC بزرگ‌تر است.



ت) در مثلث ABC میانهٔ وارد بر AC بر عمودمنصف ضلع AC منطبق نیست.



درس سوم

تشابه مثلث‌ها

اهداف

۱ درک قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها و توانایی کاربرد آن در حل مسائل
۲ حالت‌های تشابه دو مثلث رابشناسد و از آنها در حل مسائل کمک بگیرد.
۳ روابط طولی مطرح شده را فرا گیرد و آنها را در حل مسائل به‌کار گیرد.

پیش‌نیازها

❑ مفهوم تشابه را بداند و با تعریف آن آشنا باشد.

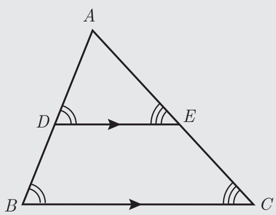
روش تدریس

دانش‌آموزان در پایهٔ نهم مفهوم تشابه را فراگرفته‌اند. با یادآوری مختصری از تعریف تشابه دو چندضلعی می‌توان آن‌را برای مثلث مطرح نمود. همان‌طور که در کتاب درسی ملاحظه می‌نمایید اثبات قضایای تشابه دو مثلث مطرح نشده است لذا این اثبات‌ها جزء اهداف این درس نمی‌باشند و در اینجا تنها کاربرد این قضیه‌ها در حل مسائل مطرح است.

در ابتدای درس قضیه اساسی تشابه به همراه اثبات آن آورده شده است

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این‌صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.



اثبات:

۱ داریم $\hat{E}=\hat{C}$ و $\hat{D}=\hat{B}$ (چرا؟) دو خط DE و BC موازی هستند و خط AC مورب است لذا $\hat{E}=\hat{C}$

بنابراین زاویه‌های دو مثلث نظیر به نظیر با هم برابرند. به همین صورت $\hat{D}=\hat{B}$

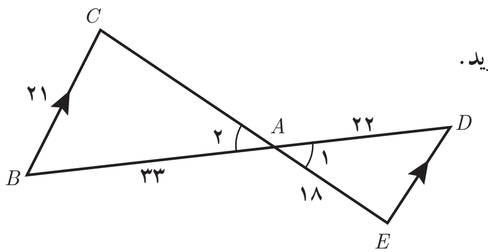
۲ با توجه به قضیهٔ تالس داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

۳ با توجه به (۱) و (۲) و تعریف تشابه داریم: $A\overset{\Delta}{D}E \sim A\overset{\Delta}{B}C$

پس از اینکه قضایای تشابه دو مثلث برای دانش‌آموزان بیان شد از دانش‌آموزان خواسته شود تا به حل کار در کلاس صفحه ۴۳ و ۴۴ بپردازند.

کار در کلاس صفحه ۴۳

۱ درشکل مقابل $BC\|DE$.
اندازهٔ پاره خط‌های DE و CA را به دست آورید.



$$\begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\\ BC\parallel ED\ ,\ \underset{\text{مورب}}{CE}\Rightarrow\hat{C}=\hat{E}\end{cases}\xrightarrow{\text{دو زاویه برابر}} A\overset{\Delta}{B}C\sim A\hat{E}D$$

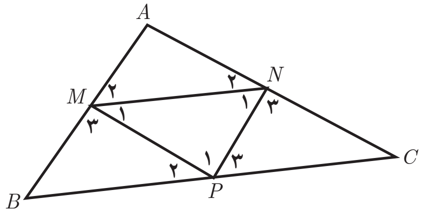
$$\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{۲۲}{۳۳}=\frac{۱۸}{AC}\Rightarrow AC=۲۷$$

$$\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{ED}{BC}\Rightarrow\frac{۲۲}{۳۳}=\frac{ED}{۲۱}\Rightarrow ED=۱۴$$

۲ اگر نقاط P و N و M مطابق شکل وسط‌های اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید مثلث‌های ABC و MNP متشابه‌اند.

حل :

الف) $MN \parallel BC$ و $NP \parallel AB$ و $MP \parallel AC$ چرا؟



$$\begin{cases} \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC} = ۱ \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} MN \parallel BC \\ \dfrac{BM}{MA} = \dfrac{BP}{PC} = ۱ \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} MP \parallel AC \\ \dfrac{CP}{CB} = \dfrac{CN}{NA} = ۱ \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PN \parallel AB \end{cases}$$

ب) بنابراین $\hat{M}_۱ = \hat{P}_۲ = \hat{C}$ و $\hat{N}_۱ = \hat{P}_۳ = \hat{B}$ (چرا؟)

$$\left.\begin{cases} MN \parallel BC \ , \ \text{مورب} \ NP \Rightarrow \hat{N}_۱ = \hat{P}_۳ \\ NP \parallel AB \ , \ \text{مورب} \ BC \Rightarrow \hat{B} = \hat{P}_۳ \end{cases}\right\} \Rightarrow \hat{N}_۱ = \hat{P}_۳ = \hat{B}$$

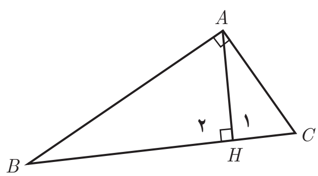
به همین صورت $\hat{M}_۱ = \hat{P}_۲ = \hat{C}$

از (ب) دربارهٔ مثلث‌های مورد نظر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ متشابه هستند.

فعالیت صفحه ۴۴

فرض کنید مثلث ABC مانند شکل یک مثلث قائم‌الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد.

۱ نشان دهید دو زاویه از مثلث AHC با دو زاویه از مثلث ABC برابرند و نتیجه بگیرید :



$$A\overset{\triangle}{B}C \sim A\overset{\triangle}{H}C$$

$$\begin{cases} \hat{C} = \hat{C} \ (\text{مشترک}) \\ \hat{A} = \hat{H}_۱ = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C \sim A\overset{\triangle}{H}C$$

۲ نشان دهید دو زاویهٔ مثلث AHB با دو زاویه از مثلث ABC برابر است و نتیجه بگیرید :

$$A\overset{\triangle}{B}C \sim A\overset{\triangle}{H}B$$

$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{B} \ (\text{مشترک}) \\ \hat{A} = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C \sim A\overset{\triangle}{B}H$$

۳ از (۱) و(۲) دربارهٔ مثلث های AHC و AHB چه نتیجه‌ای می گیرید؟
با استفاده از سؤال ۳ کار در کلاس صفحه ۴۴ دو مثلث ACH و ABH متشابه هستند.

۴ $$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow AC^۲ = HC \times BC$$

۵ $$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHB} \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} = \frac{HB}{AB} \Rightarrow AB^۲ = HB \times BC$$

۶ $$\overset{\Delta}{AHB} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{AC}{AB} = \frac{HC}{AH} \Rightarrow AH^۲ = HC \times HB$$

۷ با جمع طرفین روابط ۴ و ۵ رابطهٔ فیثاغورس را برای مثلث ABC نتیجه بگیرید.

$$AC^۲ = HC \times BC$$
$$AB^۲ = HB \times BC$$

$$AB^۲ + AC^۲ = HC \times BC + HB \times BC = BC(\underbrace{HC + HB}_{BC}) = BC^۲$$
$$\Rightarrow AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$$

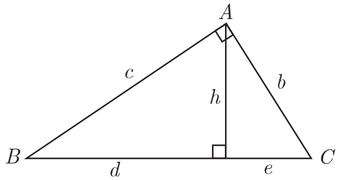
۸ مساحت مثلث ABC را به دو طریق محاسبه و با توجه به آن تساوی زیر را کامل کنید.

$AB \times AC = AH \times BC$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \dfrac{AB \times AC}{۲} \\ S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \dfrac{AH \times BC}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB \times AC}{۲} = \frac{AH \times BC}{۲} \Rightarrow AB \times AC = AH \times BC$$

در کار در کلاس صفحه ۴۵ از برخی از نتایج فعالیت ۴۴ برای به‌دست آوردن مقادیر مجهول استفاده می‌کنیم.

کار در کلاس صفحه ۴۵



درمثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل در هر مورد سعی کنید با ساده‌ترین روش مقادیر خواسته شده را به‌دست آورید.

۱ $h=۵$ $d=۷$ $e=?$

$$h^۲ = d \times e \Rightarrow ۵^۲ = ۷ \times e \Rightarrow e = \frac{۲۵}{۷}$$

۲ $d=۵$ $e=۳$ $b=?$ $c=?$

$$b^۲ = e(e+d) \Rightarrow b^۲ = ۳\times ۸ \Rightarrow b = \sqrt{۲۴} \Rightarrow b = ۲\sqrt{۶}$$
$$c^۲ = d(e+d) \Rightarrow c^۲ = ۵\times ۸ \Rightarrow c = \sqrt{۴۰} \Rightarrow c = ۲\sqrt{۱۰}$$

۳ $c=۸$ $b=۶$ $h=?$

$$c^۲ + b^۲ = (d+e)^۲ \Rightarrow ۸^۲ + ۶^۲ = (d+e)^۲ \Rightarrow d+e = ۱۰$$
$$b\times c = (d+e)\times h \Rightarrow ۶\times ۸ = ۱۰\times h \Rightarrow h = ۴/۸$$

حل تمرین‌های درس سوم

۱ الف) $\frac{a}{۲a} = \frac{b}{۲b} = \frac{c}{۲c} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow$ دو مثلث متشابه‌اند (ض ض ض)

$$\Rightarrow x = ۱۸۰ - ۶۰ - ۲۰ = ۱۰۰$$

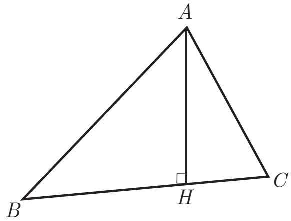
ب) $\frac{۳}{۶} = \frac{۲}{۴}$, $\hat{c_۱} = \hat{c_۲} \Rightarrow$ دو مثلث متشابه‌اند (ض ز ض)

$$\Rightarrow \frac{۳}{۶} = \frac{۲}{۴} = \frac{۲/۵}{x} \Rightarrow x = ۵$$

پ) دو مثلث به حالت دو زاویه متشابه‌اند $\Rightarrow \frac{۴}{۱۲} = \frac{\frac{۲۰}{۳}}{y} = \frac{x}{۱۶}$

$$\Rightarrow x = \frac{۱۶}{۳} \quad , \quad y = ۲۰$$

۲ الف) مثلث‌های به‌وجود آمده متشابه هستند.



$$CH = BC - BH = ۱۰ - ۹ = ۱$$
$$AH^۲ = BH\times CH \Rightarrow AH^۲ = ۹\times ۱ \Rightarrow AH = ۳$$
$$AB^۲ = BH\times BC \Rightarrow AB^۲ = ۹\times ۱۰ \Rightarrow AB = \sqrt{۹۰} = ۳\sqrt{۱۰}$$
$$AC^۲ = CH\times BC \Rightarrow AC^۲ = ۱\times ۱۰ \Rightarrow AC = \sqrt{۱۰}$$

اگر ابتدا AB و AC را به‌دست آوریم می‌توان با استفاده از رابطه $AB\times AC = AH\times BC$ اندازه AH را محاسبه کرد.

$$۳\sqrt{۱۰}\times\sqrt{۱۰} = AH\times ۱۰ \Rightarrow AH = ۳$$

ب)

$$AC^{۲} = CH \times BC \Rightarrow ۵^{۲} = ۲ \times BC \Rightarrow BC = \frac{۲۵}{۲}$$

$$BH = BC - CH \Rightarrow BH = \frac{۲۵}{۲} - ۲ = \frac{۲۱}{۲}$$

$$AH^{۲} = BH \times CH \Rightarrow AH^{۲} = ۲ \times \frac{۲۱}{۲} \Rightarrow AH = \sqrt{۲۱}$$

$$AB^{۲} = BH \times BC \Rightarrow AB^{۲} = \frac{۲۱}{۲} \times \frac{۲۵}{۲} = \frac{۵۲۵}{۴} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{۵۲۵}}{۲}$$

پ) ابتدا با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث ABC، اندازه BC را به‌دست می‌آوریم.

$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} \Rightarrow BC^{۲} = ۸^{۲} + ۶^{۲} \Rightarrow BC = ۱۰$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times ۱۰ = ۶ \times ۸ \Rightarrow AH = ۴/۸$$

ت) ابتدا با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث ABH اندازه BH را محاسبه می‌کنیم.

$$BH^{۲} = AB^{۲} - AH^{۲} \Rightarrow BH^{۲} = ۱۲^{۲} - ۶^{۲} \Rightarrow BH = \sqrt{۱۰۸} = ۶\sqrt{۳}$$

$$AB^{۲} = BH \times BC \Rightarrow ۱۲^{۲} = ۶\sqrt{۳} \times BC \Rightarrow BC = \frac{۱۴۴}{۶\sqrt{۳}} = ۸\sqrt{۳}$$

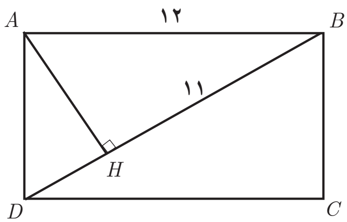
$$CH = BC - BH \Rightarrow CH = ۸\sqrt{۳} - ۶\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$$

$$AC^{۲} = CH \times BC \Rightarrow AC^{۲} = ۲\sqrt{۳} \times ۸\sqrt{۳} \Rightarrow AC^{۲} = ۴۸ \Rightarrow AC = ۴\sqrt{۳}$$

سایر تمرین‌ها نیز به طریق مشابه با روابط طولی مطرح شده در درس حل می‌شوند.

۳

$$AH = \sqrt{۱۲^{۲} - ۱۱^{۲}} = \sqrt{۱۴۴ - ۱۲۱} = \sqrt{۲۳}$$



$$AH = DH \times HB \Rightarrow ۲۳ = DH \times ۱۱ \Rightarrow DH = \frac{۲۳}{۱۱}$$

$$\Rightarrow BD = ۱۱ + \frac{۲۳}{۱۱}$$

$$AD = \sqrt{BD^{۲} - AB^{۲}} = \sqrt{(۱۱ + \frac{۲۳}{۱۱})^{۲} - ۱۲^{۲}}$$

سؤالات ارزشیابی فصل هندسه

۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.
الف) نقطه برخورد سه نیمساز مثلث از سه ضلع آن به یک فاصله است.
ب) نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه با نسبت اندازه‌های ارتفاع‌های متناظر در دو مثلث برابر است.

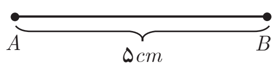
۲ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
هر گاه خطی روی دو ضلع مثلث، پاره‌خط‌های متناسب ایجاد کند، آنگاه آن خط با ضلع سوم مثلث .... است.

۳ گزینه درست را انتخاب کنید.
الف) کدام‌یک از نقاط زیر از سه رأس یک مثلث به یک فاصله است؟
۱ــ نقطه برخورد سه میانه — ۲ــ نقطه برخورد سه ارتفاع
۳ــ نقطه برخورد سه عمودمنصف — ۴ــ نقطه برخورد سه نیمساز

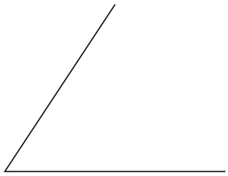
۴ در هندسه چه زمانی از مثال نقض استفاده می‌کنیم؟

۵ الف) نقاطی را مشخص کنید که از نقطه O به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند.
ب) نقاطی را مشخص کنید که از نقطه O به فاصله کمتر از ۳ سانتی‌متر هستند.

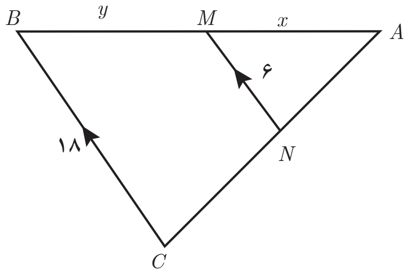
۶ نقاطی را مشخص کنید که از نقاط A و B به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند.



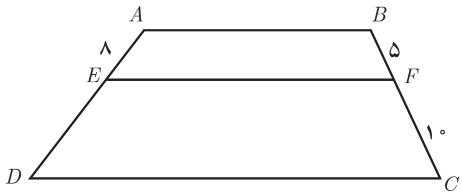
۷ نیمساز زاویه زیر را به کمک خط‌کش و پرگار رسم کنید و مراحل رسم را توضیح دهید.



۸ یک مثلث دلخواه رسم کنید. آیا می‌توان دایره‌ای رسم کرد که این دایره از سه رأس مثلث بگذرد؟ مرکز این دایره کجاست؟



۹ در شکل مقابل $MN \parallel BC$ و $AB = 60$. مقدار x و y را به‌دست آورید.



۱۰ در ذوزنقه مقابل $AB \parallel CD \parallel EF$. اندازه DE را به‌دست آورید.

۱۱ برای هر یک از حکم‌های کلی زیر، یک مثال نقض بیاورید.

الف) به ازای هر عدد طبیعی n، عدد $2^n - 1$ اول خواهد بود.

ب) محل برخورد عمودمنصف‌های هر مثلث، داخل مثلث است.

پ) هیچ عدد اول بزرگ‌تر از ۱۳۷ وجود ندارد.

ت) مساحت هر مربع از مساحت هر مثلث بیشتر است.

۱۲ عبارت‌های زیر را به‌صورت دو شرطی بنویسید.

الف) اگر $x > 5$ آنگاه $2x > 10$

ب) اگر $|x| = 2$ باشد آنگاه $x = \pm 2$

پ) اگر $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$

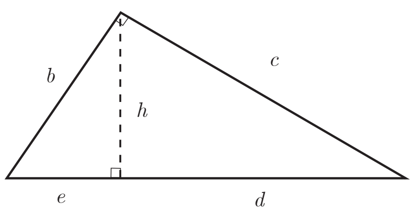
۱۳ قضیه فیثاغورس و عکس آن را به‌صورت یک قضیه دو شرطی بیان نمایید.

۱۴ در مثلث قائم‌الزاویه مقابل، در هر حالت مقادیر خواسته شده را به‌دست آورید.

الف) $e = 2$ و $d = 8$ و $h = ?$ و $b = ?$ و $c = ?$

ب) $e = 3$ و $h = 4$ و $d = ?$ و $c = ?$

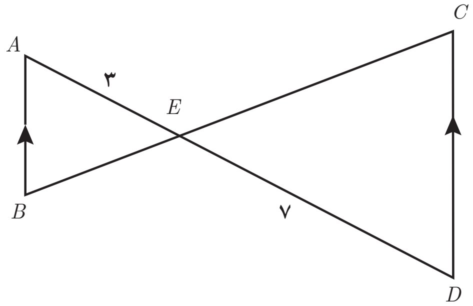
پ) $b = 5$ و $c = 12$ و $h = ?$ و $e = ?$



۱۵ اگر نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه $\frac{۴}{۷}$ باشد، نسبت مساحت‌های آنها را به‌دست آورید.

۱۶ اگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{۱۲۱}{۴۹}$ باشد، نسبت محیط‌های آنها را به‌دست آورید.

۱۷ نسبت محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث مقابل را به‌دست آورید.



۱۸ در شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۵ و عرض ۸ رسم شده است. از نقطه A بر قطر BC عمود رسم می‌کنیم و پای این عمود را H می‌نامیم. طول AH، BH و CH را به‌دست آورید.