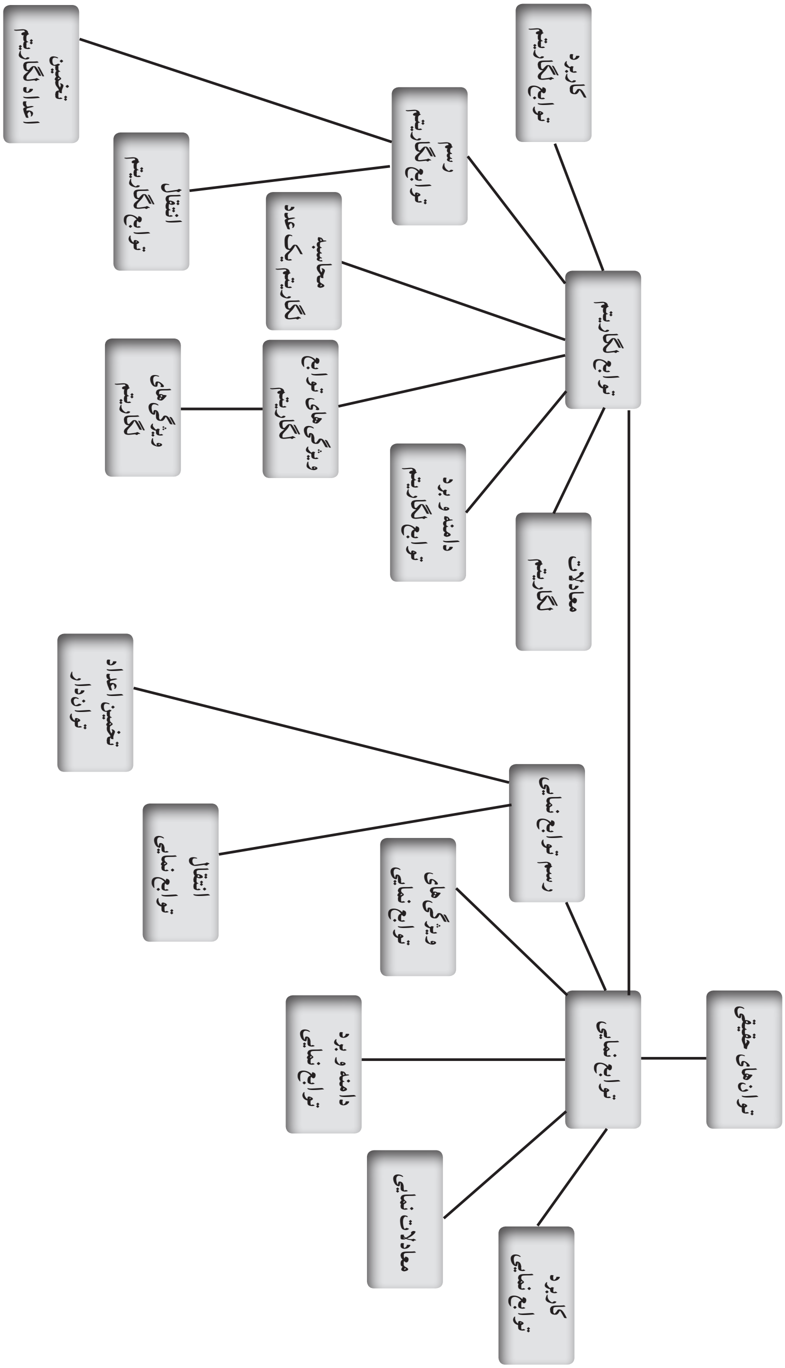
فصل ۵

توابع نمایی و لگاریتمی

اهداف کلی فصل

- ❑ آشنایی با توان‌های حقیقی
- ❑ آشنایی با توابع نمایی و نمودارهای آنها
- ❑ آشنایی با ویژگی‌های توابع نمایی
- ❑ حل معادلات نمایی
- ❑ آشنایی با توابع لگاریتمی و نمودارهای آنها
- ❑ آشنایی با ویژگی‌های توابع لگاریتمی
- ❑ حل معادلات لگاریتمی
- ❑ آشنایی با کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی
- ❑ آشنایی با انتقال نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی

نقشه‌های مفهومی



دانستنی برای معلم

خلاصه‌ای از تاریخ پیدایش لگاریتم :

جان‌نپر ریاضی‌دان اسکاتلندی در سال ۱۶۱۴ میلادی کتابی به زبان لاتین تحت عنوان «توصیفی بر قانون شگفت‌انگیز لگاریتم» منتشر کرد که فوق‌العاده مورد توجه ریاضی‌دانان آن زمان قرار گرفت، جدول این کتاب بعدها به جدول لگاریتم معروف شد.

نپر برای محاسبات این کتاب بیست سال زحمت کشیده بود. مبنای لگاریتم نپر عدد e (عدد اویلر) است که مقدار آن از سری $e=۱+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\cdots$ یا از حد به‌دست $\lim\limits_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n=e$ به‌دست می‌آید.
مقدار تقریبی این عدد ۲/۷۱۸۲۰۰۰۰ است.

یک سال پس از انتشار این کتاب، یک دبیر ریاضی در انگلستان به نام بریگز، از کار خود دست کشید و به اسکاتلند نزد نپر رفت و ضمن تشویق و قدردانی، از او خواست که جدول لگاریتمی برمبنای ۱۰ بنویسد. نپر نیز از این پیشنهاد استقبال کرد ولی عمرش کفاف نداد که آن را به پایان برساند. بریگز کار نیمه تمام نپر را ادامه داد تا در سال ۱۶۲۴ میلادی جدول لگاریتم دهگانی را به پایان رسانید. این جدول بعدها به‌وسیلهٔ دیگران تکمیل شد.

کاربرد جالبی از لگاریتم :

در انتهای درس سوم این فصل فرمول بین انرژی آزاد شده در زلزله (برحسب ارگ) و ریشتر (مقیاس بزرگی زمین‌لرزه) به‌صورت زیر آمده است :

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵\ M$$

که E مقدار انرژی آزاد شده و M اندازهٔ ریشتر زلزله است.

یک سؤال اینجا مطرح می‌شود که اگر اندازهٔ بزرگی زمین‌لرزه برحسب ریشتر یک واحد بزرگ‌تر شود، انرژی آن چند برابر می‌شود؟ مثلاً چه تفاوتی از نظر میزان انرژی آزادشده بین زلزلهٔ ۶ ریشتری و ۷ ریشتری وجود دارد؟

زلزلهٔ ۶ ریشتری $\to \log E_۱ = ۱۱/۸ + ۱/۵(۶) = ۲۰/۸$

میزان انرژی آزاد شده در زلزلهٔ ۶ ریشتری : $\to E_۱ = ۱۰^{۲۰/۸}\ Erg$

زلزلهٔ ۷ ریشتری $\to \log E_۲ = ۱۱/۸ + ۱/۵(۷) = ۲۲/۳$

میزان انرژی آزاد شده در زلزلهٔ ۷ ریشتری : $\to E_۲ = ۱۰^{۲۲/۳}\ Erg$

بنابراین :

$$\frac{E_۲}{E_۱}=\frac{۱۰^{۲۲/۳}}{۱۰^{۲۰/۸}}=۱۰^{۱/۵}\simeq ۳۱/۶۲$$

یعنی با یک واحد افزایش در مقیاس ریشتر، انرژی آزاد شده تقریباً ۳۲ برابر می‌شود.

تصویر عنوانی

تصویر عنوانی این فصل شامل دو تصویر است :

۱ سنگ نوشته‌های گنج‌نامه : نوشتارهایی از دوران داریوش و خشایار شاه هخامنشی است که بر دل یکی از صخره‌های الوند در فاصله ۵ کیلومتری غرب همدان و در انتهای درهٔ عباس‌آباد حکاکی شده است و قدمتی حدود ۲۵۰۰ سال دارد.

۲ ریتون طلایی هگمتانه (کشف‌شده در همدان) شاهکار هنر فلزکاری عصر هخامنشیان با قدمتی بیش از ۲۵۰۰ سال.

روش سال‌یابی کربن ۱۴ یکی از روش‌های بسیار متداول است که از آن در سطح گسترده‌ای استفاده می‌شود و یکی از تکنیک‌هایی است که به خوبی زمان مطلق را تعیین می‌کند. این روش اولین بار در سال ۱۹۴۹ توسط $J.R.Arnold$ و $W.F.Libby$ استفاده شد و از آن زمان به بعد باستان‌شناسان برای تعیین سن مطلق آثار باستانی از این روش استفاده می‌کنند. اتمسفر بالایی زمین توسط پرتوهای کیهانی بمباران می‌شود و باعث شکسته شدن نیتروژن موجود در اتمسفر و تبدیل ایزوتوپ پایدار کربن ۱۲ به ایزوتوپ ناپایدار کربن ۱۴ می‌شود. ایزوتوپ ناپایدار از طریق فعالیت اتمسفر به زمین آورده می‌شود، این فعالیت‌ها شامل توفان‌های ناگهانی است و این عمل باعث تثبیت فعالیت‌های بیوسفری می‌شود زیرا این ایزوتوپ‌های ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ به‌صورت کاملاً یکسان با کمپلکس‌های مولکولی آلی واکنش انجام می‌دهند و این عمل روی فرایندهای فتوسنتزی گیاهان تأثیر می‌گذارد. جانورانی که از این گیاهان استفاده می‌کنند ایزوتوپ کربن ۱۴ را به‌خوبی جذب می‌کنند و آن را به ایزوتوپ پایدار تبدیل می‌کنند. کربن ۱۴ دائماً در حال تخریب شدن و تبدیل به ایزوتوپ پایدار کربن است. موجودات زنده در طول حیات خود به میزان بالایی، ایزوتوپ کربن ۱۴ را جذب می‌کنند و نسبت کربن ۱۴ به کربن ۱۲ که در اجساد و بقایای جانداران وجود دارد همانند نسبت اتمسفری این ایزوتوپ‌ها است. وقتی که موجودات زنده می‌میرند نسبت کربن ۱۴ که در اجساد آنها وجود دارد به تدریج کم می‌شود. نسبت کاهش این ایزوتوپ $\frac{۱}{۲}$ است و ۵۷۳۰ سال طول می‌کشد تا این کربن در اجساد باقی‌مانده از بین برود.

فرمول زیر جهت تعیین سن یک نمونه باستانی به کمک کربن ۱۴ استفاده می‌شود :

$$T = \left[Ln(\frac{nf}{n\circ}) / (-۰/۶۹۳) \right] \times t_{۱/۲}$$

$\frac{nf}{n\circ}$: درصد کربن ۱۴ در نمونه به درصد کربن ۱۴ در بافت زنده

$t_{۱/۲}$: نیمه عمر کربن ۱۴

مثلاً اگر یک فسیل با ۱۰ درصد کربن ۱۴ نسبت به یک جاندار زنده داشته باشیم، خواهیم داشت :

$$T = [Ln\,(۰/۱۰) / (-۰/۶۹۳)] \times ۵۷۳۰$$

$$= [(-۲/۳۰۳) / (-۰/۶۹۳)] \times ۵۷۳۰ = ۱۹۰۴۲$$ سال

درس اول

تابع نمایی و ویژگی‌های آن

اهداف درس

۱ آشنایی با توان‌های گنگ
۲ آشنایی با تابع نمایی و ضابطهٔ آن
۳ آشنایی با نحوهٔ رسم نمودار توابع نمایی
۴ تقریب مقدار اعداد توان‌دار با استفاده از نمودار
۵ آشنایی با ویژگی‌های توابع نمایی
۶ تشخیص دامنه و برد توابع نمایی
۷ حل معادلات نمایی

پیش نیازها

۱ آشنایی با قوانین توان‌های گویا
۲ رسم نمودار توابع با استفاده از جدول مقادیر
۳ تشخیص دامنه و برد یک تابع با استفاده از نمودار آن
۴ آشنایی با تابع یک به یک و تشخیص آن با استفاده از نمودار آن

روش تدریس

در این درس دانش‌آموزان با مفهوم جدیدی به نام تابع نمایی آشنا می‌شوند. این تابع برای توصیف و مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های طبیعی و به‌ویژه مسائل رشد و زوال استفاده می‌شود.

فعالیت صفحه ۹۶

فعالیت اول درس با یک مثال با مضمون فوتبال که مورد علاقه اکثر دانش‌آموزان است، آغاز شده است و ارتباط نمایی بین تعداد مراحل بازی و تعداد کل تیم‌ها مورد نظر بوده است. باید از ارائهٔ پاسخ درست، بلافاصله پس از مطرح کردن صورت فعالیت پرهیز کرد و تنها نقش هدایتگر را در کلاس داشت. سعی شود دانش‌آموزان به سؤال‌های ۱ تا ۶ این فعالیت پاسخ دهند.

سؤال ۱ و ۲ را به‌راحتی با توجه به نمودار صفحهٔ ۹۶ پاسخ می‌دهند.

سپس با تفکر باید پاسخ سؤال ۳ را بیان کنند :

۱ در بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟ ۲ تیم

۲ در مرحله قبل از بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟ ۴ تیم

۳ تعداد تیم‌ها در هرمرحله با تعداد تیم‌ها در مرحلهٔ قبل از آن چه ارتباطی دارد؟ تعداد تیم‌ها در مرحلهٔ قبل = تعداد تیم‌ها در هر مرحله × ۲

۴ چه رابطه‌ای بین تعداد مراحل و تعداد کل تیم‌های شرکت‌کننده در این مسابقات برقرار است؟

$۲^{(\text{تعداد مراحل})}$ = تعداد کل تیم‌های شرکت‌کننده

۵ باتوجه به الگوی ارائه شده درشکل، اگر تعداد مراحل برابر ۶ باشد، تعداد تیم‌های اولیه چند تاست؟

۶۴ = $۲^۶$ = تعداد تیم‌های اولیه

۶ اگر تعداد مراحل x و تعداد کل تیم‌ها y باشد، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟ $y=۲^x$

این فعالیت طوری طراحی شده که دانش‌آموز بتواند به آسانی به سؤالات فوق پاسخ دهد و الگوی نمایی مستتر در شکل را کشف کنند.

در ابتدای صفحهٔ ۹۸، توان‌های حقیقی و ویژگی‌های مقدماتی آنها به‌طور خلاصه معرفی می‌شود که با توجه به زمان کلاس می‌توانید مثال‌هایی از آنها را حل کنید.

کار در کلاس صفحه ۹۸

این کار در کلاس تفاوت‌ها و شباهت‌های دو تابع $y=x^۲$ و $y=۲^x$ را از طریق رسم نمودار آموزش می‌دهد.

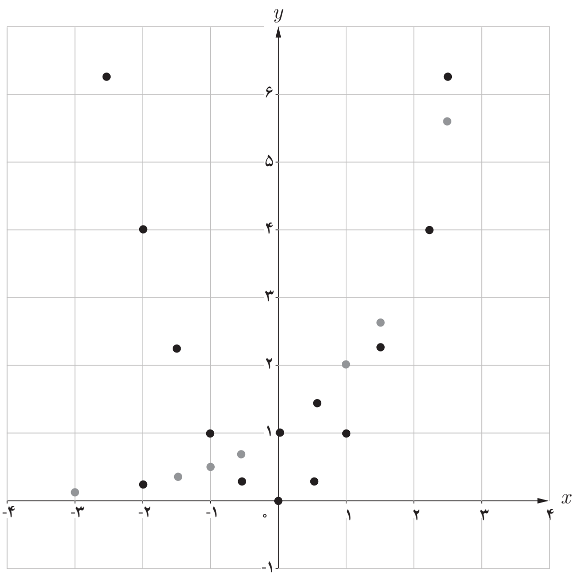
۱ نمودارهای توابع با ضابطه‌های $y=x^۲$ و $y=۲^x$ را با تکمیل جدول‌های زیر رسم کنید. مقادیر به‌صورت تقریبی نوشته شده است.

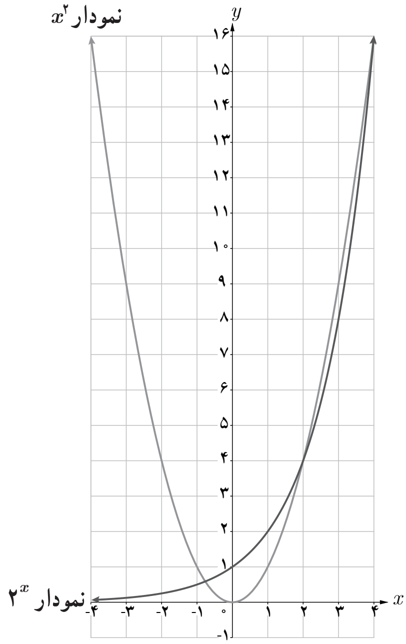
x	$-\frac{۵}{۲}$	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$
$y=x^2$	۶/۲۵	۴	۲/۲۵	۱	۰/۲۵	۰	۰/۲۵	۱	۲/۲۵	۴	۶/۲۵

x	-۳	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$
$y=2^x$	۰/۱۲	$\frac{۱}{۴}$	۰/۳۵	۰/۵	۰/۷۱	۱	۱/۴	۲	۲/۸۳	۴	۵/۶۶

۲ حال این دو نمودار را دریک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. در چند نقطه مقادیر 2^x و x^2 باهم مساوی‌اند؟ سه نقطه

۳ در x^2، متغیر در **پایه** و عدد ثابت در **توان** است؛ ولی در 2^x، **متغیر** در توان و عدد **ثابت** درپایه است.





این سؤال در بسیاری از کتب درسی متوسطه طرح می‌شود زیرا در تابع نمایی، دانش‌آموز برای نخستین بار متغیر را در توان می‌بیند و ممکن است آن را با تابع $y=x^2$ اشتباه بگیرد.

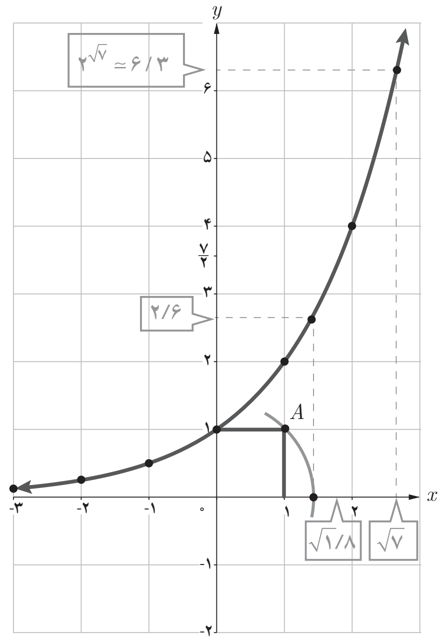
برای حل سؤالات این کار در کلاس ابتدا دو جدول تکمیل می‌شوند و سپس نمودار سمت چپ تکمیل شود. سؤال ۲ با توجه به نمودار سمت راست با راهنمایی معلم پاسخ داده می‌شود. نمودار 2^x و x^2 در سه نقطهٔ ۴ و ۲ و ۰/۷۵− با هم مقدار مساوی دارند. سؤال ۳ به جایگاه متفاوت توان و عدد ثابت در این دو تابع اشاره دارد و تکراری نبودن کلمات جاهای خالی تفکر بیشتر دانش‌آموز را در پی دارد.

در ابتدای صفحهٔ ۹۹، به‌طور رسمی تابع نمایی معرفی می‌شود، تأکید بر مثبت بودن و مخالف یک بودن پایه از فصل ۳ ریاضی ۱ آغاز شده و در کتاب ریاضی ۲ در تعریف تابع نمایی استفاده شده است. علاوه بر مثال‌هایی که در کتاب آورده شده است، شما می‌توانید از دانش‌آموزانتان بخواهید تا چند تابع نمایی مثال بزنند.

فعالیت صفحه ۹۹

این فعالیت بسیار مهم بوده و حل آن در کلاس ضروری است.

درشکل زیر نمودار تابع نمایی با ضابطهٔ $y=2^x$ رسم شده است.



۱ محل تقاطع این نمودار با محور عرض‌ها چه نقطه‌ای است؟ نقطهٔ (۰,۱)

۲ دامنه و برد این تابع را به صورت بازه بنویسید. $D = (-\infty\ ,+\infty)$ و $R = (\circ , +\infty)$
تأکید بر استفاده از نمادهای دامنه و برد ضروری است.

۳ آیا این تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟ بله، زیرا خطوط موازی محور xها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کنند.

۴ عدد $\sqrt{۲}$ را روی محور xها مشخص کنید و به کمک نمودار، مقدار $۲^{\sqrt{۲}}$ را به‌صورت تقریبی به‌دست آورید. با توجه به نمودار، کمان OA را رسم می‌کنیم تا محور xها را در نقطه $\sqrt{۲}$ قطع کند سپس به نمودار و محور yها عمود می‌کنیم عدد تقریبی ۲/۶ به‌دست می‌آید.

۵ عدد $\frac{۷}{۲}$ روی محور yها مشخص شده است. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی عدد a را روی محور طول‌ها به‌دست آورید؛ به طوری‌که $۲^a \simeq \frac{۷}{۲}$. این سؤال، به نوعی تابع وارون را یادآوری می‌کند. از نقطه $\frac{۷}{۲}$ که روی محور yها مشخص شده عمودی بر نمودار و سپس بر محور xها رسم می‌کنیم که نقطه ۱/۸ به‌دست می‌آید.

۶ اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$۲^{-۱}\quad , \quad ۲^{-\circ/۴}\quad , \quad ۲^{۵}\quad , \quad ۲^{\circ/۳}\quad , \quad ۲^{\frac{۵}{۲}}\quad , \quad ۲^{\frac{۳}{۲}}\quad , \quad ۲^{\sqrt{۵}}$$

$$۲^{-۱} < ۲^{-\circ/۴} < ۲^{\circ/۳} < ۲^{\frac{۳}{۲}} < ۲^{\sqrt{۵}} < ۲^{\frac{۵}{۲}} < ۲^{۵}$$

۷ درحالت کلی اگر $x<y$، چه رابطه‌ای بین ۲^x و ۲^y برقرار است؟

$$x < y \rightarrow ۲^x < ۲^y$$

در سؤال ۱ با توجه به نموداری که در کتاب رسم شده است، پاسخ داده می‌شود. اگر عدد ۱ را هم به عنوان پاسخ بنویسند صحیح است. توجه کافی به این نقطه و توضیح آن یکی از ویژگی‌های مهم تابع نمایی را مشخص می‌سازد. در سؤال ۲ دانش‌آموزان با توجه به نمودار ۲^x و از روش‌هایی که در سال دهم آموخته‌اند، دامنه و برد این تابع را می‌نویسند. سؤال ۳ را با توجه به مطالبی که در فصل ۳ (تابع) خوانده‌اند، می‌توانند پاسخ دهند. سؤال ۴ مطلب مهمی را آموزش می‌دهد و آن تخمین اعداد توان‌دار با استفاده از نمودار تابع نمایی است. برای حل این سؤال از روش نوشته شده می‌توانید استفاده کنید یا به‌طور تقریبی عدد $\sqrt{۲}$ را روی محورها مشخص کرده $(\sqrt{۲} \simeq ۱/۴)$ و سپس باقی حل را مانند قبل انجام می‌دهید. در سؤال ۵ مقدار مجهول در توان ۲ ظاهر شده است، این سؤال به‌طور ضمنی مفهوم لگاریتم که موضوع درس دوم این فصل است را آموزش می‌دهد.

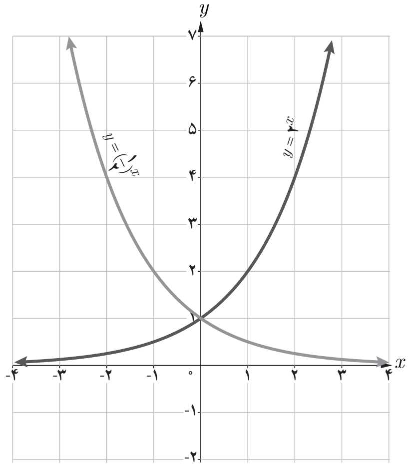
ارائهٔ سؤالاتی مشابه سؤال ۴ و ۵ در کلاس و همچنین آزمون‌های کلاسی مفید می‌باشد. در سؤال ۶ این فعالیت، چند عدد توان‌دار با پایه ۲ نوشته شده است که باید از کوچک به بزرگ نوشته و مرتب شوند. در

این کتاب، مفهوم تابع صعودی و نزولی ارائه نشده و هدف این سؤال هم ذکر این مفاهیم و تعریف آنها نیست. صرفاً باید با توجه به نمودار این ارتباط را درک کرده و اعداد را به ترتیب بنویسند. سؤال ۷ نیز مقدمه‌ای بر مفهوم تابع صعودی است.

در صفحهٔ ۱۰۱، مطلبی خواندنی دربارهٔ نرم‌افزار $Geo\ \ Gebra$، آورده شده است. این نرم‌افزار، برای دبیران ریاضی بسیار کارآمد و مفید بوده که در صورت امکان کار با آن به دانش‌آموزان نیز بهتر است تعلیم داده شود.

کار در کلاس صفحه ۱۰۲

نمودار توابع با ضابطه‌های $y=۲^{-x}$ و $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را در نظر بگیرید.



۱ نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور مختصات قرینه‌اند؟ محور yها

۲ با جایگذاری $-x$ به جای x در تابع با ضابطهٔ $y=۲^x$ به تابع با ضابطهٔ $y=۲^{-x}$ یا همان $y=(\frac{۱}{۲})^x$ دست می‌یابیم.

۳ دامنه و برد این دو تابع چه رابطه‌ای با هم دارند؟ با هم مساوی‌اند.

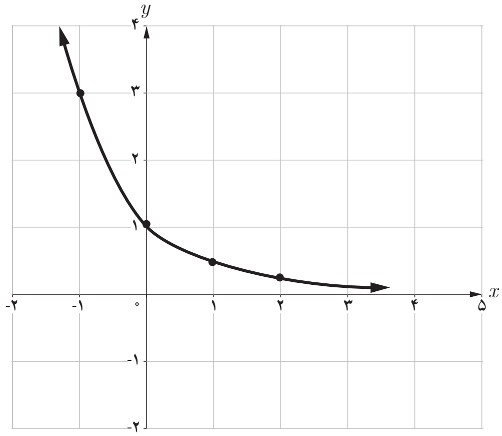
۴ دو تابع نمایی دیگری که نسبت به محور yها قرینه‌اند، مثال بزنید.

$y=(\frac{۵}{۲})^x$ و $y=(\frac{۲}{۵})^x$ و $y=(\frac{۱}{۳})^x$ و $y=۳^x$

در این کار در کلاس، تقارن نمودار توابع با ضابطه‌های $y=۲^x$ و $y=(\frac{۱}{۲})^x$ نسبت به محور yها مورد توجه قرار گرفته است. در سؤال ۲ با جایگذاری $-x$ به جای x در تابع با ضابطهٔ $y=۲^x$، بـه تـابع با ضابـطهٔ $y=۲^{-x}$ یا همان $y=(\frac{۱}{۲})^x$ دست می‌یابیم. هدف سؤال ۳، تأکید بر این نکته است که توابع نمایی، دامنه و برد یکسان دارند. سؤال ۴ سؤالی باز پاسخ است و دانش‌آموزان می‌توانند مثال‌های زیادی برای آن ارائه کنند.

کار در کلاس صفحه ۱۰۲

نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{۱}{۳})^x$ را رسم کنید.



x	y
۱-	۳
۰	۱
۱	$\frac{۱}{۳}$
۲	$\frac{۱}{۹}$

این سؤال نیز برای تسلط بیشتر دانش‌آموزان به رسم توابع نمایی با ضابطه‌هایی به‌صورت $y=a^x$ $(۰<a<۱)$ آورده شده است.

فعالیت صفحه ۱۰۳

با توجه به مطالبی که در این درس آموخته اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

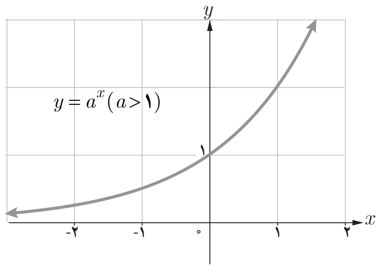
۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=a^x$ $(a>۱)$ مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آن $(۰ , +\infty)$ است.

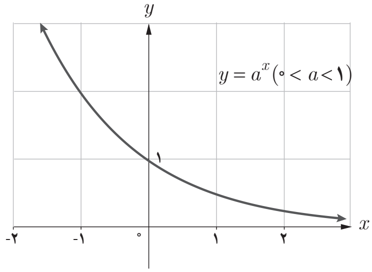
۲ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=a^x$ $(۰<a<۱)$ $\mathbb{R}$ و برد آن بازهٔ $(۰ , +\infty)$ است.

۳ نمودار توابع فوق محور yها را درنقطهٔ $(۰ , ۱)$ قطع می‌کند و محور xها را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.

۴ این دو تابع، یک به یک‌اند زیرا خطوط موازی محور xها، نمودار آنها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

نمودار توابع نمایی در حالت کلی مشابه نمودارهای صفحه بعد است.





تمام مطالب که از ابتدای درس اول تا این صفحه ارائه شده‌اند، در این فعالیت جمع‌بندی شده است.

معادلات نمایی نیز در صفحهٔ ۱۰۳ تعریف شده و با استفاده از یک به یک بودن تابع نمایی، روش حل آنها توضیح داده می‌شود :

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

در حل معادله‌های نمایی باید این نکته توضیح داده شود که در حل، ابتدا دو طرف معادله را هم پایه می‌کنیم و سپس توان‌ها را مساوی هم قرار داده و مجهول را می‌یابیم. بهتر است علاوه بر مثال‌های کتاب، چند نمونه دیگر نیز حین تدریس در کلاس حل شود.

حل برخی از تمرین‌های درس اول

۶ برای حل معادلات نمایی ابتدا پایه‌های دو طرف تساوی را یکسان می‌کنیم.

الف) $2^{3n-2} = \frac{1}{32^2} \Rightarrow 2^{3n-2} = \frac{1}{(2^5)^2} \Rightarrow 2^{3n-2} = \frac{1}{2^{10}} \Rightarrow 2^{3n-2} = 2^{-10} \Rightarrow$

$3n - 2 = -10 \Rightarrow 3n = -8 \Rightarrow n = \frac{-8}{3}$

ب) $9^{3y-3} = 27^{y+1} \Rightarrow (3^2)^{3y-3} = (3^3)^{y+1}$

$3^{6y-6} = 3^{3y+3} \Rightarrow 6y - 6 = 3y + 3 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = 3$

پ) $4^{3x+2} = \frac{1}{64^3} \Rightarrow 4^{3x+2} = \frac{1}{(4^3)^3} \Rightarrow 4^{3x+2} = 4^{-9}$

$3x + 2 = -9 \Rightarrow x = \frac{-11}{3}$

ت) $9^x = 3^{x^2-4x} \Rightarrow (3^2)^x = 3^{x^2-4x} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{x^2-4x} \Rightarrow$

$$x^2 - 4x = 2x \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$$

ث) $(\frac{3}{5})^{x+1} = \frac{25}{9} \Rightarrow (\frac{3}{5})^{x+1} = (\frac{5}{3})^2 \Rightarrow (\frac{3}{5})^{x+1} = (\frac{3}{5})^{-2} \Rightarrow$

$x + 1 = -2 \Rightarrow x = -3$

درس دوم

تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

اهداف درس

۱ آشنایی با تابع لگاریتمی و ارتباط آن با تابع نمایی
۲ آشنایی با ضابطهٔ تابع لگاریتمی
۳ آشنایی با نحوهٔ رسم نمودار توابع لگاریتمی
۴ تشخیص ضابطهٔ تابع لگاریتمی با توجه به نمودار آن
۵ آشنایی با ویژگی‌های توابع لگاریتمی
۶ تشخیص دامنه و برد توابع لگاریتمی
۷ تعیین مقدار لگاریتم یک عدد با توجه به نمودار تابع لگاریتمی آن
۸ تبدیل یک تساوی لگاریتمی به تساوی نمایی و برعکس
۹ آشنایی با قضایای لگاریتم
۱۰ حل معادلات لگاریتمی

پیش‌نیازها

۱ آشنایی با تابع وارون یک تابع و رسم نمودار آن
۲ آشنایی با رسم نمودار یک تابع با استفاده از جدول مقادیر
۳ تشخیص دامنه و برد یک تابع با استفاده از نمودار آن
۴ آشنایی با تجزیه اعداد
۵ آشنایی با حل معادلات درجهٔ دوم

روش تدریس

در این درس، دانش‌آموزان با یکی از مهم‌ترین توابع ریاضی در سطح مقدماتی یعنی تابع لگاریتمی آشنا می‌شوند که هم در زندگی روزمره و هم در علوم مختلف بسیار کاربرد دارد. توصیه می‌شود قبل از شروع درس راجع به کاربردهای این تابع که در قسمت‌های خواندنی درس دوم آورده شده است، توضیحات مختصری داده شود. از خود دانش‌آموزان نیز می‌توانید بخواهید که قبل از شروع درس در این زمینه تحقیق کنند و اطلاعاتی کسب نمایند.

فعالیت صفحه ۱۰۵

۱ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} در نمودار قبل را به‌دست آورید.

$$D_f = \mathbb{R}\ ,\ R_f = (0, +\infty) \qquad D_{f^{-1}} = (0, +\infty)\ ,\ R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

$$f(-2) = \frac{1}{4} \qquad f(-1) = \frac{1}{2} \qquad f(0) = 1 \qquad f(2) = 4$$

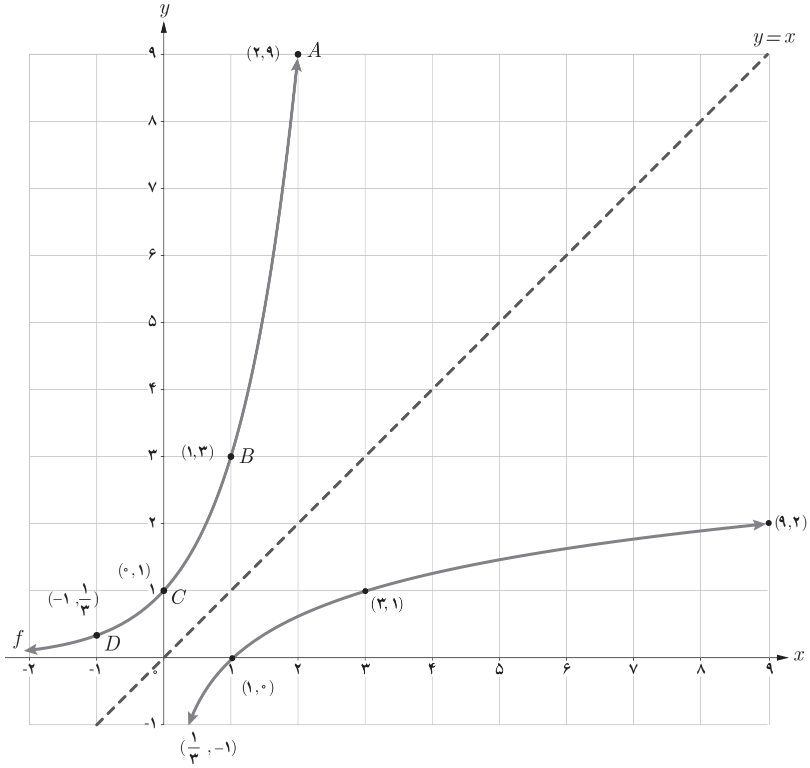
$$f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \qquad f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \qquad f^{-1}(1) = 0 \qquad f^{-1}(4) = 2$$

این فعالیت برای روشن ساختن ارتباط بین تابع نمایی و تابع لگاریتمی طراحی شده است و تمرکز بر وارون‌پذیر بودن تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x) = 2^x$ می‌باشد که این امر را دانش‌آموزان از درس قبل فراگرفته و در نمودار هم واضح است که تابع وارون دارد. چند نقطه نیز روی نمودار مشخص شده است که درک نمودار وارون این تابع را راحت‌تر می‌سازد. در واقع در این فعالیت صرفاً برای تابعی که در درس اول با آن آشنا شده‌اند و با توجه به یک به یک بودن آن، نمودار وارون آن رسم شده است. توصیه می‌شود نام تابع لگاریتمی در این فعالیت آورده نشود. سؤالات ۱ و ۲ در ابتدای صفحهٔ ۱۰۶ که در بالا پاسخ داده شده‌اند، با توجه به نقاط نمودارهای f و f^{-1} نوشته می‌شوند.

فعالیت صفحه ۱۰۶

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۳^x$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

۱ با توجه به نقاط نمودار f، نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.



۲ با توجه به نقاط f و $f^{-۱}$ در نمودار قبل، جاهای خالی را تکمیل کنید.

$f(-۲) = \frac{۱}{۹}$ $\quad$ $f(۰) = ۱$ $\quad$ $f(۱) = ۳$ $\quad$ $f(۲) = ۹$

$f^{-۱}(\frac{۱}{۹}) = -۲$ $\quad$ $f^{-۱}(۱) = ۰$ $\quad$ $f^{-۱}(۳) = ۱$ $\quad$ $f^{-۱}(۹) = ۲$

۳ دامنه و برد دو تابع f و $f^{-۱}$ را به‌دست آورید.

$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = (۰, +\infty)$ $\qquad$ $D_{f^{-۱}} = (۰, +\infty)$, $R_{f^{-۱}} = \mathbb{R}$

با توجه به مطالب فوق، وارون تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۳^x$ را به‌صورت $f^{-۱}(x) = \log_۳ x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتمِ x در مبنای ۳ می‌نامیم. به عبارت دیگر توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگرند.

۴ با توجه به نمودار توابع نمایی و لگاریتمی، دامنه و برد آنها را به‌طور کلی بنویسید.

$D_f=\mathbb{R}\ ,\ R_f=(0,+\infty)\qquad D_{f^{-1}}=(0,+\infty)\ ,\ R_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

این فعالیت اولین قسمتی در این فصل است که نام تابع لگاریتمی در آن ذکر شده است، بنابراین حل کامل آن الزامی است. برای حل سؤال ۱، ابتدا با توجه به نقاط نمودار f، نقاط نمودار f^{-1} را به‌دست می‌آورند و سپس این نقاط را به هم وصل می‌کنند تا نمودار تابع f^{-1} نمایان شود. سؤال ۲ را نیز با توجه به نقاط بالا، تکمیل می‌کنند. سؤال ۳ کاملاً مشابه سؤال ۱ فعالیت قبل است. بهتر است به دانش‌آموزان زمان کافی دهید تا پاسخ‌ها را خودشان در کتاب بنویسند.

بعد از سؤال ۳ توضیحی نوشته شده است و به f^{-1} یک نام نسبت می‌دهیم و آن همان تابع لگاریتم است. با توجه به مطالب دو فعالیتی که طرح شده است و توضیحات هدایتگر معلم، دانش‌آموز به این درک می‌رسد که توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگرند.

در سؤال ۴ نیز با توجه به تکرار این موضوع که دامنه و برد توابع نمایی و وارون آنها یعنی توابع لگاریتمی چه مجموعه‌هایی هستند، پاسخ‌ها توسط دانش‌آموزان نوشته می‌شود.

بهتر است با جملاتی مانند : چه اعدادی می‌توانند در پایهٔ توابع نمایی قرار گیرند؟ چه اعدادی جلوی لگاریتم می‌توانند نوشته شوند؟ لگاریتم برای چه اعدادی تعریف می‌شود؟ آیا حاصل لگاریتم می‌تواند منفی باشد؟ و ...، دید دانش‌آموزان را نسبت به مفهوم دامنه و برد این توابع روشن‌تر کرد.

توجه : از طرح سؤالاتی خارج از سطح کتاب درسی برای تعیین دامنهٔ تابع لگاریتمی مانند توابع با ضابطه‌های :

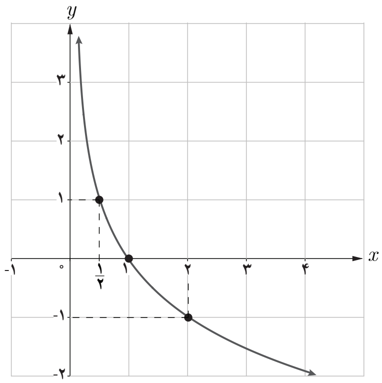
$$f(x)=\log_{x^2-1}\frac{2x-3}{x+1}\qquad,\qquad g(x)=\log_{\frac{4x-3}{x^2+1}}\left(3x^2-1\right)\qquad,\ \ldots$$

اکیداً احتراز شود. طرح چنین سؤالاتی و پاسخگویی به آنها از اهداف این کتاب نیست. بدیهی است طرح این نمونه سؤالات در آزمون مدارس نیز مورد نظر نمی‌باشد و تنها سؤالاتی مجاز است که دانش‌آموز به‌راحتی بتواند نمودار آنها را رسم نماید و دامنه و برد آنها را از روی نمودار تشخیص دهد. درک عمیق مفاهیم ریاضی از اهداف اصلی است.

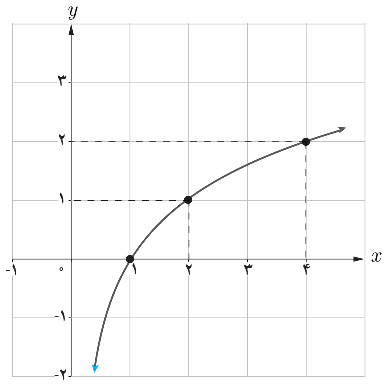
در ابتدای صفحهٔ ۱۰۷، ارتباط کلی توابع نمایی و لگاریتمی نوشته شده است.

حل سؤال صفحهٔ ۱۰۸

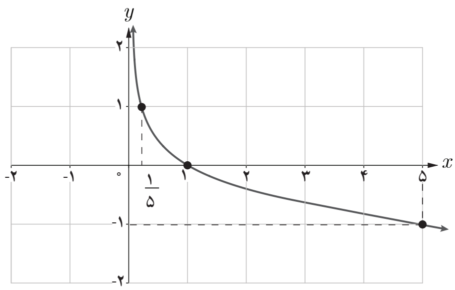
نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطهٔ مربوط به هر کدام را بنویسید.



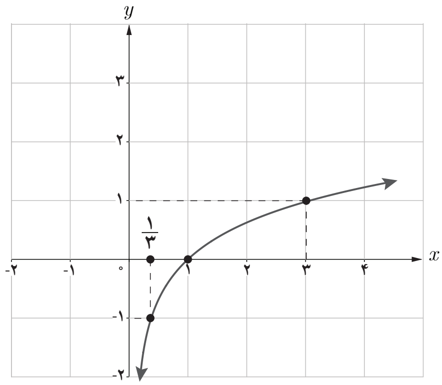
(۱) $y_1 = \log_{\frac{1}{2}} x$



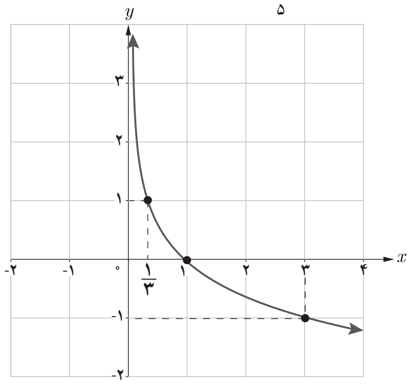
(۲) $y_2 = \log_{2} x$



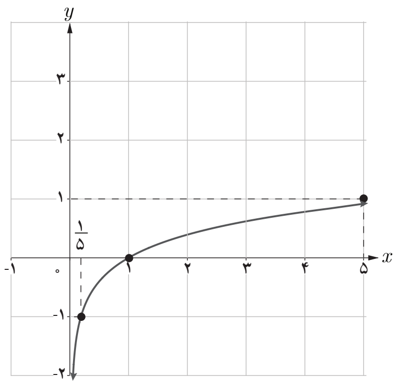
(۳) $y_3 = \log_{\frac{1}{5}} x$



(۴) $y_4 = \log_{3} x$



(۵) $y_5 = \log_{\frac{1}{3}} x$



(۶) $y_6 = \log_{5} x$

در ادامهٔ کار در کلاس ۱۰۷، سؤال بالا مطرح شده که نمودار شش تابع لگاریتمی داده شده و دانش‌آموزان باید با توجه به نقاط متعلق به نمودار، ضابطهٔ آنها را بنویسند، به عنوان مثال چند نمونه را اینجا می‌آوریم :

(۱) $(\frac{۱}{۲},۱) \in y_۱ \to (۱,\frac{۱}{۲}) \in y_۱^{-۱}$ و $y_۱^{-۱}$ تابع، تابع نمایی است.

$$\to y_۱^{-۱} = a^x \to \frac{۱}{۲} = a^۱ \to a = \frac{۱}{۲} \to y_۱ = \log_{\frac{۱}{۲}} x$$

(۲) $(۲,۱) \in y_۲ \to (۱,۲) \in y_۲^{-۱}$ و $y_۲^{-۱}$ تابع، تابع نمایی است.

$$\to y_۲^{-۱} = a^x \to ۲ = a^۱ \to a = ۲ \to y_۲ = \log_۲ x$$

(۳) $(\frac{۱}{۵},۱) \in y_۳ \to (۱,\frac{۱}{۵}) \in y_۳^{-۱}$ و $y_۳^{-۱}$ تابع، تابع نمایی است.

$$\to y_۳^{-۱} = a^x \to \frac{۱}{۵} = a^۱ \to a = \frac{۱}{۵} \to y_۳ = \log_{\frac{۱}{۵}} x$$

لگاریتم یک عدد

فعالیت صفحه ۱۰۹

با توجه به نقاط این دو نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

$۲^۳=۸$	$۲^۲=۴$	$۲^۱=۲$	$۲^۰=۱$	$۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}$	$۲^{-۲}=\frac{۱}{۴}$	نمایی
$\log_۲ ۸ = ۳$	$\log_۲ ۴ = ۲$	$\log_۲ ۲ = ۱$	$\log_۲ ۱ = ۰$	$\log_۲ \frac{۱}{۲} = -۱$	$\log_۲ \frac{۱}{۴} = -۲$	لگاریتمی

در این فعالیت، مجدداً نمودار تابع با ضابطه‌های $f(x) = ۲^x$ و $f_{(x)}^{-۱} = \log_۲ x$ رسم شده است و جدولی که قبلاً با نقاط تابع f و $f^{-۱}$ تکمیل شده بود، با نمادهای نمایی و لگاریتمی تکمیل می‌شود. هدف این فعالیت، دستیابی به مقدار لگاریتم یک عدد است و همچنین تبدیل تساوی‌های نمایی و لگاریتمی به یکدیگر و در نهایت در صفحهٔ ۱۱۰ به این مطلب می‌رسیم که :

به‌طور کلی اگر $a^y = x$ آن‌گاه $\log_a x = y$ و به عکس. $(x > ۰ , a \neq ۱ , a > ۰)$

$$b^a = c \Leftrightarrow \log_b c = a \qquad (c > ۰ , b > ۰ , b \neq ۱)$$

کار در کلاس صفحه ۱۱۰

جدول زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$\log_{۸}۱=۰ \rightarrow ۸^{۰}=۱$	$۱۰^{۳}=۱۰۰۰ \rightarrow \log_{۱۰}۱۰۰۰=۳$
$\log_{۲}(\frac{۱}{۱۶})=-۴ \rightarrow ۲^{-۴}=\frac{۱}{۱۶}$	$۹^{\frac{۱}{۲}}=۳ \rightarrow \log_{۹}۳=\frac{۱}{۲}$
$\log_{۵}۱۲۵=۳ \rightarrow ۵^{۳}=۱۲۵$	$۴^{۳}=۶۴ \rightarrow \log_{۴}۶۴=۳$
$\log_{\frac{۱}{۳}}۲۷=-۳ \rightarrow (\frac{۱}{۳})^{-۳}=۲۷$	$۲^{۵}=۳۲ \rightarrow \log_{۲}۳۲=۵$
$\log_{\frac{۱}{۵}}۱۲۵=-۳ \rightarrow (\frac{۱}{۵})^{-۳}=۱۲۵$	$۲^{-۳}=\frac{۱}{۸} \rightarrow \log_{۲}^{\frac{۱}{۸}}=-۳$
$\log_{\frac{۱}{۲}}۱۶=-۴ \rightarrow (\frac{۱}{۲})^{-۴}=۱۶$	$۳^{-۴}=\frac{۱}{۸۱} \rightarrow \log_{۳}^{\frac{۱}{۸۱}}=-۴$

در این کار در کلاس، مثال‌های متنوعی از تبدیل تساوی‌های نمایی و لگاریتمی به‌هم آورده شده است. حل سؤالاتی مشابه این سؤال برای تسلط بیشتر دانش‌آموزان، توصیه می‌شود.

در صفحهٔ ۱۱۱، لگاریتم اعشاری (دهدهی) معرفی می‌شود : لگاریتم در مبنای ۱۰، لگاریتم اعشاری نامیده می‌شود و معمولاً مبنای لگاریتم اعشاری نوشته نمی‌شود.

$$\log_{۱۰}^{a}=\log^{a}$$

بنابراین بهتر است به دانش‌آموزان گوشزد کرد که هرگاه مبنا نوشته نشده بود باید آن را برابر ۱۰ فرض کنند، مانند فرجهٔ ۲ که معمولاً نوشته نمی‌شود.

ویژگی‌های لگاریتم

فعالیت صفحه ۱۱۱

۱ اگر a عدد حقیقی مثبت $(a\neq۱)$ باشد، همواره داریم :

$$\log_{a}۱=۰ \quad \text{و} \quad \log_{a}a=۱ \quad \text{و} \quad \log_{a}(\frac{۱}{a})=-۱$$

هر سه ویژگی قسمت ۱ را می‌توان از تبدیل تساوی لگاریتمی به تساوی نمایی اثبات کرد :

$$a^{۰}=۱ \rightarrow \log_{a}^{۱}=۰ \quad , \quad a^{۱}=a \rightarrow \log_{a}a=۱ \quad , \quad a^{-۱}=\frac{۱}{a} \rightarrow \log_{a}(\frac{۱}{a})=-۱$$

۲ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c $(c \neq ۱)$ داریم :

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

اثبات : فرض کنیم $m = \log_c a$ و $n = \log_c b$، پس طبق تعریف $a = c^m$ و $b = c^n$، از این‌رو $ab = c^m . c^n = c^{m+n}$

بنابراین طبق تعریف لگاریتم داریم : $\log_c ab = m + n$ و در نتیجه :

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

ویژگی ۲، یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های لگاریتم را بیان می‌کند که همان تبدیل ضرب به جمع است. در مثال بعد، لگاریتم‌ها تا دو رقم اعشار گرد شده‌اند.

۳ اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq ۱$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم :

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

اثبات :

$$\log_a b^n = \log_a \overbrace{b \ldots b}^{n \text{ بار}} = \underbrace{\log_a b + \ldots + \log_a b}_{n \text{ بار}} = n \log_a b$$

تذکر این نکته که اگر n عددی حقیقی باشد، ویژگی ۳ برقرار است، ضروری است.

۴ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c $(c \neq ۱)$ داریم :

$$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

اثبات : فرض می‌کنیم $\frac{a}{b} = d$. بنابراین :

$$a = bd \to \log_c a = \log_c b + \log_c d \to \log_c d = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

در ویژگی ۴ نیز، تبدیل تقسیم به تفاضل را توسط لگاریتم بیان می‌کند.

در مثال انتهای صفحهٔ ۱۱۱، مقدار $\log ۵$ با استفاده از مقدار $\log ۲$ به‌دست آمده است، تذکر این نکته که همیشه در مسائل، یکی از مقادیر $\log ۲$ یا $\log ۲$ از دیگری به‌دست می‌آید لازم است.

توصیه می‌شود با توجه به سطح کلاس، مثال‌های بیشتری از ویژگی‌های لگاریتم حل شود.

فعالیت صفحه ۱۱۲

در این فعالیت شش معادلهٔ لگاریتمی آورده شده است که سه قسمت آن به‌طور کامل حل شده و سه قسمت باید در کلاس با هدایت و راهنمایی دبیر تکمیل شود.

۴ $\log_{۴}(x+۲)=\log_{۴}۸ \rightarrow x+۲=۸ \rightarrow x=۶$ قابل قبول

۵ $۳\log_{۲}x=-\log_{۲}۲۷ \rightarrow \log_{۲}x^{۳}=\log_{۲}(۲۷)^{-۱} \rightarrow x^{۳}=\frac{۱}{۲۷} \rightarrow x=\frac{۱}{۳}$ قابل قبول

۶ $\log(x+۱)-\log(x-۳)=۳ \rightarrow \log\frac{x+۱}{x-۳}=۳ \rightarrow \frac{x+۱}{x-۳}=۱۰^{۳} \rightarrow x+۱=۱۰۰۰(x-۱)$

$\rightarrow x=\frac{۱۰۰۱}{۹۹۹}$ قابل قبول

ذکر دو نکته در این قسمت ضروری است:

۱ از دانش‌آموزان بخواهید در مثال‌های اولیهٔ معادلات لگاریتمی، در هر مرحله مشخص کنند از چه ویژگی یا رابطه‌ای استفاده می‌کنند و به مرحلهٔ بعد دست می‌یابند.

۲ بعد از یافتن جواب هر معادلهٔ لگاریتمی، حتماً تعریف شدن لگاریتم را به‌ازای آن بررسی کنند.

کار در کلاس صفحه ۱۱۳

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱ $\log_{۵}x=۳ \rightarrow x=۵^{۳}$ قابل قبول

۲ $\log_{۲}(۲x+۱)=۳ \rightarrow ۲x+۱=۲^{۳} \rightarrow x=\frac{۷}{۲}$ قابل قبول

۳ $\log_{۲}(x+۱)+\log_{۲}(x+۴)=۲ \rightarrow \log(x+۱)(x+۴)=۲ \rightarrow x^{۲}+۵x+۴=۴ \rightarrow$

$x(x+۵)=۰ \rightarrow x=۰$ قابل قبول, $x=-۵$ غیر قابل قبول

۴ $\log_{۳}۲۴۳=۲x+۱ \rightarrow \log_{۳}۳^{۵}=۲x+۱ \rightarrow ۲x+۱=۵ \rightarrow x=۲$ قابل قبول

۵ $\log_{۳}(x-۱)=۴ \rightarrow x-۱=۳^{۴} \rightarrow x=۸۲$ قابل قبول

۶ $\log(۲x)-\log(x-۳)=۱ \rightarrow \log\frac{۲x}{x-۳}=۱ \rightarrow \frac{۲x}{x-۳}=۱۰ \rightarrow x=\frac{۳۰}{۸}$ قابل قبول

۷ $۲\log_{۴}(x-۱)=۳ \rightarrow \log_{۴}(x-۱)^{۲}=۳ \rightarrow (x-۱)^{۲}=۶۴ \rightarrow x=۹$ قابل قبول

$, x=-۷$ غیر قابل قبول

حل برخی از تمرین‌های درس دوم ـ صفحهٔ ۱۱۳

۱

الف) $\log_c^{abd} = \log_c^{(ab)d} = \log_c^{ab} + \log_c^{d} = \log_c^{a} + \log_c^{b} + \log_c^{d}$

$$\Rightarrow \log_c^{abd} = \log_c^{a} + \log_c^{b} + \log_c^{d}$$

ب) فرض می‌کنیم $\log_b^a = x$ ، بنابراین $b^x = a$. حال لگاریتم طرفین تساوی را در مبنای عدد حقیقی مثبت c $(c \neq ۱)$ می‌نویسیم :

قرار می‌دهیم $x = \log_b^a$ ،بنابراین $b^x = a$. حال لگاریتم دو طرف تساوی را در مبنای c می‌نویسیم.

$$b^x = a \Longrightarrow \log_c^{b^x} = \log_c^a \Rightarrow x\log_c^b = \log_c^a \Rightarrow$$

$$x = \frac{\log_c^a}{\log_c^b} \xRightarrow{x=\log_b^a} \log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$$

این تساوی نتیجه می‌دهد که : $\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$. بهتر است مثال عددی نیز برای دانش‌آموزان آورده شود :

$$\log_۲^۳ \times \log_۵^۲ = \log_۵^۳$$

پ) بدیهی است که $\log_a^b = \log_a^b$. حال اگر تساوی لگاریتمی را به‌صورت نمایی بنویسیم داریم :

$$\log_a^b = \log_a^b \Rightarrow a^{\log_a^b} = b$$

ت) از رابطه قسمت ب را طرفین وسطین کنیم داریم :

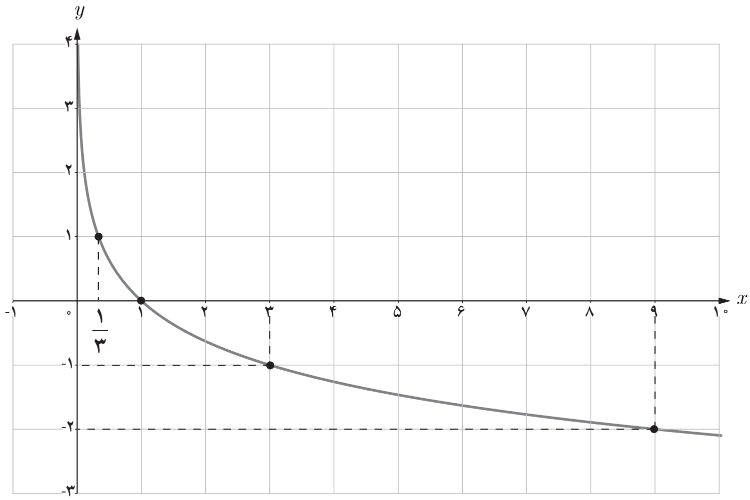
$$\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$$

حال در این رابطه قرار دهیم $c = a$ بنابراین :

$$\log_b^a \times \log_a^b = \log_a^a \Rightarrow \log_b^a \times \log_a^b = ۱$$

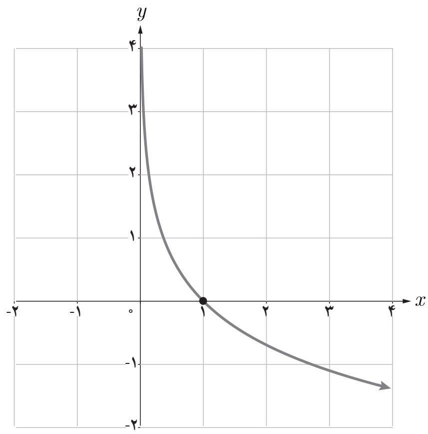
۵ با استفاده از جدول نقاط کمکی نمودار را رسم می‌کنیم.

x	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹
y	۱	۰	۱−	۲−



۶ الف) نادرست است زیرا $y = \log_a^x \Rightarrow a^y = x$

ب) راه اول : نمودار تابع $y = \log_a^x$ و $(0 < a < 1)$ در حالت کلی مشابه نمودار زیر است :



با توجه به نمودار، گزاره درست است.

راه دوم : به x مقدار ۱ می‌دهیم و y را محاسبه می‌کنیم.

$$y = \log_a^1 = 0 \Rightarrow y = 0$$

پس نمودار از نقطه (۰ , ۱) عبور می‌کند. بنابراین گزاره درست است.

پ) با توجه به تعریف، صحیح است.

درس سوم

نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

اهداف درس

۱ آشنایی با انتقال نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی
۲ تشخیص ضابطهٔ توابع نمایی و لگاریتمی انتقال داده‌شده با استفاده از نمودار آنها
۳ آشنایی با کاربردهای تابع لگاریتمی و نمایی

پیش‌نیازها

۱ آشنایی با انتقال طولی و عرضی نمودار توابع
۲ آشنایی با قرینه کردن نمودار نسبت به محور xها

روش تدریس

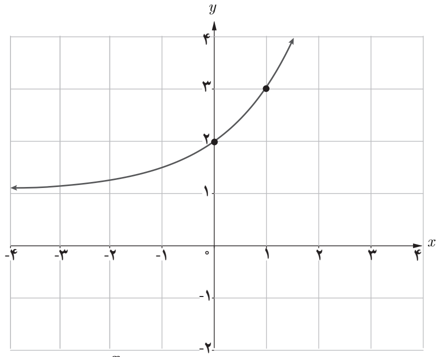
در این درس دانش‌آموزان با انتقال نمودار توابع نمایی و لگاریتمی آشنا می‌شوند. تشخیص ضابطهٔ یک تابع با استفاده از نمودار آن، یکی از اهداف اصلی این درس است. باید توجه شود که سطح سؤالات مطرح‌شده در آزمون مدارس از سطح سؤالات کتاب بالاتر نرود. تعمیق مفهوم ارائه شده، مورد نظر کتاب است.

فعالیت صفحه ۱۱۵

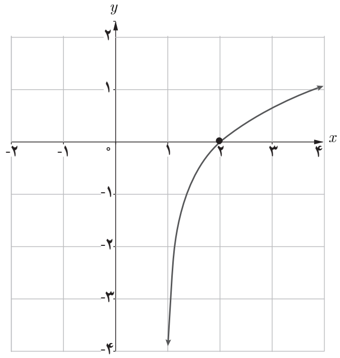
نمودار هر تابع را به ضابطهٔ آن نظیر کنید.

الف) $k(x) = -\log_{۲} x$ ب) $l(x) = ۲ + \log x$ پ) $h(x) = -(\frac{۱}{۲})^x$

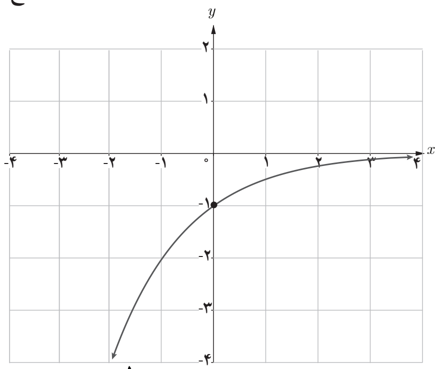
ت) $g(x) = \log(x-۱)$ ث) $j(x) = ۳^{(x-۱)}$ ج) $f(x) = ۲^x + ۱$



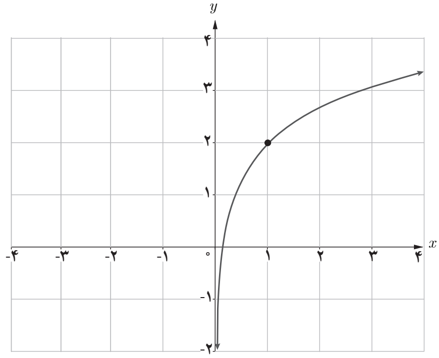
(۱) ج) $f(x) = ۲^x + ۱$



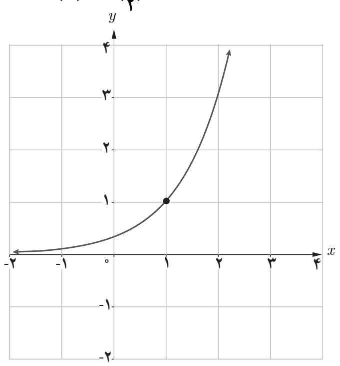
(۲) (ت) $g(x) = \log(x-۱)$



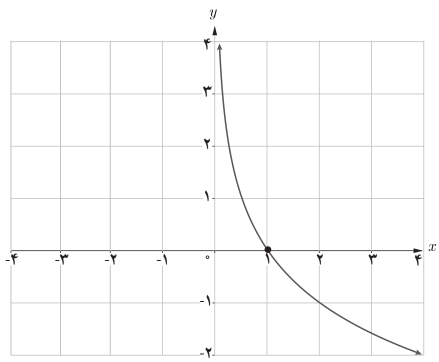
(۳) پ) $h(x) = -(\frac{۱}{۲})^x$



(۴) ب) $l(x) = ۲ + \log x$



(۵) ث) $j(x) = ۳^{(x-۱)}$



(۶) الف) $k(x) = -\log_{۲} x$

در فعالیت صفحهٔ ۱۱۵، شش ضابطه و شش نمودار داده شده است که باید نمودار هر تابع را به ضابطهٔ آن نظیر کرد. برای حل این فعالیت می‌توانید یکی از آنها را با شرح کامل حل کنید و بقیه را دانش‌آموزان با هدایت و راهنمایی شما حل کنند.

۱ نمودار (۱) از نقطهٔ (۲,۰) و (۱,۳) رد شده است، بنابراین با توجه به ضابطه‌ها، یکی از قسمت‌های پ و ث و ج است، با امتحان کردن این نقاط در این ضابطه‌ها به جواب صحیح دست می‌یابیم :

ث) $(0,2) \rightarrow 2 \overset{?}{=} 3^{0-1} \times$

پ) $(0,2) \rightarrow 2 \overset{?}{=} (-\frac{1}{2})^{0} \times$

ج) $(0,2) \rightarrow 2 \overset{?}{=} 2^{0}+1 \checkmark$ و $(1,3) \rightarrow 3 \overset{?}{=} 2^{1}+1 \checkmark$

بنابراین نمودار (۱) متعلق به ضابطهٔ (ج) است.

۲ نمودار (۲) از نقطهٔ (۲,۰) عبور کرده است :

الف) $0 \overset{?}{=} -\log_{2}^{2} \times$ ب) $0 \overset{?}{=} 2+\log 2 \times$

پ) $0 \overset{?}{=} -(\frac{1}{2})^{2} \times$ ت) $0 \overset{?}{=} \log(2-1) = \log 1 = 0 \checkmark$

ث) $0 \overset{?}{=} 3^{2-1} \times$

بنابراین نمودار (۲) متعلق به ضابطهٔ (ت) است.

۳ نمودار (۳) از نقطهٔ (۰,۱-) عبور کرده است :

با توجه به ضابطه‌ها، قسمت‌های الف و ب نمی‌توانند پاسخ این قسمت باشند، بنابراین ضابطه‌های پ و ث را امتحان می‌کنیم :

پ) $-1 \overset{?}{=} (-\frac{1}{2})^{0} \checkmark$

ث) $-1 \overset{?}{=} 3^{0-1} \times$

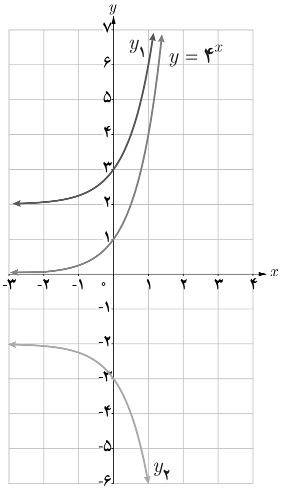
بنابراین نمودار (۳) متعلق به ضابطهٔ (پ) است.

کار در کلاس صفحه ۱۱۶

در شکل‌های زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته‌های آنها رسم شده است. ضابطهٔ توابع انتقال یافته را بنویسید.

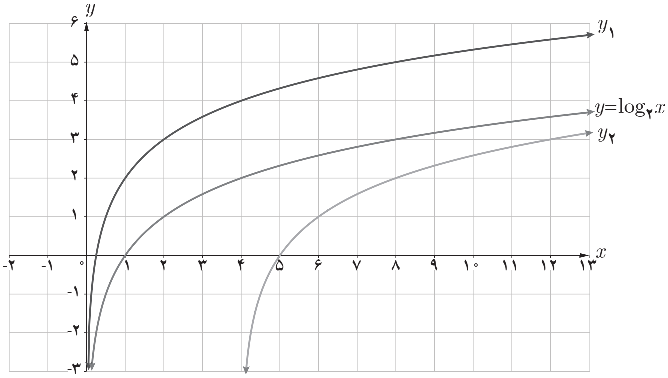
$y_۱ = ۴^x + ۲$

$y_۲ = -۴^x - ۲$



$y_۱ = \log_۲ x + ۲$

$y_۲ = \log_۲ (x - ۴)$



در این کار در کلاس، نمودار یک تابع لگاریتمی و یک تابع نمایی و دو نمودار انتقال یافته برای هر کدام از آنها رسم شده است که دانش‌آموزان باید با توجه به ضابطهٔ تابع اصلی و نقاط راهنما، ضابطهٔ توابع $y_۱$ و $y_۲$ را به‌دست آورند. در نمودار اول (نمایی)، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۴^x$ رسم شده است. نمودار سبز رنگ که انتقال یافتهٔ آن است، ضابطه‌ای به‌صورت $y_۱ = ۴^x + a$ دارد، زیرا نمودار چند واحد در راستای محور yها به طرف بالا انتقال داده شده است. با توجه به نقطهٔ $(۰,۱)$ که به نقطهٔ $(۰,۳)$ انتقال داده شده است، حدس می‌زنیم ضابطهٔ $y_۱$ به‌صورت زیر باشد :

$$y_۱ = ۴^x + ۲$$

حال این ضابطه را با نقاط دیگر نمودار $y_۱$ امتحان می‌کنیم :

$$(۰,۳) \to ۳ \stackrel{?}{=} ۴^۰ + ۲ \checkmark$$

$$(۱,۶) \to ۶ \stackrel{?}{=} ۴^۱ + ۲ \checkmark$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود ضابطه صحیح است.

در مورد نمودار قرمز رنگ می‌توان گفت که نمودار y ابتدا نسبت به محور xها قرینه شده است و سپس دو واحد در راستای محور yها به‌طرف پایین انتقال داده شده است، یعنی حدس می‌زنیم :

$$y_۲ = -۴^x - ۲$$

نقاط دیگر را امتحان کرده و می‌بینیم که حدسمان درست بوده :

$$(۰,-۳) \to -۴^۰ - ۲ \stackrel{?}{=} -۳ \quad \checkmark$$

$$(۱,-۶) \to -۴^۱ - ۲ \stackrel{?}{=} -۶ \quad \checkmark$$

در دستگاه مختصات سمت راست که نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_۲^x$ رسم شده است، حدس زده می‌شود که نمودار سبز رنگ، حاصل انتقال نمودار اصلی در راستای محور yها به‌طرف بالا است، یعنی :

$$y_۱ = \log_۲^x + ۲$$

امتحان کردن نقاط :

$$(۱,۲) \to ۲ \stackrel{?}{=} \log_۲^۱ + ۲ \checkmark$$

$$(۲,۳) \to ۳ \stackrel{?}{=} \log_۲^۲ + ۲ \checkmark$$

$$(۴,۴) \to ۴ \stackrel{?}{=} \log_۲^۴ + ۲ \checkmark$$

$$(۸,۵) \to ۵ \stackrel{?}{=} \log_۲^۸ + ۲ \checkmark$$

در نمودار بنفش، حدس زده می‌شود که نمودار اصلی چهار واحد به سمت راست انتقال داده شده است، یعنی :

$$y_۲ = \log_۲(x - ۴)$$

امتحان کردن ضابطه :

$$(۵,۰) \to ۰ \stackrel{?}{=} \log_۲(۵ - ۴) \checkmark$$

$$(۸,۲) \to ۲ \stackrel{?}{=} \log_۲(۸ - ۴) \checkmark$$

$$(۱۲,۳) \to ۳ \stackrel{?}{=} \log_۲(۱۲ - ۴) \checkmark$$

حل برخی از تمرین‌های درس سوم ـ صفحهٔ ۱۱۸

۱ **راه اول** : با توجه به شکل، نمودار تابع y از دو نقطه $(۰,۲)$ و $(۱,۳)$ عبور می‌کند.

$$\overset{\overset{x}{\uparrow}\ \overset{y}{\uparrow}}{(۰,۲)} \Rightarrow ۲ = a + ۲^{۰-b} \Rightarrow ۲ = a + ۲^{-b}$$

$$(۱,۳) \Rightarrow ۳ = a + ۲^{۱-b}$$

دو رابطه فوق را درنظر بگیرید

$$\begin{cases} a + ۲^{۱-b} = ۳ \\ a + ۲^{-b} = ۲ \end{cases} \underset{\times(-۱)}{\Rightarrow} \begin{cases} a + ۲^{۱-b} = ۳ \\ -a - ۲^{-b} = -۲ \end{cases}$$

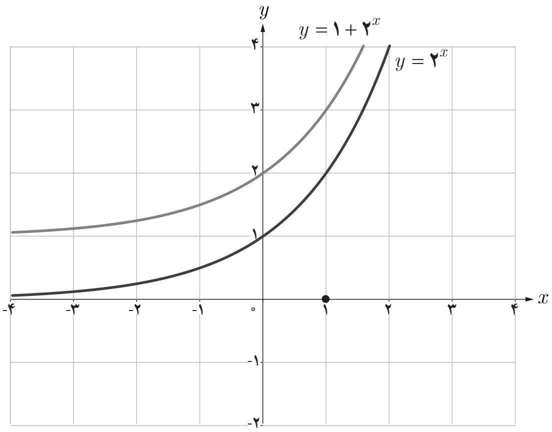
$$۲^{۱-b} - ۲^{-b} = ۱ \qquad \Rightarrow ۲^{-b}(۲^{۱} - ۱) = ۱$$

$$\Rightarrow ۲^{-b} = ۱ \Rightarrow ۲^{-b} = ۲^{۰} \Rightarrow b = ۰$$

با جایگذاری $b = ۰$ در یکی از روابط a نیز به‌دست می‌آید

$$a + ۲^{-b} = ۲ \Rightarrow a + ۲^{۰} = ۲ \Rightarrow a + ۱ = ۲ \Rightarrow a = ۱$$

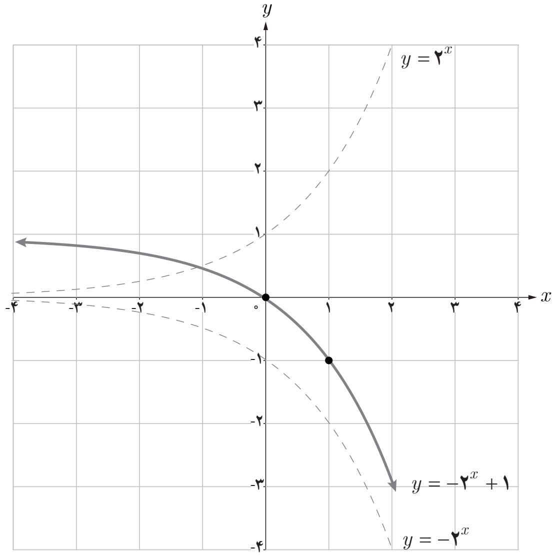
راه دوم : اگر نمودار تابع $y = ۲^{x}$ را یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم نمودار مسئله حاصل می‌شود، یعنی $y = ۱ + ۲^{x}$ همان تابع $y = a + ۲^{(a-b)}$ است. لذا $a = ۱$ و $b = ۰$ است.



۴ الف) برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -۲^{x} + ۱$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

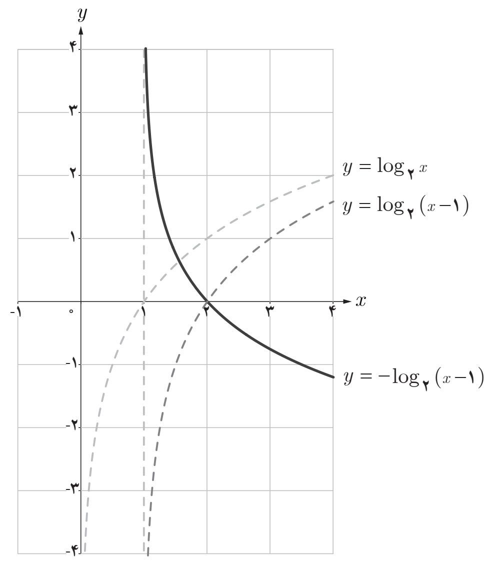
ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۲^{x}$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم،

سپس نمودار حاصل را یک واحد در راستای محور yها، به طرف بالا انتقال می‌دهیم.



ب) برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_۲(x - ۱)$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_۲ x$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم، تا نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_۲(x - ۱)$ حاصل شود، سپس نمودار به‌دست آمده را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف) $y = (\ x --)$ ب) $y = x^{7}$ پ) $y = (0/02)^{x}$

ت) $y = x^{\frac{1}{2}}$ ث) $y = \dfrac{4^{x}}{3^{x}}$ ج) $y = 6x^{2} + 1$

۲ حدود m را چنان بیابید که تابع $y = (2 - m)^{x}$ یک تابع نمایی باشد.

۳ کدام یک از نقاط زیر روی نمودار تابع $y = (\frac{1}{3})^{x}$ قرار دارند؟

الف) $(-1,3)$ ب) $(1,-3)$ پ) $(0,1)$ ت) $(-\frac{1}{2},\frac{1}{9})$ ث) $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3})$ ج) $(-2,9)$

۴ در هر مورد اعداد را با هم مقایسه کنید. (از نمادهای >، < و = استفاده کنید)

الف) $4^{1/2} \bigcirc 4^{\frac{7}{5}}$ ب) $(\frac{1}{3})^{\sqrt{3}} \bigcirc (\frac{1}{3})^{\sqrt{2}}$

پ) $4^{-0/5} \bigcirc 3^{-0/5}$ ت) $\log_{3}^{\frac{7}{4}} \bigcirc \log_{3}^{\frac{11}{5}}$

ث) $\log_{0/7}^{1} \bigcirc \log_{0/8}^{1}$ ج) $\log_{4}^{9} \bigcirc \log_{7}^{9}$

۵ الف) به کمک نقطه‌یابی و با درنظر گرفتن شکل کلی نمودار توابع نمایی، نمودار توابع $f(x) = 5^{x}$ و $g(x) = 6^{x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

(در رسم نمودار، از نقاط با طول‌های ۲- , ۱- , ۰ , ۱ , ۲، کمک بگیرید)

ب) در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات، نمودار کدام تابع بالاتر از دیگری است؟ این وضعیت در ناحیهٔ دوم چگونه است؟

پ) اگر $1 < a < b$، نمودار توابع نمایی $y = a^{x}$ و $y = b^{x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

ت) با الگو گرفتن از قسمت‌های قبل، با فرض $0 < a < b < 1$، نمودار توابع $y = a^{x}$ و $y = b^{x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۶ فرض کنید $f(x)=۲^x$، $g(x)=(\frac{۱}{۴})^x$ و $h(x)=۵^x$. حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید :

الف) $f(۱۰)$ ب) $g(-۳)$ پ) $h(-۴)$

ت) $(f+g+h)(۱)$ ث) $f(۲)-g(-۱)$ ج) $f(۴)\,g(۲)$

چ) $\frac{۵}{۲}h(-۲)+\frac{۱}{۵}f(-۱)$ ح) $(۴g+h)(۱)-f(۰)$

۷ الف) نمودار توابع نمایی $y=(۱/۸)^x$ و $y=(۰/۳)^x$ در چه نقطه‌ای مقادیر مساوی دارند؟

ب) تعیین کنید که نقطهٔ تقاطع دو تابع فوق، روی نمودار توابع زیر قرار دارد یا خیر؟

$y=(\sqrt{۳}-۱)^x$ و $y=۶^x$ و $y=(\frac{۲}{۷})^x$

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۸ توابع نمایی $f(x)=۷^x$ و $g(x)=(\frac{۱}{\sqrt{۷}})^x$ را درنظر بگیرید :

الف) مقادیر زیر را به‌دست آورید :

الف) $f(۳)$ ب) $g(۴)$ پ) $g(-۲)$

ت) $f(۴)\,g(۸)$ ث) $f(۱)+g(-۱)$ ج) $(f(۱)-۱۴\,g(۲))^۲$

ب) معادلهٔ $(\frac{g}{f})(x)=۳۴۳$ را حل کنید.

۹ اگر نمودار تابع $y=a\times b^x+۱$، از نقاط $(۱,۱۹)$ و $(۷,\frac{۱}{۲})$ عبور کند، مقادیر a و b را به‌دست آورید.

۱۰ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $۵^{۲x-۴}=\frac{۱}{۲۵}$ ب) $(\frac{۱}{۳})^{۱-x}=۷۲۹$

پ) $۲^{۷x+۱}=۱۶^{x^۲+۱}$ ت) $(\frac{۱}{۴۹})^{x-\frac{۵}{۲}}-۷^{۴-x}=۰$

ث) $۴^{x+۱}=۸\times ۲^{x+۴}$ ج) $۵^{x+۱}+۵^{x+۲}=۶$

چ) $۵^{۲x-۱}\times ۲^{۲x-۱}=۰/۰۰۱$ ح) $۹^x+۳=۴\times ۳^x$

خ) $۴^x-۲^{x+۱}=۳$ د) $۸^{x+۲}=۸\times ۳^{۴x+۴}$

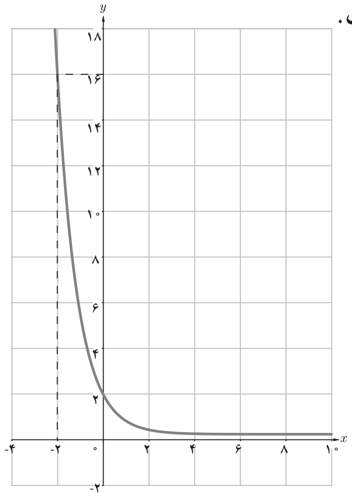
۱۱ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ مقابل را به‌دست آورید :

$$(۸۱)^{x^{۲}-۸}=۳^{x+۳}$$

۱۲ نمودار تابع نمایی $f(x)=a^{x}$ به‌صورت مقابل داده شده است.

الف) ضابطهٔ تابع را به‌دست آورید.

ب) ضابطهٔ تابع وارونِ آن را مشخص کنید.



۱۳ تابع نمایی $y=۳^{x}$ محور yها را در نقطهٔ A و نمودار تابع معکوس آن، محور xها را در نقطهٔ B قطع می‌کند. فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را به‌دست آورید.

۱۴ کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار تابع $y=\log_{۲}^{x}$ قرار دارند؟

الف) $(۳,۶)$ ب) $(۱,۲)$ پ) $(۲,۱)$

ت) $(۸,۳)$ ث) $(۱,۰)$ ج) $(۰/۲۵,-۲)$

۱۵ نمودار تابع $f(x)=۲^{x}$ از نقطهٔ A به طول ۳ و نمودار تابع $g(x)=\log_{۳}^{x}$ از نقطهٔ B به طول ۹ عبور می‌کنند :

الف) با محاسبهٔ $f(۳)$ و $g(۹)$، مختصات A و B را کامل کنید.

ب) معادلهٔ خط AB را بنویسید.

پ) با رسم نمودار توابع f و g، و رسم خط AB، مشخص کنید که آیا خط AB نمودار توابع f و g را در نقاط دیگری جز A و B قطع می‌کند یا خیر؟

۱۶ در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید :

الف) $\log_{۳}^{\square}=-۲$

ب) $۲\log_{\square}^{۸}=۶$

پ) $\log_{۵}^{۳۲}=\square\log_{۵}^{۲}$

ت) $\log_{۷}^{\square}=\log_{۷}^{۳۶}-\log_{۷}^{۹}$

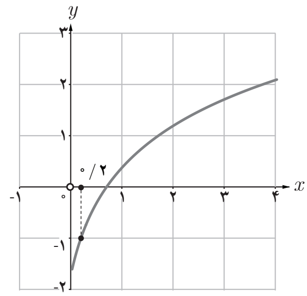
ث) $\log_{۲}^{۲۴}=\square+\log_{۲}^{۱۲}$

ج) $\log_{۷}^{۲۵}\times\log_{۵}^{۷}=\square$

۱۷ نمودار تابع لگاریتمی $f(x) = \log_a^x$ داده شده است.

الف) مقدار a را به‌دست آورید.

ب) مقدار $f(۰/۰۴)$ را حساب کنید.



۱۸ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

۱) $\log_{۲} ۶۴$ ۲) $\log_{۳} \frac{۱}{۸۱}$ ۳) $\log_{۵}(\sqrt{۱۲۵})^{-۵}$

۴) $\log_{۲} \sqrt[۷]{۸}$ ۵) $\log_{۲۷} ۸۱$ ۶) $\log_{(\frac{۱}{۳})} ۲۷$

۷) $\log_{۷} \frac{۱}{\sqrt{۴۹}}$ ۸) $\log_{(\frac{۱}{۲})} ۰/۲۵$ ۹) $\log_{۳} ۹\sqrt[۳]{۳}$

۱۰) $\log_{۶} ۲ + \log_{۶} ۳$ ۱۱) $\log_{۳} ۴۵ - \log_{۳} ۵$ ۱۲) $۵^{۲\log_{۵} ۷}$

۱۳) $۲^{\log_{۲} ۵} + ۳^{\log_{۲}(\frac{۱}{۵})}$ ۱۴) $۲\log ۵ + \log ۴$ ۱۵) $\log_{۱۵} ۵\sqrt{۳} + \log_{۱۵} ۳\sqrt{۵}$

۱۶) $۳\log \sqrt[۳]{۴} - \log ۲۵$ ۱۷) $\log_{۷} ۴ \times \log_{۶۴} ۷$

۱۸) $\log ۲۴ + ۳\log ۵ - \log ۳$ ۱۹) $\log_{۴} \frac{۱}{۲} + \log_{۴} \frac{۲}{۳} + \log_{۴} \frac{۳}{۴}$

۱۹ اگر $\log ۲ = ۰/۳$ و $\log ۳ = ۰/۴$، هر یک از مقادیر زیر را به‌دست آورید:

۱) $\log ۱/۵$ ۲) $\log ۲۰$

۳) $\log ۰/۰۳$ ۴) $\log ۱۵$

۵) $\log ۱۸$ ۶) $\log \sqrt[۵]{۱۲}$

۷) $\log \sqrt[۴]{۱۲۵}$ ۸) $\log_{۳}^{۲}$

۹) $\log_{۲} ۱۰۸$ ۱۰) $\frac{\log_{۳} ۱۶}{\log_{۵}^{۸} + \log_{۵} ۴}$

۲۰ فرض کنید $\log ۲= ۰/۳$ ، $\log ۳= ۰/۴$ و $\log ۷= ۰/۸$. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید :

۱) $\log ۴۲$ ۲) $\log \sqrt{۶۳}$

۳) $\log ۷۰$ ۴) $\log ۲۵\sqrt[۳]{۲۴۳}$

۵) $\log_۲ ۳ \times \log_۷ ۳$ ۶) $\log \frac{۲۴۵}{۳\sqrt[۳]{۲}}$

۲۱ اگر $\log_{۴۲} ۳ = m$ و $\log_{۴۲} ۷ = n$، حاصل عبارات زیر را برحسب m و n بنویسید :

۱) $\log_{۴۲} ۲۱$ ۲) $\log_{۴۲} ۶۳$ ۳) $\log_۳ ۲۱$

۴) $\log_۷ ۱۸۹$ ۵) $\log_{۴۲} ۱۶$ ۶) $\log_{۴۲} ۳۴۳$

۲۲ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید :

۱) $\log_۳ (۳x + ۴) = ۴$ ۲) $x^۲ = ۵x + \log_۲ ۱۶$

۳) $\log_۲ x^۲ + \log_۳ ۲۷ = ۷$ ۴) $\log_{۰/۲} (۱ - ۶x) = -۲$

۵) $\log_x ۸ = -۳$ ۶) $\log_y ۳۲ = \frac{۵}{۴}$

۷) $\log_۳ ۵ + \log_۳ x = \log_۳ ۱۰$ ۸) $\log ۱۶ - \log ۲a = \log ۲$

۹) $\log_۶ (p^۲ + ۲) + \log_۶ ۲ = ۲$ ۱۰) $\log_۲ (x + ۲) + \log_۲ (x - ۲) = ۱$

۱۱) $\log (۴ - x) + \log x = \log (۶ - x)$ ۱۲) $\log (۲x + ۵۶) - \log (x + ۱) = ۱ + \log ۲$

۱۳) $\log_۳ (x^۲ - ۲x + ۴) = ۲ - \log_۳ (x + ۲)$ ۱۴) $\log_۳ (\log_۴ (x^۲ + ۳)) = ۰$

۱۵) $۹^{\log ۳ (۲x + ۱)} = ۱$ ۱۶) $\log_۷ x + \log_x ۷ = ۲$

۱۷) $\log_x (x^۳ - ۲x) = ۲$ ۱۸) $x^{\log_۳ x} = ۹$

۲۳ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) $A = \log (\cot ۸^\circ) + \log (\cot ۸۲^\circ)$

ب) $B = \frac{۱}{\log_۲ ۵!} + \frac{۱}{\log_۳ ۵!} + \frac{۱}{\log_۴ ۵!} + \frac{۱}{\log_۵ ۵!}$

پ) $C = \log_۴ (\log_۳ (\log_۲ ۵۱۲))$

۲۴ الف) اگر سه عدد مثبتِ a، b و c تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند، ثابت کنید اعداد $\log a$، $\log b$ و $\log c$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی هستند.

ب) اگر $\log_b a + \log_c a = ۲\log_b a \times \log_c a$ باشد، نشان دهید a واسطهٔ هندسی بین b و c است.

۲۵ لگاریتم عددی در مبنای ۵ از لگاریتم عکس آن عدد در همین مبنا، به‌اندازهٔ ۴ واحد بیشتر است. آن عدد را بیابید.