فصل ۶

حد و پیوستگی

اهداف کلی فصل

- ❑ آشنایی با فرایندهای حدی
- ❑ بررسی رفتار یک تابع در نزدیکی یک نقطه
- ❑ شناخت شهودی مفهوم حد
- ❑ درک تفاوت مقدار تابع و حد تابع در یک نقطه
- ❑ بررسی حد توابع به کمک نمودار آنها
- ❑ محاسبه حد انواع توابع شامل تابع ثابت، همانی، چند جمله‌ای، گویا، جزء صحیح و برخی توابع مثلثاتی و رادیکالی
- ❑ آشنایی با قوانین محاسبه حد توابع (حد مجموع، حد تفاضل و...)
- ❑ آشنایی با مفهوم پیوستگی به طور شهودی
- ❑ ارائه تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه و پیوستگی روی بازه
- ❑ معرفی برخی توابع پیوسته

نگاه کلی به فصل

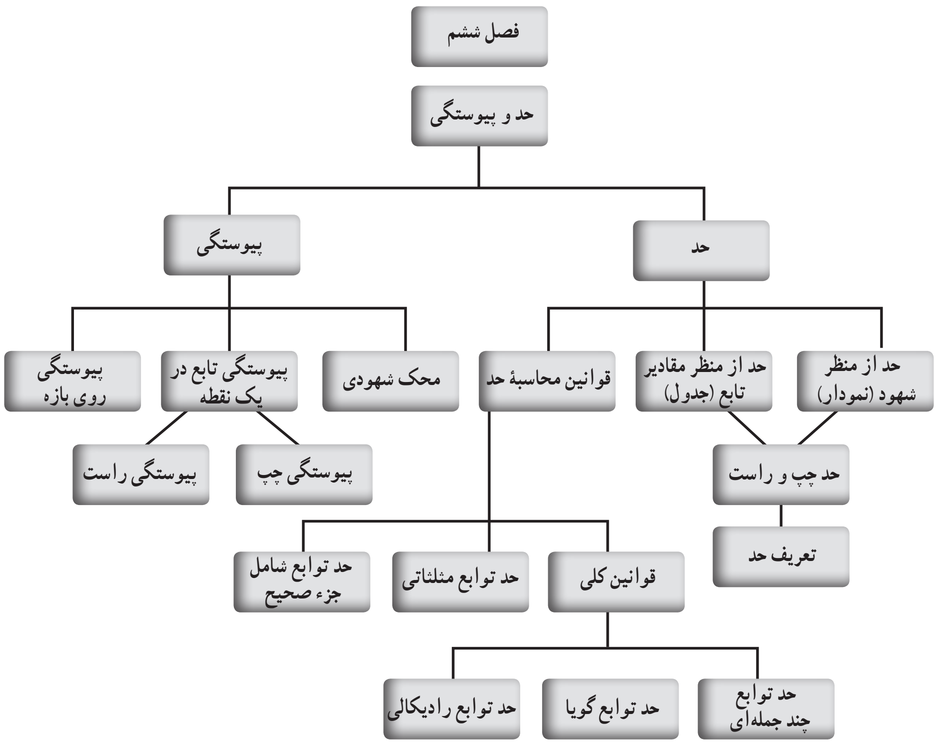
حد یکی از مباحث مهم و پایه‌ای در ریاضیات محسوب می‌شود. در این فصل دانش‌آموزان برای اولین بار با این موضوع آشنا می‌شوند. ورود به این مبحث دارای ظرافت‌های زیادی است. ارائه تعریف صوری و رسمی حد در ابتدای کار منطقی و مفید نیست. به گفته فرودنتال «گام آخر در علم ریاضی صورت‌بندی مسائل از طریق اصل موضوعی ساختن آن است. این نقطه پایانی، نباید به عنوان نقطه آغازین تدریس ریاضی به حساب آید.» ارائه یک تعریف کار ساده‌ای است، امّا درک آن و گشودن رمز و رازهای نهفته در آن کار دشواری است. پژوهش‌ها تأکید می‌کنند که به عوض سر و کار داشتن در ابتدا با تعاریف رسمی بهتر است از رویکردی استفاده شود که در آن دو نکته در نظر گرفته شود:

نکته اوّل استفاده از مفاهیم آشنا و نکته دوم اینکه این مفهوم آشنا پایه‌ای برای ساختن مفهوم جدید فراهم کند. معرفی ایده‌های مجرد بدون فراهم نمودن زمینه‌ای طبیعی و مناسب برای آنها و نیز بدون توجه به دانش و تجربه قبلی دانش‌آموزان بر دشواری‌های یادگیری می‌افزاید و گاهی دسترسی فراگیران به ایده‌ها را ناممکن می‌سازد و علاوه بر این باعث بروز پدیده‌ای به نام مقاومت در برابر یادگیری دانش‌آموزان می‌شود. در این فصل تکیه اساسی مبتنی بر شهود و استفاده از تصاویر و نمودارها و تعاریف مقدماتی است. در این مسیر

در ارائه مباحث، موارد زیر مد نظر مؤلفان بوده است :

رایج بودن و متداول بودن در کتاب‌های معتبر، قابل فهم بودن برای دانش‌آموزان، متکی بر شهود و تجسم بودن، مورد قبول و پذیرش اکثریت معلمان بودن، تعادل بین مفاهیم و رویه‌ها، استفاده از پژوهش‌های مرتبط، پرهیز از ارائهٔ نابجای رویه‌های الگوریتمی و در نهایت تکیه بر خرد جمعی.

نقشهٔ مفهومی



دانستنی‌هایی برای معلم*

بسیاری از دانش‌آموزان با مفهوم حد مشکل دارند و اساس جهان‌بینی ریاضی آنان این است که

* مطالب این بخش از مقاله زیر اقتباس شده است :

ریحانی، ابراهیم؛ شریفی، زهرا وسلطانی، محمد (۱۳۹۵). بررسی بدفهمی‌های دانش‌آموزان سال سوم متوسطه در مورد مفهوم حد، فصلنامه علمی پژوهشی تعلیم و تربیت شماره ۱۲۸

ریاضیات مجموعه‌ای از فرمول‌ها و محاسبات پیچیده روی آنهاست که با دنیای واقعیت و فعالیت‌های روزمره ارتباطی ندارند، از این رو ملموس و قابل درک نیستند و فقط عده خاصی توانایی درک آنها را دارند. برخی از معلمان از همان ابتدای کار و بدون هیچ مقدمه‌ای با هدایت دانش‌آموزان به سمت استفاده از نمادها و رویه‌های پیدا کردنِ مقدار حد، آنها را از درک درستِ مفهوم حد دور می‌کنند. دانش‌آموزان نیز معمولاً توانایی محاسبهٔ حدها را با به کارگیری الگوریتمی فرمول‌ها و رویه‌ها دارند، بدون اینکه قادر به تفسیر نتایج کار خود باشند. لذا شاید بیشتر دانش‌آموزان با تمرکز بر روش‌های جبری و الگوریتمی برای محاسبه، بتوانند مسائل معمولی را حل کنند ولی برای حل مسائل غیرمعمول و غیرروتین که نیازمند درک ویژگی‌های خاصی از مفهوم حد باشد، ناتوان می‌باشند (جوتر[۱]، ۲۰۰۶).

همان‌طور که اشاره شد، عدم درک صحیح دانش‌آموزان از مفهوم حد منجر به بروز بدفهمی‌های متعددی در این زمینه می‌شود که ممکن است درک دیگر مفاهیم مرتبط با حد را نیز دچار مشکل کند. جهت شناسایی این بدفهمی‌ها تحقیقات متعددی انجام گرفته است که هر کدام نوعی بدفهمی را معرفی می‌کند و یا بر بدفهمی‌های شناسایی شده توسط دیگران صحه می‌گذارد. در اینجا ابتدا بدفهمی‌های شناخته شده در زمینه حد را بیان می‌کنیم و سپس به بررسی عوامل مؤثر در ایجاد این بدفهمی‌ها خواهیم پرداخت.

بدفهمی‌های رایج

۱ــ بدفهمی‌های شناخته شده در زمینه حد

بدفهمی‌های شناسایی شده در این زمینه در جدول ۱ ارائه شده است :

جدول ۱ــ انواع بدفهمی‌های شناخته شده در زمینه حد (برگرفته از سلطانی، ۱۳۹۰)

شماره	نوع بدفهمی	تشریح بدفهمی
۱	**حد و مرز[۲]**	به تصور دانش‌آموزان حد تابع به واقع مرز و سر حد تابع است و تابع هرگز نمی‌تواند از آن مقدار فراتر رود؛ یعنی مثلاً زمانی که حد تابع ۲ است، مقدار تابع از مقدار ۲ بیشتر نخواهد شد.
۲	**حد و نماد**	پنداشت‌های نادرستی که از نمادها و اصطلاحات زیادی که برای بیان تعاریف حد به کار می‌رود مانند : میل کردن به سمتِ ... و نزدیک می‌شود به ...، ایجاد می‌شود. زمانی که مثلاً به دانش‌آموز گفته می‌شود x نزدیک a می‌شود ولی هرگز به آن نمی‌رسد، در پی آن بدفهمی‌هایی ایجاد خواهد شد که به نماد $x \to a$ مربوط است.

۱ــ Juter

۲ــ Does not exceed

۳	حد و حرکت[۳]	برخی تصور می‌کنند زمانی که متغیر یک تابع به یک مقدار نزدیک می‌شود، حد حرکت تابع را به سمت یک عدد توصیف می‌کند، پس حد به مفهوم حرکت گره خورده است. این اتفاق در زمان پر کردن جدول‌هایی رخ می‌دهد که برای آموزش حد در ابتدای یادگیری، دانش‌آموز با آن مواجه می‌شود.
۴	حد و جایگزینی	برخی تصور می‌کنند که یک تابع باید در یک نقطه تعریف شده باشد تا در آن نقطه حد داشته باشد یا حد تابع در یک نقطه همواره با مقدار تابع در آن نقطه برابر است یا حتی برخی آن را با مفهوم پیوستگی مرتبط دانسته و معتقدند که تابع فقط می‌تواند در نقاطی که پیوسته باشد حد داشته باشد.
۵	حد و بی‌نهایت[۲]	برخی تصورات مربوط به مفهوم بی‌نهایت و فرایندهای نامتناهی است. چون دانش‌آموزان قادر به فهم فرایندهای نامحدود نیستند و فقط از فرایندهای معین و محدود برای حل مسائل مربوط به حد استفاده می‌کنند؛ مثلاً در محاسبهٔ حدهای بی‌نهایت، دانش‌آموز چون درک خوبی از بی‌نهایت ندارد مانند عدد با آن برخورد کرده و در تابع به عنوان عدد آن را جایگزین می‌کند.
۶	حدِ غیرقابل دسترسی[۳]	برخی تصور می‌کنند حد عددی یا نقطه‌ای است که تابع نزدیک آن می‌شود ولی هرگز به آن نمی‌رسد. مثلاً زمانی که حد تابعی در یک نقطه عدد ۵ به دست می‌آید، تصور می‌کنند هرگز نمی‌توان آن را برابر ۵ در نظر گرفت بلکه عددی نزدیک ۵ است.

۲ــ عوامل مؤثر بر ایجاد بدفهمی‌ها

تحقیقات فراوانی که در این زمینه انجام شده است، عوامل متعددی را در ایجاد این بدفهمی‌ها دخیل می‌دانند که این عوامل مانع ساخت و سازهای مفهومی در مورد حد می‌شوند. از جملهٔ این موانع شناخته شده می‌توان به موارد زیر اشاره کرد :

الف) مشکلات ناشی از طرح‌واره‌ها[۱] : اغلب اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان ریشه در ساختارهای ذهنی دارد یا به عبارت دیگر طرح‌واره‌های ذهنی عامل مؤثری در ایجاد بدفهمی‌ها در مورد مفهوم حد می‌باشد. گویا و حسام (۱۳۸۴) چند نوع از تأثیرات طرح‌واره‌های ذهنی دانش‌آموزان را به صورت زیر ذکر کرده‌اند :

الف) ۱ــ مداخله طرح‌واره‌های پیشین در یادگیری جدید

همواره طرحواره‌های قبلی دانش‌آموزان که در ذهن آنها شکل گرفته است ممکن است یادگیری آنها را تحت تأثیر قرار دهد. اولیور[۲] (۱۹۹۲) معتقد است دانش‌آموزان به جای آنکه طرح‌واره‌های ذهنی خود را بازسازی کنند؛ عموماً تمایل دارند ایده‌های جدید را در طرحواره‌های موجود خود جذب کرده و با آنها منطبق سازند. مثلاً زمانی که دانش‌آموز حد تابع $f(x)=\frac{x^{۲}-۹}{x-۳}$ را زمانی که $x\to+\infty$ برابر ۶ محاسبه می‌کند، طرح‌وارهٔ ذهنی او از حد در نقطه $x=۳$ در حل این مسئله مداخله کرده و باعث ایجاد این اشتباه شده است.

۱ــ Schema

۲ــ Oliver

الف) ۲ـ مداخله یادگیری جدید در طرح‌واره‌های قبلی

در این حالت دانش‌آموز با یادگیری مطالب جدید، دچار بدفهمی‌ها و اشتباهاتی در مورد مطالب گذشته می‌گردد که قبل از آن، آنها را نداشته است، یعنی در این حالت طرح‌وارهٔ جدید است که طرح‌وارهٔ پیشین را تحت تأثیر قرار می‌دهد؛ مثلاً دانش‌آموزی که قبل از آموزش «حد در بی‌نهایت»، محاسبه حد توابع گویا در یک نقطه را عددی ثابت محاسبه می‌کند، پس از آموزش حد در بی‌نهایت در مورد حدهایی که به جواب $\pm\infty$ می‌رسند، دچار تناقض خواهد شد. در این زمان طرح‌وارهٔ جدید است که طرح‌وارهٔ قبلی را دچار مشکل خواهد کرد.

الف) ۳ـ بازخوانی یک طرح‌وارهٔ نامناسب

زمانی که دانش‌آموز در موقعیت حل مسئله قرار می‌گیرد، باید طرح‌واره‌هایی را در ذهن خود بازخوانی و فعال نماید که به کارگیری آنها برای حل مسئله مفید باشد. گاهی ممکن است دانش‌آموز برای یک مسئله از طرح‌وارهٔ نامناسب استفاده کند و باعث بروز یک اشتباه مفهومی گردد؛ مثلاً زمانی که دانش‌آموز حد تابع $f(x)=\frac{x^۲-۴}{x^۲-۲۵}$ را در نقطه ۵ برابر ۱ محاسبه می‌کند، ممکن است طرح‌واره حدهای بی‌نهایت را به طور نامناسب بازخوانی کرده باشد.

ب) مشکلات ناشی از روش‌های آموزشی غیرمؤثر : یکی از عوامل تأثیرگذار بر عدم یادگیری و درک ناصحیح مفهوم حد نحوهٔ آموزش این مفهوم و تأکید بر دانش رویه‌ای به جای دانش مفهومی در کتاب‌های درسی و توجه معلمان به این نوع دانش در بحث‌های کلاسی و ارزشیابی تحصیلی می‌باشد. طیف وسیعی از دانش‌آموزان وجود دارند که ضمن تسلط کامل بر روش‌های الگوریتمی و جبری که با بازنمایی‌های دیگر مفهوم مثل گرافیکی و هندسی سازگاری ندارد، اکثر مفاهیم را بدون درک مفهومی آن آموزش می‌بینند. طبق نتایج به‌دست آمده از تحقیقات برای آموزش مفاهیم به دانش‌آموزان باید بین رویه‌های الگوریتمی و درک مفهومی تعادل ایجاد کرد تا معنای مفاهیم از جمله حد و پیوستگی و مشتق و انتگرال توسط استفاده از روش‌های الگوریتمی قدرتمند پوشیده نشود (آرتیگ[1] (۱۹۹۸) و براسائو[2] (۱۹۹۷) نقل شده در ایلیا[3] (۲۰۰۹)).

ج) مشکلات ناشی از فرایندهای انتزاعی و ساختن مفهوم : معمولاً اولین برخورد دانش‌آموزان با مفهوم حد، با مسائلی شروع می‌شود که بر تعاریف تکیه نمی‌کند، بلکه بر خواص متنوع شهودی مفهوم حد تکیه دارد. با چنین شروعی اغلب دانش‌آموزان تصوراتی از پویایی حد پیدا خواهند کرد و به این باور

۱ـ Artigu

۲ـ Broussea

۳ـ Elia

می‌رسند که تعاریف حد را بدون نیاز به دستیابی به همه نتایج مفهومی رسمی حد درک کرده‌اند. همچنین تأکید بر فرایندهای انتزاعی مانند «نزدیک شدن به ...» که در آموزش اولیه حد وجود دارد باعث ایجاد بدفهمی‌ها می‌گردد.

د) مشکلات به وجود آمده در برخورد با تعریف رسمی حد : مشکل اساسی در مفهوم حد زمانی به اوج خود می‌رسد که دانش‌آموزان باید از مفاهیم پویایی حد بگذرند و به مفاهیم رسمی برسند. همان‌طور که می‌دانیم در آموزش مفهوم حد ابتدا جملاتی مانند «میل می‌کند به سمتِ ...» و «نزدیک می‌شود به...» و نظایر آن برای دانش‌آموزان معنی می‌شود. دانش‌آموزان حتی بعد از آموزش رسمی حد، هنوز هم بر همان معانی اولیه تکیه می‌کنند و بدفهمی‌هایی نظیر «آیا تابع به حد خود می‌رسد؟» یا «حد، حرکتی است به سمت یک شیء که ممکن است به آن برسد یا نرسد» برای آنها ایجاد می‌شود. این بدفهمی‌ها در درک دانش‌آموزان از تعریف رسمی حد مؤثر است. بنابراین زمانی که تعاریف رسمی که با ایده‌های شهودی و پویایی از حد سازگاری ندارند مطرح می‌شوند، دانش‌آموزان در درک آن دچار مشکل شده و به بدفهمی‌های آنها، نمادها و اصطلاحات موجود در تعریف رسمی هم اضافه می‌شود (ایلیا، ۲۰۰۹).

به علت اهمیت و جایگاه مفهوم حد در ریاضیات و مشکلات دانش‌آموزان در این زمینه، تحقیقات متعددی در سراسر دنیا در مورد این مفهوم انجام گرفته است که بخشی از آنها به نحوه آموزش این مفهوم و بخشی دیگر از تحقیقات به شناسایی انواع مشکلات و بدفهمی‌های ایجاد شده می‌پردازد. از جملهٔ این تحقیقات می‌توان به تحقیق مونوقان[1] (۱۹۹۱) اشاره کرد که تأثیرات زبان را بر باورهای دانش‌آموزان دربارهٔ واژه‌هایی مانند «به سمتِ ... میل می‌کند.»، «به ... نزدیک می‌شود.»، «در ... همگرا می‌گردد.» و «حد» بررسی نمود و مشاهده کرد که دانش‌آموزان این واژه‌ها را با شکل‌های متفاوتی به کار می‌برند.

تصویر عنوانی

برج کاشانه، برج بلند و زیبایی است که در جنوب شهر بسطام و جنوب خاوری مسجد جامع بسطام قرار دارد. برج کاشانهٔ بسطام از بناهای تاریخی قرن هفتم و هشتم هجری است. تاریخ بنای برج کاشانه بر اساس کتیبه سردر ورودی، سال ۷۰۰ قمری است. ارتفاع این برج ۲۰ متر است و در بالای برج نوشته‌ای به خط کوفی دیده می‌شود که در آن نام الجایتو ثبت شده است. ارتفاع برج کاشانه از درون ۲۴ متر و از بیرون نزدیک به ۲۰ متر است. شکل خارجی آن چند ضلعی منتظم سی ضلعی است.

در بالای برج کاشانه دو حاشیه از آجرهای بزرگ وجود دارد که روی آن مطالبی نوشته شده است.

۱ـ Monaghan

در ضلع جنوب غربی این برج روی یک آجر کلمه بسم اللّه الرحمن الرحیم با خط ثلث بسیار زیبایی دیده می‌شود.

برخی از شرق‌شناسان از جمله آندره گدار بر این گمان است که این بنا از آثار غازان‌خان مغول است و نام اصلی آن غازانه بوده که به مرور زمان و بدون توجه به اصل آن کاشانه نامیده شده است.

در دوره‌های بعد از اسلام، از این برج برای دیده‌بانی بسطام استفاده می‌شد. با توجه به اسلوب ساختمان و عوامل دیگر، این بنا بسیار شبیه رصدخانه به نظر می‌رسد.

ساختمان برج کاشانه که نمای خارجی آن دارای جلوه و شکوه خاصی است، از بناهای درخور اهمیت خطه قومس بوده و نمای خارجی آن نیز دارای جلوه و شکوه خاصی است. برج کاشانه در سال ۱۳۱۰ به شماره ۶۹ در فهرست آثار تاریخی به ثبت رسیده است.

درس اول

فرایندهای حدی

هدف کلی : درک مفهوم حد به صورت شهودی

اهداف جزئی درس

۱ معرفی فرایندهای حدی (با استفاده از اشکال هدفمند و درج مقادیر متناظر در جدول)
۲ درک اولیهٔ مفهوم حد، حد چپ و حد راست با استفاده از فرایندهای حدی
۳ آشنایی با مفهوم حد چپ و حد راست تابع در یک نقطه
۴ آشنایی با تعریف حد تابع در یک نقطه
۵ درک شهودی حد راست، حد چپ و تشخیص حد داشتن تابع در یک نقطه، از روی نمودار
۶ بررسی حد توابع با استفاده از جدول مقادیر
۷ درک تفاوت بین حد تابع در یک نقطه و مقدار تابع در همان نقطه
۸ بررسی حد توابع رادیکالی ساده، چند ضابطه‌ای، شامل قدرمطلق از روی نمودار

پیش‌نیازها

۱ آشنایی با توابع خطی و رسم نمودار آن
۲ آشنایی با توابع درجه دوم (سهمی) و رسم نمودار آن
۳ آشنایی با مفهوم قدرمطلق
۴ آشنایی با رسم نمودار توابع چند ضابطه‌ای

روش تدریس

درس اوّل به فرایندهای حدی اختصاص دارد و در آن دانش‌آموزان به طور شهودی و غیررسمی با مفهوم حد آشنا می‌شوند. لازم به ذکر است که در این کتاب به تعریف حد در همین سطح بسنده شده و از ارائه تعریف رسمی و دقیق حد اجتناب کرده‌ایم. حد راست و حد چپ نیز به طور شهودی و با تکیه بر نمودار توابع مطرح می‌شود.

در فعالیت صفحهٔ ۱۲۰ به کمک چندضلعی‌های منتظم محاطی در یک دایره، مفهوم حد به طور شهودی مورد بررسی قرار می‌گیرد. به همکاران محترم توصیه می‌شود در انجام این فعالیت از دانش‌آموزان بخواهند که در مورد مساحت‌ها حدس بزنند به این معنی که مساحت چندضلعی را با مساحت دایره مقایسه کنند و در صورت امکان و داشتن زمان کافی، مساحت برخی از چندضلعی‌ها مثلاً مثلث و مربع را به‌دست بیاورند.

فعالیت صفحه ۱۲۰

حدس می‌زنید مساحت کدام‌یک به مساحت دایره نزدیک‌تر است؟ هرچه تعداد اضلاع چند ضلعی‌های منتظم محاطی بیشتر شوند، چه‌اتفاقی می‌افتد؟ مساحت مربع به مساحت دایره نزدیک‌تر است. هرچه تعداد اضلاع چندضلعی‌های محاطی بیشتر شوند، مساحت چندضلعی منتظم به مساحت دایره نزدیک‌تر می‌شود.

برای نزدیک‌تر شدن مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاطی به مساحت دایره چه می‌توان کرد؟ آیا به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم مساحت چند ضلعی‌های منتظم را به مساحت دایره نزدیک کنیم؟ برای نزدیک‌تر شدن مساحت چندضلعی منتظم محاطی به مساحت دایره، می‌توان تعداد اضلاع چندضلعی را بیشتر کرد.

بله هر قدر که بخواهیم می‌توانیم مساحت چندضلعی منتظم را به مساحت دایره نزدیک کنیم.

چند ضلعی منتظم محاطی	۳	۴	۵	۶	۷	...	۱۲	زیاد شدن تعداد اضلاع →
مساحت تقریبی	$۱/۳r^۲$	$۲r^۲$	$۲/۳۸r^۲$	$۲/۶r^۲$	$۲/۸r^۲$	...	$۳r^۲$	نزدیک‌تر شدن مساحت → چند ضلعی‌ها به مساحت دایره

جمع‌بندی پایان صفحهٔ ۱۲۰، فعالیت را کامل می‌کند. با اینکه در این جمع‌بندی از نمادهای ریاضی استفاده نشده است ولی جملات دقیق و بی‌نقص ارائه شده‌اند.

در کار در کلاس صفحهٔ ۱۲۱، همین مطلب با استفاده از چندضلعی‌های منتظم محیط بر دایره تکرار شده است.

توصیهٔ آموزشی

همکاران محترم . . .

۱ اجازه دهید دانش‌آموزان با جملات خودشان نتیجه را بیان کنند و در مورد آن در کلاس بحث شود.

۲ در این دو فعالیت، طرح مفهوم حد به کمک دنباله‌ها و مثلاً میل کردن تعداد اضلاع به بی‌نهایت به هیچ عنوان جزو اهداف کتاب نیست.

کار در کلاس صفحه ۱۲۱

نتیجه مشابه آنچه را در فعالیت قبل به‌دست آمد، دربارهٔ این چند ضلعی‌ها بیان کنید (محاسبه مساحت‌ها لازم نیست).

نتیجه : هرچه تعداد اضلاع چندضلعی‌های منتظم محیط بر دایره را افزایش دهیم، مساحت چندضلعی‌های منتظم محیطی، به مساحت دایره نزدیک‌تر می‌شود.

به عبارت دیگر مساحت چندضلعی‌های منتظم محیط بر دایره را هر قدر که بخواهیم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک‌تر کنیم به شرط آنکه تعداد اضلاع چندضلعی را به مقدار کافی بزرگ اختیار کنیم.

در فعالیت صفحهٔ ۱۲۱، دانش‌آموزان با مقایسهٔ مساحت مستطیل‌ها، با گونه‌ای دیگر از فرایندهای حدی آشنا می‌شوند. تکمیل جدول‌ها، به دانش‌آموزان امکان مقایسهٔ مساحت مستطیل‌ها را می‌دهد.

جدول و تصاویر به دانش‌آموز کمک می‌کند که مفهوم میل کردن و نزدیک شدن به یک نقطهٔ خاص، و مفهوم حد را به طور شهودی و غیررسمی درک نماید. همچنین ارائه مساحت در قالب یک تابع، نوعی مدل‌سازی ریاضی مقدماتی به حساب می‌آید و تکیه بر روی یک تابع و رفتار آن را تا حدی توجیه می‌کند.

فعالیت صفحه‌های ۱۲۱ و ۱۲۲

مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد را در نظر می‌گیریم. پاره‌خط MN وسط AB را به وسط DC وصل می‌کند. مساحت مستطیل $AMND$ چقدر است؟ مساحت مستطیل $AMND$ برابر است با؛ ۸=۴×۲.

جاهای خالی را پر کنید (طول مستطیل‌ها برابر ۴ واحد است).

عرض مستطیل‌ها	۲	۲/۱	۲/۵	۲/۷	۲/۸	۲/۹	۲/۹۹	عرض مستطیل‌ها با مقادیر کمتر از ۳، به ۳ نزدیک می‌شود.
مساحت مستطیل رنگی	۸	۸/۴	۱۰	۱۰/۸	۱۱/۲	۱۱/۶	۱۱/۹۶	مساحت به عدد ۱۲ نزدیک می‌شود.

عرض مستطیل‌ها	۴	۳/۹	۳/۵	۳/۲	۳/۱	۳/۰۱	عرض مستطیل‌ها با مقادیر بیشتر از ۳، به ۳ نزدیک می‌شود.
مساحت مستطیل رنگی	۱۶	۱۵/۶	۱۴	۱۲/۸	۱۲/۴	۱۲/۰۴	مساحت به عدد ۱۲ نزدیک می‌شود.

x از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شود

x از سمت چپ به ۳ نزدیک می‌شود

x	۲	۲/۱	۲/۵	۲/۸	۲/۹	۲/۹۹	→۳←	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲	۳/۵	۳/۹	۴
$f(x)$	۸	۸/۴	۱۰	۱۱/۲	۱۱/۶	۱۱/۹۶	→۱۲←	۱۲/۰۴	۱۲/۴	۱۲/۸	۱۴	۱۵/۶	۱۶

$f(x)$ به ۱۲ نزدیک می‌شود

$f(x)$ به ۱۲ نزدیک می‌شود

با استفاده از فعالیت صفحه‌های ۱۲۱ و ۱۲۲، تعاریف شهودی حد راست و حد چپ را با دقت مناسبی در صفحهٔ ۱۲۳ ارائه کرده‌ایم و در نهایت مفهوم حد برای این مثال بیان شده است.

پس از این مطلب، با الهام از مثال صفحهٔ ۱۲۴، تعریف حد تابع در یک نقطه را در همان صفحه ارائه کرده‌ایم.

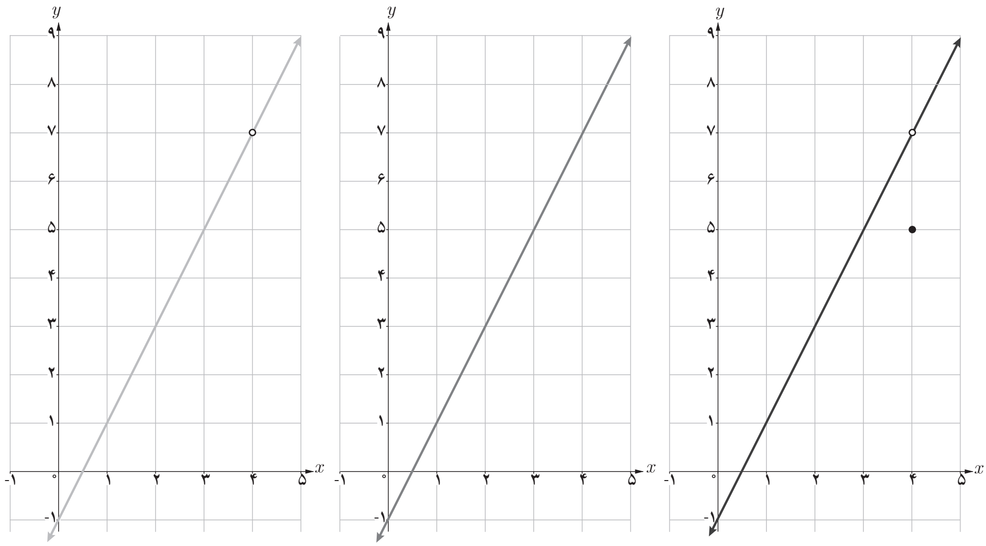
هدف فعالیت صفحهٔ ۱۲۵، درک بهتر مفهوم حد و برطرف کردن برخی از بدفهمی‌های مرتبط با حد است. در این فعالیت دانش‌آموزان با سه تابع f و g و h مواجه شده و دلیل مساوی نبودن این سه تابع را توضیح می‌دهند. سپس با تکمیل جدول‌ها و بررسی رفتار سه تابع در نزدیکی نقطهٔ ۴، رفتار این توابع را یکسان می‌بینند. رفتار یکسان این سه تابع به وسیلهٔ مفهوم حد قابل توجیه است. با اینکه سه تابع مساوی نیستند ولی حد هر سه تای آنها در نقطهٔ ۴ برابر با ۷ است.

فعالیت صفحه ۱۲۵

نمودار توابع زیر رسم شده‌اند :

$f(x)=۲x-۱$ $\qquad$ $g(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x\neq ۴\\ ۵ & x=۴\end{cases}$ $\qquad$ $h(x)=۲x-۱ \quad (x\neq ۴)$

هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ آیا این سه تابع با یکدیگر برابرند؟ دامنه و برد این سه تابع را معلوم کنید.



$h(x)=۲x-۱\ (x\neq ۴)$ $\qquad$ $f(x)=۲x-۱$ $\qquad$ $g(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x\neq ۴\\ ۵ & x=۴\end{cases}$

$\begin{cases}D_h=\mathbb{R}-\{۴\}\\ R_h=\mathbb{R}-\{۷\}\end{cases}$ $\qquad$ $D_f=R_f=\mathbb{R}$ $\qquad$ $\begin{cases}D_g=\mathbb{R}\\ R_g=\mathbb{R}-\{۷\}\end{cases}$

خیر، سه تابع با هم مساوی نیستند زیرا نمودارهایشان دقیقاً برهم منطبق نیستند.

می‌خواهیم رفتار این سه تابع را در نزدیکی نقطهٔ ۴ بررسی کنیم. ابتدا جدول را کامل کنید.

x از سمت راست به ۴ نزدیک می‌شود　　　　x از سمت چپ به ۴ نزدیک می‌شود

x	۳	۳/۵	۳/۸	۳/۹	۳/۹۹	← ۴ →	۴/۰۱	۴/۱	۴/۲	۴/۵	۵
$f(x)$	۵	۶	۶/۶	۶/۸	۶/۹۸	← ۷ →	۷/۰۲	۷/۲	۷/۴	۸	۹
$g(x)$	۵	۶	۶/۶	۶/۸	۶/۹۸	← ۷ →	۷/۰۲	۷/۲	۷/۴	۸	۹
$h(x)$	۵	۶	۶/۶	۶/۸	۶/۹۸	← ۷ →	۷/۰۲	۷/۲	۷/۴	۸	۹

مقادیر f، g و h را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم به عدد ۷ نزدیک کنیم؛ به شرط آنکه مقادیر x به قدر کافی به عدد ۴ نزدیک شود. حد هر سه تابع وقتی که $x\to$ ۴ (بخوانید x به سمت ۴ میل می‌کند) برابر ۷ است. به عبارت دیگر :

$$\lim_{x\to ۴} f(x) = ۷ \qquad \lim_{x\to ۴} g(x) = ۷ \qquad \lim_{x\to ۴} h(x) = ۷$$

در پایان درس، به عنوان جمع‌بندیِ بحث، تأکید شده است که حد تابع و مقدار تابع (در صورت وجود)، الزاماً با یکدیگر برابر نیستند. مثال‌های ۱ و ۲ در صفحهٔ ۱۲۶، برای تثبیت این موضوع ارائه شده‌اند.

توصیهٔ آموزشی

همکاران محترم در طرح سؤالاتی که در آنها بررسی حد با رسم نمودار مدنظر است، لطفاً به موارد زیر عنایت فرمایید :

۱ استفاده از توابع ثابت، توابع خطی و توابع درجه ۲ توصیه می‌شود.

۲ از آوردن توابع قدرمطلقی جز حالت $y=|x-a|$ اجتناب نمایید.

۳ استفاده از توابع رادیکالی، فقط به فرم $y=\sqrt{x-a}$ توصیه می‌شود.

مطرح کردن نمونه‌هایی جز این موارد، خارج از اهداف کتاب است. همچنین طرح سؤال‌های حدی در مورد نمودارهایی که شاخهٔ بی‌نهایت دارند یا دارای مجانب هستند، به هیچ وجه جزء اهداف آموزشی این کتاب نمی‌باشد، لذا از طرح چنین سؤالاتی خودداری فرمایید.

حل تمرین‌های صفحهٔ ۱۲۷

۱ الف) نادرست $\left(\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۰\right)$

ب) درست

پ) نادرست (تابع f در ۲ تعریف نشده است)

ت) درست

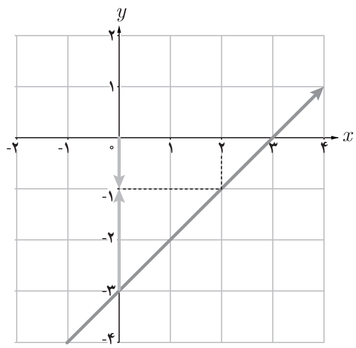
ث) نادرست ($\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد)

ج) درست

چ) درست

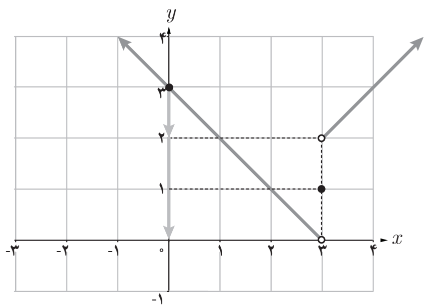
ح) درست

۲ تابع $f(x) = x - ۳$ را در نظر می‌گیریم. نمودار این تابع به صورت مقابل است و با توجه به نمودار، داریم :

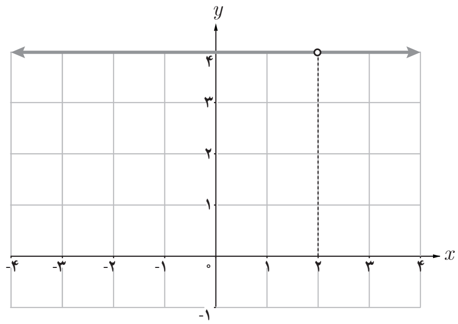


$$\lim_{x\to ۲} f(x) = -۱$$

۳ تابع $f(x) = \begin{cases} x-۱ & x > ۳ \\ ۱ & x = ۳ \\ ۳-x & x < ۳ \end{cases}$ ، با نمودار مقابل، خواسته‌های مسئله را تأمین می‌کند. در این تابع داریم :



$f(۳) = ۱$ و $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ وجود ندارد



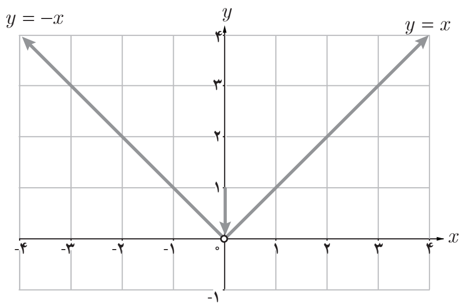
۴ تابع $f(x)=۴\ (x\neq ۲)$، با نمودار مقابل، در نقطهٔ ۲ تعریف نشده است و $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$.

۵ الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\circ$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ وجود ندارد، چون تابع f برای $x<۲$ تعریف نشده است.

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد زیرا تابع f در نقطهٔ $x=۲$، حد چپ ندارد.

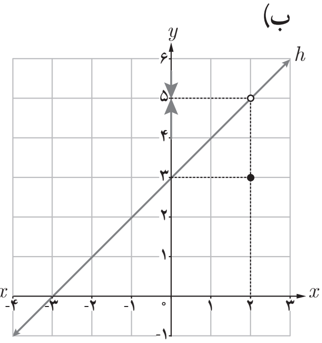
ت) $f(۲)=\circ$



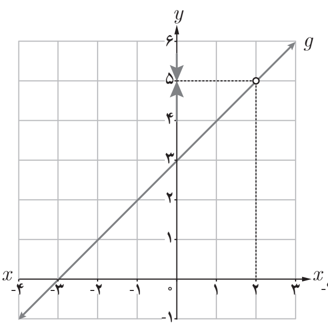
۶ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x & x>\circ \\ -x & x<\circ \end{cases}$ به صورت مقابل است : از ضابطه مشخص است که $f(\circ)$ تعریف نشده است و با توجه به نمودار داریم : $\lim\limits_{x\to\circ} f(x)=\circ$

۷ الف) $f(۲)=۵$، $g(۲)$ تعریف نشده است و $h(۲)=۳$.

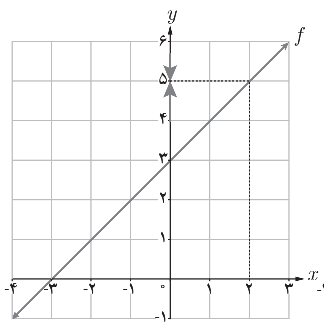
ب)



$\lim\limits_{x\to ۲} h(x)=۵$



$\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=۵$



$\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۵$

۸ برای پاسخ به سؤال، از جدول استفاده می کنیم :

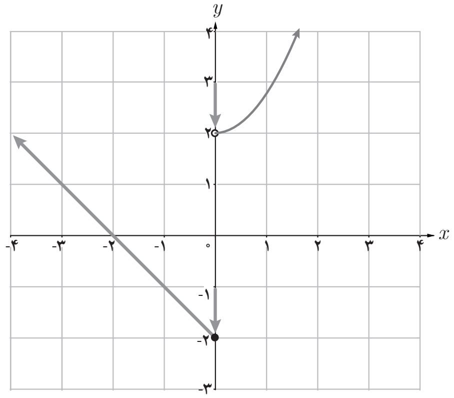
x از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شود — x از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود

x	۱/۵	۱/۸	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۲		۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱	۲/۲	۲/۵	x
$f(x)=x-۳$	−۱/۵	−۱/۲	−۱/۱	−۱/۰۱	−۱/۰۰۱	−۱	۰	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۳	۰/۵	$f(x)=-x+۲$

$f(x)$ به صفر نزدیک می‌شود — $f(x)$ به ۱− نزدیک می‌شود

با توجه به جدول $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=-۱$ و $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۰$ ، و چون حد چپ و راست با هم برابر نیستند، پس تابع f در نقطهٔ ۲ حد ندارد.

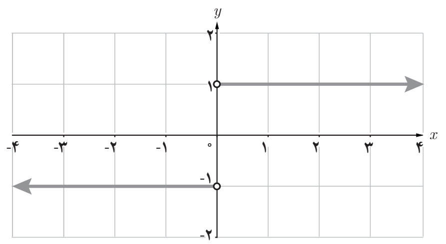
۹ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲ & x>۰ \\ -۲x-۲ & x\le ۰ \end{cases}$ به صورت مقابل است. بنابر نمودار داریم :



$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۲$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-۲$

می‌بینیم که حد چپ و راست برابر نیستند، بنابراین حد تابع f در $x=۰$ وجود ندارد.

۱۰ نمودار تابع $f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$ به صورت روبه‌رو، رسم شده است. با توجه به نمودار داریم :



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۱ \\ \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-۱ \end{cases} ,\quad \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)\ne \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) \Rightarrow \text{وجود ندارد } \lim\limits_{x\to ۰} f(x)$$

درس دوم

محاسبهٔ حد توابع

اهداف آموزشی

۱ آشنایی با قوانین محاسبهٔ حد
۲ درک شهودی برخی از قوانین محاسبهٔ حد از روی نمودار
۳ محاسبهٔ حد توابع با استفاده از ضابطه
۴ آشنایی با نحوهٔ محاسبهٔ حد توابع چندجمله‌ای، رادیکالی، مثلثاتی و چندضابطه‌ای
۵ آشنایی با نحوهٔ محاسبهٔ حد توابع گویا وقتی حد صورت و مخرج برابر با صفر است.
۶ ارائه راهکار دقیق و مناسب برای بحث روی حد توابع شامل قدرمطلق.
۷ ارائه الگوی مناسب و قابل درک در مورد چگونگی بحث وجود یا عدم وجود حد تابع با ضابطهٔ $y=[x]$ در نقاط صحیح و غیرصحیح.

پیش‌نیازها

۱ آشنایی با توابع، دامنه و نمودار آنها
۲ شناخت تابع جزء صحیح و نمودار آن
۳ آشنایی با مفهوم قدرمطلق، شناخت توابع شامل قدرمطلق و رسم نمودار آنها
۴ آشنایی با روش‌های تجزیهٔ عبارت‌های جبری
۵ درک تعاریف و مطالب مطرح شده در درس اوّل
۶ آشنایی با مقادیر نسبت‌های مثلثاتی و محاسبهٔ مقدار عددی عبارت‌های مثلثاتی

روش تدریس

در این درس، قوانین محاسبهٔ حدِ برخی توابع، آموزش داده می‌شود. این دستورها بدون اثبات و در صورت لزوم به کمک شهود و با استفاده از نمودار توضیح داده می‌شوند. در مورد حد توابع گویا، رفع ابهام در حالت‌های ساده آموزش داده می‌شود که در این قسمت نیز برای درک بهتر، از نمودار توابع کمک گرفته می‌شود.

توصیهٔ آموزشی

حد توابع رادیکالی تنها برای توابعی به شکل $y=\sqrt{ax+b}$ که در آن حد تابعِ خطیِ زیر رادیکال عددی مثبت است مطرح می‌شود و حالت‌های دیگر جزء اهداف این کتاب نیست. در ادامه حد توابع مثلثاتیِ $y=\sin x$ و $y=\cos x$ و یا ترکیبات سادهٔ آنها ارائه می‌شود. پس از این خلاصه، به ابتدای درس بازمی‌گردیم. درس دوم را با ارائهٔ دستورها و قواعدی برای محاسبهٔ حد توابع آغاز کرده‌ایم. در بیان این دستورها، ابتدا محاسبهٔ حد تابع ثابت و تابع همانی با ذکر مثال‌هایی و با تکیه بر شهود و رسم نمودار ارائه شده است.

کار در کلاس صفحه ۱۲۸

حدهای زیر را حساب کنید :

$\lim\limits_{x\to ۰} x = ۰$ $\qquad \lim\limits_{x\to ۷} ۵ = ۵$ $\qquad \lim\limits_{x\to ۷} x = ۷$

$\lim\limits_{x\to ۷} x = -۷$ $\qquad \lim\limits_{x\to ۴} (-۲) = -۲$ $\qquad \lim\limits_{x\to ۵} ۰ = ۰$

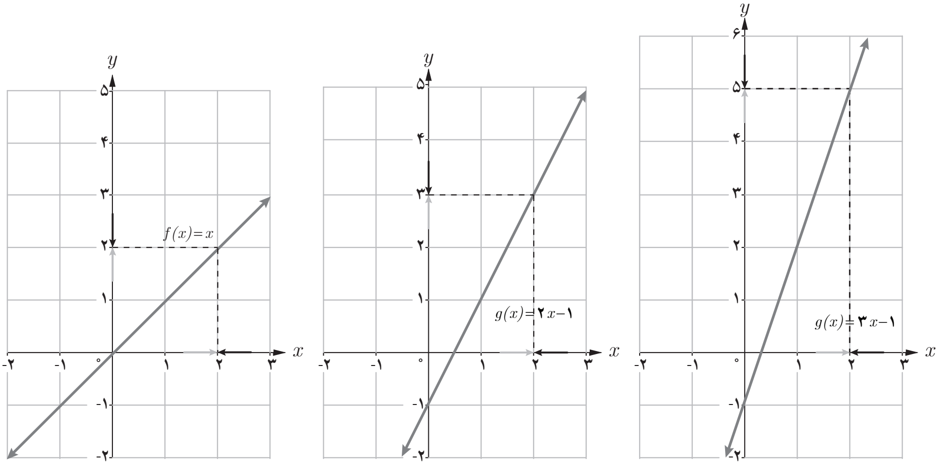
پس از این کار در کلاس، می‌توان با ارائهٔ مثال زیر، بحث را غنی‌تر نموده و به آن عمق بیشتری داد :

مثال : حد تابع $f(x)=\begin{cases} ۵ & x\neq ۲ \\ ۱ & x=۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۲$ را در صورت وجود بیابید.

در صفحهٔ ۱۲۹، قانون حد مجموع دو تابع ارائه شده است. توصیه می‌شود قبل از بیان قانون از دانش‌آموزان بخواهیم تا در مورد آن حدس بزنند. کار در کلاس ارائه شده به توضیح بیشتر این قانون با تکیه بر نمودار دو تابع مربوطه می‌پردازد.

کار در کلاس صفحه ۱۲۹

اگر $f(x)=x$ و $g(x)=۲x-۱$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۲}\big(f(x)+g(x)\big)$ را به کمک قانون بالا محاسبه کنید. جاهای خالی را پر کنید و به کمک نمودارها قانون حد مجموع را نیز توضیح دهید.



$\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۲$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to ۲} g(x) = ۳$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to ۲}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim\limits_{x\to ۲} f(x) + \lim\limits_{x\to ۲} g(x)$

$= ۲+۳=۵$

با توجه به نمودارها، واضح است که با نزدیک شدن x به عدد ۲، مقادیر تابع $f(x)$ به ۲ و مقادیر تابع $g(x)$ به ۳، و در نتیجه مقادیر تابع $f(x)+g(x)$ به عدد ۵=۳+۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\big(f(x)+g(x)\big) = ۵$$

در ادامه، قانون حد تفاضل و حد حاصل‌ضرب دو تابع ارائه شده است. بهتر است که از دانش‌آموزان بخواهیم مثال‌های دیگری مطرح و حل نمایند. در این فرایند بسیاری از اشکالات آنها با بحث و گفت‌وگوی کلاسی برطرف خواهد شد. در این موقعیت، یک سؤال چالش برانگیز که قابل طرح و بررسی است این است که آیا امکان دارد دو تابع در نقطه‌ای خاص حد نداشته باشند ولی مجموع آنها در آن نقطه دارای حد باشد؟ این سؤال را می‌توان به عنوان یک تحقیق به دانش‌آموزان واگذار کرد و در جلسات بعد مورد بررسی قرار داد.

به کمک قوانینی که تاکنون دانش‌آموزان فراگرفته‌اند، می‌توانند به تعمیم برخی از قوانین محاسبهٔ حد پرداخته و یا از آنها برای محاسبهٔ حد بسیاری از توابع استفاده کنند.
به طور مثال می‌توانند حد توان‌های طبیعی تابع $f(x)$ در یک نقطه را به شرط وجود حد تابع f در آن نقطه، به‌دست آورند و یا از قوانین برای محاسبهٔ حد تابع چندجمله‌ای استفاده کنند.

کار در کلاس صفحه ۱۳۰

الف) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ ، به کمک قانون حد حاصل‌ضرب هر یک از حدهای زیر را بیابید.

فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$. در این صورت به کمک قانون حد حاصل‌ضرب، می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{۲}=\lim_{x\to a}\left(f(x)\,.\,f(x)\right)$$
$$=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} f(x)=l\times l=l^{۲}$$
$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{۳}=\lim_{x\to a}\left(\left(f(x)\right)^{۲}.f(x)\right)$$
$$=\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{۲}.\lim f(x)=l^{۲}.l=l^{۳}$$

ب) برای محاسبهٔ حد $\lim\limits_{x\to ۲۰}(\frac{۲}{۵}x-۳)$ چگونه از قوانین ۱، ۲، ۴ و ۵ استفاده می‌کنید؟ توضیح دهید.

ب) برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to ۲۰}(\frac{۲}{۵}x-۳)$ ، ابتدا با استفاده از قوانین (۱) و (۲) و (۴) می‌توان نوشت :

$$\overbrace{\lim_{x\to ۲۰}(\frac{۲}{۵}x)=\lim_{x\to ۲۰}\frac{۲}{۵}\times\lim_{x\to ۲۰}x}^{\text{قانون ۴}}=\frac{۲}{۵}\times ۲۰=۸$$

قانون (۱)
قانون (۲)

اینک با استفاده از قانون (۵)، داریم :

$$\lim_{x\to ۲۰}(\frac{۲}{۵}x-۳)=\lim_{x\to ۲۰}(\frac{۲}{۵}x)-\lim_{x\to ۲۰}۳=۸-۳=۵$$

در صفحهٔ ۱۳۰، قانون محاسبهٔ حد تقسیم دو تابع نیز ارائه شده است که در فعالیت صفحهٔ ۱۳۱ دانش‌آموزان در چند نمونه به استفاده از آن خواهند پرداخت.

فعالیت صفحه ۱۳۱

۱ برای تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۳x^۲+۲x-۷$ ،

الف) با تکمیل جاهای خالی $\lim_{x\to ۱} f(x)$ را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}(۳x^۲+۲x-۷)$$
$$=\lim_{x\to ۱}(۳x^۲)+\lim_{x\to ۱}(۲x)-\lim_{x\to ۱}۷$$
$$=۳\lim_{x\to ۱}x^۲+۲\lim_{x\to ۱}x-۷=۳\left(\lim_{x\to ۱}x\right)^۲+۲(۱)-۷=۳(۱)^۲+۲-۷=-۲$$

ب) $f(۱)$ را محاسبه کنید و درستی تساوی $\lim_{x\to ۱} f(x)=f(۱)$ را بررسی کنید.

با محاسبه‌ای ساده $f(۱)=-۲$ به‌دست می‌آید و با مقایسهٔ این عدد با $\lim_{x\to ۱} f(x)$ می‌بینیم که $\lim_{x\to ۱} f(x)=f(۱)$.

پ) دربارهٔ تابع با ضابطهٔ $g(x)=\frac{۱}{۸}x^۴-x^۳+۵x-\frac{۱}{۲}$ ، درستی تساوی $\lim_{x\to ۲} g(x)=g(۲)$ را بررسی کنید.

$$g(x)=\frac{۱}{۸}x^۴-x^۳+۵x-\frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} g(۲)=\frac{۱}{۸}(۲)^۴-۲^۳+۵(۲)-\frac{۱}{۲}=۲-۸+۱۰-\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۲} \\ \lim_{x\to ۲} g(x)=\lim_{x\to ۲}(\frac{۱}{۸}x^۴-x^۳+۵x-\frac{۱}{۲}) \end{cases}$$

$$=\lim_{x\to ۲}(\frac{۱}{۸}x^۴)-\lim_{x\to ۲}x^۳+\lim_{x\to ۲}(۵x)-\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{۲}$$
$$=\frac{۱}{۸}\lim_{x\to ۲}x^۴-\lim_{x\to ۲}x^۳+۵\lim_{x\to ۲}x-\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{۲}$$
$$=\frac{۱}{۸}\left(\lim_{x\to ۲}x\right)^۴-\left(\lim_{x\to ۲}x\right)^۳+۵\lim_{x\to ۲}x-\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{۲}$$
$$=\frac{۱}{۸}\times ۲^۴-۲^۳+۵(۲)-\frac{۱}{۲}=۲-۸+۱۰-\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۲}$$

با مقایسهٔ $g(۲)$ و $\lim_{x\to ۲} g(x)$ ، واضح است که : $\lim_{x\to ۲} g(x)=g(۲)$

۲ الف) مطلوب است : $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{۲x-۱}{x^۲-۴x+۱}$. جاهای خالی را کامل کنید.

$$\lim_{x\to ۳} \frac{۲x-۱}{x^۲-۴x+۱} = \frac{\lim\limits_{x\to ۳}(۲x-۱)}{\lim\limits_{x\to ۳}(x^۲-۴x+۱)} = \frac{۲(۳)-۱}{۳^۲-۴(۳)+۱} = -\frac{۵}{۲}$$

ب) حدهای زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^۴+۲x^۳+۱}{۵x^۲+\frac{۲}{۳}} = \frac{\lim\limits_{x\to ۱}(x^۴+۲x^۳+۱)}{\lim\limits_{x\to ۱}(۵x^۲+\frac{۲}{۳})} = \frac{۱^۴+۲(۱)^۳+۱}{۵(۱)^۲+\frac{۲}{۳}} = \frac{۱۲}{۱۷}$$

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-۱}{\frac{۳}{۵}x^۲-۲x+۱} = \frac{\lim\limits_{x\to ۱}(x^۲-۱)}{\lim\limits_{x\to ۱}(\frac{۳}{۵}x^۲-۲x+۱)} = \frac{۱^۲-۱}{\frac{۳}{۵}(۱)^۲-۲(۱)+۱} = ۰$$

در صفحات ۱۳۱ و ۱۳۲ برای محاسبهٔ حد تابع گویای $\frac{P(x)}{Q(x)}$ وقتی که حد صورت و مخرجِ کسر هر دو برابر صفر می‌شود، دو روش مورد بررسی قرار گرفته است؛ روش ساده کردن عبارت و روش استفاده از نمودار.

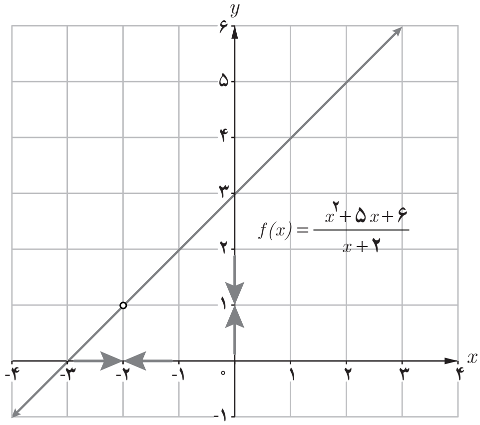
توصیهٔ آموزشی : در این مورد، تابع‌ها باید در محدوده‌ای که کتاب به آن پرداخته است مورد بحث قرار گیرند و طرح حدهای پیچیده و مشکل که تنها بر پایهٔ الگوریتم‌ها و قواعد و بدون درک مناسب ارائه می‌شوند مجاز نیست.

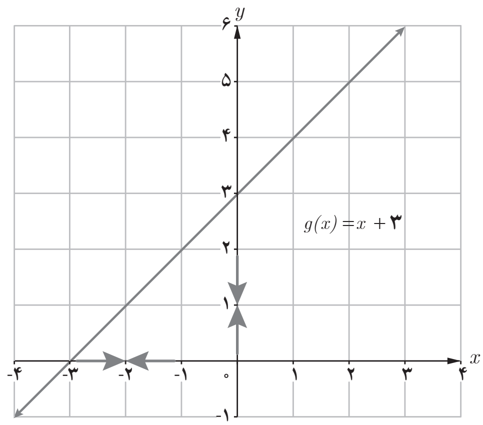
کار در کلاس صفحه ۱۳۲

مانند مثال قبل حدها را محاسبه کنید؛ سپس به کمک نمودارها نیز محاسبهٔ حد را توضیح دهید.

الف) $\lim\limits_{x\to -۲} \frac{x^۲+۵x+۶}{x+۲}$

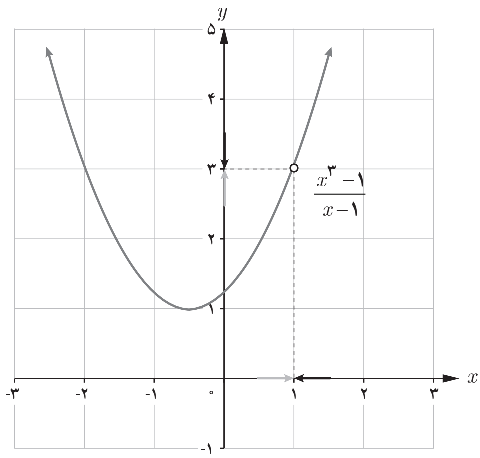
$$= \lim_{x\to -۲} \frac{(x+۲)(x+۳)}{(x+۲)} = \lim_{x\to -۲}(x+۳) = ۱$$

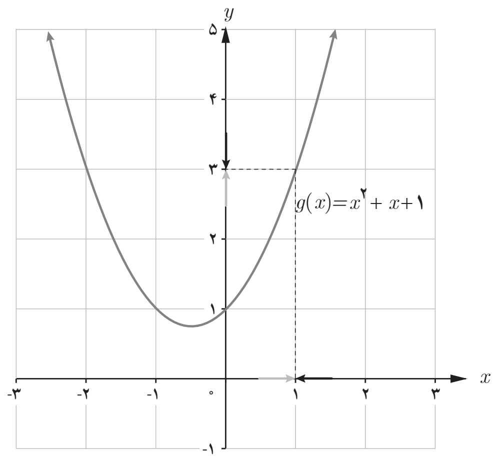




نمودار دو تابع $f(x)=\dfrac{x^۲+۵x+۶}{x+۲}$ و $g(x)=x+۳$ رسم شده است. با توجه به نمودارها، واضح است که توابع f و g با هم مساوی نیستند ولی حد آنها در نقطهٔ $x=-۲$ با هم برابر و مقدار این حد عدد ۱ است یعنی همان عددی که با استفاده از قوانین محاسبهٔ حد به‌دست آوردیم.

ب) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۳-۱}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}(x^۲+x+۱)=۳$

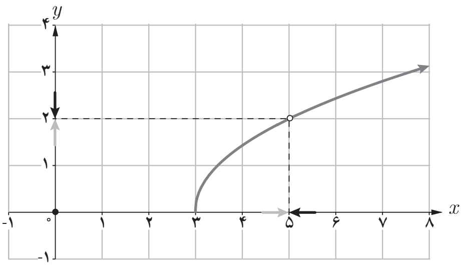




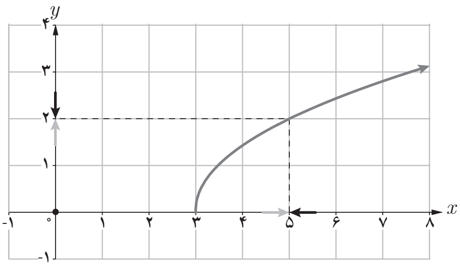
نمودار توابع $f(x)=\dfrac{x^۳-۱}{x-۱}$ و $g(x)=x^۲+x+۱$ آورده شده است. به وضوح f و g برای $x\neq۱$، با هم مساوی‌اند، بنابراین و با تأیید نمودارها، حد هر دو تابع در نقطهٔ $x=۱$ برابر با ۳ است.

کار در کلاس صفحه ۱۳۳

۱ نمودارهای توابع با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{۲x-۶}$ و $(x\neq ۵)$ $g(x)=\sqrt{۲x-۶}$ رسم شده‌اند.



$g(x)=\sqrt{۲x-۶}\qquad (x\neq ۵)$



$f(x)=\sqrt{۲x-۶}$

الف) هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ ضابطهٔ هر نمودار، زیر آن آورده شده است.

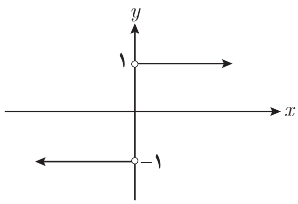
ب) آیا $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۵} g(x)$ موجودند؟ بله ــ حد هر دو تابع در $x=۵$ برابر با ۲ است.

پ) کدام‌یک از حدهای زیر موجودند؟ آنها را محاسبه کنید.

$\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{۲x-۶}=$ وجود ندارد $\qquad \lim\limits_{x\to ۳^-}\sqrt{۲x-۶}=$ وجود ندارد $\qquad \lim\limits_{x\to ۳^+}\sqrt{۲x-۶}=۰$

چون $\sqrt{۲x-۶}$ برای $x<۳$ تعریف نمی‌شود، پس $\lim\limits_{x\to ۳^-}\sqrt{۲x-۶}$ وجود ندارد و در نتیجه $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{۲x-۶}$ نیز موجود نخواهد بود.

۲ دربارهٔ تابع $h(x)=\dfrac{|x|}{x}$ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.



$$h(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$$

الف) $h(x)=۱$ (نادرست) $\qquad$ ب) $D_h=\mathbb{R}-\{۰\}$ (درست)

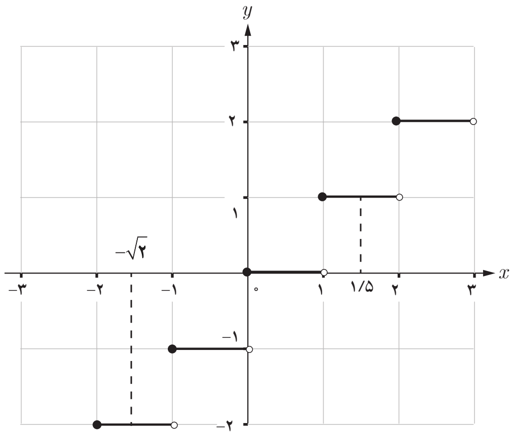
پ) $\lim\limits_{x\to ۰^+} h(x)=۱$ (درست) $\qquad$ ت) $h(۰)=۰$ (نادرست)

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} h(x)$ وجود ندارد. (درست)

در مورد قسمت (پ)، علاوه بر نمودار، از ضابطهٔ تابع h نیز می‌توان برای محاسبهٔ حد راست استفاده نمود. به این صورت که چون حد راست را می‌خواهیم، پس از ضابطهٔ مربوط به $x>۰$، حد می‌گیریم :

$$\lim_{x\to ۰^+} h(x) = \lim_{x\to ۰^+} ۱ = ۱$$

۳ با استفاده از نمودار تابع $f(x) = [x]$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $\lim_{x\to ۲^+} [x] = ۲$

ب) $\lim_{x\to ۲^-} [x] = ۱$

پ) $\lim_{x\to ۲} [x]$ وجود ندارد

ت) $\lim_{x\to ۱} [x]$ وجود ندارد

ث) $\lim_{x\to ۱/۵} [x] = ۱$

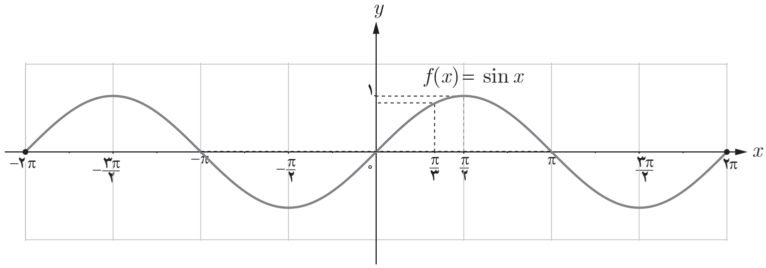
ج) $\lim_{x\to -\sqrt{۲}} [x] = -۲$

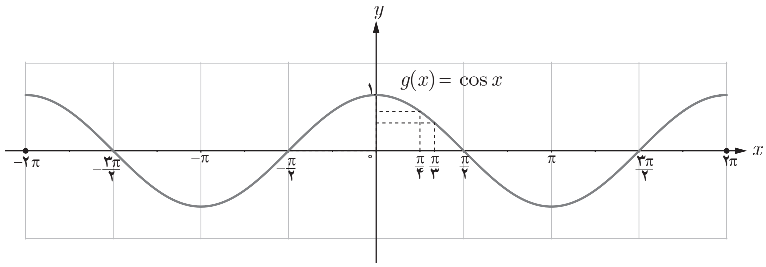
در نقاط ۱ و ۲، حدهای چپ و راست با هم برابر نیستند، پس حد تابع f در این نقطه‌ها وجود ندارد.

در صفحهٔ ۱۳۴ حدهای مثلثاتی با محوریت توابع $\sin x$ و $\cos x$ مطرح شده‌اند. فعالیت این صفحه نیز رفتار توابع مذکور را با کمک نمودار آنها بررسی می‌کند. بهتر است از دانش‌آموزان در مورد حد این دو تابع در نقاط دیگری که در فعالیت ذکر نشده است، نیز سؤال شود. دانش‌آموزان در این فعالیت بدون آنکه به طور مستقیم ذکر شود، با خواص برخی از توابع پیوسته آشنا می‌شوند.

فعالیت صفحه ۱۳۴

با استفاده از نمودار $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ حدهای زیر را بیابید.





الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \sin x = ۱$

ب) $\lim\limits_{x\to \pi} \sin x = ۰$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}^-} \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

ت) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \sin x = ۰$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} \cos x = ۱$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} \cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{-\pi}{۲}} \cos x = ۰$

ح) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}^+} \cos x = \frac{۱}{۲}$

حل تمرین‌های صفحهٔ ۱۳۵

۱

الف) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x) = ۲$

ب) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -۱^+} f(x) = ۱ \\ \lim\limits_{x\to -۱^-} f(x) = ۲ \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -۱^-} f(x) \Rightarrow$ وجود ندارد $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳} g(x)=۵$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim\limits_{x\to ۳} f(x)+\lim\limits_{x\to ۳} g(x)=۲+۵=۷$

ث) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -۱^+}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)+\lim\limits_{x\to -۱^+} g(x)=۱+(-۱)=۰\\ \lim\limits_{x\to -۱^-}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)+\lim\limits_{x\to -۱^-} g(x)=۲+(-۱)=۱\end{cases}$

چون حد چپ و راست برابر نیستند، پس تابع $f+g$ در نقطهٔ $x=-۱$ حد ندارد.

ج) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -۲^+}\big(۲f(x)+۵g(x)\big)=۲\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)+۵\lim\limits_{x\to ۲^+} g(x)=۲+(-۱)+۵(-۱)=-۷\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}\big(۲f(x)+۵g(x)\big)=۲\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)+۵\lim\limits_{x\to ۲^-} g(x)=۲(-۱)+۵(۳/۵)=۱۵/۵\end{cases}$

تابع $۲f+۵g$ در نقطهٔ $x=۲$ حد ندارد.

چ) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=L \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰}\big(f(x)\big)^۴=L^۴$

ابتدا ضابطهٔ تابع f را در نزدیکی $x=۰$ تعیین می‌کنیم. ضابطهٔ f نزدیک صفر، معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۱\,,\,-۱)$ و $(-۱\,,\,۲)$ می‌باشد. معادلهٔ خط را به‌دست می‌آوریم:

$$y-۱=\frac{۱-(-۱)}{-۱-۲}\big(x-(-۱)\big)\ \rightarrow\ y=-\frac{۲}{۳}x+\frac{۱}{۳}$$

پس نزدیکِ صفر، $f(x)=-\frac{۲}{۳}x+\frac{۱}{۳}$ است و بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=\lim_{x\to ۰}(-\frac{۲}{۳}x+\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۳}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to ۰}\big(f(x)\big)^۴=(\frac{۱}{۳})^۴=\frac{۱}{۸۱}$$

ح) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^+} g(x)=۰\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to ۰^+}\big(g(x)\big)^۲=۰\\ \\ \lim\limits_{x\to ۰^-} g(x)=۱\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to ۰^-}\big(g(x)\big)^۲=۱\end{cases}\quad ,\ \lim\limits_{x\to ۰^+}\big(g(x)\big)^۲\neq\lim\limits_{x\to ۰^-}\big(g(x)\big)^۲$

پس $\lim\limits_{x\to ۰}\big(g(x)\big)^۲$ وجود ندارد.

خ) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)}{\lim\limits_{x\to ۲^+} g(x)} = \dfrac{-۱}{-۱} = ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\dfrac{۱}{۴} \end{cases}$

چون حد چپ و راست مساوی نیستند، پس تابع $\dfrac{f}{g}$ در ۲ حد ندارد.

د) $\lim\limits_{x\to ۵} \big(f(x)g(x)\big) = \lim\limits_{x\to ۵} f(x) \times \lim\limits_{x\to ۵} g(x) = ۵\times ۵ = ۲۵$

۲ توابع $f(x) = x^۲$ و $g(x) = x+۶$ با هم مساوی نیستند ولی در ۲− حدهای مساوی دارند.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -۲} f(x) = \lim\limits_{x\to -۲} x^۲ = (-۲)^۲ = ۴ \\ \lim\limits_{x\to -۲} g(x) = \lim\limits_{x\to -۲} (x+۶) = -۲+۶ = ۴ \end{cases}$$

۳

الف) $\lim\limits_{x\to ۷} (-۳) = -۳$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} (-۲x-۷) = -۷$

پ) $\lim\limits_{x\to -۱} (۳x^۲ - ۴x + ۵) = ۳(-۱)^۲ - ۴(-۱) + ۵ = ۳ + ۴ + ۵ = ۱۲$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x^۲ - ۳x}{x^۲ - ۹} = \lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x(x-۳)}{(x-۳)(x+۳)} = \lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x}{x+۳} = \dfrac{۳}{۶} = \dfrac{۱}{۲}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{x}{۲x^۲ - x} = \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{x}{x(۲x-۱)} = \lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۱}{۲x-۱} = -۱$

ج) $\lim\limits_{x\to -۲} \dfrac{x^۳ + ۸}{x+۲} = \lim\limits_{x\to -۲} \dfrac{(x+۲)(x^۲ - ۲x + ۴)}{x+۲} = \lim\limits_{x\to -۲} (x^۲ - ۲x + ۴) = ۱۲$

چ) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -۲^+} [x] = \lim\limits_{x\to -۲^+} (-۲) = -۲ \\ \lim\limits_{x\to -۲^-} [x] = \lim\limits_{x\to -۲^-} (-۳) = -۳ \end{cases}$ حد چپ $\neq$ حد راست $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to -۲} [x]$ وجود ندارد

ح) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \sqrt{x} = ۰$

خ) $\lim\limits_{x\to ۲} \sqrt{x+۷} = \sqrt{۲+۷} = \sqrt{a} = ۳$

د) تابع $y=\sqrt{x}$ سمت چپ صفر تعریف نشده است، پس $\lim\limits_{x\to ۰^-}\sqrt{x}$ وجود ندارد.

ذ) $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt{x+۵}=\sqrt{۷}$

ر) تابع $y=\sqrt{x-۲}$ در دو طرف ۱ تعریف نشده است، بنابراین $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x-۲}$ وجود ندارد.

ز) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{x-۲}{[x]+۱}=\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{x-۲}{۳+۱}=\frac{۳-۲}{۴}=\frac{۱}{۴}$

ژ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۳}}\cos x=\cos(-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}$

س) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}(\sin x+\cos x)=\cos\frac{\pi}{۴}+\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$

ش) $\lim\limits_{x\to -۲^+}\frac{x}{[x]}=\lim\limits_{x\to -۲^+}\frac{x}{-۲}=\frac{-۲}{-۲}=۱$

ص) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin^۲ x}{۱-\sin x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}{۱-\sin x}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}(۱+\sin x)=۲$

ض) $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^+}\left(x+[x]\right)=\lim\limits_{x\to ۰^+}(x+۰)=۰\\ \lim\limits_{x\to ۰^-}\left(x+[x]\right)=\lim\limits_{x\to ۰^-}(x-۱)=-۱\end{cases}$

چون حد چپ و راست برابر نیستند، پس $\lim\limits_{x\to ۰}\left(x+[x]\right)$ وجود ندارد.

۴

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to ۲}f(x)+\lim\limits_{x\to ۲}g(x)=۳+۰=۳$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲}\left(h(x)\right)^۵=\left(\lim\limits_{x\to ۲}h(x)\right)^۵=(-۱)^۵=-۱$

پ) حد تابع $\frac{f}{g}$ در $x=۲$ وجود ندارد. چون داریم $\lim\limits_{x\to ۲}f(x)=۳$ و $\lim\limits_{x\to ۲}g(x)=۰$.

ت) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to ۲}g(x)}{\lim\limits_{x\to ۲}f(x)}=\frac{۰}{۳}=۰$

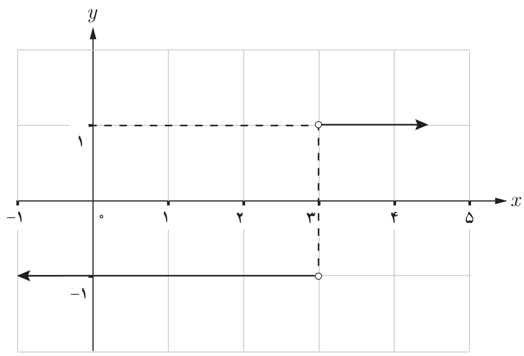
ث) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۳f(x)}{g(x)-۵h(x)}=\dfrac{۳\lim\limits_{x\to ۲}f(x)}{\lim\limits_{x\to ۲}g(x)-۵\lim\limits_{x\to ۲}h(x)}=\dfrac{۳(۳)}{۰-۵(-۱)}=\dfrac{۹}{۵}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۱}{h(x)}=\dfrac{۱}{\lim\limits_{x\to ۲}h(x)}=\dfrac{۱}{-۱}=-۱$

۵ نمودار توابع f و g به صورت زیر رسم شده‌اند :

$$f(x)=\frac{|x-۳|}{x-۳}=\begin{cases}۱ & x>۳\\ -۱ & x<۳\end{cases}$$

$$g(x)=۱$$



با توجه به نمودارها، می‌توان نوشت :

ــ حد تابع f در ۳ وجود ندارد زیرا حد چپ و حد راست با هم برابر نیستند.

ــ حد تابع g در ۳ برابر با ۱ است.

ــ در همهٔ نقاط بزرگ‌تر از ۳، توابع f و g حدی برابر (با ۱) دارند.

۶ الف) اگر f و g هر دو در نقطهٔ a حد نداشته باشند، آنگاه در مورد حد تابع $f+g$ در نقطهٔ a هیچ اظهارنظری نمی‌توان کرد یعنی تابع $f+g$ در نقطهٔ a می‌تواند حد داشته باشد یا حد نداشته باشد. به عنوان مثال :

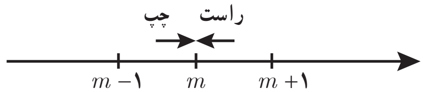
۱ــ دو تابع $f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-۱ & x>۰\\ ۱ & x<۰\end{cases}$ در صفر حد ندارند ولی تابع $(f+g)(x)=۰$ در $x=۰$ حد دارد.

۲ــ دو تابع $f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۲ & x>۰\\ ۱ & x<۰\end{cases}$ در صفر حد ندارند و با یک بررسی ساده می‌بینیم که تابع $(f+g)(x)=\begin{cases}۳ & x>۰\\ ۰ & x<۰\end{cases}$ نیز در $x=۰$ حد ندارد.

ب) اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد، آنگاه تابع $f+g$ قطعاً در نقطهٔ a حد ندارد.

به اثبات این مطلب می‌پردازیم. به برهان خلف فرض کنیم تابع $f+g$ در نقطهٔ a حد داشته باشد. بنا به فرض تابع f نیز در a حد دارد. حال بنا به قوانین محاسبهٔ حد، چون $f+g$ و f در a حد دارند، آنگاه تفاضل آنها یعنی $g = (f+g) - f$ نیز در a حد دارد که یک تناقض با فرض است. پس فرض خلف نادرست و حکم، یعنی اینکه تابع $f+g$ در a حد ندارد، درست خواهد بود.

۷



الف) $\lim\limits_{x\to m^+}[x] = \lim\limits_{x\to m^+} m = m$

ب) $\lim\limits_{x\to m^-}[x] = \lim\limits_{x\to m^-}(m-۱) = m-۱$

پ) $\lim\limits_{x\to m^+}[x] \neq \lim\limits_{x\to m^-}[x] \Rightarrow$ وجود ندارد $\lim\limits_{x\to m}[x]$

به طور کلی حد تابع $f(x) = [x]$، در نقاط صحیح وجود ندارد ولی حد این تابع در تمام نقاط غیرصحیح وجود دارد.

درس سوم

پیوستگی

اهداف درس

۱ ارائه محک شهودی برای تشخیص پیوستگی تابع از روی نمودار
۲ آشنایی با تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه
۳ آشنایی با مفهوم پیوستگی راست و چپ تابع در یک نقطه
۴ ایجاد مهارت در بررسی پیوستگی تابع در یک نقطه از روی ضابطهٔ تابع
۵ ایجاد توانایی در تشخیص پیوستگی تابع در یک نقطه از روی نمودار تابع
۶ آشنایی با مفهوم پیوستگی تابع روی بازه
۷ بررسی پیوستگی برخی توابع معروف روی بازه
۸ بررسی پیوستگی یک تابع روی یک بازه از روی نمودار آن تابع
۹ ایجاد توانایی در تشخیص بازه‌های پیوستگی و ناپیوستگی تابع، از روی نمودار آن تابع

پیش‌نیازها

۱ آشنایی با نمودار توابع خطی، درجه ۲، رادیکالی، قدرمطلق، جزء صحیح و مثلثاتی
۲ آشنایی با مفهوم حد
۳ تسلط و مهارت در استفاده از ابزار و قوانین محاسبهٔ حد تابع در یک نقطه
۴ توانایی در تصور نمودار تابع در یک بازهٔ خاص

روش تدریس

درس سوم به پیوستگی اختصاص دارد. در ابتدای درس، نمودار تعدادی از توابع آشنا مطرح شده و

با استفاده از یک محک شهودی، پیوستگی آنها مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه، تعریف پیوستگی در یک نقطه، پیوستگی راست و چپ، و پیوستگی در یک بازه ارائه می‌شود. همچنین شرایط ناپیوستگی یک تابع بررسی و مثال‌هایی از توابع مهم پیوسته، ارائه می‌شود. در مورد اصطلاحات و تعاریف به کار رفته، رایج و متداول بودن آن در کتاب‌های معتبر و نیز قابل فهم بودن تعریف برای دانش‌آموزان و پذیرش آن توسط اکثریت همکاران، مورد نظر بوده است.

همچنین در ارائه مفاهیم تکیه بر تجسم و شهود و استفاده از پژوهش‌های معتبر و تکیه بر خرد جمعی لحاظ شده است. در همین حال از طرح نابه‌جا و افراطِ رویه‌های الگوریتمی و پیچیده و غیرضروری پرهیز شده است.

پس از این نگاه اجمالی و توضیح روشنگر، به ابتدای درس بازمی‌گردیم. در فعالیت صفحهٔ ۱۳۷ نمودار تعدادی از توابع آشنا داده شده و معیاری شهودی برای بررسی پیوستگی ارائه شده است.

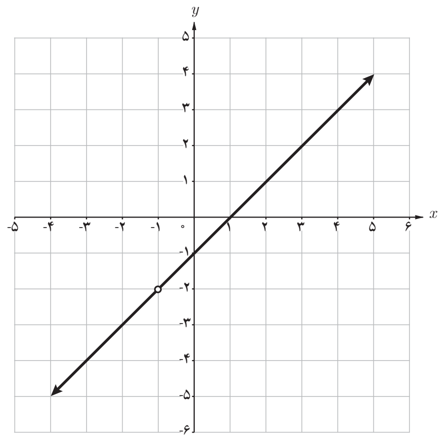
رسم نمودار یک تابع بدون آنکه حکم را از روی کاغذ برداریم، همان معیار موردنظر است.

به همکاران محترم توصیه می‌شود در صورت فراهم بودن شرایط، توابع دیگری نیز در کلاس توسط دانش‌آموزان و معلمین گرامی طرح و بررسی شود.

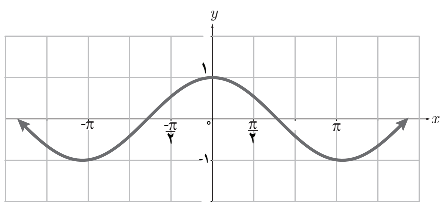
فعالیت صفحه ۱۳۷

الف) در بین این ۹ تابع، شش نمودار ردیف‌های اوّل و دوم را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ می‌توان رسم کرد.

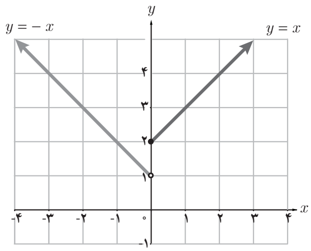
ب) نمودارهای چهار تابع در شکل‌های زیر رسم شده‌اند :



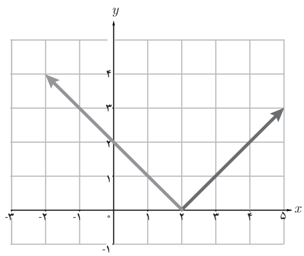
$g(x)=\dfrac{x^{2}-1}{x+1}$



$f(x)=\cos x$



$$h(x)=\begin{cases}۱-x & x<۰\\ x+۲ & x\geq ۰\end{cases}$$



$$t(x)=|x-۲|$$

در بین این نمودارها، نمودار توابع f و t را می‌توان بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد. لذا این دو تابع نیز نمونه‌هایی از توابع پیوسته هستند.

در ادامه، تعریف پیوستگیِ تابع در یک نقطه در صفحهٔ ۱۳۸ مطرح شده است و با توجه به آن و به کمک نمودار، انواع موقعیت‌های ناپیوستگی تابع در یک نقطه، ارائه شده است.

لازم به ذکر است که این نمودارها کلی هستند و به عنوان یک تکلیف مناسب می‌توان از دانش‌آموزان خواست که مثال‌هایی مشخص و متفاوت برای هر مورد ارائه کنند. به این ترتیب عدم وجود حد، عدم وجود مقدار تابع، تفاوت مقدار حد با مقدار تابع و یا ترکیب حالت‌های متفاوت قابل طرح است که مطمئناً به درک عمیق مفهوم پیوستگی کمک خواهد کرد.

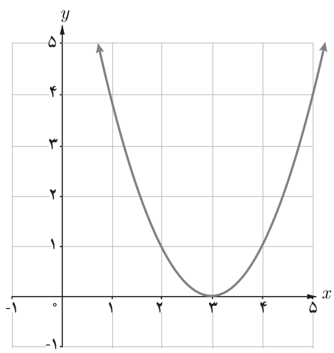
کار در کلاس صفحه ۱۳۹

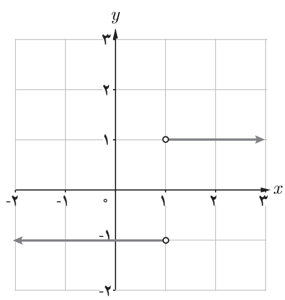
کدام‌یک از توابع زیر با ضابطه‌های داده شده در $x=۱$ ناپیوسته‌اند؟

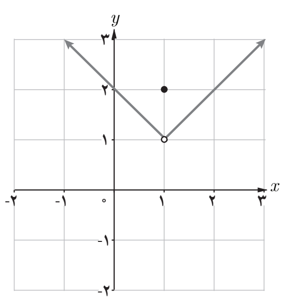
الف) $f(x)=(x-۳)^۲$

ب) $g(x)=\dfrac{|x-۱|}{x-۱}$

پ) $h(x)=\begin{cases}x & x>۱\\ ۲ & x=۱\\ -x+۲ & x<۱\end{cases}$







الف) برای تابع f داریم $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = f(۱) = ۴$ ، پس تابع f در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است.
ب) تابع g در $x=۱$ ناپیوسته است. زیرا این تابع در این نقطه تعریف شده است.
پ) تابع h در $x=۱$ پیوسته نیست. در مورد تابع h، داریم :

$$\begin{cases} h(۱) = ۲ \\ \\ \lim\limits_{x\to ۱} h(x) = ۱ \end{cases} , \lim_{x\to ۱} h(x) \neq h(۱) \quad \Rightarrow$$ h در ۱ ناپیوسته است

در فعالیت صفحهٔ ۱۳۹، پیوستگی راست مورد بررسی قرار گرفته است. به جز تابع ذکر شده، بهتر است از دانش‌آموزان بخواهیم مثال‌های دیگری نیز مطرح کنند.

فعالیت صفحه ۱۳۹

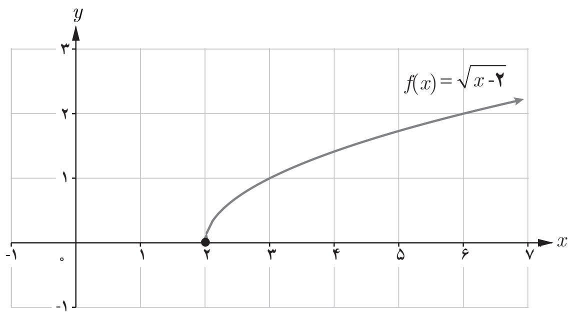
تابع $f(x) = \sqrt{x-۲}$ با نمودار زیر را در نظر بگیرید.

الف) کدام‌یک از حدهای $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ موجودند؟ حد راست تابع f در $x=۲$ وجود دارد ولی حد چپ موجود نیست.

$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = ۰ \quad , \quad \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ وجود ندارد

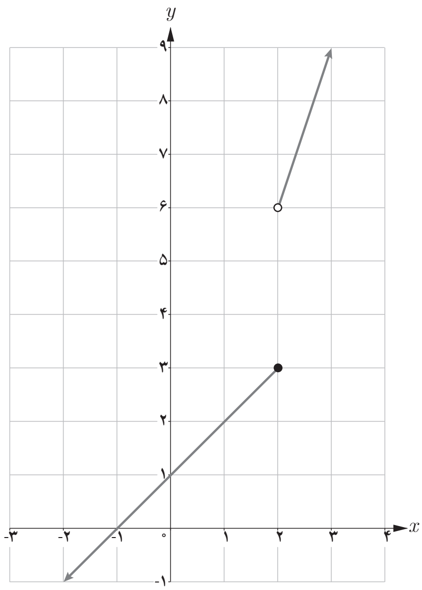
ب) آیا $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ موجود است؟ خیر

پ) آیا تابع f در $x=۲$ پیوسته است؟ چون $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد، پس تابع f در $x=۲$ پیوسته نیست.



پیوستگی چپ در کار در کلاس صفحهٔ ۱۴۰ مطرح شده است. تابع ارائه شده به گونه‌ای تعریف شده است که بررسی پیوستگی راست نیز مطرح شود. در تمام مثال‌های مطرح شده، نمودار تابع نقش مهم و اساسی برای درک رفتار تابع دارد. بررسی مثال‌هایی که توسط دانش‌آموزان طرح می‌شود، بسیار آموزنده خواهد بود.

کار در کلاس صفحه ۱۴۰



تابع با ضابطه $g(x)=\begin{cases}3x & x>2\\ x+1 & x\leq 2\end{cases}$ و نمودار آن را در نظر بگیرید.

الف) کدام‌یک از حدهای $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$ موجودند؟ با توجه به نمودار واضح است که حدهای راست و چپ هر دو موجودند:

$$\lim_{x\to 2^+} g(x)=6 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 2^-} g(x)=3$$

ب) آیا $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ موجود است؟ خیر حد تابع f در $x=2$ وجود ندارد. زیرا حد چپ و راست برابر نیستند.

پ) آیا تابع g در $x=2$ پیوسته است؟ خیر، چون $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ موجود نیست.

در ادامهٔ صفحهٔ ۱۴۰، پیوستگی روی بازه‌های باز و بسته مطرح شده است. این تعریف در بیشتر کتاب‌ها رایج و مورد استفاده است. این تعریف مبتنی بر شهود و قابل درک برای دانش‌آموزان است. پیوستگی روی بازه‌های $(a,b]$ و $[a\ ,b)$ توسط دانش‌آموزان تعریف می‌شود و باید در کلاس مورد بررسی و نقد قرار گیرد.

کار در کلاس صفحه ۱۴۰

پیوستگی روی بازه‌های $[a\ ,b)$ و $(a\ ,b]$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a\ ,b)$ پیوسته است هرگاه f دربازهٔ $(a\ ,b)$ پیوسته باشد و در نقطهٔ a پیوستهٔ راست باشد.

تابع f روی بازه $[a\ ,\ b]$ پیوسته است هرگاه f دربازهٔ $(a\ ,\ b)$ پیوسته باشد و در نقطهٔ b پیوستهٔ چپ باشد.
در ابتدای صفحهٔ ۱۴۱، تعریف پیوستگی روی بازهٔ $(-\infty\ ,\ \infty)$ مطرح شده است. توصیه می‌شود در صورت امکان و داشتن زمان کافی، مثال‌هایی از توابع پیوسته و ناپیوسته روی بازهٔ $(-\infty\ ,\ \infty)$، در کلاس طرح، و در مورد آنها بحث شود.

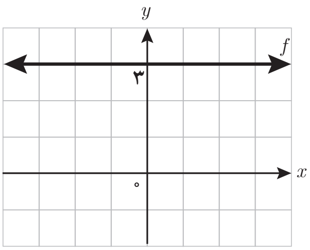
کار در کلاس صفحه ۱۴۱

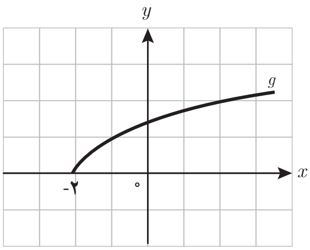
سه تابع متفاوت مثال بزنید که :

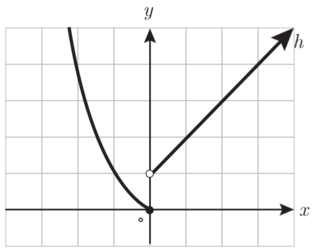
الف) روی بازه $(-\infty,\infty)$ پیوسته باشد. تابع $f(x)=۳$ روی بازهٔ $(-\infty\ ,\ +\infty)$ پیوسته است.

ب) روی بازه $[-۲,+\infty)$ پیوسته باشد. تابع $g(x)=\sqrt{x+۲}$ روی بازهٔ $[-۲,+\infty)$ پیوسته است.

پ) روی بازه $(-\infty,۰]$ پیوسته باشد. تابع $h(x)=\begin{cases} x^۲ & x\le ۰ \\ x+۱ & x>۰ \end{cases}$ روی بازهٔ $(-\infty,۰]$ پیوسته است.







کار در کلاس صفحه ۱۴۱

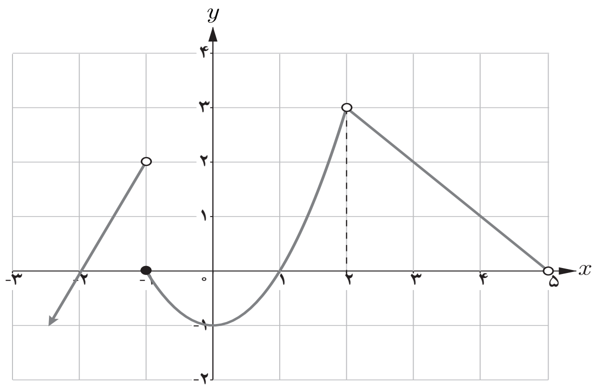
۱ تابع f با ضابطهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم : $f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^۲-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$

الف) نمودار f را کامل کنید.

ب) دامنه و برد f را به‌دست آورید.

$D_f=(-\infty\ ,۵)-\{۲\}$ و $R_f=(-\infty\ ,۳)$

پ) پیوستگی تابع را روی بازه‌های $[-۱,۱]$ و $(۲,۵)$ و $[-۲,۰]$ بررسی کنید.



ــ تابع f در بازهٔ $(-۱\,,۱)$ پیوسته است، در نقطهٔ $x=۱$ پیوستهٔ چپ و در نقطهٔ $x=-۱$ پیوستهٔ راست است پس بنا به تعریف تابع f در بازهٔ $[-۱\,,۱]$ پیوسته است.

ــ تابع f در بازهٔ $(۲,۵)$ ناپیوسته است. زیرا در نقاط $x=-۱$ و $x=۲$ از این بازه، پیوسته نیست. (لازم به ذکر است که ناپیوستگی در یک نقطه از بازه نیز، ناپیوسته بودن تابع در آن بازه را نتیجه می‌دهد)

ــ تابع f در نقطهٔ $x=-۱$ ناپیوسته است، بنابراین تابع f در بازهٔ $[-۲\,,۰]$ پیوسته نیست.

۲ دربارهٔ تابع f کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) f روی بازهٔ $(-\infty,-۱]$ پیوسته است. (نادرست)

ب) f روی بازهٔ $(-\infty,-۱)$ پیوسته است. (درست)

پ) f روی بازهٔ $[۲,۵]$ پیوسته است. (نادرست)

ت) $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=۰$ (نادرست)

ث) $\lim\limits_{x\to ۵^-} f(x)=۰$ (درست)

ج) f روی بازهٔ $(-۲,۰)$ پیوسته است. (نادرست)

۳ با توجه به تابع f :

الف) دو بازهٔ بسته مثال بزنید که تابع در یکی از آنها پیوسته و در دیگری ناپیوسته باشد. تابع f در بازهٔ $[-۳,-۲]$ پیوسته و در بازهٔ $[-۳\,,-۱]$ ناپیوسته است.

ب) a و bای را مثال بزنید که تابع روی (a,b) پیوسته باشد؛ اما روی $[a,b]$ پیوسته نباشد. $a=-۱$ و $b=۲$ بازهٔ $[a,b]$ پیوسته نباشد. به عنوان مثال با در نظر گرفتن $a=-۱$ و $b=۲$، به وضوح تابع f در بازهٔ $(-۱\,,۲)$

پیوسته ولی در بازهٔ $[-۱,۲]$ پیوسته نیست.

توصیهٔ آموزشی

با توجه به اینکه درک مفاهیم حد و پیوستگی برای دانش‌آموزان با دشواری‌های متفاوتی همراه است، لذا در طرح سؤالات، نباید با مطرح کردن توابع پیچیده، این دشواری را مضاعف نموده و از اصل موضوع غافل شویم! طرح سؤالات خارج از اهداف کتاب که احتمالاً در گذشته متداول بوده‌اند، مجاز نمی‌باشد.

حل تمرین‌های صفحهٔ ۱۴۲

۱ الف) $f(۲)=۵$ و $g(۲)$ تعریف نشده است و $h(۲)=۳$

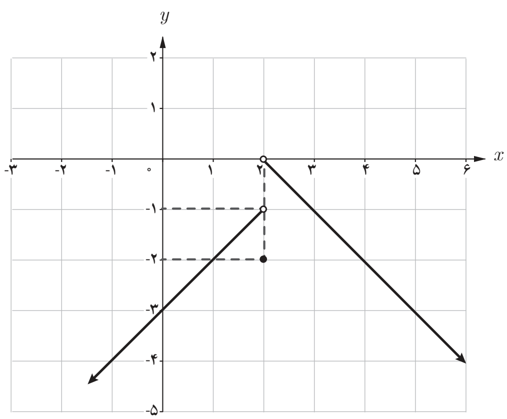
ب) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲}(۲x+۱)=۵$

$\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=\lim\limits_{x\to ۲}(۲x+۱)=۵$

$\lim\limits_{x\to ۲} h(x)=\lim\limits_{x\to ۲}(۲+x)=۴$

پ) فقط تابع f در $x=۲$ پیوسته است. زیرا در این تابع داریم: $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=f(۲)$

۲ نمودار تابع
$$f(x)=\begin{cases} x-۳ & x<۲ \\ -۲ & x=۲ \\ -x+۲ & x>۲ \end{cases}$$
به صورت مقابل است.



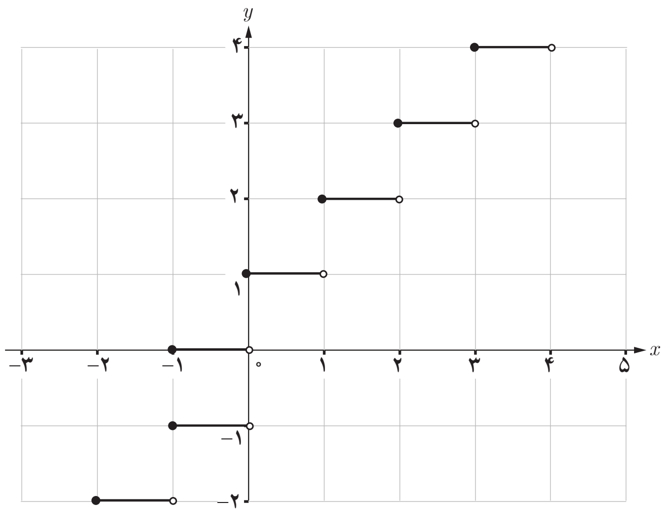
با توجه به شکل، برای رسم نمودار تابع f، فقط در نقطهٔ ۲ مجبور می‌شویم قلم را از روی نمودار برداشته و دوباره بگذاریم و نمودار را طی کنیم. پس تابع f فقط در ۲ ناپیوسته و در بقیهٔ اعداد حقیقی پیوسته است.

۳ تابع $g(x)=\dfrac{x^۲-۹}{x-۳}$ در نقطهٔ $x=۳$ پیوسته نیست. زیرا این تابع در ۳ تعریف نشده است. حال پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۹}{x-۳} & x\neq ۳\\ ۶ & x=۳\end{cases}$ را در $x=۳$ بررسی می‌کنیم :

$$\begin{cases} f(۳)=۶ \\ \lim\limits_{x\to ۳} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}(x+۳)=۶ \end{cases}$$

می‌بینیم که $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=f(۳)$ ، پس بنا به تعریف، تابع f در $x=۳$ پیوسته است.

۴ قسمتی از نمودار تابع $f(x)=[x]$ رسم شده است : با توجه به نمودار، تابع f در نقاط صحیح ناپیوسته و در بقیهٔ نقاط (یعنی در نقاط مجموعهٔ $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$) پیوسته است.



۵ پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}-۲x+۲ & x\leq ۰\\ x^۲+۲ & x>۰\end{cases}$ را در $x=۰$ بررسی می‌کنیم :

$$f(۰)=۲$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}(-۲x+۲)=۲ \\ \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}(x^۲+۲)=۲ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۲$$

چون $\lim_{x\to \circ} f(x) = f(\circ) = ۲$ ، پس تابع f در نقطهٔ $x=\circ$ پیوسته است.
از آنجاکه ضابطهٔ تابع f در نزدیکی بقیهٔ نقاط به غیر از صفر، یک چندجمله‌ای است و در چند جمله‌ای‌ها، حد در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است، پس f در بقیهٔ نقاط پیوسته است. اگر نمودار تابع f را رسم کنیم، موارد بررسی شده را می‌توان روی نمودار نیز مشاهده کرد.

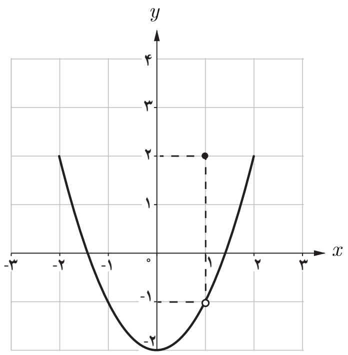
۶ توابع بسیاری می‌توان مثال زد. مثلاً، تابع

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-۲ & x\neq ۱ \\ ۲ & x=۱ \end{cases}$$ را در نظر بگیرید.

به وضوح $f(۱)=۲$ و داریم :

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}(x^۲-۲)=-۱$$

و چون $\lim_{x\to ۱} f(x)\neq f(۱)$ ، پس f در $x=۱$ پیوسته نیست.
نمودار تابع f به صورت زیر است. ناپیوسته بودن تابع f در نقطهٔ $x=۱$، از روی نمودار نیز قابل درک است.



۷ تابع f در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است، زیرا : $\lim_{x\to ۱} f(x)=f(۱)=۱$
تابع g در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته نیست چون تابع g در ۱ حد ندارد.

$$\begin{cases} \lim_{x\to ۱^+} g(x)=۲ \\ \lim_{x\to ۱^-} g(x)=۱ \end{cases} , \quad \lim_{x\to ۱^+} g(x)\neq \lim_{x\to ۱^-} g(x) \Rightarrow \lim_{x\to ۱} g(x) \text{ وجود ندارد}$$

تابع h در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته نیست چون حد تابع h در $x=۱$ با $h(۱)$ برابر نیست.

$$\lim_{x\to ۱} h(x)=۱ \quad \text{و} \quad h(۱)=۲$$

تابع k در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته نیست چون حد تابع k در $x=۱$ وجود ندارد در واقع تابع k در سمت راست $x=۱$ تعریف نشده است.

۸ الف) $f(۲)=۱۴$ و $f(۵)=۲۰$

ب) با توجه به اینکه ضابطه‌های تابع f، خطی (چندجمله‌ای) هستند و این نوع توابع همه‌جا پیوسته‌اند، پس کافی است پیوستگی تابع f را در $t=۱$ بررسی کنیم :

$f(۱)=۱۲$

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to ۱^-} f(t) = \lim\limits_{t\to ۱^-} (۶t+۴) = ۱۰ \\ \\ \lim\limits_{t\to ۱^+} f(t) = \lim\limits_{t\to ۱^+} (۲t+۱۰) = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow \text{حد چپ} \neq \text{حد راست} \Rightarrow \text{وجود ندارد } \lim\limits_{t\to ۱} f(t)$$

پس تابع f در $t=۱$ ناپیوسته و بنابراین تابع f در بازهٔ $[۰ , ۱۰]$ پیوسته نیست.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی فصل ششم (حد و پیوستگی)

۱ در هر مورد با تشکیل جدول، بررسی کنید آیا تابع f در نقطهٔ a حد دارد یا خیر؟

الف) $f(x) = \begin{cases} ۵ & x < ۳ \\ x+۲ & x > ۳ \end{cases} \quad , \quad a = ۳$

ب) $f(x) = x - [x] \quad , \quad a = ۲$

پ) $f(x) = \dfrac{|x+۱|}{x+۱} \quad , \quad a = -۱$

۲ در هر مورد با رسم نمودار، حد تابع f را در نقطهٔ a (درصورت وجود) بیابید :

الف) $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x > ۰ \\ x-۲ & x < ۰ \end{cases} \quad , \quad a = ۰$

ب) $f(x) = |x-۱| + ۲ \quad , \quad a = ۱$

پ) $f(x) = \begin{cases} (x+۱)^۲ & x \neq -۱ \\ ۲ & x = -۱ \end{cases} \quad , \quad a = -۱$

ت) $f(x) = \begin{cases} ۳-x & x < ۲ \\ -۱ & x = ۲ \\ x^۲ - ۴ & x > ۲ \end{cases} \quad , \quad a = ۲$

۳ با محاسبهٔ حد چپ و راست، وجود یا عدم وجود حد تابع f را در نقطهٔ a بررسی کنید :

الف) $f(x) = \begin{cases} x^۲ - x + ۱ & x \geq ۱ \\ ۳x - ۲ & x < ۱ \end{cases} \quad , \quad a = ۱$

ب) $f(x) = x + \dfrac{|x|}{x} \quad , \quad a = ۰$

پ) $f(x) = \dfrac{x+۱}{[x]} \quad , \quad a = ۲$

ت) $f(x) = \sqrt{۶x-۲} \quad , \quad a = ۳$

۴ تابع $f(x) = x\,[x]$ را درنظر بگیرید. حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید :

الف) $\lim_{x\to ۳^+} f(x)$　　ب) $\lim_{x\to ۳^-} f(x)$　　پ) $\lim_{x\to ۳} f(x)$

ت) $\lim_{x\to -۲} f(x)$　　ث) $\lim_{x\to ۰} f(x)$　　ج) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} f(x)$

۵ تابعی مثال بزنید که حد راست آن در $x = ۳$ برابر ۱−، حد چپ تابع در همین نقطه برابر ۲ بوده و مقدار تابع در $x = ۳$ برابر صفر باشد.

۶ تابعی چون f مثال بزنید که در همهٔ شرایط زیر صدق کند :

$f(۲)$ تعریف نشده باشد و $f(۰) = -۲$ و $\lim_{x\to ۲} f(x) = ۲$ و $\lim_{x\to ۰^+} f(x) = -۱$ و $\lim_{x\to ۰^-} f(x) = ۱$

۷ برای تابع f در نقطهٔ $x = a$ ، داریم $\lim_{x\to a^+} f(x) + \lim_{x\to a^-} f(x) = ۰$ اگر تابع f در نقطهٔ a حد داشته باشد، مقدار $\lim_{x\to a} f(x)$ را به‌دست آورید.

۸ تابع زیر را درنظر بگیرید و حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید :

$$f(x) = \begin{cases} x^۳ - ۲x & x < -۲ \\ ۲ & -۲ \le x \le ۱ \\ \dfrac{x^۲ - ۱}{x - ۱} & x > ۱ \end{cases}$$

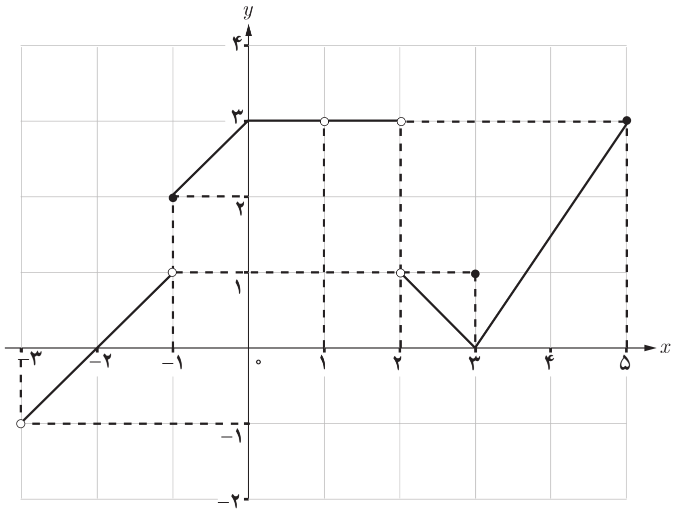
الف) $\lim_{x\to -۲^+} f(x)$　　ب) $\lim_{x\to -۲^-} f(x)$

پ) $\lim_{x\to -۲} f(x)$　　ت) $\lim_{x\to ۱} f(x)$

ث) $\lim_{x\to -۳} f(x)$　　ج) $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} f(x)$

چ) $\lim_{x\to ۴} f(x)$　　ح) $\lim_{x\to -\sqrt{۲}} f(x)$

۹ نمودار تابع f داده شده است. درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید :



الف) $\lim\limits_{x\to -۳^-} f(x) = -۱$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x) = f(-۱)$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۳$

ت) $\lim\limits_{x\to ۰/۵} f(x) = ۳$

ث) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ وجود ندارد

ج) $\lim\limits_{x\to ۳} f(x) \neq f(۳)$

چ) $\lim\limits_{x\to ۴} f(x) = \frac{۵}{۲}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)$ وجود ندارد

۱۰ تابع $f(x) = \begin{cases} (a+۱)x+۳ & x > -۲ \\ -۲x^۲+۱ & x < -۲ \end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که تابع f در نقطهٔ $x=-۲$ حد داشته باشد.

۱۱ مقدار a را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲+ax+۱ & x > ۲ \\ \sqrt{۴x+۱} & x \leq ۲ \end{cases}$ در نقطهٔ ۲ حد داشته باشد.

۱۲ تابع $f(x) = \begin{cases} -۲x+b & x > -۱ \\ x+۵ & x = -۱ \\ ax+b & x < -۱ \end{cases}$ مفروض است. مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f در نقطهٔ $x=-۱$ حد داشته باشد.

۱۳ مقدار a را طوری بیابید که در تابع $f(x)=(x+a)[x]$ داشته باشیم :

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)+۳$$

۱۴ تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x^۲-a & x>۱ \\ ax^۲+a & x<۱ \end{cases}$ مفروض است. اگر $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۲\lim_{x\to ۱^-} f(x)$ ، آنگاه :

الف) مقدار a را بیابید.

ب) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$ و $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ را به‌دست آورید. آیا $\lim_{x\to ۱} f(x)$ وجود دارد؟

پ) حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید :

$\lim_{x\to \sqrt{۲}} f(x)$ $\qquad$ $\lim_{x\to -۳} f(x)$

۱۵ اگر تابع f در نقطهٔ c حد داشته باشد و $\lim_{x\to c}\dfrac{۲f(x)+۱}{f(x)+۳}=\dfrac{۳}{۲}$ ، آنگاه $\lim_{x\to c} f(x)$ را بیابید.

۱۶ اگر $\lim_{x\to ۲} f(x)=۲$ و $\lim_{x\to ۲} g(x)=۱$ ، آنگاه حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید :

۱) $\lim_{x\to ۲}(f(x)+g(x))$

۲) $\lim_{x\to ۲}(g(x)-f(x))$

۳) $\lim_{x\to ۲}(۳f(x)-۲)$

۴) $\lim_{x\to ۲}(۷g(x)-\frac{۱}{۲}f(x))$

۵) $\lim_{x\to ۲}\dfrac{(۱+f(x))g(x)}{g(x)+۲}$

۶) $\lim_{x\to ۲}(۳(x)-f(x))$

۷) $\lim_{x\to ۲}(x^۲g(x)-۲x)^{۱۰}$

۸) $\lim_{x\to ۲}(g(x)+\dfrac{۲}{f(x)})^۳$

۹) $\lim_{x\to ۲}(\frac{۱}{۲}f(x)^۲-g(x))$

۱۰) $\lim_{x\to ۲}(\sqrt{۵x-۱}+\dfrac{f(x)}{g(x)})$

۱۷ نمودار تابع f داده شده است. حاصل حدهای زیر را درصورت وجود بیابید :

۱) $\lim_{x\to -۵} f(x)$

۲) $\lim_{x\to -۲} f(x)$

۳) $\lim_{x\to ۰} f(x)$

۴) $\lim_{x\to ۱} f(x)$

۵) $\lim_{x\to ۲} f(x)$

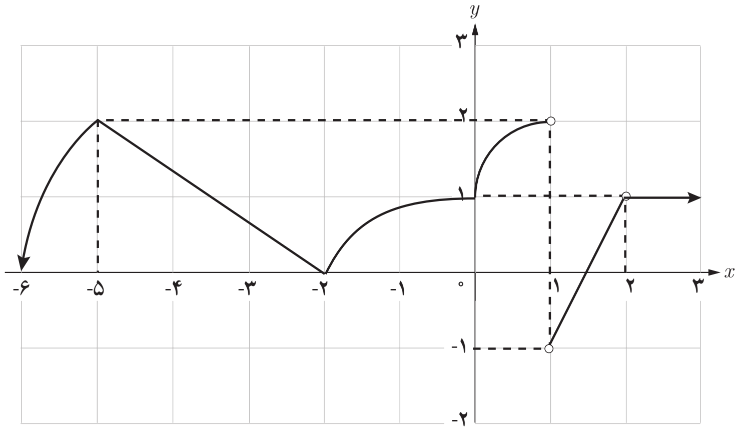
۶) $\lim_{x\to \pi} f(x)$

۷) $\lim_{x\to -۴} f(x)$

۸) $\lim_{x\to -۵}(\frac{x}{۵}-۱)^۲\times f(x)$

۹) $\lim_{x\to -۲}\dfrac{۳+۶f(x)}{۲x+۱}$

۱۰) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt{۴-x}}{x^۲+f(x)}$ ۱۱) $\lim\limits_{x\to ۱^-}(x^۲+x-(f(x))^۲)$



۱۸ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید :

۱) $\lim\limits_{x\to -۱}(۲x^۴-x^۳-۵x^۲+۴)$

۲) $\lim\limits_{x\to ۴}(۱+\dfrac{x}{۲})^۲(x^۲-۶x)$

۳) $\lim\limits_{x\to ۵}\sqrt{۵x-۹}$

۴) $\lim\limits_{x\to -۲}\sqrt{۲x+۴}$

۵) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\dfrac{۸x^۳+۴x^۲+۲x}{۴x+۱}$

۶) $\lim\limits_{x\to \sqrt{۳}}[x]$

۷) $\lim\limits_{x\to ۴}[x]$

۸) $\lim\limits_{x\to (\frac{۱}{۳})^-}\dfrac{|۱-۳x|}{۳x-۱}$

۹) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{x^۲+۳x}{[x]+۱}$

۱۰) $\lim\limits_{x\to ۰}(x+۳)[x]$

۱۱) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۶}}(۲\sin x+۳)$

۱۲) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{۱+\sin x}{۱-\cos x}$

۱۳) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}}\tan x$

۱۴) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}(۱+\cot x)^۲$

۱۵) $\lim\limits_{x\to \pi}x^۲\sin x$

۱۶) $\lim\limits_{x\to \frac{-\pi}{۶}}(۴\sin x+\cos^۲ x)$

۱۷) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۲-x}{x^۲+x-۲}$

۱۸) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x^۲-۴x-۱۲}{۴-x^۲}$

۱۹) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{۲x^۲ - x - ۱۵}{۲x^۲ - ۲x - ۱۲}$

۲۰) $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}} \dfrac{x^۴ - ۳x^۲ + ۲}{x^۳ - ۲x}$

۲۱) $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{(۳x^۲ + ۱)(x^۲ - ۱)}{x^۳ + ۱}$

۲۲) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \dfrac{۱۶x^۴ - ۱}{۸x^۳ - ۱}$

۲۳) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\cos x - \cos^۲ x}{\sin^۲ x}$

۲۴) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{x^۲ - ۱}{|x - ۱|}$

۲۵) $\lim\limits_{x\to \pi} f(x) \quad , \quad f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x & x < \pi \\ ۲\sin^۲ x & x > \pi \end{cases}$

۱۹ تابع $f(x) = [x]$ را درنظر بگیرید.

الف) نشان دهید تابع f در $x = ۰$ حد ندارد.

ب) تابعی چون g مثال بزنید که در $x = ۰$ حد داشته باشد ولی تابع fg در این نقطه فاقد حد باشد. (راهنمایی : از توابع ثابت غیرصفر استفاده کنید)

پ) تابعی چون g مثال بزنید که در $x = ۰$ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x\to ۰}(fg)(x)$ نیز موجود باشد. (راهنمایی : g را می‌توان تابع ثابت صفر درنظر گرفت)

۲۰ در هر مورد پیوستگی تابع f را در نقطهٔ داده شده بررسی کنید :

الف) $f(x) = \sqrt{۵ - x} \quad , \quad a = ۵$

ب) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲}{x + ۴} & x \geq ۴ \\ \dfrac{۱}{۲}x^۲ - ۶ & x < ۴ \end{cases} \quad , \quad a = ۴$

پ) $f(x) = \begin{cases} [x] & x \leq ۱ \\ x^۲ - ۱ & x > ۱ \end{cases} \quad , \quad a = ۱$

ت) $f(x) = \begin{cases} x\cos x & x > \dfrac{\pi}{۲} \\ ۱ - \sin x & x \leq \dfrac{\pi}{۲} \end{cases} \quad , \quad a = \dfrac{\pi}{۲}$

۲۱ نمودار یک تابع رسم کنید که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

۲۲ نمودار یک تابع رسم کنید که در دو نقطهٔ صفر و ۱ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

۲۳ نمودار یک تابع رسم کنید که در دو نقطه ناپیوسته بوده و در یکی از آن نقاط پیوستگی راست و در دیگری پیوستگی چپ داشته باشد.

۲۴ در هر مورد، مقدار a را طوری بیابید که تابع f در نقطهٔ داده شده پیوسته باشد.

الف) $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x\le -۱ \\ x^{۲}+۲a & x>-۱ \end{cases} \quad , \quad x=-۱$

ب) $f(x)=\begin{cases} ۲x^{۲}-ax+۵ & x\le ۱ \\ x-۲a & x>۱ \end{cases} \quad , \quad x=۱$

۲۵ مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f در نقطهٔ داده شده پیوسته باشد.

الف) $f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+۲ & x<۲ \\ x-۴ & x=۲ \\ \dfrac{x+۱}{۳}-b & x>۲ \end{cases} \quad , \quad x=۲$

ب) $f(x)=\begin{cases} ۵x+a & x>۱ \\ x^{۳}-b & x=۱ \\ \dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱} & x<۱ \end{cases} \quad , \quad x=۱$

۲۶ ثابت کنید به ازای هیچ مقداری برای a، تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{|x|} & x\ne ۰ \\ ۱ & x=۰ \end{cases}$ در صفر پیوسته نخواهد بود.

۲۷ **تابع** $f(x)=\begin{cases} x+۵ & x\leq -۲ \\ x & -۲<x\leq ۰ \\ ۱-x^{۲} & x>۰ \end{cases}$ را درنظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) نقاط ناپیوستگی تابع f را مشخص کنید.

پ) پیوستگی تابع f را روی بازه‌های $(-\infty, -۱]$ و $(۰, ۳]$ و $[-۲, ۰]$ بررسی کنید.

ت) سه بازه مثال بزنید که تابع f روی آنها پیوسته باشد.