فصل ۴

مثلثات

اهداف کلی فصل

- ❑ معرفی رادیان به‌عنوان واحد دیگری برای اندازه‌گیری زاویه
- ❑ ارتباط میان دو واحد اندازه‌گیری درجه و رادیان
- ❑ آشنایی با نمایش زاویه‌ها برحسب درجه و رادیان روی دایرهٔ مثلثاتی
- ❑ معرفی نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه، مکمل، متمم و هم‌انتها
- ❑ رسم توابع سینوس و کسینوس در صفحهٔ مختصات با استفاده از نقطه‌یابی
- ❑ آشنایی با ویژگی‌های توابع سینوس و کسینوس
- ❑ رسم تابع با ضابطهٔ $y = a \sin(x + b)$ و $y = a \cos(x + b)$ به کمک انتقال

نگاه کلی به فصل

این فصل در تکمیل مباحث مطرح شده در فصل مثلثات کتاب دهم تهیه شده است. نسبت‌های مثلثاتی، دایره مثلثاتی و اتحادهای مثلثاتی دروسی بود که در سال گذشته به دانش‌آموزان آموخته شد. آشنایی با واحد درجه و جهت مثلثاتی و محاسبه نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه دلخواه مباحثی بود که در کتاب دهم ارائه شد. همچنین محاسبه نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با دانستن یکی از نسبت‌های مثلثاتی آن مهارتی بود که دانش‌آموز کسب کرد. حال سؤالاتی را می‌توان طرح نمود که علت ارائه مطالب این فصل را برای دانش‌آموز روشن کرد.

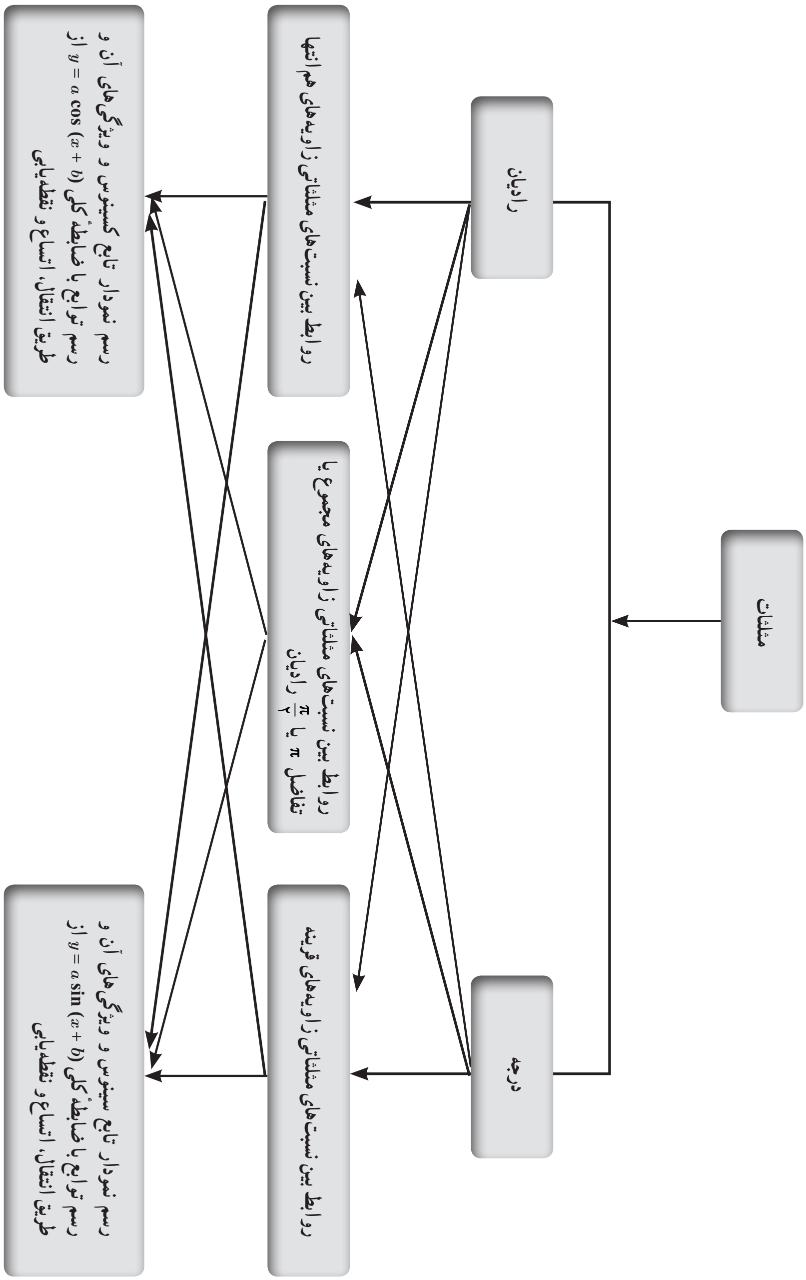
۱ آیا به جز درجه، واحد اندازه‌گیری دیگری برای زاویه وجود دارد؟ (همان‌طوری که مثلاً برای طول به جز متر یا سانتی‌متر یا کیلومتر واحدهایی چون اینچ یا مایل وجود دارد.)

۲ در صورت وجود واحد دیگر، ارتباط آن با درجه چیست و روی دایره مثلثاتی چگونه می‌توان با واحد جدید یک زاویه را نمایش داد؟

۳ با توجه به آشنایی دانش‌آموز با دو زاویه قرینه، متمم و مکمل، این مفاهیم روی دایره مثلثاتی چگونه تعریف می‌شوند و نسبت‌های مثلثاتی آنها چگونه به‌دست می‌آیند؟

۴ با توجه به آشنایی دانش‌آموز با مفهوم تابع و رسم آن، چگونه تابع مثلثاتی چون سینوس یا کسینوس روی صفحه مختصات رسم می‌شود؟

نقشهٔ مفهومی


مثلثات
رادیان
درجه
روابط بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های هم انتها
روابط بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مجموع یا تفاضل π یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان
روابط بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه
رسم نمودار تابع کسینوس و ویژگی‌های آن و رسم توابع با ضابطهٔ کلی $y = a\cos(x + b)$ از طریق انتقال، اتساع و نقطه‌یابی
رسم نمودار تابع سینوس و ویژگی‌های آن و رسم توابع با ضابطهٔ کلی $y = a\sin(x + b)$ از طریق انتقال، اتساع و نقطه‌یابی

دانستنی معلم فصل ۴

محاسبه تقریبی فاصله بین دو نقطه روی کرهٔ زمین

در ابتدا لازم به ذکر است زمین یک کره دقیق نیست زیرا اندازه شعاع آن در تمام نقاط روی آن برابر نیست. معمولاً شعاع کره زمین به‌طور تقریبی $r \simeq$ ۶۳۷۱ کیلومتر در نظر گرفته می‌شود که در کتاب درسی برای راحتی در محاسبات این شعاع به‌طور تقریبی ۶۴۰۰ کیلومتر فرض شده است.

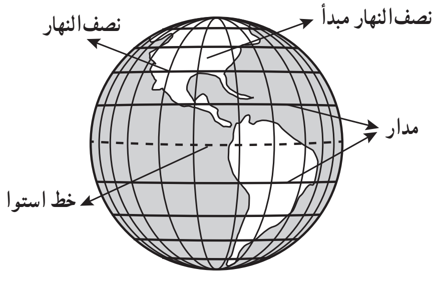
دایره‌های عظیمه‌ای که از قطب‌های کره زمین می‌گذرند نیم‌دایره‌هایی را روی کره زمین پدید می‌آورند که به هر کدام آنها **نصف‌النهار** می‌گویند.

به‌طور قرارداد، نصف‌النهاری که از شهر گرینویچ در نزدیکی لندن پایتخت کشور انگلستان می‌گذرد، **نصف‌النهار مبدأ** می‌گویند.

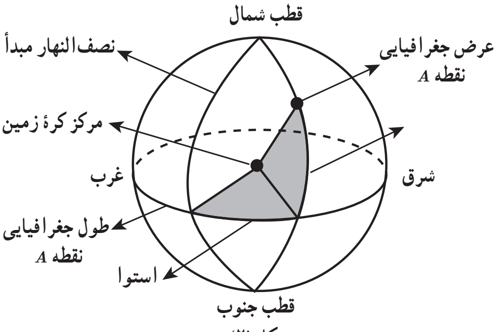
دایره عظیمه‌ای که شعاع آن بر شعاع دایره عظیمه متناظر با نصف‌النهار مبدأ عمود باشد، **استوا** نام دارد.

اگر صفحه‌ای موازی با استوا کره زمین را قطع کند، دایره حاصل، **مدار** نام دارد.

در واقع استوا بزرگ‌ترین مدار در کره زمین است که شعاع آن همان شعاع کره زمین است. به این ترتیب روی کره زمین یک دستگاه مختصات تنظیم شده است به‌طوری که هر نقطه روی کره زمین محل تلاقی یک مدار و یک نصف‌النهار است (شکل ۱). عرض جغرافیایی یک نقطه بیانگر آن است که نقطه مفروض چقدر بالا یا پایین خط استوا است که آن را به‌صورت مقداری برحسب درجه (شمالی یا جنوبی) بیان می‌کنند. عرض جغرافیایی خط استوا صفر درجه و عرض جغرافیایی قطب شمال ۹۰° شمالی است. به همین ترتیب طول جغرافیایی یک نقطه بیانگر آن است که نقطه مفروض چقدر شرق یا غرب نصف‌النهار مبدأ است که آن را به‌صورت مقداری برحسب درجه (شرقی یا غربی) بیان می‌کنند. طول جغرافیایی نصف‌النهار مبدأ صفر درجه است (شکل ۲).

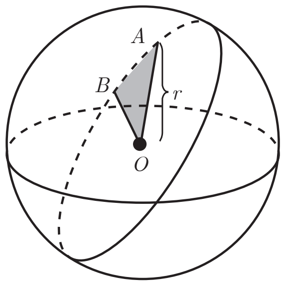


شکل (۱)



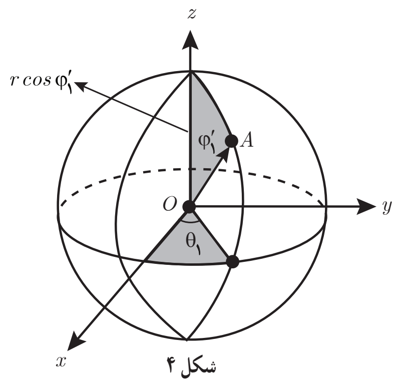
شکل (۲)

حال گیریم A و B دو نقطه مفروض روی کره زمین باشند.
هدف یافتن طول $\widehat{AB}$ روی دایره عظیمه گذرنده بر این کمان است (شکل ۳).



شکل (۳)

هدف یافتن اندازه $\widehat{AOB}$ برحسب رادیان است. اگر عرض جغرافیایی نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$، φ_1° شمالی و طول جغرافیایی این نقطه θ_1° شرقی باشد، با توجه به شکل ۴ داریم :



شکل ۴

$$\overrightarrow{OA}\left|\begin{array}{l} x_1 = r\sin\varphi_1'\cos\theta_1 = r\cos\varphi_1\sin\theta_1 \\ y_1 = r\sin\varphi_1'\sin\theta_1 = r\cos\varphi_1\sin\theta_1 \\ z_1 = r\cos\varphi_1' = r\sin\varphi_1 \end{array}\right.$$

که در آن $\varphi'_1 = 90^\circ - \varphi_1$ و r شعاع کره زمین است.
به همین ترتیب برای نقطه B نیز داریم :

$$\overrightarrow{OB}\left|\begin{array}{l} x_2 = r\cos\varphi_2\cos\theta_2 \\ y_2 = r\cos\varphi_2\sin\theta_2 \\ z_2 = r\sin\varphi_2 \end{array}\right.$$

که در آن φ_2 و θ_2 به ترتیب عرض و طول جغرافیایی نقطه B هستند. بنابراین با معلوم بودن مختصات این دو بردار ضرب داخلی آنها به‌صورت زیر حاصل می‌شود :

$\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OA}$ ضرب داخلی زاویه‌های = $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

در ضمن $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = r$

در نتیجه با جایگذاری مقادیر مختصات نقاط داریم :

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|.\left|\overrightarrow{OB}\right|}$$

$$= \cos\varphi_۱ \cos\varphi_۲ (\cos\theta_۱ . \cos\theta_۲ + \sin\theta_۱ \sin\theta_۲) + \sin\varphi_۱ \sin\varphi_۲$$

حال با مشخص شدن زاویه α برحسب رادیان و به‌کارگیری رابطه $\alpha = \frac{l}{r}$ مقدار $l = \widehat{AB}$ حاصل می‌شود.

به‌عنوان مثال دو شهر لاهیجان در استان گیلان و خمین در استان مرکزی را در نظر می‌گیریم که دارای طول جغرافیایی تقریباً یکسان $\theta_۱ = \theta_۲ = ۵۰^\circ$ و به‌ترتیب دارای عرض جغرافیایی تقریبی $\varphi_۱ = ۳۷^\circ$ و $\varphi_۲ = ۳۳^\circ$ هستند. با فرض $r = ۶۳۷۰\ km$ در این صورت با توجه به اتحاد مثلثاتی $\cos(\theta_۱ - \theta_۲) = \cos\theta_۱ \cos\theta_۲ + \sin\theta_۱ \sin\theta_۲$ و $\cos(\varphi_۱ - \varphi_۲) = \cos\varphi_۱ \cos\varphi_۲ + \sin\varphi_۱ \sin\varphi_۲$ خواهیم داشت :

$$\cos\alpha = \cos(۳۷^\circ - ۳۳^\circ) \xrightarrow{\alpha \text{ حاده است}} \alpha = ۴^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۴۵} \quad \text{رادیان}$$

$$\xrightarrow{\pi \simeq ۳/۱۴} l = r \times \alpha = ۶۳۷۰ \times \frac{\pi}{۴۵} \simeq ۴۴۴\, km$$

لذا فاصله تقریبی شهر خمین و لاهیجان روی کرهٔ زمین ۴۴۴ کیلومتر است. توجه کنید که فاصله جاده‌ای بین این دو شهر حدود ۵۶۰ کیلومتر است.

مثال ۱ : شهر کرمان دارای طول جغرافیایی تقریبی ۵۷° و عرض جغرافیایی ۳۰° و شهر بجنورد در استان خراسان شمالی طول جغرافیایی تقریبی یکسان با شهر کرمان و عرض جغرافیایی ۳۷° است. فاصله تقریبی این دو شهر روی کرهٔ زمین تقریباً چند کیلومتر است؟

مثال ۲ : شهر تهران دارای طول جغرافیایی تقریبی ۵۱° و عرض جغرافیایی ۳۵° و شهر اهواز دارای طول جغرافیایی تقریبی ۴۸° و عرض جغرافیایی ۳۱° هستند. فاصله تقریبی این دو شهر روی کره زمین چند کیلومتر است؟

درس اول

واحدهای اندازه‌گیری زاویه

اهداف درس

۱ معرفی رادیان به‌عنوان واحد دیگری برای اندازه‌گیری زاویه و اهمیت آشنایی با این واحد
۲ رابطهٔ بین طول کمان روبه‌روی یک زاویهٔ مرکزی و اندازهٔ یک زاویه برحسب رادیان با توجه به شعاع
۳ رابطهٔ بین واحدهای اندازه‌گیری درجه و رادیان

پیش‌نیازها

۱ تشخیص زاویهٔ مرکزی و کمان روبه‌روی آن
۲ شناخت واحد اندازه‌گیری درجه
۳ درک عدد π
۴ شناخت دایرهٔ مثلثاتی و جهت مثلثاتی

روش تدریس

دانش‌آموز پس از آموزش این درس توسط معلم باید قادر باشد :

۱ زاویه‌های مختلف را برحسب رادیان روی دایره مثلثاتی مشخص کند.
۲ رابطه بین طول کمان روبه‌روی یک زاویه و اندازه یک زاویه برحسب رادیان را با توجه به شعاع دایره به کار ببرد.
۳ زاویه‌ای برحسب درجه (رادیان) را به زاویه متناظر آن برحسب رادیان (درجه) تبدیل کند.
۴ از ماشین حساب جهت محاسبه یک زاویه برحسب رادیان استفاده کند.

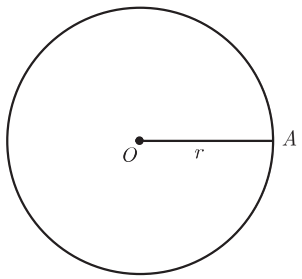
توصیه‌ها

۱ در هنگام آموزش مفهوم رادیان، لزوم یادگیری و اهمیت این واحد اندازه‌گیری اشاره شود.

۲ از آموزش واحدهای کوچک‌تر از درجه چون دقیقه و ثانیه و به‌کارگیری آنها در تبدیل یک زاویه به رادیان اجتناب شود.

۳ از آموزش واحد اندازه‌گیری «گراد» در کنار دو واحد مذکور اجتناب شود و روی آموزش دقیق و رابطه بین درجه و رادیان تمرکز گردد.

فعالیت صفحه ۷۲



۱ یک شیء دایره‌ای شکل انتخاب کنید و نخی را دور آن بپیچید و سپس باز کنید؛ طول نخ را با خط‌کش اندازه بگیرید. طول این نخ چه کمیتی از دایره را مشخص می‌کند؟ با استفاده از این مقدار شعاع دایره را به‌دست آورید. محیط دایره را مشخص می‌کند.

هدف از ارائه این فعالیت معرفی مفهوم رادیان از طریق طول کمان روبه‌رو به یک زاویه است. به عبارتی می‌خواهیم به این سؤال پاسخ دهیم که چگونه می‌توان طول کمان روبه‌روی یک زاویهٔ مرکزی در دایره را برحسب یک واحد طولی نظیر سانتی‌متر، متر یا کیلومتر بیان نمود؟

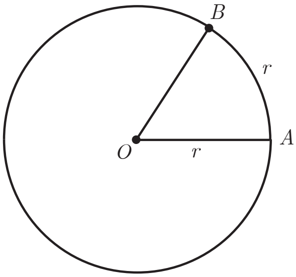
برای انجام این فعالیت قبل از تدریس از دانش‌آموزان خواسته شود مقداری نخ، خط‌کش، نقاله و یک شیء دایره‌ای شکل نظیر CD به همراه داشته باشند.

در ابتدا شیء دایره‌ای شکل مورد نظر را برمی‌داریم و نخی را دور آن می‌پیچیم و باز می‌کنیم. این شیء می‌تواند دهانه یک لیوان و یا یک CD باشد. حال با خط‌کش، طول این نخ را اندازه می‌گیریم و این واقعیت که این مقدار همان محیط آن شیء دایره‌ای شکل را مشخص می‌کند، مطرح می‌کنیم. با یادآوری این مطلب از هندسه که محیط دایره برابر قطر × π است، از دانش‌آموز می‌خواهیم شعاع را بیابد. اگر به عنوان مثال محیط دایره برابر ۳۸ cm باشد (محیط تقریبی یک CD) آنگاه با فرض $\pi \simeq$ ۳/۱۴، داریم:

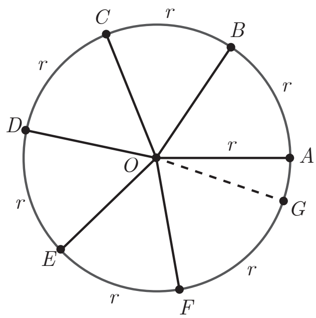
۳۸ = قطر دایره × ۳/۱۴ $\rightarrow$ قطر دایره $\simeq$ ۱۲$cm \rightarrow r =$ شعاع دایره = ۶cm

۲ قطعه نخی را به اندازهٔ شعاع دایره برش دهید و آن را از نقطهٔ A روی محیط آن دایره قرار دهید تا نقطهٔ B حاصل شود (شکل مقابل). اندازه $\widehat{AOB}$ را با نقاله اندازه‌گیری کنید. این زاویه تقریباً چند درجه

است؟ 57°

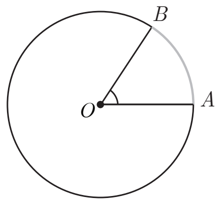


به اندازهٔ شعاع حاصل، از دانش‌آموز خواسته شود قطعه نخی را برش داده و روی محیط همان شکل دایره‌ای‌شکل قرار دهد و $\widehat{AOB}$ را بسازد. حال نقاله را برداشته و اندازهٔ این زاویه را روی این شیء اندازه بگیرد. این زاویه تقریباً 57° است.

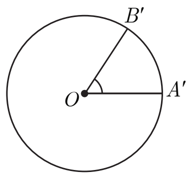


۳ دوباره این قطعه نخ را از نقطهٔ B روی محیط دایره قرار دهید تا نقطهٔ C حاصل شود و این کار را ادامه دهید تا نقاط D، E، F و G روی محیط دایره به دست آیند (شکل مقابل). در این حالت $\widehat{BOC}$ ، $\widehat{COD}$ ، $\widehat{DOE}$ ، $\widehat{EOF}$ و $\widehat{FOG}$ با زاویهٔ $\widehat{AOB}$ برابر و هر یک تقریباً 57° است. آیا دو نقطهٔ G و A برهم منطبق می‌شوند؟ خیر $\widehat{GOA} \simeq 18^\circ$

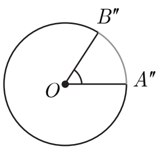
در تمام دایره‌های زیر اندازهٔ زاویهٔ مشخص شده ۱ رادیان است. در هر کدام با استفاده از نقاله اندازهٔ زاویه را بر حسب درجه مشخص کنید.



$\widehat{AOB} \simeq 57^\circ$



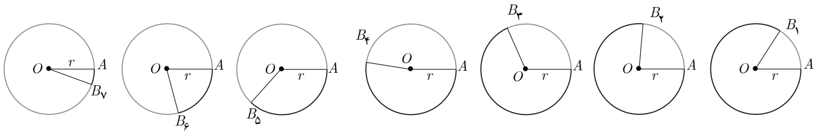
$\widehat{A'OB'} \simeq 57^\circ$



$\widehat{A''OB''} \simeq 57^\circ$

در ادامه با به کارگیری نقاله، هر یک از زاویه‌های $\widehat{AOB}$ ، $\widehat{A'OB'}$ و $\widehat{A''OB''}$ تقریباً 57° است. به این ترتیب در این قسمت دانش‌آموز این مطلب را باید درک کند که در هر دایره با شعاع مفروض یک رادیان (که تقریباً 57° است) برابر با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی است که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع آن دایره مساوی است.

۴ جدول زیر را کامل کنید.



طول کمان AB_i $۱\le i\le ۷$	r	$\frac{۳}{۲}r$	$۲r$	$۳r$	$۴r$	$۵r$	$۶r$
اندازهٔ زاویه AOB_i $۱\le i\le ۷$	۱ رادیان	$\frac{۳}{۲}$ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان	۴ رادیان	۵ رادیان	۶ رادیان

هدف از این بند فعالیت، آشنایی دانش‌آموز با رابطهٔ رادیان و طول کمان است. لذا با توجه به کمان‌ها در هر شکل برحسب شعاع دایره (r) می‌توان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی متناظر را بیان کرد. در این حالت هدف آن است که دانش‌آموز به این نتیجه برسد که نسبت طول کمان روبه‌روی یک زاویه بر شعاع دایره، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی متناظر را برحسب رادیان، مشخص می‌کند.

در انجام فعالیت فوق حتماً دانش‌آموز به خواندن زاویه‌ها در جهت مثلثاتی جلب گردد و مثلاً زاویهٔ $\widehat{AOB}_۷$ در شکل آخر جدول، زاویه‌ای است که کمان روبه‌روی آن به رنگ قرمز مشخص شده و با زاویه‌ای که در خلاف جهت مثلثاتی به‌دست می‌آید، نباید اشتباه شود.

کار در کلاس صفحه ۷۴

با استفاده از رابطهٔ بالا جدول زیر را کامل کنید:

l	۴۰۰ سانتی‌متر	۱۰ متر	۵۰ متر	۹۰ سانتی‌متر	۲۰۰ سانتی‌متر	۰/۷۵ متر	۵۰۰ سانتی‌متر	۵ سانتی‌متر
r	۲۰ سانتی‌متر	۱ متر	۱۰ متر	۳۰ سانتی‌متر	۱ متر	۰/۵ متر	۵ متر	۵ سانتی‌متر
α	۲۰ رادیان	۱۰ رادیان	۵ رادیان	۳ رادیان	۲ رادیان	۱/۵ متر	۱ رادیان	۱ رادیان

در این کار در کلاس، مهارت دانش‌آموز در به کارگیری رابطهٔ $\alpha=\frac{l}{r}$ و توجه به هم‌واحد بودن l و r

را افزایش می‌دهد. مثلاً وقتی $r = ۵\,cm$ و رادیان ۱ = α، داریم :

$$\alpha = \frac{l}{r} \to ۱ = \frac{l}{۵} \to l = ۵\,cm$$

یا وقتی $l = ۵۰۰\,cm$ و $r = ۵m$ داریم :

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{۵۰۰cm}{۵۰۰cm} = \text{رادیان ۱}$$

با توجه به آشنایی دانش‌آموز با عدد π به صورت نسبت محیط دایره به قطر آن، توجه او به این موضوع که زاویه‌ای هم به نام π رادیان داریم باید جلب شود و نباید این زاویه که دارای واحد هست با عدد π که تقریباً ۳/۱۴ است و واحدی ندارد اشتباه شود.

ضمناً در جدول صفحهٔ ۷۴، با توجه به اینکه مقدار تقریبی رادیان، ۵۷° است، دانش‌آموز را هدایت می‌کنیم تا مقادیر تقریبی زاویه‌هایی چون ۰/۵رادیان (نصف ۵۷°)، ۲ رادیان ($۵۷^\circ \times ۲$)، ۳ رادیان ($۵۷^\circ \times ۳$)، ۳/۱۴ رادیان ($۵۷^\circ \times ۳/۱۴$) را برحسب درجه بیابد و در نهایت به او این موضوع را آموزش می‌دهیم که با استفاده از تقریب‌های بهتر عدد π، مقدار تقریبی زاویهٔ π رادیان برحسب درجه به ۱۸۰° نزدیک می‌شود طوری که π رادیان دقیقاً بر ۱۸۰° منطبق می‌شود. یعنی π رادیان اندازهٔ زاویهٔ نیم‌صفحه است.

زاویه برحسب رادیان	۰/۵ رادیان	۱ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان	۳/۱۴ رادیان	π رادیان
زاویه برحسب درجه	تقریباً $۲۸/۵^\circ$	تقریباً ۵۷°	تقریباً ۱۱۴°	تقریباً ۱۷۱°	تقریباً ۱۷۹°	دقیقاً ۱۸۰°

بنابراین، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان نیم دایره برابر است با ۱۸۰ درجه یا π رادیان. به عبارت دیگر اندازهٔ زاویه نیم‌صفحه برابر است با π رادیان. در نتیجه :

$$\text{یک درجه} = \text{رادیان}\ \frac{\pi}{۱۸۰}$$

به این ترتیب :

$$\text{رادیان}\ \pi = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\div ۲} \text{رادیان}\ \frac{\pi}{۲} = ۹۰^\circ$$

$$\text{رادیان}\ \pi = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\div ۳} \text{رادیان}\ \frac{\pi}{۳} = ۶۰^\circ$$

$$\text{رادیان}\ \pi = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\div ۴} \text{رادیان}\ \frac{\pi}{۴} = ۴۵^\circ$$

$$\text{رادیان}\ \pi = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\div ۶} \text{رادیان}\ \frac{\pi}{۶} = ۳۰^\circ$$

کار در کلاس صفحه ۷۵

۱ مطابق نمونه هر یک از زاویه‌ها را از درجه به رادیان تبدیل کنید :

$$۳۶^\circ \xrightarrow{\frac{\pi}{۱۸۰}\times \text{رادیان}} \frac{\pi}{۵}\ \text{رادیان}$$

$$۶۰^\circ \longrightarrow \frac{\pi}{۳}\ \text{رادیان}$$

$$۱۸۰^\circ \longrightarrow \pi\ \text{رادیان}$$

$$۳۰^\circ \xrightarrow{\frac{\pi}{۱۸۰}\times \text{رادیان}} \frac{\pi}{۶}\ \text{رادیان}$$

$$۴۵^\circ \longrightarrow \frac{\pi}{۴}\ \text{رادیان}$$

$$۹۰^\circ \longrightarrow \frac{\pi}{۲}\ \text{رادیان}$$

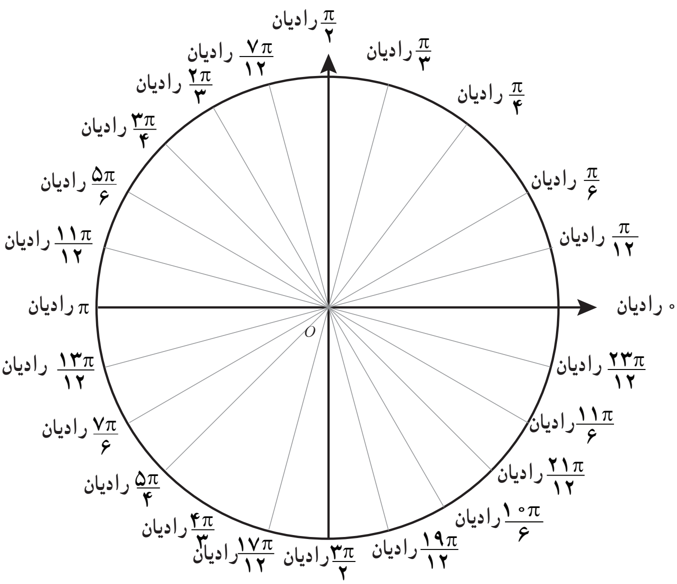
اگر D اندازهٔ زاویهٔ α برحسب درجه و R اندازهٔ زاویه α برحسب رادیان باشد، آنگاه

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi\ \text{رادیان}}$$

۲ حال جدول زیر را با استفاده از این رابطه کامل کنید :

D (درجه)	۲۲۵°	۱۲۰°	۷۲°	۲۴°	$۲۵/۷^\circ$	۵°
R (رادیان)	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۲\pi}{۵}$	$\frac{۲\pi}{۱۵}$	$\frac{\pi}{۷}$	$\frac{\pi}{۳۶}$

۳ در شکل زیر در هریک از جاهای خالی زاویهٔ مناسب را برحسب رادیان مشخص کنید.



هدف از این کار در کلاس، آماده‌سازی دانش‌آموز در ایجاد مهارت تبدیل درجه به رادیان و برعکس است. با تقسیم کردن طرفین رابطهٔ $^\circ$۱۸۰ = π رادیان بر عدد ۱۸۰ می‌توان گفت :

$$\frac{\pi}{۱۸۰} \text{ رادیان} = ۱^\circ$$

همچنین با تقسیم کردن طرفین رابطهٔ $^\circ$۱۸۰ = π رادیان بر عدد π می‌توان گفت :

$$\text{۱ رادیان} = \frac{۱۸۰}{\pi} \text{ درجه} \simeq ۵۷/۳^\circ \text{ (با ماشین حساب)}$$

به این ترتیب برای تبدیل درجه به رادیان اندازه زاویه را در $\frac{\pi}{۱۸۰}$ رادیان ضرب می‌کنیم و برای تبدیل رادیان به درجه، اندازه زاویه را در $\frac{۱۸۰}{\pi}$ درجه ضرب می‌کنیم.

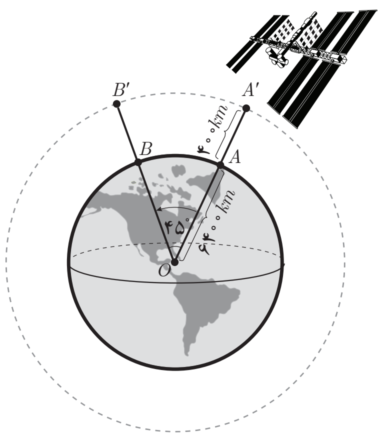
در انتهای سؤال ۱ گفته شود : ۲π رادیان = $^\circ$۳۶۰ (یک دور کامل دایره)

سؤال ۲ این کار در کلاس از رابطه $\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}}$ تکمیل می‌شود. مثلاً اگر $R = \frac{\pi}{۷}$ آنگاه :

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{\frac{\pi}{۷} \text{ رادیان}}{\pi \text{ رادیان}} \rightarrow D \simeq ۲۵/۷^\circ$$

سؤال ۳، برای ایجاد مهارت در مشخص نمودن زاویه‌ها برحسب رادیان روی دایره مثلثاتی تنظیم شده است. شکلی که داده شده دقیقاً همان دایرهٔ مثلثاتی صفحهٔ ۷۲ است که زاویه‌های مربوط برحسب رادیان مشخص شده است. لذا شکل با افزودن $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان و در جهت مثلثاتی تکمیل می‌شود. توصیه می‌شود زوایایی مانند $\frac{-\pi}{۱۲}$ رادیان، $\frac{-\pi}{۶}$ رادیان و $\frac{-\pi}{۴}$ رادیان و مانند آنها در شکل نشان داده می‌شود.

فعالیت صفحه ۷۶



ایستگاه فضایی بین‌المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصلهٔ تقریبی ۴۰۰ کیلومتری بالای سطح کرهٔ زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B که با مرکز زمین زاویه ۴۵° می‌سازند، رصد شود، این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A' به B' پوشش می‌دهد؟ شعاع تقریبی کرهٔ زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.

۱ ابتدا زاویهٔ مرکزی ۴۵° را به رادیان تبدیل کنید.

$$\text{رادیان } \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۱۸۰} \times ۴۵^\circ = \alpha = \text{اندازهٔ زاویهٔ مرکزی } \widehat{AOB} \text{ برحسب رادیان}$$

۲ شعاع مدار دایره‌ای شکل که ایستگاه فضایی روی آن قرار دارد، برابر است با

$$r = OA' = ۶۴۰۰ + ۴۰۰ = ۶۸۰۰ \ km$$

۳ طول کمان روبه‌روی $\widehat{A'OB'}$ با فرض $\pi \simeq ۳/۱۴$ و با استفاده از رابطه $\alpha = \frac{l}{r}$ به طور تقریبی برابر است با :

$$A'B' \text{ طول کمان} = l = \frac{\pi}{۴} \times ۶۸۰۰ \simeq ۵۳۳۸ \ km$$

هدف از ارائه این فعالیت معرفی یک کاربرد عملی از مفهوم رادیان است. در این حالت می‌خواهیم با داشتن اندازهٔ زاویهٔ مرکزی $\widehat{AOB}$ ، اندازهٔ $\widehat{A'B'}$ را برحسب کیلومتر به دست آوریم.

فعالیت‌های مشابهی توسط معلم می‌تواند ارائه شود. نمونهٔ آن شکل ابتدای فصل است که در آن ماهواره امید در مدار خود نشان داده شده است.

خواندنی صفحهٔ ۷۶

توصیه می‌شود جهت آشنایی دانش‌آموز با به کارگیری ماشین حساب این خواندنی در کلاس انجام شود و مقادیر زاویه‌های خواسته شده به‌طور تقریبی توسط دانش‌آموزان به‌دست آید.

$۰/۵$ رادیان $\simeq ۰/۵ \times \frac{۱۸۰}{\pi} \simeq ۲۸/۶^\circ$

$\frac{۴}{۵}$ رادیان $\simeq ۴۵/۸^\circ$

۲ رادیان $\simeq ۱۱۴/۶^\circ$

۳ رادیان $\simeq ۱۷۱/۹^\circ$

$۳/۱۴$ رادیان $\simeq ۱۷۹/۹^\circ$

$\frac{\pi}{۳}$ رادیان $\simeq ۶۰^\circ$

$\frac{\pi}{۴}$ رادیان $\simeq ۴۵^\circ$

π رادیان $\simeq ۱۸۰^\circ$

حل برخی از تمرین‌های درس اول

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi\ \text{رادیان}}\rightarrow\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{\frac{\pi}{۲۰}\ \text{رادیان}}{\pi\ \text{رادیان}}\rightarrow D=۹^\circ$$

به دانش‌آموزان متذکر می‌شویم که l و r هم‌واحد هستند و α برحسب رادیان به‌دست می‌آید.

$$\alpha=\frac{l}{r}=\frac{۸}{۱۰}=\frac{۴}{۵}\quad \text{رادیان}$$

۵← حل :

الف) درست است.

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi\ \text{رادیان}}\rightarrow\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{۱}{\pi\ \text{رادیان}}\rightarrow D=\frac{۱۸۰}{۳/۱۴}\simeq ۵۷/۳^\circ$$

مجموع زوایای پای ساق $۱۸۰^\circ - ۵۷/۳^\circ = ۱۲۲/۷^\circ$

هر یک از زوایای پای ساق $۱۲۲/۷^\circ \div ۲ = ۶۱/۳۵^\circ$

با توجه به کوچک‌تر بودن زاویهٔ روبه‌رو به قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین نسبت به زوایای پای ساق، اندازهٔ قاعدهٔ مثلث نیز نسبت به اندازهٔ دو ساق مثلث کوچک‌تر است.

ب) درست است.

$$\alpha=\frac{l}{r}\rightarrow l=r\,\alpha=۱\times\pi\ \text{رادیان}=\pi\ \text{رادیان}\simeq ۳/۱۴\ \text{cm}$$

پ) نادرست است.

$$\frac{۶\pi}{۵}\ \text{رادیان}\xrightarrow{\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi\ \text{رادیان}}}\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{\frac{۶\pi}{۵}\ \text{رادیان}}{\pi\ \text{رادیان}}\rightarrow D=۲۱۶^\circ$$

در ربع سوم دایره مثلثاتی قرار دارد.

ت) نادرست است.

$$\frac{۲\pi}{۳}\ \text{رادیان}\xrightarrow{\pi\ \text{رادیان}=۱۸۰^\circ}D=۱۲۰^\circ$$

$$-\ \text{رادیان}\longrightarrow\quad =۲۰^\circ$$

$$\frac{۷\pi}{۳۶}\ \text{رادیان}\longrightarrow D=۳۵^\circ$$

همان‌طور که می‌دانیم جمع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰° است. حال آنکه در این مثلث جمع هر سه زاویه ۱۷۵° می‌باشد. می‌توان به این نکته نیز اشاره کرد که جمع زوایای داخلی یک مثلث π رادیان است. حال آنکه جمع زوایای داده شده π رادیان نمی‌شود. بنابراین این زوایا تشکیل مثلث نمی‌دهند.

درس دوم

روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

اهداف درس

۱ شناخت زاویهٔ قرینه $(-\alpha)$ و معرفی نسبت‌های مثلثاتی آن

۲ شناخت زاویهٔ مکمل $(\pi - \alpha)$ و معرفی نسبت‌های مثلثاتی آن

۳ شناخت زاویه با اختلاف π رادیان $(\pi + \alpha)$ و معرفی نسبت‌های مثلثاتی آن

۴ شناخت زاویهٔ متمم $(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$ و معرفی نسبت‌های مثلثاتی آن

۵ شناخت زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ رادیان $(\frac{\pi}{۲} + \alpha)$ و معرفی نسبت‌های مثلثاتی آن

۶ شناخت زاویهٔ هم‌انتها و معرفی نسبت‌های مثلثاتی آن

پیش‌نیازها

۱ شناخت دایرهٔ مثلثاتی و جهت مثلثاتی و پیدا کردن زوایا روی دایرهٔ مثلثاتی

۲ آشنایی با اتحادهای مثلثاتی فصل مثلثات در سال دهم

۳ محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۳۰°، ۴۵°، ۶۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰°، ۳۶۰°

۴ شناخت علامت نسبت‌های مثلثاتی در هر ربع از دایرهٔ مثلثاتی

۵ آشنایی با مفهوم قرینهٔ نقطه (x و y) نسبت به محور xها، yها و مبدأ مختصات

روش تدریس

دانش‌آموز پس از تدریس این درس باید قادر باشد :

۱ با معلوم بودن یک زاویه برحسب رادیان،انتهای کمان روبه‌روی آن را مشخص کند در کدام ربع

دایره مثلثاتی قرار دارد.

۲ مفهوم قرینه یک زاویه و نمایش آن در دایره مثلثاتی را تشخیص داده و نسبت‌های مثلثاتی قرینه یک زاویه را از روی نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه محاسبه کند.

۳ با دانستن مفهوم دو زاویه مکمل، نسبت‌های مثلثاتی مکمل یک زاویه را از روی نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه (برحسب درجه یا رادیان) محاسبه کند. همچنین با فرض معلوم بودن یک زاویه، آن را به‌صورت دو زاویه دیگر تجزیه کند که مجموع یا اختلاف آنها π رادیان (یا ۱۸۰°) است و سپس نسبت‌های مثلثاتی زاویه مفروض را با به کارگیری روابط معرفی شده به‌دست آورد.

۴ با دانستن مفهوم دو زاویه متمم، نسبت‌های مثلثاتی متمم یک زاویه را از روی نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه (برحسب درجه یا رادیان) محاسبه کند.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

فعالیت صفحه ۷۹

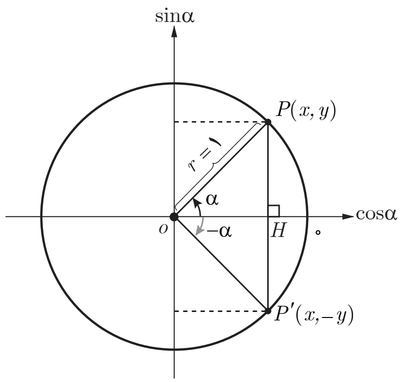
دو زاویهٔ α و $-\alpha$ را قرینه یکدیگر می‌گویند. اگر در شکل زیر $\alpha=۳۰^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی زاویه -۳۰° در $O\overset{\Delta}{P'}H$ عبارت‌اند از :

$$\sin(-۳۰^\circ) = \frac{-y}{r} = -\sin ۳۰^\circ = -\frac{۱}{۲}$$

$$\cos(-۳۰^\circ) = \frac{x}{r} = \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(-۳۰^\circ) = \frac{-y}{x} = \frac{-\sin ۳۰^\circ}{\cos ۳۰^\circ} = -\tan ۳۰^\circ = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot(-۳۰^\circ) = \frac{x}{-y} = -\cot ۳۰^\circ = -\sqrt{۳}$$



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور افقی نقطه‌ای به مختصات $(x,-y)$ است.

در این قسمت دانش‌آموز ضمن آشنایی با مفهوم قرینه یک زاویه باید مهارت یابد زوایای منفی را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت (خلاف جهت مثلثاتی) روی دایره مثلثاتی شناسایی کند و دو زاویه که

مجموع آنها صفر شود را قرینه بداند. نظیر $\frac{\pi}{۷}$ رادیان و $\frac{-\pi}{۷}$ رادیان ۳۰° و -۳۰°.

همچنین به این مطلب که انتهای کمان‌های روبه‌روی زاویه‌های $\frac{-\pi}{۲}$ رادیان و $\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان، $\pi-$ رادیان و π رادیان، $\frac{-۳\pi}{۲}$ رادیان و $\frac{\pi}{۲}$ رادیان و امثالهم برهم منطبق هستند دقت کند.

در این صفحه، قبل از معرفی نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه، این نکته که قرینه نقطه‌ای به مختصات (x و y) نسبت به محور افقی (در اینجا محور کسینوس‌ها) نقطه‌ای به مختصات (x و $-y$) است مطرح شود تا دانش‌آموز رابطه بین مختصات نقاط P و P' در شکل را مورد توجه قرار دهد. سپس با فرض $\alpha=۳۰^\circ$ در $O\overset{\Delta}{P'}H$ مشابه نمونه خواهیم داشت:

$$\cos(-۳۰^\circ)=\frac{x}{r}=\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(توجه شود که در دایره مثلثاتی، $r=۱$) و دو سطر بعد را نیز مطابق حل تکمیل نماید.

توجه شود که در حالت کلی $x=\cos\alpha$ و $y=\sin\alpha$ (با توجه به اینکه $r=۱$) و بنابراین $\sin(-\alpha)=-y$ و $\cos(-\alpha)=x$ و در نهایت روابط نسبت‌های مثلثاتی زاویه $-\alpha$ در حالت کلی ارائه شود.

کار در کلاس صفحه ۷۹

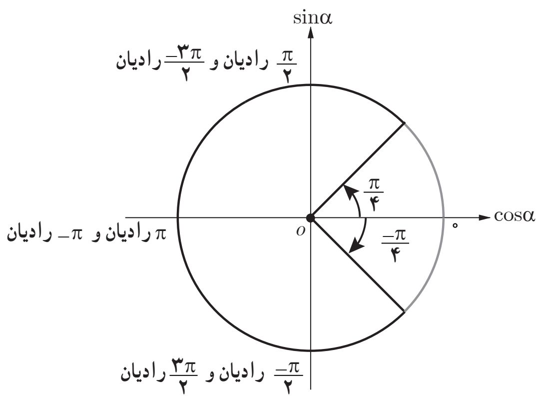
۱ سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $-\frac{\pi}{۴}$ رادیان را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\sin(-\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos(-\frac{\pi}{۴})=\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan(-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$

$$\cot(-\frac{\pi}{۴})=-\cot\frac{\pi}{۴}=-۱$$



۲ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\cot(\frac{-\pi}{۳})\times\cos(\frac{-\pi}{۶})+\tan(\frac{-\pi}{۴})=-\cot\frac{\pi}{۳}\times\cos\frac{\pi}{۶}-\tan\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۱=\frac{-۳}{۲}$$

الف) $$\frac{\cos(-۹۰^\circ)+\sin(-۲۷۰^\circ)}{\sin(-۱۸۰^\circ)-\cos(-۳۶۰^\circ)}=\frac{\cos ۹۰^\circ-\sin ۲۷۰^\circ}{-\sin ۱۸۰^\circ-\cos ۳۶۰^\circ}=\frac{۱}{-۱}=-۱$$

ب) $$\cot(\frac{-\pi}{۶})+\tan(\frac{-\pi}{۳})=-\cot\frac{\pi}{۶}-\tan\frac{\pi}{۳}=-\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=-۲\sqrt{۳}$$

پ) $$\cos(-۴۵^\circ)\times\cos(-۶۰^\circ)+\sin(-۴۵^\circ)\times\sin(-۶۰^\circ)=$$

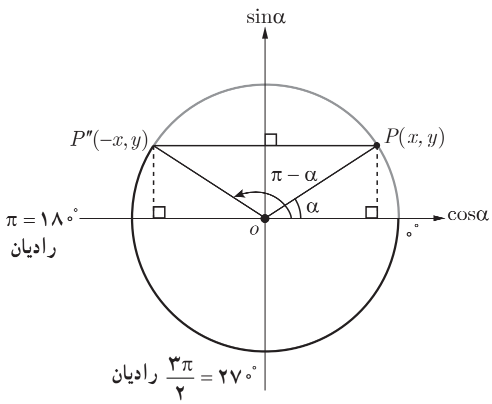
$$\cos ۴۵^\circ\times\cos ۶۰^\circ-\sin ۴۵^\circ\times(-\sin ۶۰^\circ)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}$$

در این قسمت عبارت‌ها طوری ساده شود که حتماً از روابط مذکور در نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه استفاده شود.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

فعالیت صفحه ۸۰

دو زاویهٔ α و β را مکمل گوییم؛ هرگاه مجموع آنها ۱۸۰° یا π رادیان شود. مثلاً دو زاویهٔ ۳۰° و ۱۵۰° مکمل یکدیگرند. همچنین دو زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان مکمل یکدیگرند (چرا؟). در دایرهٔ مثلثاتی زیر اگر $\alpha=۳۰^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطهٔ P'' و انتهای کمان زاویهٔ ۱۵۰° که در ربع دوم واقع است، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۵۰° عبارت‌اند از :



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور عمودی نقطه‌ای به مختصات $(-x,y)$ است.

$$\sin ۱۵۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=y=\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۱۵۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=-x=-\cos ۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan 150^\circ = \frac{\sin 150^\circ}{\cos 150^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\tan 30^\circ$$

$$\cot 150^\circ = \frac{1}{\tan 150^\circ} = -\sqrt{3} = -\cot 30^\circ$$

در ابتدای این مبحث پس از معرفی مفهوم دو زاویه مکمل و مثال‌های مختلف از این زاویه‌ها در هر دو حالت درجه و رادیان این نکته اشاره شود که قرینه یک نقطهٔ مختصات (x و y) نسبت به محور عمودی (در اینجا محور سینوس‌ها) نقطه‌ای به مختصات ($-x$ و y) است تا دانش‌آموز رابطه بین مختصات دو نقطه P و P'' در شکل این صفحه را درک کند. سپس از روی این شکل به ازای $\alpha = 150^\circ$ و با توجه به تصویر P'' روی محورهای کسینوس و سینوس حاصل $\sin 150^\circ$ و $\cos 150^\circ$ مطابق نمونه بیان شود و در ادامه جاهای خالی کامل گردد.

در ادامه حالت کلی نسبت‌های مثلثاتی $\pi - \alpha$ (مکمل زاویه α) ارائه شود.

کار در کلاس صفحه ۸۰

۱ مکمل هریک از زاویه‌های زیر را مشخص کنید :

الف) 75°

$180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$

مکمل زاویهٔ 75°، زاویهٔ 105° است.

ب) -25°

$180^\circ - (-25^\circ) = 205^\circ$

مکمل زاویهٔ -25°، زاویهٔ 205° است.

پ) $\frac{\pi}{12}$ رادیان

$\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$

مکمل زاویهٔ $\frac{\pi}{12}$ رادیان، $\frac{11\pi}{12}$ است.

ت) $-\frac{\pi}{4}$ رادیان

$\pi - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{5\pi}{4}$

مکمل زاویهٔ $-\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$ است.

در هر حالت بهتر است هر زاویه و مکمل آن روی شکل دایره مثلثاتی نمایش داده شود.

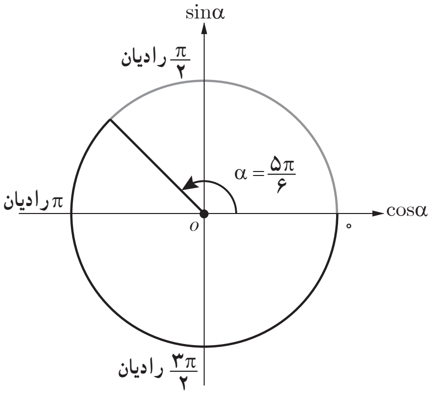
۲ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۶}$ رادیان را مطابق نمونه به‌دست آورید.

$$\sin\frac{۵\pi}{۶}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\frac{۵\pi}{۶}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\frac{۵\pi}{۶}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\tan\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot\frac{۵\pi}{۶}=\cot(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cot\frac{\pi}{۶}=-\sqrt{۳}$$



فعالیت صفحه ۸۱

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\tan\frac{\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$$

$$\cos\frac{۳\pi}{۴}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۴})=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin ۱۲۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cot(-۱۲۰^\circ)=-\cot(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=\cot ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$$

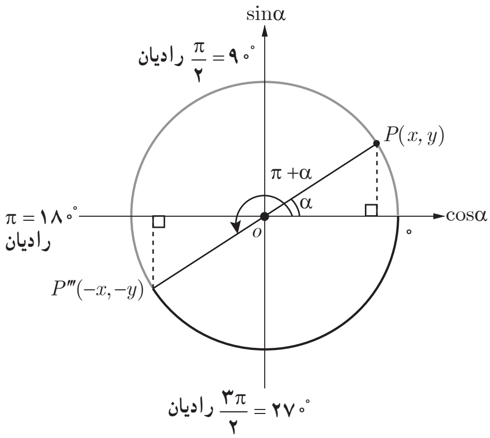
$$\cos(۱۳۵^\circ)=\cos(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)=-\cos ۴۵^\circ=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

هدف از ارائهٔ این فعالیت افزایش مهارت دانش‌آموز در به کارگیری روابط نسبت‌های مثلثاتی $\alpha^\circ - ۱۸۰^\circ$ یا (رادیان) $\pi-\alpha$ است.

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان

فعالیت صفحه ۸۱

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۲۱۰° را به دست آورید.



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به مبدأ مختصات نقطه‌ای به مختصات $(-x,-y)$ است.

انتهای کمان زاویه ۲۱۰° در ربع سوم واقع است. در ضمن $۲۱۰^\circ = ۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ$، یعنی اختلاف دو زاویهٔ ۲۱۰° و ۳۰° برابر با π رادیان است. در دایره مثلثاتی مقابل، اگر $\alpha = ۳۰^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P'''، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۲۱۰° عبارت‌اند از :

$$\sin ۲۱۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) = -y = -\sin ۳۰^\circ = \frac{-۱}{۲}$$

$$\cos ۲۱۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) = -x = -\cos ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

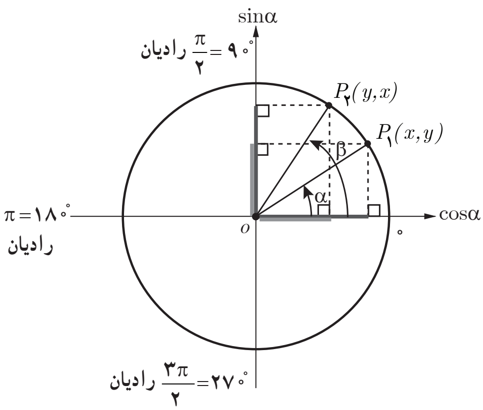
$$\tan ۲۱۰^\circ = \frac{\sin ۲۱۰^\circ}{\cos ۲۱۰^\circ} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \tan ۳۰^\circ$$

$$\cot ۲۱۰^\circ = \frac{۱}{\tan ۲۱۰^\circ} = \sqrt{۳} = \cot ۳۰^\circ$$

در این قسمت ابتدا با ذکر مثال‌هایی به دانش‌آموز آموزش داده شود زوایایی نظیر ۲۱۰° و ۳۰°، $\frac{۷\pi}{۶}$ و $\frac{\pi}{۶}$ رادیان اختلافی برابر با ۱۸۰° (یا π رادیان) دارند و با مفهوم دو زاویهٔ مکمل متفاوت است و نباید اشتباه شود. سپس به این نکته اشاره شود که قرینه نقطه‌ای به مختصات (x و y) نسبت به مبدأ مختصات، نقطه‌ای به مختصات ($-x$ و $-y$) است تا دانش‌آموز در شکل این فعالیت، رابطه بین مختصات نقاط P و P'' را درک کند. در ادامه، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۲۱۰° کامل شود و در نهایت در حالت کلی نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\pi + \alpha$ مطرح شود.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم

فعالیت صفحه ۸۲



$$\sin\frac{\pi}{۴}=\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan\frac{\pi}{۴}=\cot\frac{\pi}{۴}=۱$$

همچنین زاویه ۰ و $\frac{\pi}{۲}$ رادیان متمم یکدیگرند؛ بنابراین :

$$\sin\frac{\pi}{۲}=\cos ۰=۱$$

$$\tan\frac{\pi}{۲}=\cot ۰=$$ تعریف نشده

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ رادیان

فعالیت صفحه ۸۳

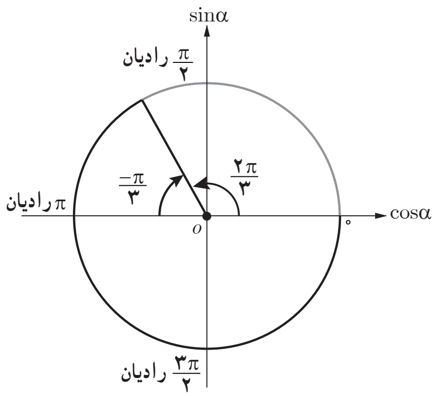
نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان را به‌دست آورید.

چون انتهای کمان زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان در ربع دوم واقع است، به دو روش می‌توان نسبت‌های مثلثاتی آن را یافت.

در این قسمت دو هدف دنبال می‌شود. یکی معرفی رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه نظیر $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان، $\frac{\pi}{۶}$ رادیان که اختلاف آنها $\frac{\pi}{۲}$ رادیان است، دوم ارائه مهارت به دانش‌آموز در انجام روش‌های مختلف به منظور یافتن نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مفروض. به عنوان مثال برای یافتن نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان به دو روش می‌توان عمل کرد.

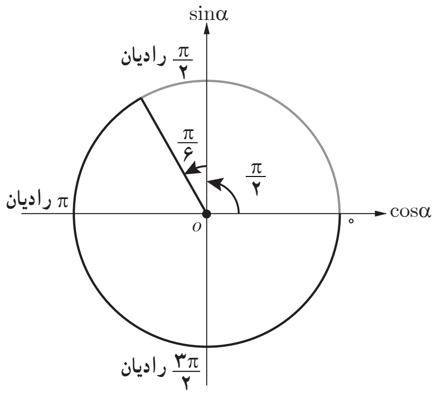
در روش اول این زاویه به‌صورت $\frac{۲\pi}{۳} = \pi - \frac{\pi}{۳}$ (یعنی به عنوان مکمل زاویه $\frac{\pi}{۳}$ رادیان) در نظر گرفته می‌شود. در این صورت، با توجه به روابط مربوط به نسبت‌های مثلثاتی مکمل یک زاویه داریم :

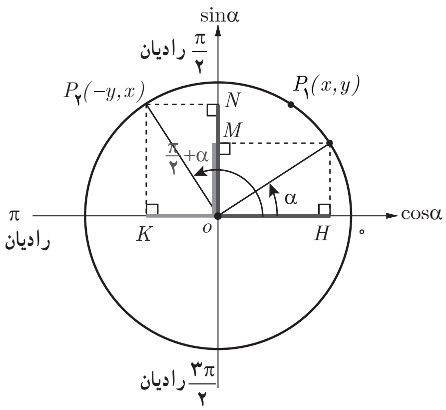
$$\sin\frac{۲\pi}{۳} = \sin(\pi - \frac{\pi}{۳}) = \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\cos\frac{۲\pi}{۳} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\cos\frac{\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}$$
$$\tan\frac{۲\pi}{۳} = \tan(\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\tan\frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$$
$$\cot\frac{۲\pi}{۳} = \cot(\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\cot\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$



در روش دوم این زاویه به‌صورت $\frac{۲\pi}{۳} = \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}$ (یعنی زاویه‌ای که اختلاف آن با $\frac{\pi}{۶}$ رادیان برابر با $\frac{\pi}{۲}$ است) در نظر گرفته می‌شود. حال با توجه به شکل و قرار گرفتن انتهای کمان درربع دوم و مشابه توصیفی که در قسمت دو زاویه متمم ارائه شد، خواهیم داشت :

$$\sin\frac{۲\pi}{۳} = \sin(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}) = \cos\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\cos\frac{۲\pi}{۳} = \cos(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}) = -\sin\frac{\pi}{۶} = -\frac{۱}{۲}$$
$$\tan\frac{۲\pi}{۳} = \tan(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}) = -\cot\frac{\pi}{۶} = -\sqrt{۳}$$
$$\cot\frac{۲\pi}{۳} = \cot(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}) = -\tan\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$





به این ترتیب این مطلب به دانش‌آموز ارائه شود که از هر دو روش نتایج یکسان خواهد بود و به‌کارگیری هر کدام از روابط مذکور مجاز است.

برای فهم بهتر در شکل دایره مثلثاتی صفحه ۸۴ با نام‌گذاری نقاط مطابق شکل روبه‌رو، در مثلث $OP_۱H$ داریم :

$$\sin\alpha = P_۱H = OM = y$$

از طرفی چون انتهای کمان زاویه $\frac{\pi}{۲} + \alpha$ در ربع دوم است، $\cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = oK = -y$ یعنی $\cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\sin\alpha$، این مطلب با رنگ سبز در شکل مشخص شده است.

به‌طور مشابه در مثلث $OP_۱H$ داریم : $\cos\alpha = OH = x$

از طرفی : $\sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = NO = x$ یعنی $\sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \cos\alpha$

این مطلب به رنگ قرمز در شکل مشخص شده است. در نهایت صورت کلی روابط نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{\pi}{۲} + \alpha$ ارائه شود.

حل برخی از تمرین‌های درس دوم

۲

دانش‌آموزان در تکمیل این جدول، از روابط قید شده در درس استفاده کنند.

مثلاً : $\sin ۲۲۵^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\sin ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

زاویه x / نسبت	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
$\sin x$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$
$\cos x$	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\tan x$	$-\sqrt{۳}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	$-\sqrt{۳}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
$\cot x$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	-۱	$-\sqrt{۳}$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$-\sqrt{۳}$

۳

الف) $\sin ۸۴۰^\circ = \sin ۶۰^\circ$

$\sin ۸۴۰^\circ = \sin (۴ \times ۱۸۰^\circ + ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = \sin (۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = \sin ۶۰^\circ$

ب) $\cos (-۳۲۴^\circ) = \cos ۳۶^\circ$

$\cos (-۳۲۴^\circ) = \cos ۳۲۴^\circ = \cos (۲ \times ۱۸۰^\circ - ۳۶^\circ) = \cos ۳۶^\circ$

پ) $\tan (-۱۰۰۰^\circ) = \tan ۸۰^\circ$

$\tan (-۱۰۰۰^\circ) = -\tan (۱۰۰۰^\circ) = -\tan (۶ \times ۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ) = \tan ۸۰^\circ$

ت) $\sin ۸۷۵^\circ = \sin ۱۵۵^\circ$

$\sin ۸۷۵^\circ = \sin (۴ \times ۱۸۰^\circ + ۱۵۵^\circ) = \sin ۱۵۵^\circ$

۴

الف) $x + ۲۰^\circ + x = ۹۰^\circ \rightarrow x = ۳۵^\circ$

خیر. مثلاً $x = ۳۹۵^\circ$ نیز در تساوی صدق می‌کند.

ب) $x + \frac{\pi}{۱۸}$ رادیان $+ \frac{۲\pi}{۹}$ رادیان $+ x =$ رادیان $\frac{\pi}{۲} \rightarrow x =$ رادیان $\frac{\pi}{۹}$

خیر. مثلاً $x = \frac{۱۹\pi}{۹}$ نیز در تساوی صدق می‌کند.

دانش‌آموزان با توجه به نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم، روابط بالا را می‌توانند نتیجه بگیرند، اما برای یکتایی پاسخ ارائه‌شده باید برای دانش‌آموزان توضیح دهیم که با افزودن مضارب زوج π رادیان، می‌توان زوایای بسیاری یافت که در تساوی‌های الف و ب صدق می‌کنند.