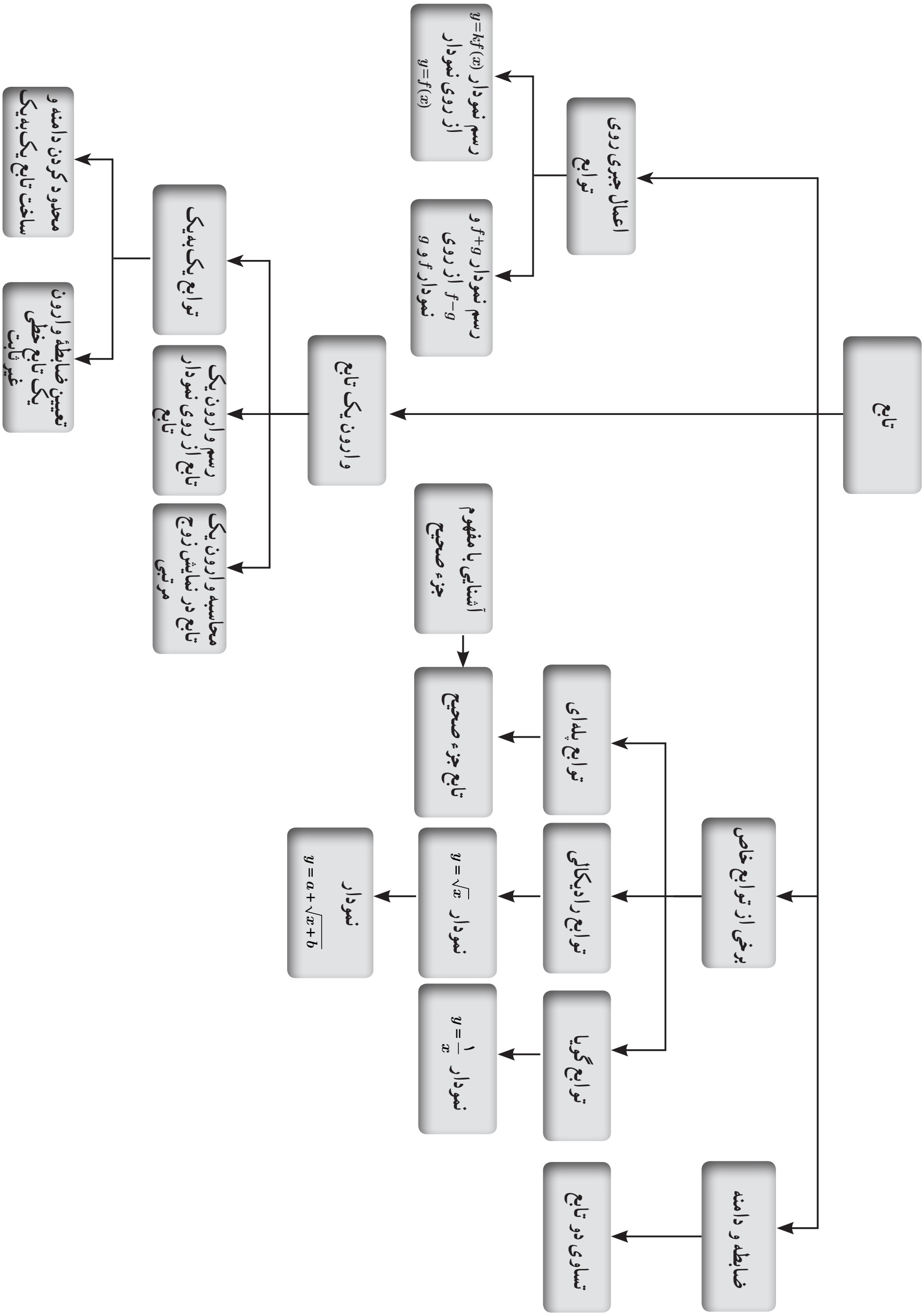
فصل ۳

تابع

اهداف کلی فصل

- ❑ معرفی توابع گویا و رسم نمودار تابع گویا با ضابطهٔ $y=\frac{1}{x}$
- ❑ آشنایی با توابع رادیکالی و رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x}$
- ❑ آشنایی با توابع پله‌ای و معرفی تابع جزء صحیح
- ❑ آشنایی با وارون یک تابع
- ❑ معرفی تابع یک‌به‌یک
- ❑ تعیین ضابطهٔ تابع وارون یک تابع خطی غیرثابت
- ❑ اعمال جبری روی توابع

نقشه مفهومی


تابع
ضابطه و دامنه
تساوی دو تابع
برخی از توابع خاص
توابع گویا
نمودار $y=\frac{1}{x}$
توابع رادیکالی
نمودار $y=\sqrt{x}$
نمودار $y=a+\sqrt{x+b}$
توابع پله‌ای
تابع جزء صحیح
آشنایی با مفهوم جزء صحیح
اعمال جبری روی توابع
رسم نمودار $f+g$ و $f-g$ از روی نمودار f و g
رسم نمودار $y=kf(x)$ از روی نمودار $y=f(x)$
وارون یک تابع
محاسبه وارون یک تابع در نمایش زوج مرتبی
رسم وارون یک تابع از روی نمودار تابع
توابع یک‌به‌یک
تعیین ضابطهٔ وارون یک تابع خطی غیر ثابت
محدود کردن دامنه و ساخت تابع یک‌به‌یک

تصویر عنوانی

سونامی (آب‌لرزه) به لرزش شدید آب دریا گفته می‌شود. این اتفاق ممکن است در پی زمین‌لرزه‌های زیر دریا، لغزیدن صخره، انفجار آتشفشان و یا هر حادثهٔ دیگری که انرژی زیادی در دریا آزاد می‌کند، رخ دهد. آبی که به لرزه درآمده است، به شکل موج‌های عظیم به کرانه‌ها می‌رسد و ویرانی به بار می‌آورد. سونامی زمانی شروع می‌شود که حجم عظیمی از آب، به سرعت مرتفع شود. تندی موج‌های سونامی بسته به محل رویداد، ممکن است به بیش از ۸۰۰ کیلومتر در ساعت برسد! یکی از بزرگ‌ترین سونامی‌ها در سال ۱۳۸۳ در نزدیکی سوماترای اندونزی روی داد و باعث ویرانی عظیمی شد و نزدیک ۲۰۰هزار نفر را به کام مرگ کشانید.

تصویر عنوانی فصل، نمایی از بندر سیراف، یکی از بنادر تاریخی ایران در پهنهٔ خلیج فارس است.

این بندر، صدها سال پیش، محلّ شکوفایی و تجارت ایران با همهٔ نقاط متمدن متصل به دنیای آن روز بوده است. اشاره به این بندر به مسئله‌ای در تابع رادیکالی در فصل بازمی‌گردد. تابع سونامی که در درس اول به آن اشاره شده است یک نوع تابع رادیکالی است و علّت ارتباط این بندر با تابع سونامی، وجود یک مسئلهٔ پژوهشی جذاب است: آیا یک سونامی بندر باستانی سیراف را ویران کرده است یا خیر؟ این تصویر که توسط یکی از افراد بومی گرفته شده است، به خوبی خط باریک حوزهٔ شهری سیراف امروز را نشان می‌دهد. همچنین نشان می‌دهد که سیراف تا چه حد می‌تواند بر اثر سونامی آسیب‌پذیر باشد.

درس اول

آشنایی با برخی از انواع توابع

اهداف درس

۱ آشنایی با توابع گویا و تعیین دامنهٔ آن

۲ رسم تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{1}{x}$

۳ درک تساوی دو تابع از روی نمودار و همچنین از روی ضابطه و دامنه

۴ آشنایی با توابع رادیکالی

۵ رسم تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$

۶ رسم توابع حاصل از انتقال طولی و عرضی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$

۷ آشنایی با توابع پله‌ای

۸ آشنایی با عملگر جزء صحیح

۹ شناخت و رسم تابع جزء صحیح

پیش‌نیازها

۱ تشخیص جملهٔ عمومی یک الگو

۲ شناخت مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

۳ ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف تابع و تبدیل آنها به یکدیگر

۴ شناخت مفهوم دامنه و برد یک تابع از روی نمودار

۵ حل نامعادلات درجه اول

۶ شناخت توابع چندجمله‌ای

۷ شناخت عملگر رادیکال

روش تدریس

در کتاب ریاضی دهم، دانش‌آموزان با کاربرد ضابطه به‌عنوان قانون یک تابع آشنا شده‌اند. ضروری است که برای شروع درس تابع، مروری بر تعریف ضابطه و دامنهٔ یک تابع صورت گیرد. یک تابع با ضابطه و دامنهٔ آن مشخص می‌شود. با این همه اگر دامنهٔ تابع ذکر نشود، بزرگ‌ترین دامنهٔ ممکن را برای آن تابع در نظر می‌گیریم. همچنین به این موضوع اشاره شود که اصطلاح تابع مثلاً $f(x)=۲x$ به‌کار برده نشود و از اصطلاح تابع با ضابطهٔ $f(x)=۲x$ ، به‌عنوان جایگزین استفاده شود.

فعالیت صفحه ۴۸

در بحث توابع گویا به داستانی در این فعالیت اشاره می‌شود که دربارهٔ سهم مشارکت تعدادی داوطلب است.

در این فعالیت اهداف فرهنگی (مشارکت ــ کارآفرینی ــ مدیریت بحران ــ خشکسالی) و اهداف ریاضی (رسم تابع $n \in \mathbb{N} \quad f(n)=\frac{۱}{n}$) مورد نظر بوده است. پس از این داستان و اجرای روند این فعالیت، انتظار می‌رود دانش‌آموزان، درکی از رفتار تابع با ضابطهٔ $n \in \mathbb{N} \quad f(n)=\frac{۱}{n}$ ، پیدا کنند.

۱ الف) اگر حسین تنها شخص شرکت کننده در این طرح بود، او به تنهایی می‌بایست $\frac{۱}{۱}$ از ده میلیون تومان را بپردازد، اما اگر یک داوطلب دیگر هم پیدا می‌شد، هر کدام باید $\frac{۱}{۲}$ از ده میلیون تومان را بپردازند. جدول زیر را کامل کنید.

در اینجا، مروری بر نمایش جدولی تابع (که در سال دهم به آن اشاره شد) دارد. همچنین با کامل کردن جدول مربوط به این قسمت و الگویابی (فصل اول، سال دهم) انتظار می‌رود دانش‌آموزان بتوانند به قسمت‌های دیگر این فعالیت پاسخ مناسب بدهند.

تعداد افراد داوطلب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
سهم مشارکت هر داوطلب	$\frac{۱}{۱}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۱۰}$

ب) اگر تعداد داوطلبانی که می‌خواهند در این کار اقتصادی شرکت کنند، n نفر باشد، سهم مشارکت هر نفر چقدر خواهد شد؟ $\frac{۱}{n}$

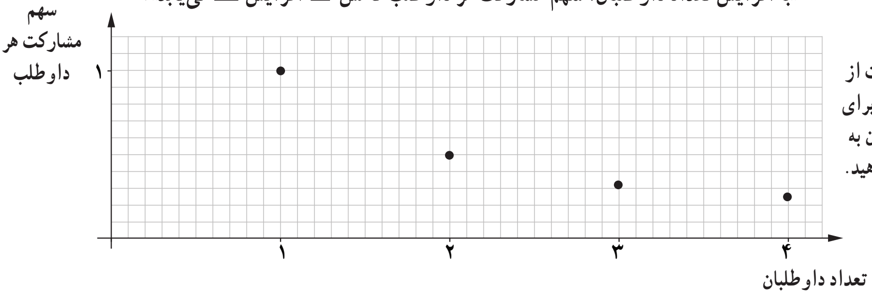
پ) رابطهٔ بین تعداد افراد داوطلب و سهم مشارکت آنها یک تابع است. ضابطهٔ این تابع چیست؟

$f(x)=\frac{1}{x}$

۲ در شکل زیر، بخشی از نمودار تابع سهم مشارکت رسم شده است. با انتخاب گزینهٔ مناسب در عبارت زیر، تعیین کنید که این نمودار چه چیزی را نشان می‌دهد؟

انتظار می‌رود، دانش‌آموزان با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $(n\in\mathbb{N})$ $f(n)=\frac{1}{n}$ ، به سؤال ۲ پاسخ بدهند. هدف از طرح این سؤال، مقدمه‌ای برای درک رفتار تابع $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{x}$ می‌باشد.
شاخص کردن نقطه با طول $x=1$ روی نمودار توصیه می‌شود، زیرا در مرحلهٔ بعد باید به نقاط کمتر از ۱ اشاره کنیم.

«با افزایش تعداد داوطلبان، سهم مشارکت هر داوطلب کاهش ☑ افزایش ☐ می‌یابد».



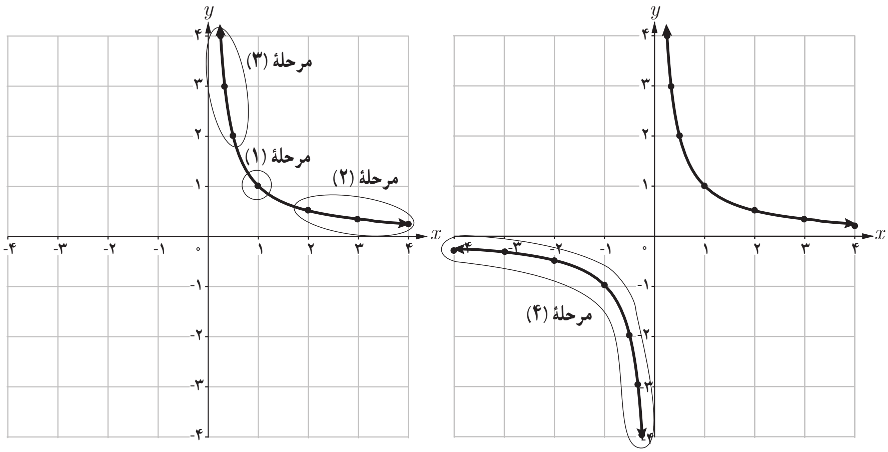
سهم مشارکت از روی نمودار برای دانش‌آموزان به خوبی نشان دهید.

با توجه به عدم درک رفتار حدی و پیوستگی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ برای دانش‌آموزان، آموزش رفتار نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ ، از مهم‌ترین اهداف این فعالیت می‌باشد؛ زیرا برای آشنایی با نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ ، انتخاب گزینه، به درک آسان این مطلب کمک می‌کند.

فعالیت صفحه ۴۹

در نمودارهای زیر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x}$ با دو دامنهٔ متفاوت رسم شده است. مشخص کنید که هر کدام از این نمودارها مربوط به کدام دامنه است؟

الف) $D_f=(۰\,,+\infty)$ ‏ ‏ ‏ ‏ ب) $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$



نمودارها را طبق مراحل پیشنهادی در کلاس مورد بحث قرار دهید. برای درک عمیق این مطلب که تابع مذکور در نقطه‌ای به طول $x=۰$ تعریف نشده است، از نمودار کمک بگیرید و به این نکته توجه داشته باشید که دانش‌آموزان برای اولین بار است که با یک تابع غیرچندضابطه‌ای مواجه می‌شوند، بنابراین زمان کافی برای درک نمودار در کلاس در نظر بگیرید.

در ادامهٔ مطالب، تعریف تابع گویا، ارائه شده است. این تعریف برگرفته از متون کلاسیک ریاضی رایج می‌باشد و یکی از متداول‌ترین تعریف‌های تابع گویاست.

با توجه به تعریف ارائه شده، تابع با ضابطهٔ مثلاً $f(x)=\frac{۱}{x}$ با دامنه‌های مختلف به‌عنوان نمونه‌ای از توابع گویا معرفی شده است. خواندنی ارائه شده در صفحهٔ ۴۹، یک مثال کاربردی از توابع گویاست.

پیش‌تر دیده‌اید، در نظام آموزشی ریاضی ایران، به توابعی با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ تابع هموگرافیک می‌گفتند. این توابع و مسائل مربوط به آن، در تعداد محدودی از کتاب‌های آموزشی ریاضی قرار دارد. بنابراین دانش‌آموزان نیازی به دانستن و درک کردن رفتارهای مجانبی و... این نوع توابع در پایهٔ یازدهم تجربی ندارند.

در ادامه، یک مسئلهٔ کاربردی از توابع گویا در قالب کار در کلاس آورده شده است:

کار در کلاس صفحه ۵۰

این مسئله شبیه مسئلهٔ امتیازهای آرمان در فصل ۱ کتاب یازدهم است و هدف از طرح این سؤال، تشخیص گویا بودن این تابع است.

یکی از معیارهای بررسی موفقیت یک بازیکن بسکتبال، بررسی «عملکرد پرتاب‌های آزاد» اوست. به این منظور، نسبت پرتاب‌های آزاد موفق هر بازیکن را به همهٔ پرتاب‌های آزاد حساب می‌کنند. وحیده که عضو تیم بسکتبال مدرسه است، یک بازیکن موفق است، زیرا در مسابقات امسال، تا امروز، از ۱۰ پرتاب آزاد، ۷ پرتاب او موفق بوده است. بنابراین ۷۰ درصد پرتاب‌های آزاد او موفق بوده است. او دوست دارد عملکردش بهتر از این باشد.

الف) اگر تا پایان مسابقات همهٔ پرتاب‌های آزاد وحیده موفق باشد، ضابطهٔ تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد او به کدام صورت زیر است؟

$$f(x)=\frac{۷+x}{۱۰+x} \quad \begin{matrix}\rightarrow \text{امتیاز فعلی} \\ \rightarrow \text{کل امتیازها}\end{matrix} \qquad f(x)=\frac{x}{۰/۷+x} \qquad f(x)=x+۰/۷$$

ب) آیا تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد وحیده، یک تابع گویاست؟ بله

پ) توضیح دهید که پس از چند پرتاب آزاد موفق پیاپیِ دیگر، درصد موفقیت عملکرد وحیده ۸۰ درصد خواهد شد؟

$$f(x)=\frac{۸۰}{۱۰۰} \rightarrow \frac{۸۰}{۱۰۰}=\frac{۷+x}{۱۰+x} \rightarrow ۱۰۰=۲۰x \rightarrow x=۵$$

مهم‌ترین بخش آشنایی با توابع گویا، تعیین دامنهٔ توابع گویاست. با این همه در کتاب درسی تعیین دامنهٔ توابعی چون $\frac{۳x^۲+۷x+۳}{x^۳+۲x+۱}$ و $\frac{x-۲}{(x-۴)(x-۵)(x^۲-۳)}$ مدنظر نیست و مخرج کسر عبارت‌های گویا، ترجیحاً درجه یک و نهایتاً درجه ۲ در نظر گرفته می‌شود تا تعیین دامنه کاری ساده گردد.

در معرفی دامنهٔ توابع گویا به این مطلب اشاره شده است که چه نقاطی حتماً در دامنهٔ یک تابع گویا نیست، اینکه چه نقاطی در دامنهٔ توابع گویا هست، اختیاری است. به مثال زیر توجه کنید :

$$f(x)=\frac{۵}{x-۲} \qquad D:\mathbb{R}-\{۲\}$$

$$f(x)=\frac{۵}{x-۲} \qquad D:\mathbb{R}-\{۲,۳\}$$

کار در کلاس صفحه ۵۰

دامنهٔ هر یک از توابع گویای داده شده را به دست آورید.

$f(x)=\frac{x}{x+۵}$ $\quad D_f=\mathbb{R}-\{-۵\}$ $\quad g(x)=\frac{۳}{x-۴}$ $\quad D_g=\mathbb{R}-\{۴\}$

در این قسمت، به تساوی دو تابع پرداخته شده است. دانش‌آموزان به اشتباه دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=۲$ و $g(x)=\frac{۲x}{x}$ را یکی می‌پندارند. این مبحث کوچک در کتاب درسی، بسیار عمیق و مهم است و باید برای تفهیم آن به دانش‌آموزان وقت مناسبی اختصاص داد.

در صفحهٔ ۵۰ کتاب درسی پیش رو، دو تعریف از تساوی دو تابع ارائه شده است. تعریف اول داخل کادر آبی‌رنگ و دیگری پایین همین کادر می‌باشد.

کار در کلاس صفحه ۵۱

۱ آیا دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲}{x}$ و $g(x)=x$ با هم برابرند؟ چرا؟ با هم برابر نیستند، چون $D_f \neq D_g$

۲ نمودار مقابل مربوط به کدام‌یک از توابع زیر است؟ مسئله چند جواب دارد؟ مسئله ۲ جواب دارد : (پ) و (ت)

در مورد گزینه‌های سؤال ۲ حتماً سر کلاس بحث شود. چراکه قسمت (ب) و (ث) به هدف تمایز دامنه و برد و تشخیص آنها داده شده است.

در واقع دانش‌آموزان با تلفیق هر دو تعریف، توانایی پاسخ به این سؤال را باید داشته باشند.

الف) $D_g=\mathbb{R}$ $\quad g(x)=۲x$

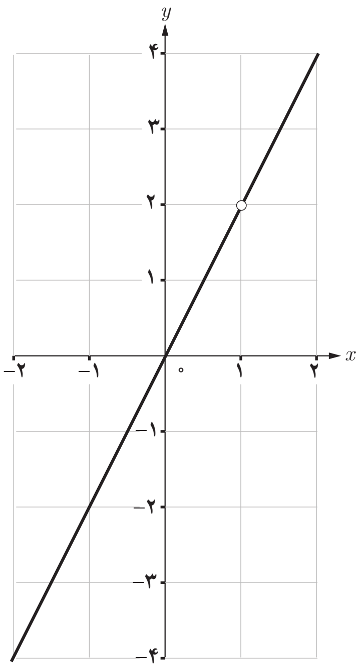
ب) $D_g=\mathbb{R}-\{۲\}$ $\quad g(x)=۲x$

پ) $D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$ $\quad g(x)=۲x$ ← گزینهٔ درست

ت) $D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$ $\quad g(x)=\frac{۲x^۲-۲x}{x-۱}$ ← گزینهٔ درست

ث) $D_g=\mathbb{R}-\{۲\}$ $\quad g(x)=\frac{۲x^۲-۴x}{x-۲}$

همهٔ ضابطه‌ها درست می‌باشند. دقت در دامنه و تطبیق آن با نمودار رسم شده در این قسمت کمک بسیار زیادی به فهم مطالب گفته شده خواهد کرد.



آشنایی با توابع رادیکالی با یک تابع رادیکالی کاربردی که تابع سونامی نام دارد آغاز می‌شود.

در ابتدای کار، هدف رسم کردن این تابع نیست. بلکه به بهانهٔ آشنایی با این تابع کاربردی، دانش‌آموزان با تابع رادیکالی آشنا می‌شوند و در ادامه نیز می‌توانند نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم کنند.

در اینجا، رادیکال‌ها با فرجهٔ سوم و بالاتر و همچنین رادیکال‌های مرکب مدنظر نیستند.

همچنین متذکر می‌شویم که علّت مطالعه توابع رادیکالی مانند $S=۳۵۶\sqrt{d}$ به دلیل نقش کاربردی آنهاست و تعریف دقیقی ارائه نخواهد شد.

کار در کلاس صفحه ۵۲

بر اساس مشاهدات دانشمندان، اگر S تندی جابه‌جایی یک سونامی برحسب کیلومتر بر ساعت باشد، می‌توان آن را از رابطهٔ $S=۳۵۶\sqrt{d}$ محاسبه کرد که در آن d میانگین عمق دریا بر حسب کیلومتر است.

الف) جدول زیر را کامل کنید. ($\sqrt{۳}\simeq ۱/۷$, $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$)

d	۱	۲	۳	۴
$S=۳۵۶\sqrt{d}$	۳۵۶	۴۹۸/۴	۶۰۵/۲	۷۱۲

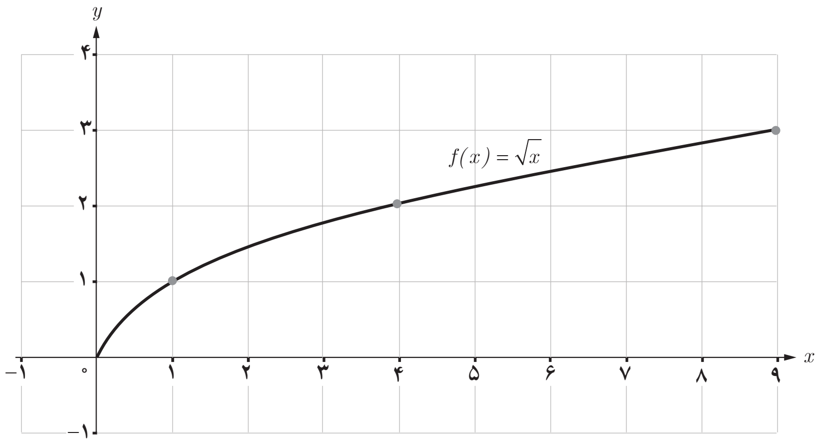
ب) عبارت زیر را کامل کنید.

چون هر عدد، تنها یک ریشهٔ دوم مثبت دارد، پس رابطهٔ سونامی یک تابع است .

پ) کدام‌یک از اعداد ۵− و ۵ عضو دامنهٔ تابع سونامی است؟ ۵

در حل این کار در کلاس، یادآوری از محاسبهٔ رادیکالی با فرجه ۲ و همچنین نمایش جدولی تابع، نیاز است و لذا از طریق استقرای تجربی و استدلال ریاضی باید پاسخ مناسب به سؤالات را بدهد و به این نتیجهٔ مهم که «دامنهٔ توابع رادیکالی، $\mathbb{R}$ نیست» برسد.

در ادامه روی نمودار داده شده بحث کنید.



برای راحتی در محاسبات، نقاطی به طول $x=۴$ و $x=۱$ و $x=۰$ داده شود و این سؤال را مطرح کنید که آیا این نمودار آشنا نیست؟ با تغییر چرخاندن صفحهٔ کتاب و دیدن دوبارهٔ این شکل، این مطلب به ذهن دانش‌آموز می‌رسد که : «این نمودار قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲$ است».

در فعالیت صفحهٔ ۵۳، هدف از طرح این سؤال، انتقال تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ است. بنابراین دانش‌آموزان با توجه به آنچه که در فصل ۵ ریاضی دهم یاد گرفته‌اند، باید بعد از یادآوری دبیر، به راحتی بتوانند نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=a+\sqrt{x+b}$ را به کمک انتقال رسم کنند.

در قسمت پایانی درس اول، دانش‌آموزان با توابع پله‌ای آشنا می‌شوند. تعریف دقیق یک تابع پله‌ای از بدنهٔ اصلی درس حذف شده است. به‌طور دقیق به تابعی که دامنه‌اش به‌صورت تعدادی بازهٔ مجزا که هر بازه به یک عدد نظیر می‌شود، توابع پله‌ای می‌گویند.

(تا کمتر از) و (بیشتر از) توجه داشته باشند.

فعالیت صفحه ۵۴

هزینهٔ پارکینگ خودرو

در یک پارکینگ، هزینهٔ پارک خودرو به این صورت محاسبه می‌شود :

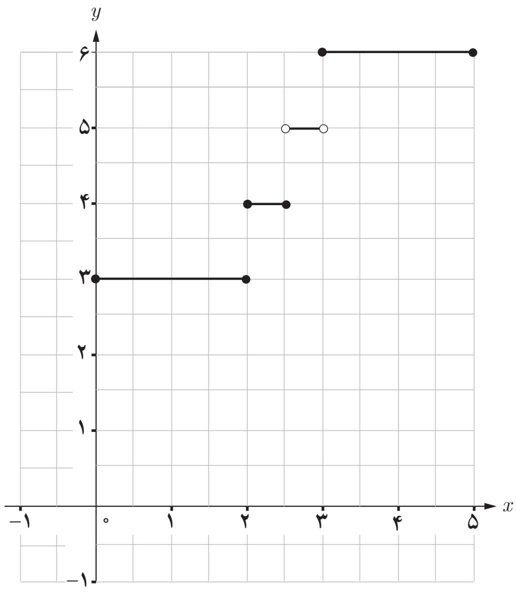
الف) ضابطهٔ تابع هزینهٔ پارکینگ خودرو چیست؟

هزینه (هزار تومان)	زمان	
	تا	از
۳	تا کمتر از ۲ ساعت	از هنگام ورود
۴	تا ۲/۵ ساعت	از ۲ ساعت
۵	تا کمتر از ۳ ساعت	از بیشتر از ۲/۵ ساعت
۶	تا ۵ ساعت	از ۳ ساعت

$$f(x)=\begin{cases} ۳ & ۰\le x<۲ \\ ۴ & ۲\le x\le ۲/۵ \\ ۵ & ۲/۵<x<۳ \\ ۶ & ۳\le x\le ۵ \end{cases}$$

در این فعالیت، ابتدا جدول مربوط به زمان و هزینهٔ پارکینگ و سپس ضابطهٔ این جدول و در پایان به رسم آن پرداخته شود و به دانش‌آموزان متذکر شویم که در جدول داده شده به کلمات (از) و (تا) و (تا کمتر از) و (بیشتر از) توجه داشته باشند.

ب) نمودار این تابع را رسم کنید.



در ادامهٔ درس، دانش‌آموزان عملگر جزء صحیح $[x]$ را خواهند شناخت و سپس با تابعی با ضابطه $f(x)=[x]$ آشنا می‌شوند. برای تدریس مفهومی جزء صحیح وقت و دقت لازم را در نظر بگیرید.

در این قسمت نیاز نیست دربارهٔ مطالعه توابع حاصل از ترکیب $[x]$ و یک تابع دیگر همچون $[x^۲]$ بپردازید.

توصیه‌های آموزشی

حدود و ثغور مطالب

۱ در رسم توابع گویا، رسم تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ مد نظر است.

۲ در بررسی دامنهٔ توابع گویای $\frac{P(x)}{Q(x)}$، $Q(x)$ چندجمله‌ای حداکثر از درجه ۲ مورد نظر است و از ارائه دادن مباحث پیچیده‌تر صرف‌نظر شود.

۳ رسم توابع رادیکالی با ضابطهٔ $f(x)=a+\sqrt{x+b}$ مد نظر است.

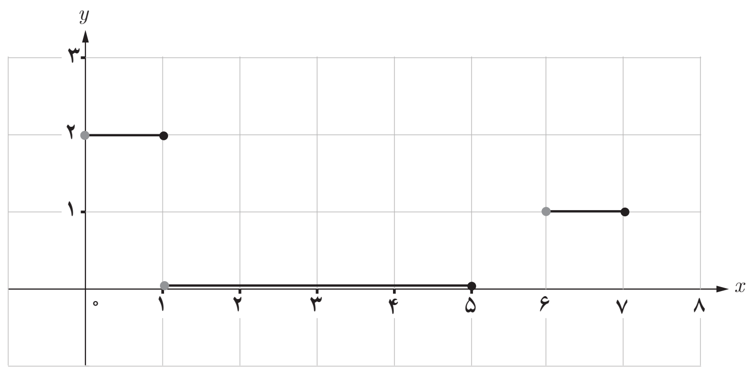
۴ رسم توابع جزء صحیح به‌صورت $f(x)=a+[x]$ مد نظر است.

حل برخی از تمرین‌های درس اول فصل سوم (تابع صفحهٔ ۵۶)

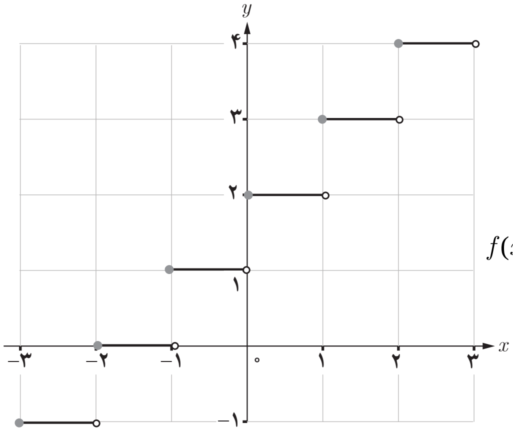
۶ـ حل :

[−۲۳۰۹/۵۴]=−۲۳۱۰   [−۱۰۳/۰۰۳]=−۱۰۴   [۳۰۰/۴۰۰۲]=۳۰۰

۷ـ حل : در رسم نمودارهای پله‌ای، دانش‌آموزان باید به ثابت بودن ضابطه‌ها و همچنین باز یا بسته بودن بازه‌ها در قسمت دامنه، توجه کنند.



۸ــ حل : برای رسم توابع پله‌ای، با توجه به بازهٔ مربوط به دامنهٔ داده شده، تفکیک مناسبی از بازه تأکید شود.



$$f(x)=[x]+۲=\begin{cases} -۱ & -۳\leq x<-۲ \\ ۰ & -۲\leq x<-۱ \\ ۱ & -۱\leq x<۰ \\ ۲ & ۰\leq x<۱ \\ ۳ & ۱\leq x<۲ \\ ۴ & ۲\leq x<۳ \end{cases}$$

و اگر انتهای بازهٔ داده شده در قسمت دامنه، بازهٔ بسته بود، به مقدار تابع در نقطهٔ انتهایی بازه توجه شود.

درس دوم

وارون یک تابع و تابع یک به یک

اهداف درس:

۱ محاسبهٔ وارون یک تابع در نمایش زوج مرتب
۲ رسم وارون یک تابع از روی نمودار
۳ آشنایی با تعریف و مفهوم تابع یک‌به‌یک
۴ به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع خطی غیرثابت
۵ محدود کردن دامنهٔ یک تابع غیر یک‌به‌یک و تبدیل آن به تابع یک‌به‌یک

پیش‌نیازها

۱ شناخت مؤلفه‌های اول و دوم در زوج مرتب
۲ شناخت نیمساز ربع اول و سوم ($y=x$)
۳ درک مفهوم دامنه و برد از روی نمودار

روش تدریس

کار در کلاس صفحه ۵۷

در ابتدای این درس علاوه بر یادآوری نکاتی که در قسمت پیش‌نیازها گفته شد، برای حل کار در کلاس، در مورد تبدیل یکای اندازه‌گیری مثلاً متر به سانتی‌متر و برعکس و همچنین یکای اندازه‌گیری مثلاً مایل به کیلومتر و برعکس، در کلاس صحبت شود. با حل این کار در کلاس دانش‌آموزان به کاربردی بودن و

ضرورت محاسبهٔ وارون یک تابع پی می‌برند.

الف) هر مایل تقریباً ۱/۶ کیلومتر است. تعیین کنید که هریک از جملات سمت راست مربوط به کدام‌یک از رابطه‌های سمت چپ است.

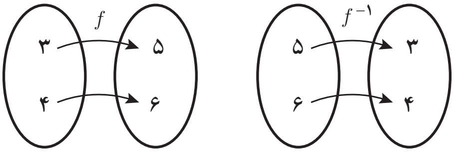
این رابطه برای تبدیل تقریبی «مایل» به «کیلومتر» است. $f(x)=\frac{۸}{۵}x$

این رابطه برای تبدیل تقریبی «کیلومتر» به «مایل» است. $g(x)=\frac{۵}{۸}x$

ب) تندی ۳۰ مایل بر ساعت تقریباً معادل تندی چند کیلومتر بر ساعت است؟

۴۸ کیلومتر بر ساعت $f(۳۰)=\frac{۸}{۵}\times ۳۰=۴۸$

در ادامه به تعریف رسمی وارون تابع f براساس نمایش زوج مرتبی اشاره شده است. لازم است مثال‌های دیگری نیز برای درک بهتر مطالب زده شود. سپس مثالی مانند مثال زیر بیاورید و در مورد تعداد اعضای دامنه و برد در f و $f^{-۱}$ صحبت کنید.



کار در کلاس صفحه ۵۷

وارون تابع‌های داده شده را حساب کنید.

$s=\{(۴,۱),(۱,۴),(۳,۳),(۲,۵)\}$ $\quad$ $s^{-۱}=\{(۱,۴),(۴,۱),(۳,۳),(۵,۲)\}$

$t=\{(۵,۱),(۱,۴),(۴,۳),(۲,۳)\}$ $\quad$ $t^{-۱}=\{(۱,۵),(۴,۱),(۳,۴),(۳,۲)\}$

$u=\{(۲,۳),(۵,۲),(۴,۱),(۳,۴)\}$ $\quad$ $u^{-۱}=\{(۳,۲),(۲,۵),(۱,۴),(۴,۳)\}$

فعالیت صفحه ۵۸

برای درک این مطلب که چگونه با در دست داشتن نمودار f، می‌توان $f^{-۱}$ را رسم کرد، حتماً زمان کافی را در کلاس اختصاص دهید و به دانش‌آموزان متذکر شوید که به موقعیت خط $y=x$ (نیمساز

ربع اول و سوم) توجه کنند.

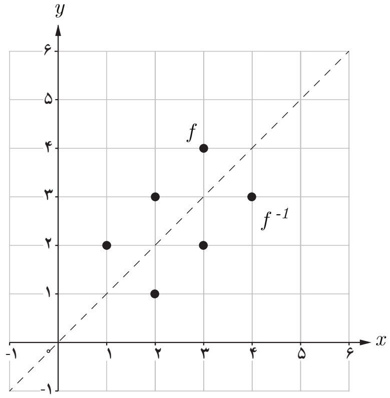
نتیجه‌ای که در قسمت (ب) خواهیم گرفت بسیار مهم است.

۱ در دستگاه مختصات داده شده نمودار تابع f رسم شده است.

الف) تابع f را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

ب) تابع f^{-1} را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

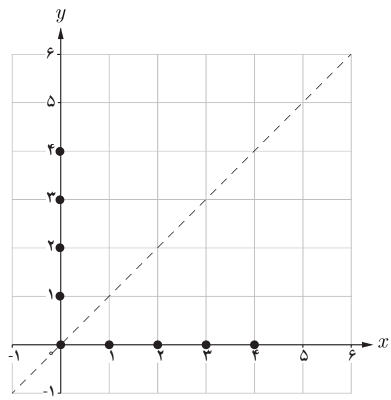
پ) در همین دستگاه مختصات، نمودار f^{-1} را رسم کنید.



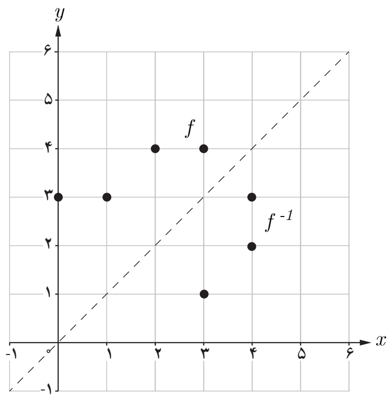
ت) نمودار f و f^{-1} چه ارتباطی با هم دارند؟

«نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند».

۲ الف) در هر مورد بیان کنید چرا نمودار داده شده معرف یک تابع است و سپس وارون آن را رسم کنید.



تابع است، چون هر خط موازی با محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

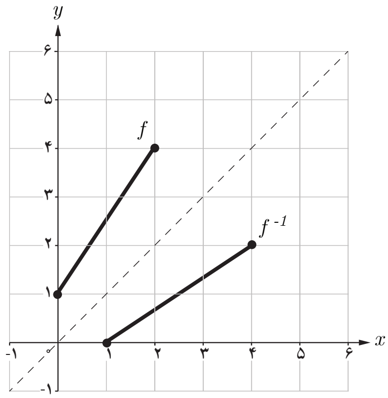


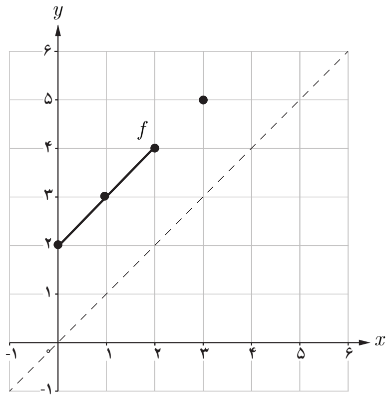
تابع است، چون هر خط موازی با محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

ب) عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینهٔ نمودار آن تابع را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم.

۳ نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.

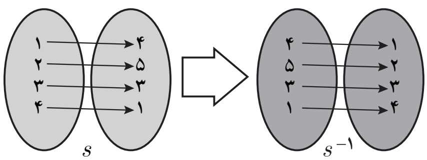


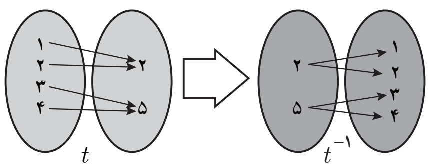


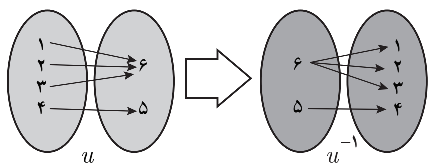
دانش‌آموزان در سؤال ۲، f و f^{-1} را در حالت گسسته و در سؤال ۳ به حالت پیوسته می‌بینند و این سؤال شاید در ذهنشان بیاید که آیا f^{-1} در هر دو حالت تابع است یا خیر؟ مثال‌های ترکیبی از حالت گسسته و پیوسته نیز در این قسمت برای فهم بیشتر دانش‌آموزان بیاورید.

فعالیت صفحه ۵۹

۱ الف) به نمونهٔ داده شده دقت کنید. با کمک نمودار پیکانی، وارون توابع داده شده را به‌دست آورید.







ب) در جدول مقابل گزینه‌های درست را انتخاب کنید.

s^{-1} یک تابع است. بله☑ خیر☐

t^{-1} یک تابع است. بله☐ خیر☑

u^{-1} یک تابع است. بله☐ خیر☑

پ) عبارت زیر را کامل کنید.

وارون تابع f، خود یک تابع است؛ هرگاه در زوج‌های مرتب متفاوت تابع f مؤلفه‌های دوم تکراری وجود نداشته باشد.

> به تابعی که در زوج‌های مرتب متفاوت خود، مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد تابع **یک‌به‌یک** می‌گوییم.

تذکر : وارون هر تابع **یک‌به‌یک**، خود یک تابع است.

ت) تابعِ $f=\{(1,2),(-2,4),(-1,-2),(-1,2)\}$ را در نظر بگیرید. بدون محاسبهٔ f^{-1}، تعیین کنید که این تابع یک‌به‌یک است یا خیر؟

خیر یک‌به‌یک نیست.

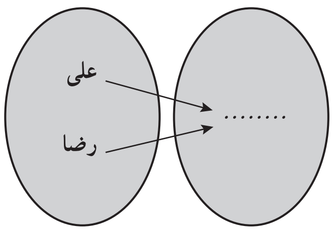
در قسمت الف سؤال ۱ این فعالیت، هدف رسیدن به تعریف تابع یک‌به‌یک است و با رسیدن به این درک، قسمت (ب) گزینه درست را انتخاب می‌کنند و در نهایت به نتیجه مورد نظر در قسمت (پ) خواهند رسید.

ارتباط یک‌به‌یک بودن و وارون بودن در قالب (تذکر) داده شده است.

اهمیت یک‌به‌یک بودن توابع و تناظر بین اعضا در مثال گروه خونی فعالیت سؤال ۲، آورده شده است و مصداق‌هایی از توابع یک‌به‌یک می‌باشد.

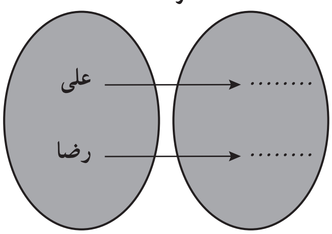
۲ نمودارهای پیکانی زیر بیانگر تابع اثر انگشت و تابع گروه خونی علی و رضا است.

گروه خونی



g

اثر انگشت



f

الف) مشخص کنید که کدام نمودار پیکانی مربوط به اثر انگشت و کدام نمودار پیکانی مربوط به گروه خونی است.

ب) آیا f و g هر دو تابع‌اند؟ بله

پ) در مورد تابع بودن f^{-1} و g^{-1} چه می‌توان گفت؟ f^{-1} تابع است ولی g^{-1} تابع نیست.

ت) کدام‌یک از دو تابع f و g یک‌به‌یک هستند؟ f یک‌به‌یک است.

ث) عبارت‌های زیر را کامل کنید.

با دانستن گروه خونی یک انسان، هویت او به‌طور یکتا تعیین نمی‌شود.

با دانستن اثر انگشت یک انسان، هویت او به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

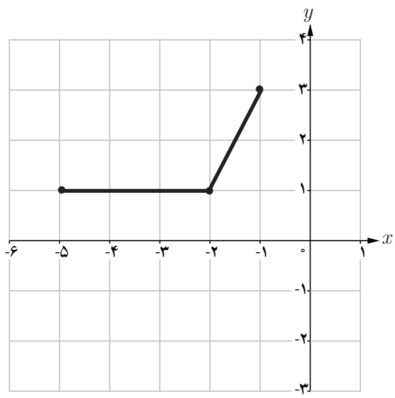
همانطور که می‌دانید، اثر انگشت منحصر به فرد است و حال آنکه چندین نفر هم می‌توانند گروه خونی یکسان داشته باشند.

فعالیت صفحه ۶۰

۱ در شکل داده شده، با وصل کردن نقاط مشخص شده به هم، نموداری رسم کنید که تابع باشد.

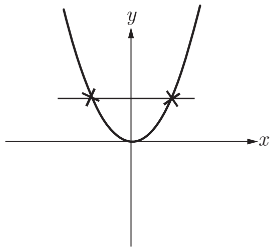
الف) آیا تابعی که رسم کرده‌اید یک‌به‌یک است؟

ب) با کامل کردن عبارت زیر مشخص کنید که چگونه با در دست داشتن نمودار یک تابع، می‌توان تشخیص داد که آیا آن تابع یک‌به‌یک است یا خیر؟

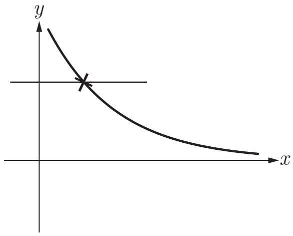


اگر هر خطِ موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه آن تابع یک‌به‌یک است.

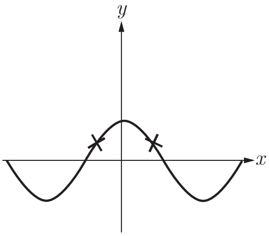
۲ کدام‌یک از توابع زیر یک‌به‌یک است؟



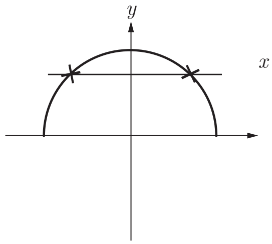
یک‌به‌یک نیست.



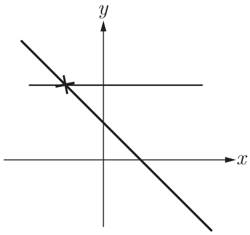
یک‌به‌یک است.



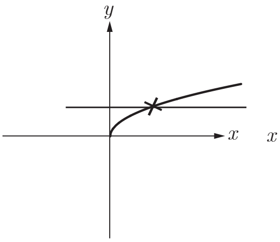
یک‌به‌یک نیست.



یک‌به‌یک نیست.

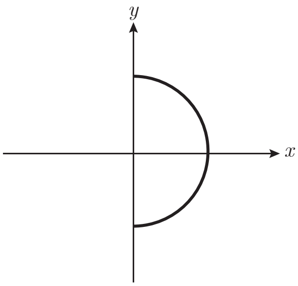


یک‌به‌یک است.



یک‌به‌یک است.

و در ادامه می‌توان با دادن تمرین‌هایی توجه دانش‌آموزان را به «تابع بودن» نیز جلب کرد. به‌طور مثال: آیا نمودار روبه‌رو، یک تابع یک‌به‌یک است؟



پاسخ: خیر

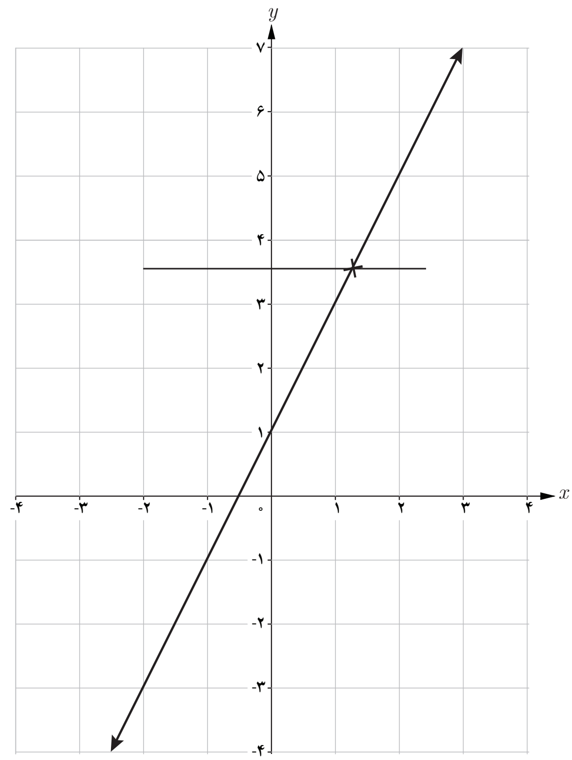
در کتاب ریاضی یازدهم رشتهٔ تجربی مبحث به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع، محدود به توابع خطی غیرثابت است و دانش‌آموزان رشتهٔ تجربی کافی است با به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع خطی غیرثابت آشنا شوند بنابراین نیازی به حساب کردن وارون توابعی با ضابطه‌ای مانند $f(x)=\frac{۱}{x}$ نیز نمی‌باشد. نماد R_f را به دانش‌آموزان معرفی کنید و درک دیاگرام صفحهٔ ۶۱ مورد انتظار است.

فعالیت صفحه ۶۱

تابع با ضابطهٔ $f(x)=۲x+۱$ را در نظر می‌گیریم.

الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک‌به‌یک است.

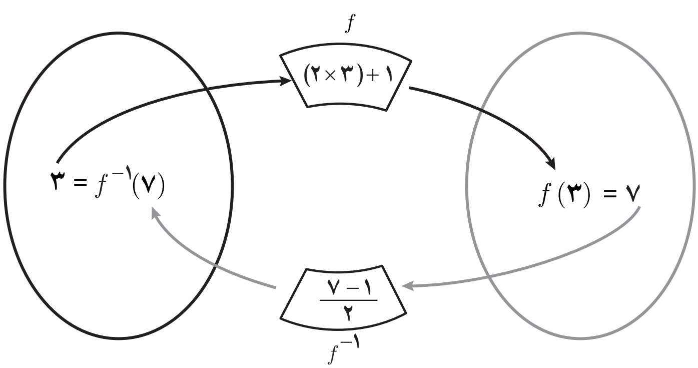
هر خطی موازی محور xها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند بنابراین f یک‌به‌یک است.



ب) نمودار زیر را توضیح دهید :

$(۷,۳) \in f^{-۱}$ و $(۳,۷) \in f$

به عبارت دیگر $f(۳) = ۷$ و $f^{-۱}(۷) = ۳$

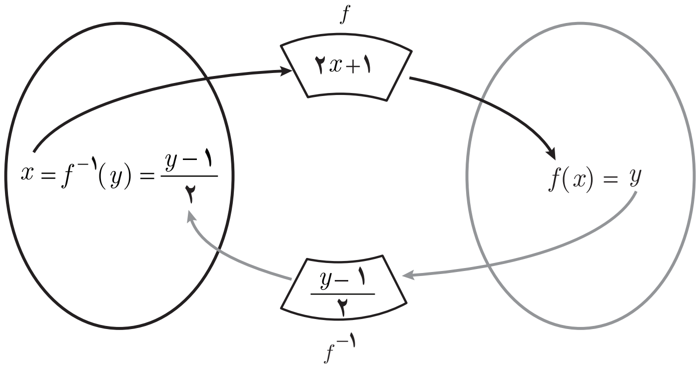


عدد ۳ از D_f، توسط تابع f، به عدد ۷ $=$ ۱$+$۳$\times$۲ $=$ f(۳) از R_f نظیر می‌شود و متناظر با این عمل، عدد ۷ از R_f، توسط تابع $f^{-۱}$ به عدد ۳ $= \frac{۷-۱}{۲} =$ $f^{-۱}$(۷) از D_f نظیر می‌شود. به‌طور معادل داریم :

$$(۳,۷) \in f \Leftrightarrow (۷,۳) \in f^{-۱}$$

$$f(۳) = ۷ \Leftrightarrow f^{-۱}(۷) = ۳$$

پ) در حالت کلی برای هر عضو دامنهٔ تابع با ضابطهٔ ۱$+$$x$۲ $=$ $f(x)$ ، داریم :



با توجه به دیاگرام رسم شده، برای هر عضو x از D_f، با تأثیر تابع f روی x، عدد $y$$=۱+$$x۲=$$f(x)$ از R_f، به‌دست می‌آید و متناظر با این عمل، عضو $f(x)=y$ از R_f، توسط تابع $f^{-۱}$ به عدد $x = \frac{y-۱}{۲} = f^{-۱}(y)$ از D_f، برده می‌شود. با درک دیاگرام و آنچه در قسمت بعد آمده است، نتیجهٔ کلی در کادر آبی آورده شده است.

ت) بنابراین می‌توان نوشت :

$$\begin{cases} f(x) = ۲x+۱ & (x \in D_f) \\ f^{-۱}(y) = \dfrac{y-۱}{۲} & (y \in R_f) \end{cases}$$

آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه $f^{-۱}$ همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای $f^{-۱}$ به‌صورت زیر است :

$$f^{-۱}(x) = \frac{x-۱}{۲}$$

به‌طور کلی :

برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند f، در معـادله $y = f(x)$، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم. سپس با جابه‌جا کردن y و x، ضابطهٔ تابع $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

کار در کلاس صفحه ۶۲

۱ هر تابع خطی غیر ثابت یک‌به‌یک است. (چرا؟) وارون هر یک از توابع خطی زیر را به‌دست آورید.
زیرا هر مقدار y فقط با یک x در تناظر است و هر خط موازی محور طول‌ها، نمودار را فقط در یک نقطه قطع می‌کند.

الف) $f(x)=x+5 \longrightarrow y=x+5$

$\longrightarrow x=y-5$

$\longrightarrow f^{-1}(y)=y-5$

$\longrightarrow f^{-1}(x)=x-5$

ب) $g(x)=4x \longrightarrow y=4x$

$\longrightarrow x=\frac{y}{4}$

$\longrightarrow g^{-1}(y)=\frac{y}{4}$

$\longrightarrow g^{-1}(x)=\frac{x}{4}$

پ) $u(x)=2x+3 \longrightarrow y=2x+3$

$\longrightarrow -2x=-y+3$

$\longrightarrow x=\frac{y}{2}-\frac{3}{2}$

$\longrightarrow u^{-1}(y)=\frac{y}{2}-\frac{3}{2}$

$\longrightarrow u^{-1}(x)=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$

ت) $v(x)=\frac{2}{3}x-4 \longrightarrow y=\frac{2}{3}x-4$

$\longrightarrow -\frac{2}{3}x=-y-4$

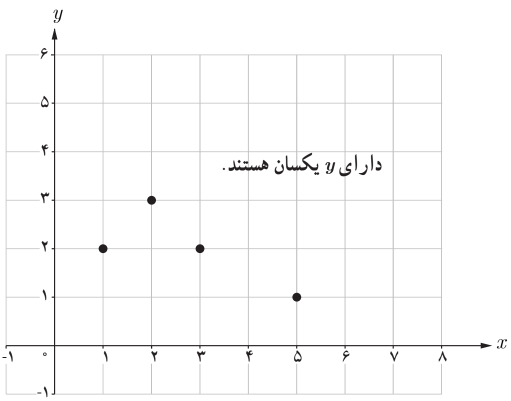
$\longrightarrow x=\frac{3}{2}y+6$

$\longrightarrow v^{-1}(y)=\frac{3}{2}y+6$

$\longrightarrow v^{-1}(x)=\frac{3}{2}x+6$

۲ الف) چرا نمودار داده شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک نیست؟ زیرا در نقاطی به طول $x=3$ و $x=1$، مقدار y یکسان $(y=2)$ است.

ب) با حذف تنها یک نقطه، نمودار مقابل را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنید. مسئله چند جواب دارد؟ کافی‌است یکی از نقاط $x=3$ یا $x=1$ را حذف کنیم. مسئله ۲ جواب دارد.

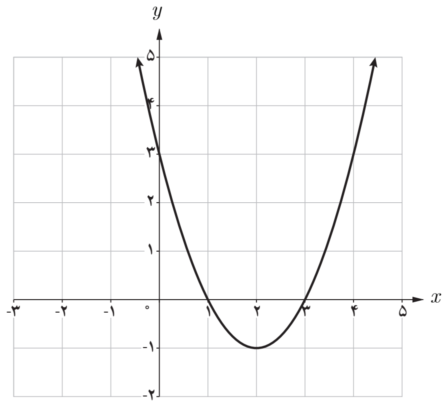


با حل این کار در کلاس، دانش‌آموزان یاد خواهند گرفت که چطور با داشتن ضابطهٔ یک تابع خطی غیرثابت، در مورد ضابطهٔ تابع وارون صحبت کنند. به روند ارائه شده توجه کنید :

$$f(x)=ax \longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{a}$$

$$f(x)=x+a \longrightarrow f^{-1}(x)=x-a$$

کار در کلاس صفحه ۶۳



الف) به نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{2}-4x+3$ در شکل مقابل، دقت کنید.

با محدود کردن دامنهٔ این تابع روی کدام بازه‌های زیر می‌توان یک تابع یک‌به‌یک ساخت؟

☐ $[1,4)$

☑ $[0,2]$

ب) آیا هر تابع درجهٔ ۲، تابعی یک‌به‌یک است؟ چرا؟ در حالت کلی، خیر، زیرا نقاطی یافت می‌شود که دارای xهای متفاوت و yهای یکسان است و هر خطی که موازی با محور طول‌ها رسم شود، نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند و فقط در صورت محدود کردن دامنهٔ آن است که می‌توانیم یک تابع درجه ۲ را تبدیل به یک تابع یک‌به‌یک کنیم.

در قسمت پایانی درس ۲، نشان داده می‌شود که با محدود کردن دامنهٔ توابع، چگونه می‌توان نمودار تابع یک‌به‌یک را ساخت و نیازی به مسائل پیچیده نیست و مثال‌هایی که در کتاب گفته شده و همچنین مسئله‌هایی در همین حد، برای تفهیم مسئله کافی‌است.

توصیه‌های آموزشی

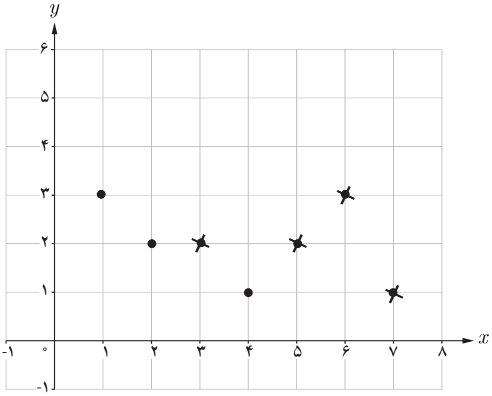
حدود و ثغور مطالب

۱ تنها به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع خطی غیرثابت مدنظر است.

۲ محدود کردن دامنه یک تابع غیریک‌به‌یک و تبدیل آن به تابع یک‌به‌یک در حد مسائل کتاب باشد و نیازی به طرح مسئله‌های پیچیده نیست.

۳ برای محاسبه وارون یک تابع در نمایش زوج مرتب و نمودار، به چالش دانش‌آموزان بابت عدم شناخت x و y توجه داشته باشیم.

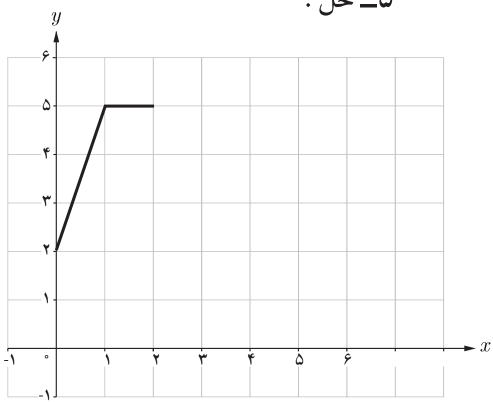
حل برخی از تمرین‌های درس دوم فصل سوم (تابع صفحهٔ ۶۳)



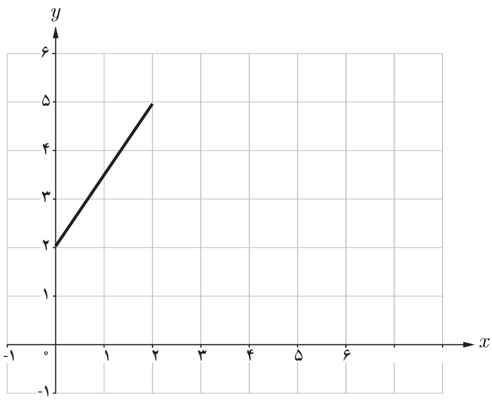
۴ــ حل : اگر هر خط موازی محور yها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آنگاه آن تابع، یک‌به‌یک است. بنابراین روی هر خط $y=k$ حداکثر یک نقطه از نقاط نمودار باید قرار داشته باشد. پس حداقل ۴ نقطه باید حذف شود و حداکثر ۳ نقطه باقی می‌ماند.

رسم نمودار روبه‌رو، برای درک بهتر از این مسئله پیشنهاد می‌شود.

۵ــ حل :



(ب)

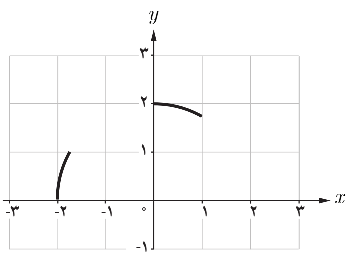


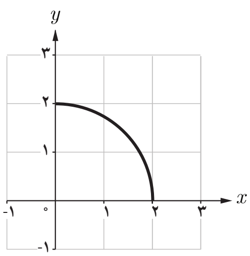
(الف)

بی‌شمار تابع خطی یا غیرخطی می‌توان در هر دو قسمت (الف) و (ب) رسم کرد.

۲ــ حل : برای دانش‌آموزان چند نمونه یک‌به‌یک از بخش‌های نمودار داده شده را رسم کنید.

مثال :





درس سوم

اعمال جبری روی توابع

اهداف درس:

۱ آشنایی با چهار عمل اصلی روی نمایش جبری توابع (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم)

۲ رسم نمودار تابع با ضابطه‌های $f+g$ و $f-g$ با استفاده از نمودار f و g

۳ رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ از روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$

پیش‌نیازها

۱ شناخت فرمول معادلهٔ خط از روی دو نقطه از نمودار

۲ انتقال عمودی و افقی نمودار توابعی با ضابطهٔ $f(x)=|x|$ و $f(x)=x^۲$

روش تدریس

در ابتدای این درس، تعریف اعمال جبری توابع با تأکید روی ضابطه و دامنه آمده است. برای درک بهتر، فعالیت صفحهٔ ۶۵ آورده شده است.

از مثال‌هایی مانند مثال زیر نیز استفاده کنید :

مثال : اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۰),(۳,۵)\}$ و $g=\{(-۲,۱),(۱,۰),(۲,۳)\}$ ، آنگاه مطلوبست :

الف) $D_{f+g}=$ ب) $D_{f\times g}=$ پ) $D_{\frac{f}{g}}=$

ت) $(f+g)(x)=$ ث) $(f-g)(x)=$ ج) $(\frac{f}{g})(x)=$

به دانش‌آموزان حتماً متذکر شوید که در حل این‌گونه مسائل (مانند تمرین ۲ قسمت (ت) در صفحهٔ ۶۹) ابتدا دامنه را تعیین کنند.

فعالیت صفحه ۶۵

اگر $f(x)=۲x-۱$ و $g(x)=x-۲$، آن‌گاه مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و حاصل‌تقسیم آنها ($\frac{f}{g}$) را

به‌دست آورید و دامنهٔ هر یک را مشخص کنید.

حل :

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)= (۲x-۱) + (x-۲) = ۳x-۳$$
$$(f-g)(x) = f(x)-g(x)= (۲x-۱) - (x-۲) = x+۱$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (۲x-۱).(x-۲) = ۲x^۲-۵x+۲$$
$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}\cap\mathbb{R} = \mathbb{R}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{۲x-۱}{x-۲}$$
$$D_{\frac{f}{g}} = \left(D_f \cap D_g\right) - \{x \mid g(x)=۰\} = \left(\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\right) - \{x \mid x-۲=۰\} = \mathbb{R}-\{۲\}$$

توصیه می‌شود حتماً برای تفهیم آنچه گفته شد خواندنی صفحهٔ ۶۶ سر کلاس خوانده شود. در این خواندنی طریقهٔ رسم نمودار $f+g$، از روی نمودارهای f و g توضیح داده شده است.

برای درک بیشتر می‌توانید از دانش‌آموزان بخواهید تعبیر $f-g$ و $f.g$ یا $\frac{f}{g}$ را با یک مثال کاربردی بیان کنند.

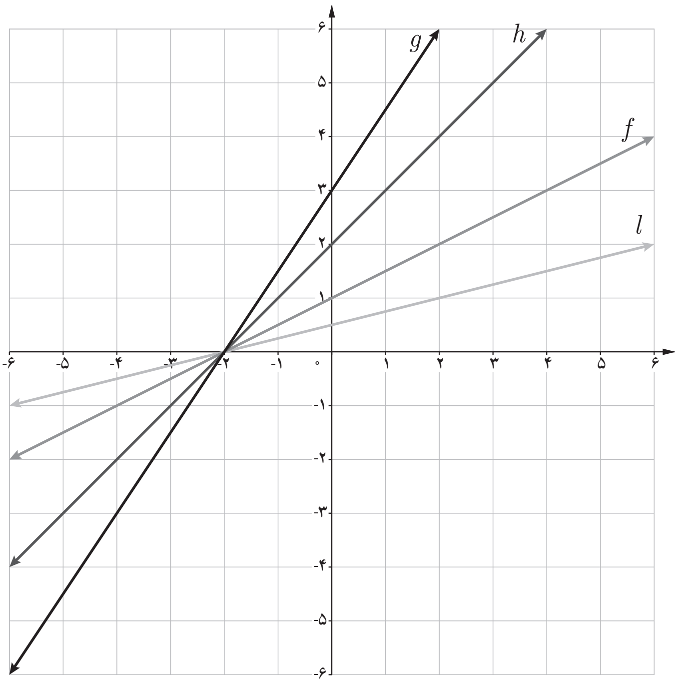
فعالیت صفحه ۶۸

با توجه به شکل دیده می‌شود که $l(x) = \frac{۱}{۲}f(x)$ جاهای خالی را پر کنید.

$g(x) = \underline{۳}\, f(x)$

$h(x) = \underline{۲}\, f(x)$

برای درک بهتر و رسیدن به جواب مناسب حتماً وقت لازم را در نظر بگیرید. کافی‌ست در دو نقطه مقایسه را انجام دهید؛ مثلاً در نقطه‌ای به‌طول $x=۲$، مقدار y در تابع f برابر ۲، در تابع l برابر

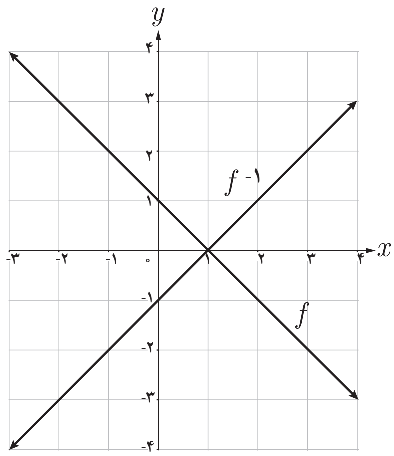


۱، در تابع h برابر ۴، در تابع g برابر ۶ می‌باشد که دانش‌آموزان با مقایسه به جواب درست خواهند رسید.
با توجه به نمودار صفحه قبل ملاحظه می‌شود که :

اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را k برابر کنیم.

کار در کلاس صفحه ۶۸

۱ با توجه به نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ در شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-f(x)$ را رسم کنید.



۲ عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-f(x)$ کافی است قرینهٔ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را نسبت به محور طول‌ها (x) رسم کنیم.

در فعالیت و کار در کلاس صفحهٔ ۶۸، به بیان مهارت رسم تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ از روی تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ پرداخته شده است، که در آن داریم : الف) $k>0$ ب) $k=-1$ پ) $k<0$

الف) اگر $k>0$ باشد، کافی‌است مقادیر روی نمودار (عرض‌ها) k برابر شوند.

ب) اگر $k=-1$ باشد، کافی‌است نمودار نسبت به محور xها قرینه شوند.

پ) اگر $k<۰$ باشد مراحل رسم را می‌توان به دو صورت زیر انجام داد :

۱ـ $y=f(x)$		۱ـ $y=f(x)$
۲ـ $y=kf(x)$	یا	۲ـ $y=-f(x)$
۳ـ $y=-kf(x)$		۳ـ $y=k\times(-f(x))$

سؤال‌های ۳ و ۲ از کار در کلاس صفحهٔ ۶۸، گویای نکات فوق می‌باشند.

تأکید مهم درس سوم روی اعمال جبری می‌باشد، پس از تدریس این درس دانش‌آموزان باید بتوانند توابعی همچون $y=-\frac{۱}{x}$ و یا $y=-\sqrt{x}$ را هم رسم کنند. توجه کنید که به هیچ‌وجه بحث دربارهٔ ترکیب توابع مدّنظر نیست و ترکیب دو تابع یک عمل جبری روی توابع تلقی نمی‌شود.

توصیه‌های آموزشی

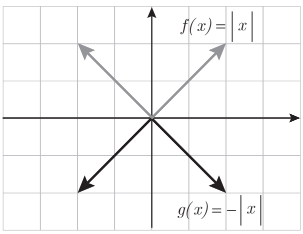
حدود و ثغور تدریس

۱ نیازی به تدریس رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(-x)$ از روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ نمی‌باشد.

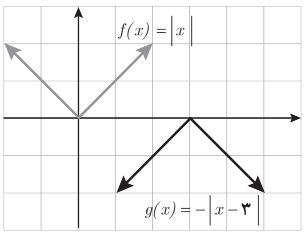
۲ نیازی به بحث دربارهٔ ترکیب دو تابع نیست.

حل برخی از تمرین‌های درس سوم فصل سوم (تابع صفحهٔ ۶۹)

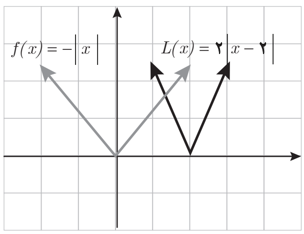
۱ـ



الف) نقاط مربوط به نمودار تابع f را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



ب) نمودار رسم شده در قسمت (الف) را به اندازهٔ ۳ واحد روی محور طول‌ها به سمت راست حرکت می‌دهیم.



پ) کافی‌است نقاط مربوط به نمودار تابع f را ۲ واحد به سمت راست انتقال داده و سپس عرض هر نقطه از این نمودار را دو برابر کنیم.

۲ـ

الف) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=|x|+\frac{۱}{x}=\begin{cases} x+\frac{۱}{x} & x>۰ \\ -x+\frac{۱}{x} & x<۰ \end{cases}$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=|x|-\frac{۱}{x}=\begin{cases} x-\frac{۱}{x} & x>۰ \\ -x-\frac{۱}{x} & x<۰ \end{cases}$$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=|x|.\frac{۱}{x}=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{|x|}{\frac{۱}{x}}=\begin{cases} x^۲ & x>۰ \\ -x^۲ & x<۰ \end{cases}$$

$D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f.g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}-\{۰\}=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=\underbrace{D_f\cap D_g}_{\mathbb{R}-\{۰\}}-\{x\mid g(x)=۰\}=\mathbb{R}-\{۰\}-\underbrace{\{x\mid\frac{۱}{x}=۰\}}_{\varnothing}=\mathbb{R}-\{۰\}$$

ت) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x-۲}{x+۵}+x^۲+۳x-۱۰$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{x-۲}{x+۵}-x^۲-۳x-۱۰$$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=\frac{x-۲}{x+۵}\ .\ (x^۲+۳x-۱۰)=(x-۲)^۲$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{x-۲}{x+۵}}{x^۲+۳x-۱۰}=\frac{x-۲}{(x+۵)(x^۲+۳x-۱۰)}=\frac{۱}{(x+۵)^۲}$$

$D_f=\mathbb{R}-\{-۵\}$ و $D_g=\mathbb{R}$

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f.g}=D_f\cap D_g=(\mathbb{R}-\{-۵\})\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}-\{-۵\}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}=(\mathbb{R}-\{-۵\})-\underbrace{\{x\mid x^۲+۳x+۱۰=۰\}}_{-۵,۲}=\mathbb{R}-\{-۵,۲\}$$

به دانش‌آموزان متذکر می‌شویم که در پاسخ به این سؤالات، می‌توانند ابتدا دامنه و سپس ضابطه‌ها را

به‌دست آورند. در قسمت (ث) بهتر است ابتدا دامنه تعیین شود.

ث) $f=\{(۲,۵),(۳,۴),(\circ,-۲)\} \longrightarrow D_f=\{\circ,۲,۳\}$

$g=\{(-۱,۲),(\circ,۳),(۲,۴),(۳,\circ)\} \longrightarrow D_g=\{-۱,\circ,۲,۳\}$

$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f.g}=D_f\bigcap D_g=\{\circ,۲,۳\}$

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\bigcap D_g-\{\underbrace{x \mid g(x)=\circ}_{۳}\}=\{\circ,۲,۳\}-\{۳\}=\{\circ,۲\}$

$$\begin{cases}(f+g)(\circ)=f(\circ)+g(\circ)=-۲+۳=۱\to(\circ,۱)\in f+g\\(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=۵+۴=۹\to(۲,۹)\in f+g\\(f+g)(۳)=f(۳)+g(۳)=۴+\circ=۴\to(۳,۴)\in f+g\end{cases}$$

$f+g=\{(\circ,۱),(۲,۹),(۳,۴)\}$

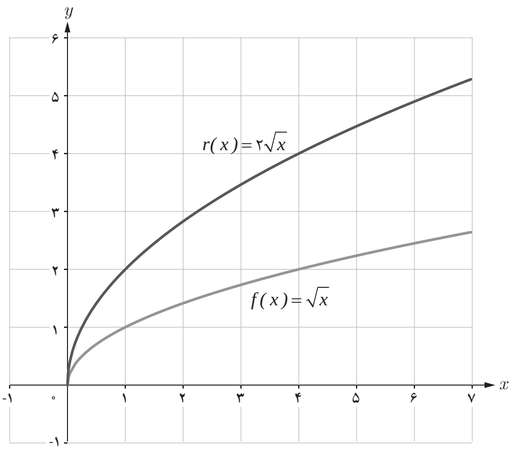
به‌طور مشابه $f-g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ نیز به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند :

$f-g=\{(\circ,-۵),(۲,۱),(۳,۴)\}$ $\qquad$ $f.g=\{(\circ,-۶),(۲,۲\circ),(۳,۲\circ)\}$

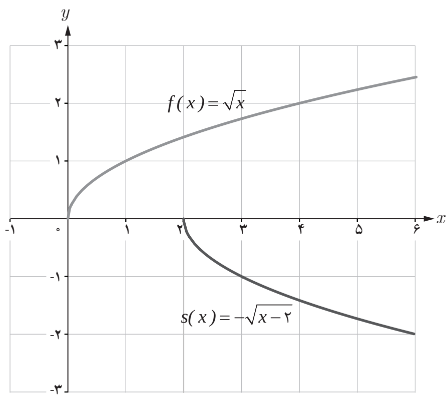
$\frac{f}{g}=\{(\circ,-\frac{۲}{۳}),(۲,۵)\}$

۳ــ

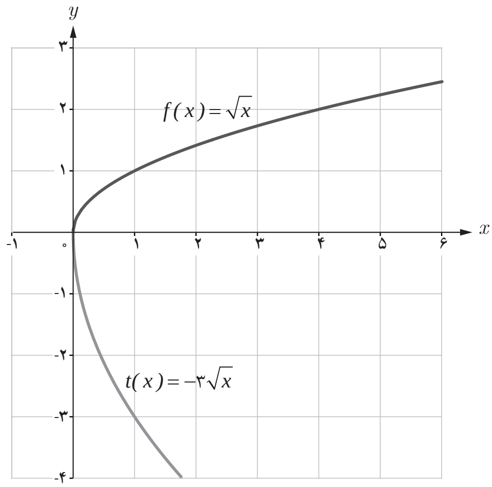
در این سؤال پیشنهاد می‌شود که برای فهم بهتر دانش‌آموزان، مراحل رسم به‌طور کامل توضیح داده شود.



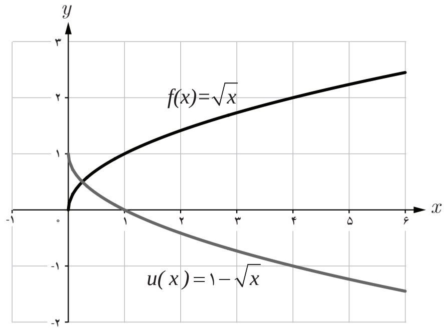
(الف)



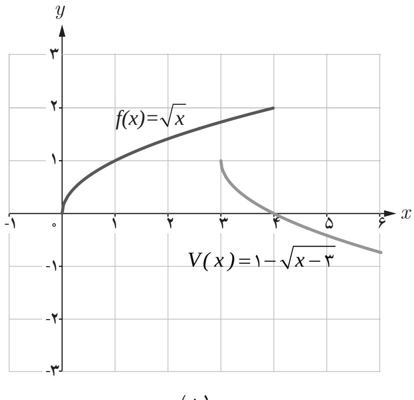
(ب)



(پ)



(ت)



(ث)

و در جمع‌بندی مطالب نکات زیر را ارائه داد :

الف) $r(x)=2f(x)$ ⟵ کافی‌است عرض هر نقطه از نمودار f، دو برابر شود.

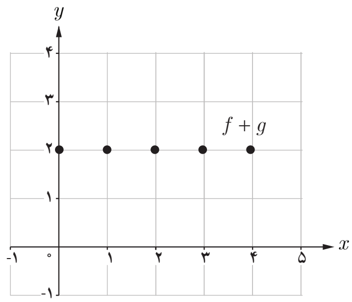
ب) $s(x)=-f(x-2)$ ⟵ ابتدا نمودار f را به اندازه دو واحد روی محور طول‌ها به سمت راست انتقال داده و سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

پ) $t(x)=-3f(x)$ ⟵ ابتدا عرض هر نقطه از نمودار f را سه برابر کرده و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

ت) $u(x)=-f(x)+1$ ⟵ ابتدا نمودار f را نسبت به محور xها قرینه کرده و سپس به اندازهٔ ۱ واحد روی محور yها به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

ث) $v(x)=-f(x-۳)+۱ \longrightarrow$ ابتدا نمودار f را به اندازه سه واحد روی محور طول‌ها به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. نمودار جدید را یک واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم.

۴ــ کافی‌است مقدار $f+g$ را در نقاط مشخص شده به‌دست آوریم.



با توجه به شکل، دامنهٔ f و g با هم برابرند. لذا مجموع مقادیر دو تابع، در این دامنهٔ مشترک وجود دارد. به دانش‌آموزان متذکر شویم اعمال روی توابع، در خارج از دامنهٔ مشترک تعریف نمی‌شوند.

۵ــ نمودار g، مجموع دو تابع f و h است.

کافی‌است در هر نمودار چند نقطه را مشخص کرده و سپس با مقایسهٔ مقادیر این نقاط، به جواب مسئله برسیم. راه حل دیگری که در این سؤال می‌توان به دانش‌آموزان پیشنهاد داد، نوشتن معادلهٔ خط f و g و h و مقایسه این ضابطه‌ها با هم است.

نمونه سؤالات فصل ۳ (تابع) ــ کتاب ریاضی ۲ تجربی

۱ تابع گویای $f(x)=\frac{۱}{x}$ را با دامنه‌های زیر رسم کنید.

الف) $D_f=\{\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲},۱,۲\}$

ب) $D_f=(-۳,۳)-\{۰\}$

۲ دامنهٔ هریک از توابع گویای زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\frac{x+۰/۲}{-x}$

ب) $g(x)=\frac{-۲x+۳}{۵}$

پ) $h(x)=\frac{x-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}-x}$

ت) $k(x)=\frac{۱}{x^۲+۱}$

ث) $l(x)=\frac{x+۱}{۱-x^۲}$

ج) $u(x)=\frac{x^۲-۱}{x^۲+۲x-۳}$

۳ اگر دامنهٔ تابع گویای $f(x)=\dfrac{x-۳}{x-a}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{-۲\}$ باشد، a را بیابید.

۴ مقدار عددی k $(k\in Z)$ را در ضابطهٔ $y=\dfrac{k\sqrt{x}+۱}{x-۲}$ طوری بیابید که y ضابطهٔ یک تابع گویا باشد.

۵ در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ و $g(x)=۱$

ب) $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۳x-۴}{x+۱}$ و $g(x)=x-۴$

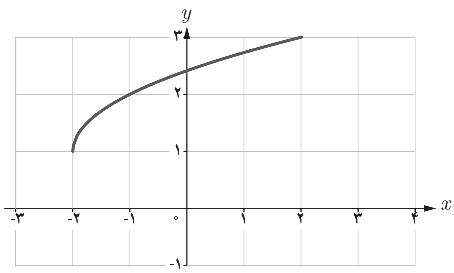
ج) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{۱}{۲} & x>۰\\ \dfrac{۱}{۲} & x<۰\end{cases}$ و $g(x)=\dfrac{|x|}{-۲x}$

د) $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۱۶}{x^{۲}+۴}$ و $g(x)=x^{۲}-۴$

۶ اگر $f(x)=x+۲$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۴}{\sqrt{x}} & x\neq ۲\\ m & x=۲\end{cases}$ باشد، m را طوری بیابید که دو تابع f و g با هم مساوی باشد.

۷ با استفاده از نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ ، مقدار a را در تابع رادیکالی $g(x)=\sqrt{x+a}$ ، طوری بیابید که دامنهٔ آن $[۳,+\infty)$ باشد.

۸ در شکل مقابل نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x)=a+\sqrt{x+b}$ ، با استفاده از نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ رسم شده است. a و b را بیابید.



۹ نمودار توابع زیر را در دامنه‌های داده شده، رسم کنید.

الف) $f(x)=[x]$ و $D_f=[-1,2]$

ب) $g(x)=[x]+2$ و $D_g=[-3,3]$

۱۰ برای تساوی نادرست مثال نقض بیاورید.

الف) $[x+1]=[x]+1$

ب) $[x+\frac{1}{2}]=[x]+\frac{1}{2}$

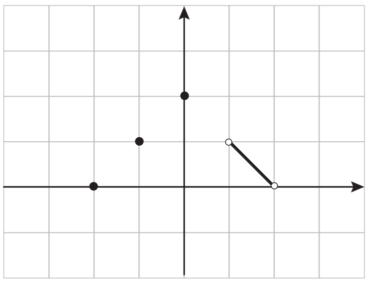
۱۱ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 0\\ x-2 & x>3\end{cases}$ مفروض است.

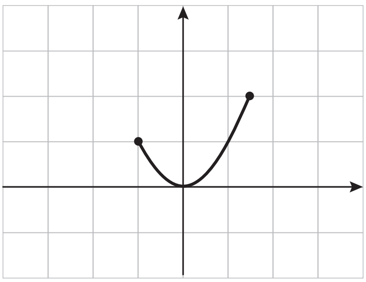
الف) نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنید.

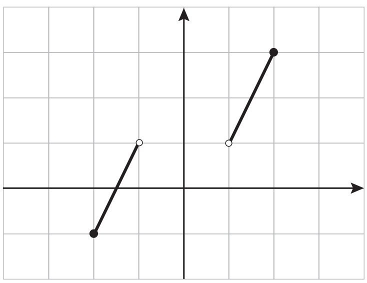
ب) نمودار تابع $f^{-1}(x)$ را به کمک خط $y=x$ رسم کنید.

۱۲ به ازای چه مقادیری از a و b، تابع $f(x)=\{(a-2,5),(-7,3),(-5,5),(a+b,3)\}$، یک‌به‌یک است.

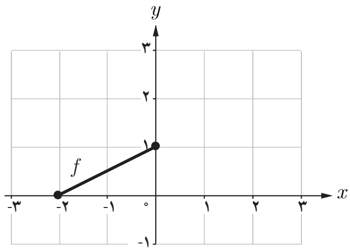
۱۳ یک‌به‌یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.







۱۴ نمودار تابع f به‌صورت شکل مقابل است. اگر نقاط $(m-۲,۰)$ و $(۲-,۳n)$ روی نمودار $f^{-۱}$ باشد، مقدار m و n را بیابید.



۱۵ اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد و عدد ۳ عضو دامنه‌اش باشد، آن‌گاه در معادلهٔ $f^{-۱}(۳)=m$، m دارای چند جواب است؟

۱۶ الف) وارون تابع با ضابطهٔ $f(x)=-۲x+k$ از نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},۰)$ می‌گذرد، مقدار عددی k را به‌دست آورید.

ب) حاصل $f^{-۱}(-۵)$ را به‌دست آورید.

۱۷ f یک تابع وارون‌پذیر است. اگر وارونش در ربع اول دستگاه مختصات واقع شود، نمودار تابع f، در کدام ناحیه بوده است؟

۱۸ الف) آیا تابعی یک‌به‌یک می‌توان یافت که دامنهٔ آن شامل چهار عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟

ب) دامنهٔ یک تابع یک‌به‌یک $۳n+۱$ عضو و برد آن $-۲n+۱۱$ عضو دارد. مقدار ممکن برای عدد طبیعی n را بیابید.

۱۹ معادلهٔ خطی را بنویسید که قرینهٔ خط $y=۳x-۱$ نسبت به نیمساز اول و سوم باشد.

۲۰ اگر $f(۱)=-۲$ و $f(-۳)=۱$ باشد، ضابطهٔ وارون این تابع خطی را بنویسید.

۲۱ الف) ضابطهٔ تابع وارون $f(x)=ax+b \quad (a\neq ۰)$ را به‌دست بیاورید.

ب) تابعی مثال بزنید که وارونش با خودش برابر باشد.

۲۲ برای اندازه‌گیری دما از واحدهای «سانتی‌گراد c» و «فارنهایت F» استفاده می‌شود که با رابطهٔ $F=\frac{۹}{۵}c+۳۲$ به یکدیگر وابسته هستند.

الف) ۲۰- درجه سانتی‌گراد برحسب فارنهایت چقدر می‌شود؟

ب) ۱۰۴ درجه فارنهایت چند درجه سانتی‌گراد است؟

ج) معادله‌ای بنویسید که سانتی‌گراد را برحسب فارنهایت مشخص کند.

۲۳ مقدار a را طوری بیابید که تابع داده شده، یک‌به‌یک باشد.

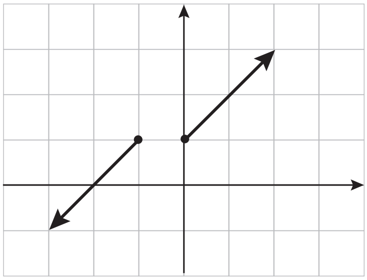
$$f(x)=\begin{cases} ۲x & x\neq ۳ \\ a & x=۳ \end{cases}$$

۲۴ نمودار تابعی مانند y را رسم کنید که دامنهٔ آن $[-۴,۲]$ و برد آن $[۰,۴]$ باشد، به‌طوری که :

الف) تابع y، یک‌به‌یک باشد.

ب) تابع y، یک‌به‌یک نباشد.

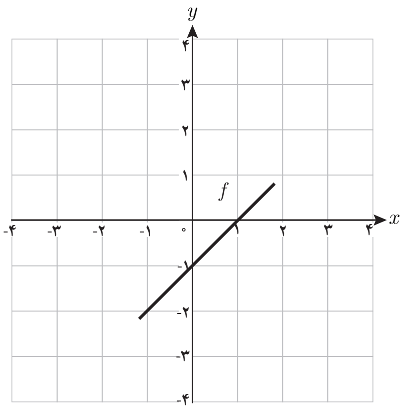
۲۵ با حذف کوچک‌ترین بخش از نمودار تابع داده شده، نمودار را تبدیل به یک تابع یک‌به‌یک کنید.

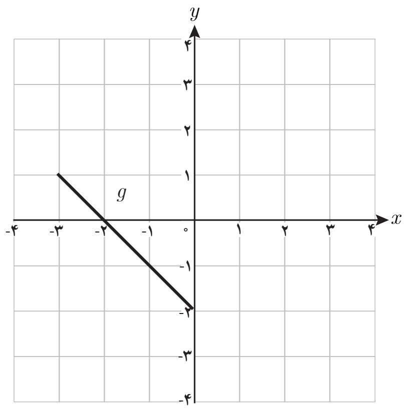


۲۶ اگر دو تابع f و g به‌صورت $f=\{(۰,۱),(-۱,۲),(۲,۳)\}$ و $g=\{(۰,۳),(-۳,۲),(۳,۲)\}$ تعریف شده باشند، دامنه و ضابطه‌های $\frac{f}{g}$ و $f\times g$ و $f-g$ و $f+g$ را بیابید.

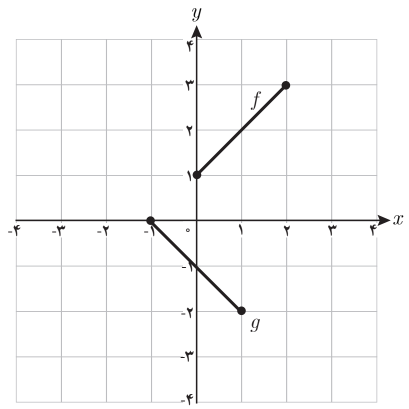
۲۷ اگر $f(x)=\frac{x-۱}{x}$ و $g(x)=\{(-۲,۰),(۰,۱),(۳,۴),(۴,۷)\}$ باشد، دامنه و ضابطه‌های $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ را بیابید.

۲۸ نمودار توابع f و g به‌صورت زیر داده شده است. دامنهٔ $\frac{f}{g}$ و دامنهٔ $\frac{g}{f}$ را بیابید.





۲۹ با توجه به نمودارهای توابع f و g، حاصل هریک از عبارت‌های زیر را در صورت وجود، بیابید.



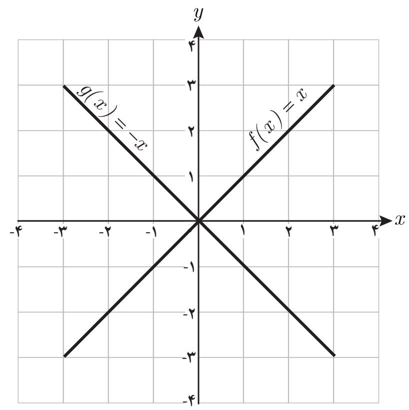
الف) $(g+f)(1)$ ‏ ت) $(\frac{g}{f})(-1)$

ب) $(f\times g)(0)$ ‏ ث) $(f-2g)(0)$

پ) $(f-g)(2)$ ‏ ج) $(\frac{g-f}{-3f})(0)$

۳۰ نمودارهای توابع $f(x)=x$ و $g(x)=-x$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.

نمودارهای توابع $g-f$ و $g+f$ را به کمک نمودارهای داده شده، رسم کنید.

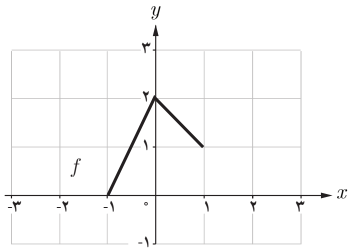


۳۱ الف) با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ ، نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x)=-\frac{1}{x}$ را در بازهٔ $[-3,3]-\{0\}$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ ، نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x)=-\sqrt{x}$ را در بازهٔ $[0,+\infty)$ رسم کنید.

۳۲ مساحت محدود به تابع با ضابطهٔ $y=3-|x|$ و محور xها را بیابید.

۳۳ نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر داده شده است. به کمک این نمودار، نمودار توابع خواسته شده را رسم کنید.



الف) $g(x)=-۲f(x)$

ب) $h(x)=\frac{۱}{۲}f(x)$

پ) $k(x)=f(x)+۱$

ت) $l(x)=۲f(x)-۳$

ث) $u(x)=f(x-۲)$

ج) $v(x)=-f(x+۱)$

۳۴ نقطه $(-۵,۱۲)$ روی نمودار $y=f(x)$ واقع شده است. این نقطه با چه نقطه‌ای از نمودار توابع زیر متناظر است؟

الف) $g(x)=-f(x)$

ب) $g(x)=\frac{۱}{۳}f(x)$

پ) $g(x)=f(x)-۷$

ت) $g(x)=-f(x)-۲$