

فصل ٧

آمار و احتمال

اهداف کلی فصل

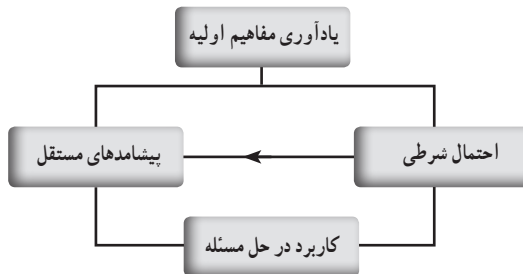
- ۱ درک احتمال شرطی و توانایی حل مسائل مربوط به آن
- ۲ درک استقلال و عدم استقلال دو پیشامد و حل مسائل مربوط به آن
- ۳ درک مفاهیم میانگین، میانه، چارک‌ها، دامنه تغییرات، واریانس، انحراف معیار و ضریب تغییرات و محاسبه آنها و استفاده از آنها در حل مسائل مربوطه

نگاه کلی به فصل

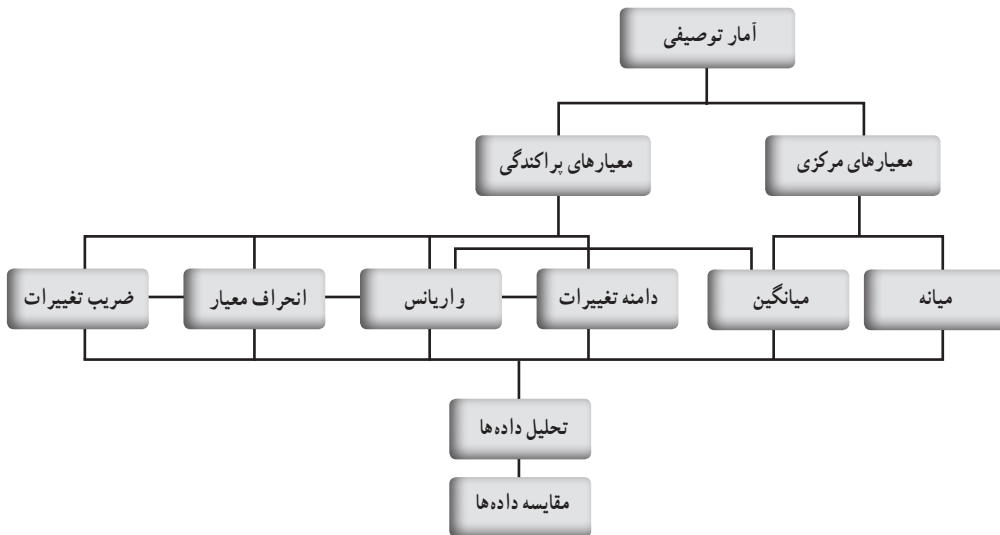
آموزش مفاهیم آمار و احتمال که از همان پایه‌های ابتدایی در کتاب‌های ریاضی مورد توجه قرار گرفته است، در فصل آخر این کتاب در قالب دو درس، یکی احتمال و یکی آمار، ادامه یافته است. در درس اول به بیان احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل پرداخته شده است. ابتدا احتمال شرطی آورده شده است. و با استفاده از پیش دانسته‌های دانش‌آموز و با توجیهی منطقی فرمول احتمال شرطی ارائه شده است. سپس با ارائه کار در کلاس و چند مثال سعی در بالا بردن تسلط دانش‌آموزان شده است. پس از آن با توجه به احتمال شرطی مفهوم پیشامدهای مستقل ارائه گردیده است. مطالعه مثال‌هایی که در کتاب آورده شده و دیگر مثال‌هایی از این دست برای بالا بردن فهم دانش‌آموزان از این مفهوم و تسلط آنها بر حل مسائل این موضوع الزامی است.

در درس دوم، معیارهای مرسوم شامل میانه و میانگین و معیارهای پراکندگی شامل دامنه تغییرات، واریانس انحراف معیار و ضریب تغییرات و چگونگی نحوه استفاده از این معیارها در تحلیل و مقایسه داده‌ها بیان شده است. دانش‌آموزان در سال‌های گذشته با مفاهیم اولیه آمار مانند دسته‌بندی داده‌ها، جدول فراوانی، میانگین و نمودارهای مختلف آماری و انواع متغیرهای تصادفی آشنا شده‌اند. در این درس، دانش‌آموزان با معیارهای مرکزی و پراکندگی به عنوان معرف جامعه در بررسی و مطالعه داده‌های آماری و میزان حساسیت معیارهای مذکور به تغییرات داده‌ها آشنا می‌شوند.

نقشه مفهومی



نقشه مفهومی بخش آمار



دانستنی‌هایی برای معلم

از زمان‌های دور انسان‌ها به شانس و اقبال در زندگی معتقد بوده‌اند، بازی‌های مبتنی بر شانس چه در عصر باستان و مدارک تاریخی و چه امروزه، حتی در دنیای کودکان قابل مشاهده است. این روزها، هرگاه انتخاب یک مورد، انتخاب موارد دیگر را در یک رویداد تحت الشعاع قرار دهد و

ایجاد شبهه کند از شانس استفاده می‌شود. مثلاً در مسابقات فوتبال برای شروع بازی از پرتاب سکه استفاده می‌شود.

قرعه‌کشی نیز یکی دیگر از نمونه‌های انتخاب‌شانسی است که قدمت آن به روم باستان برمی‌گردد. هر ساله قریب ۱۴ میلیون شهروند رومی در یک قرعه‌کشی به صورت رایگان شرکت می‌کردند و برنده مبلغ قابل توجهی می‌شوند. جالب است که بعضی از برندگان این قرعه‌کشی از طبقه ثروتمند جامعه بودند. در قرن شانزدهم در ایتالیا برای تعیین فردی که باید هزینه‌های دفاعی شهر را بپردازد در میان طبقه ثروتمند شهر، قرعه‌کشی انجام می‌شد. در برخی جوامع کهن، انتخاب همسر نیز به صورت شانسی انجام می‌شد که دست کم باعث حفظ تنوع ژنتیکی در میان افراد جامعه می‌شد.

در ادبیات فارسی نیز از شانس به عنوان بخت یاد شده است و دارای نمونه‌های بسیاری در اشعار و متون ادبی است. مثلاً

اگر به هر سر مویت دو صد هنر باشد	هنر به کار نیاید چو بخت بد باشد
از این بوالعجبتر حدیثی شنو	که بی‌بخت کوشش نیرزد دو جو
چندان که جهد بود دودیدیم در طلب	کوشش چه سود چون نکند بخت یآوری
چه کند زورمند وارون بخت	بازوی بخت به که بازوی سخت
به رنج بردن بیهوده گنج نتوان یافت	که بخت راست فضیلت نه زور بازو را

با وجود اهمیت و تأثیر شانس در زندگی بشر، بسیاری از متفکران تا قبل از عصر علوم جدید (علوم مبتنی در تجربه)، وجود آن را رد می‌کردند. عدم هماهنگی شانس با موضوعاتی نظیر اراده آزاد، مسئولیت و ... فیلسوفان را از رسیدن به یک بیان قطعی در مورد شانس محروم کرد. دیدگاه منفی فیلسوفان نسبت به شانس، بیشتر حاصل علمی بود که از طریق نظری و نه تجربی به آن دست یافته بودند. به این ترتیب آنها برای آزمایش‌های تجربی ارزشی قائل نبودند.

دو موآور تعریف‌های دقیق و درستی از استقلال پیشامدها، و احتمال شرطی ارائه کرد. لاپلاس کارهای برنولی، دو مونمور و دو موآور را توسعه داد. مقاله او با عنوان تئوری تحلیلی احتمال یکی از کارهای مهم تا قرن بیستم به‌شمار می‌رود.

از آن‌جا که قرن نوزدهم مصادف با تغییر ساختار اجتماعی و اقتصادی و تحول علوم تجربی است، بیشتر کارهایی که تا آن زمان در زمینه ریاضیات و به‌ویژه در احتمال انجام شده بود، کاربرد یافت، قرن بیستم را دوران احتمال مدرن می‌دانند. کولموگروف احتمال را براساس اصول موضوعی و در قالب تئوری اندازه بنا نهاد. کتاب مبانی تئوری احتمال او در آلمان به سال ۱۹۳۳ منتشر شد و پایه و بنای تئوری احتمال مدرن قرار گرفت.

نتیجه‌ای که تئوری احتمال را تاحد زیادی از قیود عوامل تجربی رها کنید «قضیه قانون اعداد بزرگ» است. به موجب این قضیه، احتمالات موضوعی را دست کم برای آزمایش‌هایی که به‌طور مستقل و نامحدود قابل تکرارند، به کمک مفهوم حد می‌توان محاسبه کرد. این قضیه اساسی ابتدا توسط امیل بورل برای آزمایش‌های برنولی بیان و اثبات شد و سپس کولموگروف آن را برای رشته‌هایی از متغیرهای تصادفی مستقل تعمیم داد.

تصویر عنوانی

یکی از راهکارهای عملی، جهت گسترش، بازسازی و عنوان در عرصه‌های مختلف صنعتی، کشاورزی و خدماتی برنامه‌ریزی درست و مدیریت بهینه و صحیح منابع در بخش‌های مذکور است. مثلاً در بخش کشاورزی به منظور افزایش سطح تولید و بهره‌وری، بهینه‌سازی منابع بسیار حائز اهمیت است. موضوع پیش‌بینی بارندگی‌های آینده براساس آمار بارندگی‌های ثبت شده قبلی و فعلی، می‌تواند نقش مهمی در این مدیریت داشته باشد. زیرا بارندگی، نسبت به سایر عوامل اقلیمی نقش تعیین‌کننده‌تری در تولیدات کشاورزی دارد.

اثر سیستم‌های مؤثر بر بارندگی و دوره‌های خشک ممکن است برای چند روز روی یک منطقه تداوم یابد. از این رو تعیین احتمال رخدادهای متوالی مانند یک روز تر پس از یک روز تر دیگه، یک روز خشک پس از یک روز تر، یک روز خشک پس از یک روز خشک دیگر و یک روز تر پس از یک روز خشک می‌تواند مفید باشد. در عین حال، چون توده‌های هوای مستقر روی یک اقلیم ممکن است چند هزار کیلومتر را دربرگیرد و سرعت حرکت کندی داشته باشند، اگر یک روز بارانی باشد احتمال آنکه فردای آن روز نیز بارانی باشد زیاد است. در نتیجه وقوع روزهای بارانی و روزهای خشک به بارانی یا خشک بودن روز قبل وابسته است در نتیجه در بررسی احتمال وقوع یا عدم وقوع روزهای بارانی یا خشک با پیشامدهای وابسته سروکار داریم که به روزهای قبلی خود وابسته‌اند. بنابراین یکی از مسائلی که در هواشناسی با آن روبه‌رو هستیم، این است که پیشامدهای متوالی با چه احتمالی در پی یکدیگر ظاهر می‌شوند و در طولانی مدت سهم هر یک از آنها روی اقلیم مورد بررسی چه میزان است.

احتمال شرطی

درس اول

اهداف درس

- آشنایی با احتمال شرطی و کاربرد آن در حل مسائل
- آشنایی با متغیرهای مستقل و وابسته
- درک رابطه بین متغیرهای مستقل و کاربرد آن در حل مسائل مربوطه

پیش‌نیازها

- ۱ فضای نمونه و پیشامدهای تصادفی را بشناسد.
- ۲ با احتمال وقوع یک پیشامد در یک فضای نمونه آشنا باشد.
- ۳ قوانین احتمال (اجتماع، اشتراک، تفاضل و متمم) را بشناسد.
- ۴ با پیشامدهای ناسازگار آشنا باشد.

روش تدریس

این درس با یادآوری مفاهیم اولیه مبحث احتمال و تلخیص مواردی که دانش‌آموزان در سال‌های گذشته با آن آشنا شده‌اند آغاز می‌شود. لازم به ذکر است که مفاهیم اشاره شده در کادر ابتدای درس، خلاصه‌ای از مفاهیمی است که در پایه‌های هشتم، نهم و دهم در برنامه درسی دانش‌آموزان قرار گرفته است. در بیان احتمال شرطی و ارائه فرمول آن با توجه به آنچه دانش‌آموز از احتمال می‌داند و با توجه به فرمول احتمال سعی شده است نوعی توجیح منطقی (و نه اثبات کامل ریاضی) ارائه گردد که به پذیرش این رابطه توسط ذهن دانش‌آموز کمک نماید. از نظر توالی مطالب، باید توجه داشت که در بسیاری از کتاب‌های احتمال ابتدا

مفهوم استقلال دو پیشامد بیان شده و سپس احتمال شرطی ارائه می‌شود. ولی از آنجا که رویکرد کتاب‌های جدید التالیف بر ارائه کاربردی و شهودی مطالب برای دانش‌آموزان می‌باشد. در این فصل، برنامه آموزشی مبتنی بر ارائه احتمال شرطی و سپس با استفاده از آن ارائه تعریف استقلال دو پیشامد است. از آنجا که دانش‌آموزانی که در رشته تجربی تحصیل می‌کنند احتمال دارد در رشته‌هایی ادامه تحصیل دهند که با محاسبه احتمال پیشامدهای مستقل زیاد سروکار داشته باشند، یادگیری این مفهوم اهمیت خاصی خواهد داشت. مطالعه مثال‌های ارائه شده در ادامه درس تسلط دانش‌آموزان را بیشتر نموده و مطالب خواندنی قرار داده شده به منظور مطالعه بیشتر علاقه‌مندان است و می‌تواند برای دانش‌آموزان رشته تجربی مفید باشد.

گاهی وقوع یک پیشامد بر احتمال وقوع به پیشامدهای دیگر تأثیر می‌گذارد. مثلاً احتمال اینکه قیمت جهانی نفت در ماه آینده افزایش یابد با دانستن اینکه یکی از کشورهای اوپک درگیر جنگ یا ناامنی است، متفاوت خواهد بود از وقتی اطلاعاتی در این مورد نداریم.

آنچه تاکنون دانش‌آموزان در مورد مسائل احتمال آموخته‌اند، دو نوع مسئله شمارشی و تقسیم «تعداد حالات مطلوب» به «تعداد حالات ممکن» است. این تصویر مفید ولی محدود است. با ارائه مسائل احتمال شرطی و استقلال دید دانش‌آموزان نسبت به مسائل احتمال کمی گسترده‌تر خواهد شد.

در احتمال شرطی با محدود کردن تعداد حالت‌های ممکن از مجموعه فضای نمونه S بر یک مجموعه از آن مانند B و محدود کردن تعداد حالت‌های مطلوب از مجموعه A به مجموعه $A \cap B$ ، رابطه

$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ حاصل می‌شود. در این قسمت اثبات دقیق ریاضی به هیچ عنوان مدنظر نیست و تنها توضیح منطقی و درک شهودی رابطه $P(A|B)$ مورد نظر بوده است.

منظور از احتمال A به شرط B ، احتمال وقوع پیشامد A به شرط آن است که بدانیم پیشامد B رخ داده است.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

با هدف آشنا کردن دانش‌آموزان با جزئیات رابطه احتمال شرطی از جمله نحوه خلاصه‌نویسی چنین مسائلی و نحوه استفاده از احتمال شرطی در حد آنها آورده شده است.

در یک مسابقه اتومبیل رانی احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان برسد، برابر $\frac{7}{10}$ است و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود، برابر $\frac{8}{10}$ است. اگر بدانیم یک اتومبیل دچار

نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان رسیده است؟

حل:

$$\left. \begin{array}{l} \text{پیشامد دچار نقص فنی نشدن اتومبیل: } A \\ \text{احتمال رسیدن به خط پایان: } B \end{array} \right\} \begin{array}{l} P(A) = 0/8 \\ P(A \cap B) = 0/7 \end{array}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0/7}{0/8} = \frac{7}{8}$$

مثال‌های صفحه ۱۴۶ با هدف آشنایی بیشتر دانش‌آموز با مبحث احتمال شرطی آورده شده و به‌طور کامل حل شده‌اند.

توصیه‌های آموزشی

یکی از استراتژی‌های حل مسائل شرطی، کاهش فضای نمونه است. یعنی برای محاسبه احتمال A به شرط B ، تعداد اعضای فضای نمونه S را به تعداد اعضای مجموعه B کاهش می‌دهیم. توصیه می‌شود در مثال‌های اولیه، نمودار ون مجموعه پیشامدهای A و B رسم شود این امر به دانش‌آموز کمک می‌کند تا درک بهتری از مفهوم احتمال شرطی یافته و آن را به عنوان موضوعی مستقل از آنچه تا امروز در مورد مسائل احتمال آموخته، نبیند. به مثال‌های زیر توجه کنید.

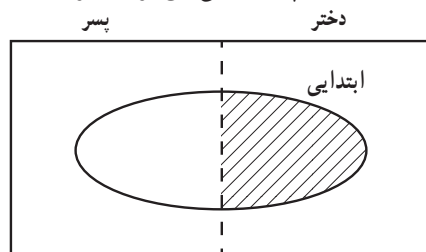
مثال

فرض کنید در مدارس یک شهر 1500 دانش‌آموز تحصیل می‌کنند که 800 تای آنها دختر و بقیه پسر هستند. همچنین 600 نفر از آنها که 320 نفر دختر و بقیه پسر هستند در مقطع ابتدایی تحصیل می‌کنند. اگر از میان دانش‌آموزان این شهر یکی را به تصادف انتخاب کنیم و بدانیم که این دانش‌آموز از مقطع ابتدایی انتخاب شده است با چه احتمالی این فرد دختر است؟

A = پیشامد دختر بودن

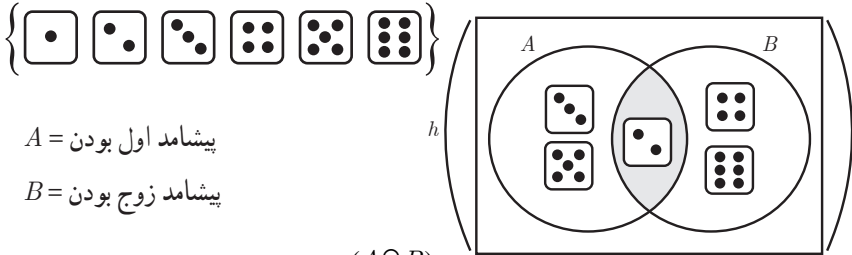
B = پیشامد مقطع ابتدایی بودن

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{320/1500}{600/1500} = \frac{8}{15}$$



فضای نمونه = (دانش‌آموزان شهر)

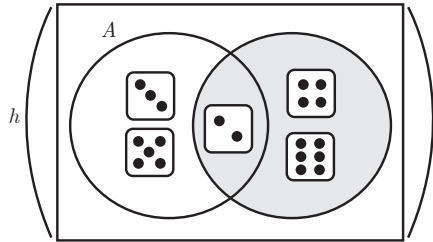
مثال: تاسی را پرتاب می‌کنیم اگر بدانیم عدد رو شده زوج است، احتمال آنکه اول آمده باشد چقدر است؟



$A =$ پیشامد اول بودن

$B =$ پیشامد زوج بودن

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

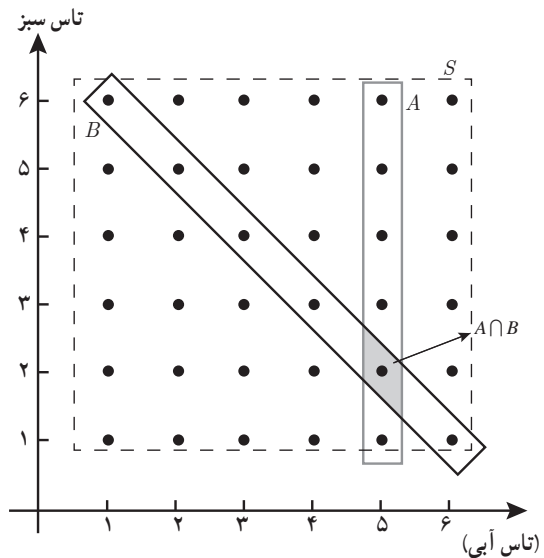


مثال: دو تاس آبی و قرمز را می‌اندازیم، اگر مجموع دو تاس ۷ باشد، احتمال اینکه تاس آبی ۵ باشد چقدر است؟

$A =$ پیشامد آنکه تاس آبی ۵ باشد

$B =$ پیشامد آنکه مجموع دو تاس ۷ باشد

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{6}$$



دو پیشامد مستقل

در این قسمت پیشامد مستقل به کمک تعریف احتمال شرطی بیان شده است. در صفحه ۱۴۶ آمده است «پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه وقوع B بر احتمال وقوع A تأثیر نگذارد» دقت کنیم که در اینجا دو طرفه بودن مفهوم استقلال دو پیشامد ذکر نشده است و بنابه این تعریف تنها استقلال پیشامد A از B بیان شده است. یعنی می‌دانیم وقوع B بر احتمال وقوع A تأثیری ندارد ولی در مورد این که وقوع A هم بر احتمال وقوع B تأثیر نمی‌گذارد اطلاعی در دست نیست. پس از آن با استفاده از مفهوم احتمال شرطی و توجه به این مسئله که وقوع B اثری بر احتمال وقوع A ندارد و نتیجه $P(A|B) = P(A)$ حاصل می‌شود. در کادر بعدی مفهوم مستقل بودن به صورت $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ بیان شده است که حاصل دو رابطه $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ و $P(A|B) = P(A)$ است. اکنون با استفاده از خاصیت جابه‌جایی عمل ضرب دو مجموعه اعداد حقیقی و عمل اشتراک دو مجموعه مستقل بودن B از A نیز نتیجه می‌شود و استقلال دو پیشامد به‌عنوان مفهومی دو طرفه ارائه می‌گردد.

مثال‌های حل شده صفحات ۱۴۷ - ۱۴۹ به‌منظور تسلط بیشتر دانش‌آموزان بر این مبحث ارائه گردیده است.

توصیه‌های آموزشی

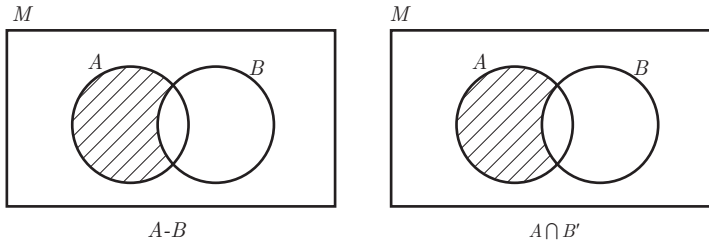
اگر $P(A) > 0$ ، $P(B) > 0$ ، شرط لازم و نه کافی برای استقلال آن است که $A \cap B = \emptyset$ زیرا در غیر این صورت $P(A \cap B) = 0$ و بنابراین تساوی $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ برقرار نیست. می‌توانید این مطلب را با یک مثال برای دانش‌آموزان مطرح کنید.

اغلب دانش‌آموزان بین دو مفهوم ناسازگاری و استقلال دو پیشامد تمایز قائل نمی‌شوند. به‌ویژه آنکه این دو مفهوم در حال حاضر با تأخیر زمانی یکسان فرا گرفته می‌شود. همکاران محترم می‌توانند با توجه به زمان تعریف این دو مفهوم در مسیر آموزش احتمال در برنامه درسی و یادآوری هردو تعریف، مطلب را برای دانش‌آموزان به روشنی توضیح دهند.

مفهوم ناسازگاری قبل از تعریف احتمال بیان می‌شود ولی استقلال دو پیشامد به کمک احتمال بیان می‌گردد.

درواقع دو پیشامد ناسازگار اشتراکشان برابر تهی است یعنی $A \cap B = \emptyset$ و بنابراین $P(A \cap B) = 0$ در حالی که اگر A و B دو پیشامد مستقل با احتمال‌های غیر صفر باشند همان‌گونه که گفته شد باید $P(A \cap B) \neq 0$.

از آنجا که دانش آموزان در سال‌های قبل با نمودار ون آشنا هستند می‌توان تساوی رابطه $A - B = A \cap B'$ را با توجه به نمودار ون برای آنها اثبات کرده و پس از آن در حل این سؤال استفاده کرد.

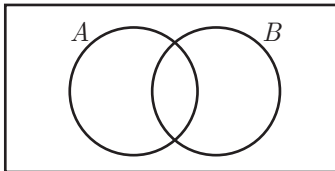


تمرین ۳- فرض کنید A و B دو پیشامد ناتهی و مستقل از یکدیگرند. الف) نشان دهید A' و B مستقل هستند.

ب) با توجه به الف) نشان دهید A' و B' نیز مستقل اند.

حل

طبق فرض A و B مستقل و $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ الف)



$$\begin{aligned} P(A' \cap B) &= P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) \\ &= P(B)(-P(A)) \\ &= P(B) \cdot P(A') \end{aligned}$$

ب) طبق الف) اگر دو پیشامد مستقل باشند هر یک از آنها با متمم دیگری هم مستقل است بنابراین اگر A و B مستقل باشند، در این صورت A و B' مستقل اند و از این می‌توان نتیجه گرفت A' و B' نیز مستقل اند.

تمرین ۴- احمد به احتمال $\frac{7}{10}$ در تیم کوهنوردی مدرسه‌شان و به احتمال $\frac{8}{10}$ در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود.

ب) در هیچ کدام از دو تیم انتخاب نشود.

پ) فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود.

ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

$$P(A) = 0.7 \quad , \quad P(B) = 0.8$$

حل :

$$\text{الف) } P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{7}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{56}{100}$$

طبق قسمت ب تمرین ۳ اگر A و B مستقل باشند. آنگاه A' و B' نیز مستقل هستند.

$$\text{ب) } P(A' \cap B') = P(A')P(B') = \frac{3}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{6}{100}$$

$$\text{پ) } P(A \cap B') = P(A)P(B') = \frac{7}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{14}{100}$$

$$\text{ت) } P(A \cap B') + P(A' \cap B) = \frac{14}{100} + \frac{3}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{38}{100}$$

$$\text{ث) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{10} + \frac{8}{10} - \frac{56}{100} = \frac{94}{100}$$

تمرین ۵— احتمال اینکه رؤیا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند، برابر 0.625 باشد، رؤیا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

$$P(A) = x \quad , \quad P(B) = 2x \quad , \quad P(A \cup B) = \frac{625}{1000}$$

$$P(B) = ?$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = x + 2x - 2x^2$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 3x - \frac{625}{1000} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{غ ق ق} \\ \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

تمرین ۶— دو تاس باهم پرتاب شده اند. احتمال آنکه هر دو عدد روبرو شده زوج باشند، به شرط اینکه بدانیم مجموع اعداد روبرو شده برابر ۸ است را به دست آورید.

حل :

$$P(A|B) = ? \quad , \quad P(A) = \frac{9}{36} \quad , \quad P(B) = \frac{5}{36}$$

$$\left. \begin{array}{l} A: \text{پیشامد هردو زوج} \\ B: \text{پیشامد مجموع ۸} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A \cap B = \{(2,6), (4,4), (6,2)\} \\ P(A \cap B) = \frac{3}{36} \end{array}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{3}{5}$$

تمرین ۷- ترکیبی از ۴ ماده شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن ماده A ، $\frac{1}{5}$ و احتمال واکنش نشان دادن ماده B ، $\frac{1}{7}$ است. اگر ماده A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن ماده B ، $\frac{1}{4}$ خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

حل:

$$P(A) = \frac{1}{5}, \quad P(B) = \frac{1}{7}, \quad P(B|A) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{P(B \cap A)}{\frac{1}{5}} \rightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{20}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{20}$$

$$= \frac{25 + 20 - 7}{140}$$

$$= \frac{38}{140} = \frac{19}{70}$$

آمار توصیفی

درس دوم

اهداف درس

- آشنایی با معیارهای گرایش به مرکز و محاسبه آنها
- توانایی بهره‌گیری از معیار گرایش به مرکز مناسب در تحلیل داده‌ها با تمرکز بر شناخت ویژگی‌های آنها
- آشنایی با معیارهای پراکندگی و محاسبه آنها
- توانایی بهره‌گیری از معیارهای پراکندگی مناسب در تحلیل داده‌ها تمرکز بر شناخت ویژگی‌های آنها
- درک اثر تغییر مقدار عددی داده‌ها روی شاخص‌های گرایش به مرکز و پراکندگی

پیش‌نیازها

- با متغیرهای تصادفی آشنا باشد.
- جامعه و نمونه را بشناسد

روش تدریس

یکی از اهداف آمار، خلاصه‌سازی داده‌ها جهت بهره‌مندی از آنها است. انتخاب یک یا چند عدد به نمایندگی از سایر داده‌ها، اطلاعات لازم و کاربردی را در اختیار ذی‌نفعان قرار خواهد داد. بدیهی است که در انتخاب این نمایندگان، نهایت دقت را باید به کار برد. زیرا همه استنباط‌ها از داده‌ها و همه برنامه‌ریزی‌ها براساس این نمایندگان انجام خواهد گرفت.

معیارهای گرایش به مرکز

معیارهایی هستند که محل تمرکز داده‌ها را نشان می‌دهند:

میانگین به عنوان پرکاربردترین معیار گرایش به مرکز شناخته شده است. این معیار به علت برخورداری از ویژگی‌های خوب به عنوان یک برآورد از میانگین جامعه، در قضایای بسیاری به کار گرفته شده است. لذا میانگین نسبت به میانه از کاربرد بیشتری برخوردار است. اما همان‌طور که در متن کتاب توضیح داده شده، گاه استفاده از میانگین درست نیست و از میانه به عنوان معیار گرایش به مرکز استفاده می‌کنیم. قوانین مربوط به میانگین

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{N}$$

البته در کتاب از آوردن علامت \sum خودداری شده است.

$$\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X}) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N X_i - N\bar{X} = N\bar{X} - N\bar{X} = 0$$

محمد، جرم ۵ نفر از دوستان خود را پرسید و آنها را در جدول زیر یادداشت کرد. سپس میانگین جرم دوستان خود را حساب کرد:

دوست	رضا	نیا	سام	احمد	علی
جرم (کیلوگرم)	۵۵	۶۱	۵۷	۵۵	۶۲

نحوه محاسبه میانگین

۱ محمد ابتدا مجموع جرم دوستان خود را محاسبه کرد:

۲ سپس عدد حاصل را بر عدد ۵ (تعداد دوستان) تقسیم کرد:

حل:

$$\bar{X} = \frac{۶۲ + ۵۵ + ۵۷ + ۶۱ + ۵۵}{۵} = ۵۸$$

هدف کار در کلاس صفحه ۱۵۴، بررسی و مشاهده میزان حساسیت میانگین نسبت به تغییرات همه داده‌ها است. هر تبدیلی که روی همه داده‌ها انجام گیرد، روی میانگین هم اعمال خواهد شد. قبل از کار در کلاس دو سؤال در مورد تغییرات داده‌ها و اثر آن روی میانگین پرسیده شده است.

همکاران محترم می‌توانند با مثالی ساده و تغییرات روی آن، از دانش‌آموزان بخواهند پاسخ این سؤالات را به دست آورند و یا به صورت کلی مطلب را ثابت کنند هر چند اثبات ریاضی این سؤالات مدنظر نبوده است و همکاران با توجه به سطح کلاس می‌توانند با چند مثال و یا اثبات ریاضی بنا به صلاحدید مطلب را نتیجه بگیرند.

کار در کلاس صفحه ۱۵۴

- ۱ در فعالیت قبل، میانگین جرم دوستان محمد چند گرم است؟
با توجه به پاسخ و نتایج گرفته شده از سؤالات قبل از این کار در کلاس:
- جرم دوستان محمد در فعالیت قبل برحسب کیلوگرم است. در تبدیل واحد کیلوگرم به گرم، همه داده‌ها در ۱۰۰۰ ضرب می‌شوند. پس میانگین هم در ۱۰۰۰ ضرب شده و برابر ۵۸۰۰۰ خواهد بود.
- ۲ هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد. اگر میانگین دمای هوا ۲۸ درجه سانتی‌گراد باشد، میانگین دمای هوا چند درجه فارنهایت است؟ (راهنمایی $F = \frac{9}{5}C + 32$)
- مانند سؤال قبل چون در تبدیل واحد درجه سانتی‌گراد به فارنهایت همه داده‌ها در $\frac{9}{5}$ ضرب و با ۳۲ جمع می‌شوند پس میانگین داده‌های تبدیل شده برابر $\frac{9}{5} \times 28 + 32$ یعنی ۸۲/۴ است.

توصیه‌های آموزشی

همکاران محترم توجه داشته باشند که دانش‌آموزان با مفهوم علم آمار، تعاریف مربوط به آن، مرتب کردن داده‌ها: دسته‌بندی داده‌ها، جدول فراوانی، یافتن میانگین داده‌ها از روی جدول فراوانی و انواع نمودارهای آماری در دوره متوسطه اول آشنا هستند. توصیه می‌شود فصل ۸ از کتاب ریاضی پایه هشتم مطالعه شود یا از دانش‌آموزان بخواهید این فصل را قبل از تدریس مطالعه و در کلاس ارائه دهند.

میان‌ه

میان‌ه داده‌ای است که نصف داده‌ها از آن بیشتر و نصف داده‌ها از آن کمتر است. به صورت دقیق‌تر، میان‌ه عبارت است از مقداری که تعداد داده‌های قبل از آن با تعداد داده‌های بعد از آن با هم برابرند. فلوجارت صفحه ۱۵۴ مراحل یافتن میان‌ه را به خوبی بیان می‌کند.

جارك‌ها كه در انتهای این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرند، تعمیم مفهوم میانه هستند. از آنجا كه میانگین تحت تأثیر داده‌های دور افتاده است، در صورت وجود داده‌های دور افتاده، از میانه استفاده می‌شود برای درك بهتر این مطلب، می‌توان معلمی را مثال زد كه نمره مستمر دانش‌آموزان را براساس میانگین نمرات آنها در طول يك ترم محاسبه می‌كند. فرض كنید در این میان دانش‌آموزی دارای نمرات ۱۷/۵ و ۱۶ و ۱۷ و ۱۶/۵ و ۱۶ و ۵ باشد. به هر دلیلی دانش‌آموز يك نمره خیلی ضعیف دارد ولی عملکرد او در سایر موارد كاملاً قابل قبول است میانگین نمرات این دانش‌آموز برابر ۱۴ است كه نسبت به نمرات او در طول ترم ناعادلانه به نظر می‌رسد. از این رو برای از بین بردن اثر نمره دور افتاده ۵ بهتر است از میانه استفاده شود.

مثال و كار در كلاس صفحه ۱۵۵ در راستای درك بهتر دانش‌آموز از مفهوم میانه و کاربرد آن است.

كار در كلاس صفحه ۱۵۵

داده‌های زیر مربوط به تعداد ضربان قلب ۱۲ دانش‌آموز پایه یازدهم، قبل از يك مسابقه دو است.

۱۰۰ ۹۱ ۸۲ ۷۵ ۱۰۵ ۹۸ ۹۸ ۱۰۱ ۸۹ ۹۲ ۹۷ ۸۶

— میانه داده‌ها را مشخص كنید.

۷۵، ۸۲، ۸۶، ۸۹، ۹۱، ۹۲، ۹۷، ۹۸، ۹۸، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۵

$$\frac{92+97}{2} = 94.5$$

— میانگین داده‌ها را مشخص كنید.

$$\bar{X} = \frac{1114}{12} \approx 92.83$$

توصیه‌های آموزشی

توجه دانش‌آموزان را به اهمیت بحث میانگین و میانه در تحلیل داده‌ها جلب كنید. مثلاً اینکه اگر میانه نمره ریاضی دانش‌آموزان يك كلاس ۱۷ باشد، یعنی ۵٪ دانش‌آموزان نمره ۱۷ و بالاتر گرفته‌اند و این به معنای رقابت شدید در آن كلاس است.

تعبیر میانگین در فیزیک، مركز ثقل است كه می‌توان برای درك بهتر مفهوم میانگین و اهمیت معیارهای پراكنده‌گی قبل از ورود به موضوع معیارهای پراكنده‌گی به آن اشاره كرد. در دو شكل زیر:

(۱)

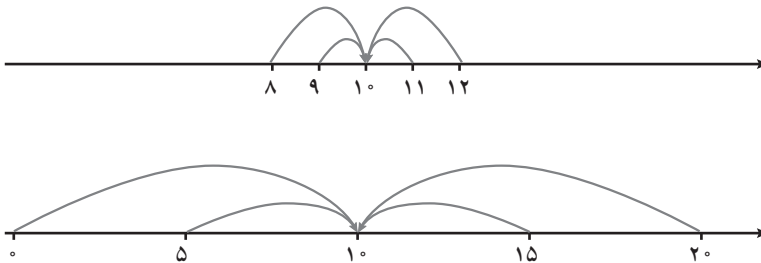
(۲)

شکل اول از تعادل بیشتر برخوردار است ولی شکل دوم تعادل کمتری دارد. می توان بلندی میله ها را در دو طرف شکل به پراکندگی بیشتر داده ها نسبت داد. تنها توجه به معیارهای گرایش به مرکز نمی تواند اطلاعات کاملی از داده ها در اختیار ما قرار دهد. فعالیت صفحه ۱۵۶ به منظور نشان دادن همین موضوع طرح شده است.

فعالیت صفحه ۱۵۶

نمره درس ریاضی دانش آموزان دو کلاس A و B، به تفکیک گزارش شده است:

A	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
B	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰



الف) میانۀ نمره این دو کلاس را محاسبه کنید.

$$A \text{ میانۀ کلاس } = 10 \quad B \text{ میانۀ کلاس } = 10$$

ب) میانگین نمره این دو کلاس را محاسبه کنید.

$$\bar{X}_A = 10, \quad \bar{X}_B = 10$$

پ) به نظر شما یک معلم ریاضی ترجیح می دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟ از آنجا که میانۀ و میانگین داده ها در هر دو کلاس یکسان است، در این سؤال معیارهای گرایش به مرکز اطلاعات چندانی برای مقایسه وضعیت دو کلاس به دست نمی دهد و معلم نمی تواند با این اطلاعات، کلاسی را بر کلاس دیگر ترجیح دهد ولی این سؤال برای توجه دادن دانش آموزان به مهم بودن معیارهای مربوط به پراکندگی داده ها مطرح شده و لذا بحث بر تفاوت پراکندگی داده ها و نتایج آن مدنظر است.

معیارهای پراکندگی

تحلیل داده‌ها با استفاده از معیارهای گرایش به مرکز و بدون در دست داشتن معیارهای پراکندگی عملاً غیرممکن است.

دامنه تغییرات به عنوان اولین و ساده‌ترین معیار پراکندگی، دارای اهمیت است. اینکه تغییرات داده‌ها چگونه دامنه تغییرات و سایر معیارهای پراکندگی را تحت تأثیر قرار می‌دهد از مواردی است که دانش‌آموز باید به خوبی با آن آشنا شود. حسن دامنه تغییرات در سادگی محاسبه و ایراد آن در این است که تنها با دو داده بزرگ و کوچک سروکار دارد. فعالیت صفحه ۱۵۶ و همچنین مثال آورده شده در همان صفحه به معرفی دامنه تغییرات، حسن و ایراد استفاده از آن می‌پردازد.

هرچند که پراکندگی زیاد به معنای عدم تعادل داده‌هاست و مثلاً پراکندگی زیاد در درآمدهای افراد یک جامعه، نشان‌دهنده بیماری اقتصادی است. اما در برخی موارد پراکندگی زیاد مفید و حتی لازم است. فرض کنید در یک آزمون استخدامی ۹۰ درصد داوطلبان نمره کامل گرفته باشند. این امر نشان می‌دهد که آزمون نتوانسته است مقایسه درستی بین داوطلبین انجام دهد و شایسته‌ترین‌ها را برگزیند. کار در کلاس صفحه ۱۵۷ ورود به بحث واریانس و اهمیت این معیار در میان معیارهای پراکندگی است.

کار در کلاس صفحه ۱۵۷

معلم از ۷ نفر از دانش‌آموزان خواست تا تعداد کتاب‌های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده‌اند، گزارش کنند.

الف) دامنه تغییرات آنها را محاسبه کنید.

۱۵ ۸ ۹ ۱۲ ۱۴ ۴ ۱

۱۴ - ۱ = ۱۵: دامنه تغییرات

ب) دو دانش‌آموز دیگر به جمع آنها اضافه شدند و آنها نیز تعداد کتاب‌های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده بودند، به ترتیب ۵ و ۱۱ اعلام کردند. مجدداً دامنه تغییرات این ۹ داده را محاسبه کنید.

۱۴ - ۱ = ۱۵: دامنه تغییرات

پ) از مقایسه پاسخ الف و ب چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ از میان همه داده‌ها، دامنه تغییرات تنها با دو داده، یعنی بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده سروکار دارد و تغییرات روی داده‌های بین این دو داده، تأثیری روی دامنه تغییرات ندارد.

واریانس، یکی از مهم‌ترین پارامترهای علم آمار که برابر با میانگین مربع انحرافات از میانگین داده‌هاست. واریانس جامعه را با δ^2 نشان می‌دهیم. لازم است تا دانش‌آموز نقش واریانس را به‌عنوان معیار تکمیل‌کننده میانگین در بررسی جامعه درک کند. واریانس به دلیل درگیری تمام داده‌ها در محاسبه آن، یکی از معیارهای مهم پراکندگی به‌شمار می‌رود و واحد آن برابر توان دوم واحد داده موردنظر است. لزوم مجذورگیری در فرمول واریانس با اشاره به این مطلب که مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است در صفحه ۱۵۸ به‌طور کامل توضیح داده شده است.

فعالیت صفحه ۱۵۷ و ادامه آن در صفحه ۱۵۸ دانش‌آموز را برای رسیدن به فرمول واریانس راهنمایی می‌کند. در اینجا تحلیل نتیجه حاصل بسیار مهم است و باید روی آن تأکید شود. اینکه واریانس بزرگ به چه معناست و واریانس کوچک به چه معنا و اساساً کاربرد واریانس در مقایسه دو دسته داده با میانگین یکسان، به خوبی باید توسط دانش‌آموزان درک شود.

فعالیت صفحه ۱۵۷

الف) در ادامه فعالیت قبل اختلاف از میانگین را برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B به کمک جدول‌های روبه‌رو محاسبه کنید.

کلاس A		کلاس B	
x_i	$(x_i - \bar{X})$	y_i	$(y_i - \bar{Y})$
۸	-۲	۰	-۱۰
۹	-۱	۵	-۵
۱۰	۰	۱۰	۰
۱۱	۱	۱۵	۵
۱۲	۲	۲۰	۱۰

ب) مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه کنید. در هر دو حالت مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است.

الف) مجدور اختلاف از میانگین برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B را به کمک جداول زیر محاسبه کنید.

کلاس A		
x_i	$(x_i - \bar{X})$	$(x_i - \bar{X})^2$
۸	-۲	۴
۹	-۱	۱
۱۰	۰	۰
۱۱	۱	۱
۱۲	۲	۴

کلاس B		
y_i	$(y_i - \bar{Y})$	$(y_i - \bar{Y})^2$
۰	-۱۰	۱۰۰
۵	-۵	۲۵
۱۰	۰	۰
۱۵	۵	۲۵
۲۰	۱۰	۱۰۰

ب) مجموع مجدور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه کنید.

مجموع مجدور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس A	$(۸-۱۰)^2 + \dots + (۱۲-۱۰)^2 = ۱۰$
مجموع مجدور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس B	$(۰-۱۰)^2 + \dots + (۲۰-۱۰)^2 = ۲۵۰$

پ) میانگین مجدور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه و مقایسه کنید.

مجموع مجدور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس A	$\frac{(۸-۱۰)^2 + \dots + (۱۲-۱۰)^2}{۵} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$
مجموع مجدور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس B	$\frac{(۰-۱۰)^2 + \dots + (۲۰-۱۰)^2}{۵} = \frac{۲۵۰}{۵} = ۵۰$

کار در کلاس صفحه ۱۵۹

واریانس تعداد کتاب‌های غیردرسی مطالعه شده در «کار در کلاس» قبل، توسط ۷ و ۹ دانش‌آموز را محاسبه کنید.

واریانس دامنه تغییرات تعداد کتاب‌های مطالعه شده توسط هر دانش‌آموز

۱۵	۸	۸	۱۲	۱۴	۴	۱	۱۴	۲۰
۱۵	۸	۸	۱۲	۱۴	۴	۱	۵	۱۱
								$\sigma = 22/98$

همان‌طور که در این «کار در کلاس» دیده می‌شود، واریانس برخلاف دامنه تغییرات با تغییر تعداد و مقادیر داده‌ها تغییر می‌کند.

کار در کلاس‌های صفحه ۱۵۹ به بیان ویژگی‌های واریانس و مزیت آن نسبت به دامنه تغییرات می‌پردازد. این ویژگی، حساسیت واریانس به تعداد داده‌ها و مقدار داده‌ها را نشان می‌دهد.

ویژگی‌های واریانس

اگر هریک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، واریانس آنها تغییر نخواهد کرد. چرا؟
اگر هریک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، واریانس آنها در مجذور همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد. چرا؟

در پاسخ به این سؤالات، نیازی به اثبات ریاضی نیست و همکاران با چند مثال عددی می‌توانند ذهن دانش‌آموز را برای درک منطقی نتیجه موردنظر و پاسخ این سؤالات آماده کنند.

کار در کلاس صفحه ۱۵۹

در سؤال اول، انتظار می‌رود دانش‌آموزان از اطلاعات فعالیت صفحه ۱۵۳ استفاده کرده و واریانس داده‌ها را بیابند. سپس تغییرات داده‌ها را با توجه به نتایج سؤالات مطرح شده قبل از کار در کلاس، بیان نمایند.

۱ در اولین فعالیت، واریانس جرم دوستان محمد چند گرم به توان دو است؟
(واریانس داده‌های قبلی برحسب کیلوگرم) $\times 10^6 =$ واریانس داده‌های جدید برحسب گرم

۲ هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد. اگر واریانس دمای هوا ۶ درجه سانتی‌گراد به توان دو باشد، واریانس دمای هوا چند درجه فارنهایت به توان دو است؟ (راهنمایی: $F = \frac{9}{5}C + 32$)

$$\delta_C^2 = 6, \quad \delta_F^2 = \frac{81}{25} \delta_C^2 \Rightarrow \delta_F^2 = \frac{81}{25} \times 6 = \frac{486}{25} = 19.44 F^2$$

از آنجا که در محاسبه واریانس از میانگین مجذور اختلاف از میانگین داده‌ها استفاده می‌شود، این معیار، پراکندگی داده‌ها را حول میانگین بیشتر از حد انتظار نشان می‌دهد به همین دلیل از واریانس جذر گرفته می‌شود تا معیار بهتری برای بیان پراکندگی داده‌ها حول میانگین باشد، جذر واریانس را **انحراف معیار** می‌نامند و واحد آن برابر واحد داده‌های مورد بررسی است.

اگر داده‌های مربوط به یک کمیت در دو جامعه آماری با واحدهای متفاوت یا ناشناخته بیان شده باشد، برای مقایسه پراکندگی داده‌ها در دو جامعه از ضریب تغییرات استفاده می‌شود. همچنین ضریب تغییرات برای مقایسه دو جامعه که در مورد یک کمیت میانگین یکسانی ندارند مورد استفاده قرار می‌گیرد.

ضریب تغییرات را با CV نشان می‌دهند و عبارت است از نسبت انحراف معیار به میانگین ضریب تغییرات به‌عنوان پراکندگی درون واحد مشهور است در صفحات ۱۵۹ و ۱۶۰ کتاب، نحوه محاسبه انحراف معیار و ضریب تغییرات به روشنی توضیح داده شده است. از ضریب تغییرات تنها زمانی که همه داده‌ها مثبت باشد، استفاده می‌شود.

کار در کلاس صفحه ۱۶۰

دمای هوای یک هفتهٔ اسفند مشهد و کیش، به ترتیب فارنهایت و سانتی‌گراد گزارش شده است. دمای هوای این هفته در کلام شهر از ثبات بیشتری برخوردار است (ضریب تغییرات کمتری دارد)؟

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
مشهد (فارنهایت)	۵۰	۵۳	۴۹	۴۱	۳۹	۳۷	۳۷
کیش (سانتی‌گراد)	۲۷	۲۶	۲۴	۲۳	۲۲	۲۲	۲۱

$$\bar{X}_{\text{مشهد}} = 43/71$$

$$\bar{X}_{\text{کیش}} = 23/57$$

$$\delta^2_{\text{مشهد}} = \frac{273/43}{7} = 39/06$$

$$\delta^2_{\text{کیش}} = \frac{29/71}{7} = 4/24$$

$$\delta_{\text{مشهد}} = 6/24$$

$$\delta_{\text{کیش}} = 2/05$$

$$cv_{\text{مشهد}} = 0/14$$

$$cv_{\text{کیش}} = 0/08$$

پس کیش دارای دمای هوایی با ضریب تغییرات کمتر است.

لازم است تا دانش‌آموزان مهارت کافی در تعیین اثر تغییرات روی داده‌ها بر انحراف معیار و ضریب تغییرات کسب کنند. در قسمت تمرین صفحه ۱۶۲ سؤال ۱ به این مسئله پرداخته شده است. لازم است تا همکاران با مثال‌های متنوع دیگر به درک بهتر دانش‌آموزان در این مورد کمک کنند.

چارک‌ها نقاطی بر روی مقیاس اندازه‌گیری هستند که کلیه مشاهدات یا نمره‌ها را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. دستورالعمل پیدا کردن چارک‌ها در فلوجارت صفحه ۱۶۱ آورده شده است. چارک‌ها تعمیم میانه هستند سایر تعمیم‌های میانه، دهک‌ها و صدک‌ها هستند که در مطلب خواندنی صفحه ۱۶۲ به آنها پرداخته شده است.

با توجه به اینکه نرم‌افزار آفیس یکی از پرکاربردترین نرم‌افزارهای موجود در سطح جامعه است. قسمت خواندنی انتهای فصل به آموزش نحوه استفاده از برنامه اکسل این نرم‌افزار با هدف کاربرد آن در رسم نمودارهای آماری پرداخته است. دانش‌آموزان دو دوره اول متوسطه با انواع نمودارهای آماری و ویژگی‌های آنها آشنا شده‌اند. توصیه می‌شود در صورت داشتن وقت و امکانات، این قسمت به عنوان یک کار فوق برنامه و به منظور آشنایی و ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان در کلاس اجرا شود. در هر صورت انجام ارزشیابی از این قسمت غیرضروری و خارج از برنامه درسی این کتاب است.

کار در کلاس صفحه ۱۶۲

معلم یک کلاس می‌خواهد متوسط مدت زمان استفاده دانش‌آموزان از اینترنت را برآورد کند. وی از ۳۵ دانش‌آموز کلاس خود پرسید، در یک شبانه‌روز چند دقیقه از اینترنت استفاده می‌کنند؟ در زیر پاسخ آنها گزارش شده است.

۱۲۰	۳۰	۸۰	۴۵	۱۸۰	۱۵	۲۰۰	۶۰	۹۰	۴۵
۲۰	۳۰	۶۰	۱۱۵	۱۲۰	۲۰	۶۰	۹۰	۹۰	۷۵
۲۵	۲۰۰	۷۵	۹۰	۱۰۰	۶۰	۶۰	۶۰	۴۵	۴۵
۱۲۰	۱۰۰	۱۸۰	۳۰	۱۵					

چارک اول، میانه و چارک سوم مدت زمان استفاده از اینترنت دانش‌آموزان این کلاس را مشخص کنید.

$$Q_1 \qquad Q_2$$

$$۱۵ \text{ و } ۱۵ \text{ و } ۲۰ \text{ و } ۲۰ \text{ و } ۲۵ \text{ و } ۳۰ \text{ و } ۳۰ \text{ و } ۳۰ \text{ و } ۳۰ \text{ و } ۴۵ \text{ و } ۴۵ \text{ و } ۴۵ \text{ و } ۴۵ \text{ و } ۶۰ \text{ و } ۶۰ \text{ و } ۶۰ \text{ و } ۶۰ \text{ و } ۶۰ \text{ و } ۶۰ \text{ و } ۶۰ \text{ و } ۷۵ \text{ و } ۷۵ \text{ و } ۸۰ \text{ و } ۹۰ \text{ و } ۹۰$$

$$۹۰ \text{ و } ۹۰ \text{ و } ۱۰۰ \text{ و } ۱۰۰ \text{ و } ۱۰۰ \text{ و } ۱۰۰ \text{ و } ۱۱۵ \text{ و } ۱۲۰ \text{ و } ۱۲۰ \text{ و } ۱۲۰ \text{ و } ۱۲۰ \text{ و } ۱۲۰ \text{ و } ۱۸۰ \text{ و } ۱۸۰ \text{ و } ۱۸۰ \text{ و } ۲۰۰ \text{ و } ۲۰۰$$

$$Q_3$$

توصیه‌های آموزشی

معمولاً در متغیرهای آماری، متغیری که پراکندگی آن زیاد نباشد، ثابت در نظر گرفته می‌شود. ذکر این مطلب برای درک بهتر دانش‌آموزان از داده‌هایی که با آنها سروکار دارند مفید است به‌عنوان مثال، در میان دانشجویان ترم اول یک دانشگاه، متغیرهایی مانند قد و سن پراکندگی چندانی ندارند و اطلاعات زیادی در مورد جامعه به ما نمی‌دهند.

برای درک بهتر واریانس، می‌توان دو دسته کارمند را در دو کشور مختلف مثال زد که دارای میانگین درآمدی یکسانی باشند. نمی‌توان نتیجه گرفت شرایط هردو گروه یکسان است. زیرا در کشوری که شاخص قیمت‌ها پایین‌تر است، کارکنان رفاه بیشتری دارند. حتی اگر شاخص قیمت‌ها یکسان باشد، باز هم جامعه‌ای که پراکندگی درآمد آن کمتر است از سلامت اقتصادی بیشتر و رفاه بالاتری برخوردار است. اینجاست که برای مقایسه داده‌ها از واریانس استفاده می‌شود.

حال اگر میانگین داده‌ها یکسان نباشد، دیگر واریانس هم برای مقایسه مفید نیست و باید از ضریب تغییرات استفاده کرد.

مثالی دیگر: سه استخر را در نظر بگیرید با میانگین عمق‌های یکسان و انحراف‌های صفر، ۵٪ و ۱/۵ از دانش‌آموزان بخواهید تعیین کنند کدام یک برای شنای یک فرد مبتدی با قد ۱/۶۰ مناسب‌تر است.

تمرین صفحه ۱۶۲

۱ درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. (با فرض آنکه همه داده‌ها و C مثبت باشند)

– اگر مقدار ثابت c از داده‌ها کم شود، انحراف معیار به اندازه \sqrt{c} کاهش می‌یابد.

– اگر مقدار ثابت c به داده‌ها اضافه شود، ضریب تغییر بزرگ‌تر می‌شود.

– اگر مقدار ثابت $\frac{1}{c}$ در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار $\frac{1}{c}$ برابر می‌شود.

– اگر مقدار ثابت c در داده‌ها ضرب شود، ضریب تغییر ثابت می‌ماند.

حل:

– نادرست. اگر مقدار ثابت c از داده‌ها کم شود، انحراف معیار تغییر نمی‌کند.

– نادرست. اگر مقدار ثابت c به داده‌ها اضافه شود، انحراف معیار تغییر نمی‌کند ولی به میانگین به

اندازه c اضافه می‌شود و در نتیجه ضریب تغییرات $cv = \frac{\delta}{\bar{X}}$ کوچک‌تر می‌شود، چون صورت کسر ثابت

و مخرجش بزرگ‌تر شده است.

– درست. با ضرب کردن هر مقدار ثابت مثبت در داده‌ها، انحراف معیار نیز در آن عدد ثابت ضرب می‌شود.

– درست. اگر مقدار ثابت c در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار و میانگین هر دو c برابر می‌شوند، پس ضریب تغییرات $cv = \frac{\delta}{\bar{X}}$ بدون تغییر می‌ماند.

۲ کارخانه‌ای دو نوع لاستیک تولید می‌کند میانگین طول عمر برای نوع A و B به ترتیب 11000 کیلومتر و 10000 کیلومتر و انحراف معیار برای نوع A و B به ترتیب 2000 کیلومتر و 1000 کیلومتر است. کدام نوع لاستیک بهتر است.
حل.

$$A \begin{cases} \bar{X}_A = 11000 \\ \delta_A = 2000 \end{cases} \text{ ضریب تغییرات نوع } A = \frac{\delta_A}{\bar{X}_A} = \frac{2000}{11000} \approx 0/182$$

$$B \begin{cases} \bar{X}_B = 10000 \\ \delta_B = 1000 \end{cases} \text{ ضریب تغییرات نوع } B = \frac{\delta_B}{\bar{X}_B} = \frac{1000}{10000} \approx 0/1$$

لاستیک نوع B ، که ضریب تغییرات کمتری دارد، بهتر است.

۳ جدول زیر پول توجیبی (ده هزار ریال) هفتگی پنج دوست نزدیک مینا و مریم را نشان می‌دهد.
الف) میانگین و میانۀ پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید.
ب) انحراف معیار پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید.
پ) برنامه‌ریزی برای یک سفر یک روزه با دوستان برای مینا ساده است یا مریم؟

مینا	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
مریم	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵

حل.
الف)

مینا	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	$\bar{X} = 25$	میانۀ = ۲۵
مریم	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	$\bar{Y} = 25$	میانۀ = ۲۵

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{X} = \frac{23+24+25+26+27}{5} = 25 \text{ میانگین پول توجیبی دوستان مینا} \\ \text{میانۀ : } 23, 24, 25, 26, 27 \rightarrow \text{ مرتب شده داده‌ها} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Y} = \frac{15+20+25+30+35}{5} = 25 \text{ میانگین پول توجیبی دوستان مریم} \\ \text{میانۀ : } 15, 20, 25, 30, 35 \rightarrow \text{ مرتب شده داده‌ها} \end{array} \right.$$

(ب)

دوستان مینا		
x_i	$x_i - \bar{X}$	$(x_i - \bar{X})^2$
۲۳	-۲	۴
۲۴	-۱	۱
۲۵	۰	۰
۲۶	۱	۱
۲۷	۲	۴
		مجموع = ۱۰

دوستان مریم		
y_i	$y_i - \bar{Y}$	$(y_i - \bar{Y})^2$
۱۵	-۱۰	۱۰۰
۲۰	-۵	۲۵
۲۵	۰	۰
۳۰	۵	۲۵
۳۵	۱۰	۱۰۰
		مجموع = ۲۵۰

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_5 - \bar{X})^2}{5}}$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2} = 1/41$$

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{(y_1 - \bar{Y})^2 + (y_2 - \bar{Y})^2 + \dots + (y_5 - \bar{Y})^2}{5}}$$

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{250}{5}} = \sqrt{50} = 7/1$$

(ب) ضریب تغییرات هر دو گروه را به دست می آوریم :

$$\text{ضریب تغییرات پول توجیبی دوستان مینا} = \frac{\delta_1}{\bar{X}} = \frac{1/41}{25} = 0/0564$$

$$\text{ضریب تغییرات پول توجیبی دوستان مریم} = \frac{\delta_2}{\bar{Y}} = \frac{7/1}{25} = 0/284$$

برنامه‌ریزی برای گروهی ساده‌تر است که ضریب تغییرات کمتری داشته باشد، پس برنامه‌ریزی سفر یک روزه برای دوستان مینا ساده‌تر است.

۴ میانگین، میانه و انحراف معیار نرخ تورم (مراجعه به خواندنی) سال‌های ۹۴ - ۸۴ را براساس جدول زیر محاسبه کنید.

سال	۱۳۸۴	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳	۱۳۹۴
نرخ تورم	۱۰/۴	۱۱/۹	۱۸/۴	۲۵/۴	۱۰/۸	۱۲/۴	۲۱/۵	۳۰/۵	۳۴/۷	۱۵/۶	۱۱/۹

$$\text{حل.} \quad \bar{X} = \frac{\text{مجموع داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}} = \frac{۲۰۳/۵}{۱۱} = ۱۸/۵$$

۳۴/۷ و ۳۰/۵ و ۲۵/۴ و ۲۱/۵ و ۱۸/۴ و ۱۵/۴ و ۱۲/۴ و ۱۱/۹ و ۱۱/۹ و ۱۰/۸ و ۱۰/۴ → مرتب‌شده داده‌ها
میانه = ۱۵/۴

x_i نرخ تورم	۱۰/۴	۱۱/۹	۱۸/۴	۲۵/۴	۱۰/۸	۱۲/۴	۲۱/۵	۳۰/۵	۳۴/۷	۱۵/۶	۱۱/۹	
$x_i - \bar{X}$	-۸/۱	-۶/۶	-۰/۱	۶/۹	-۷/۷	-۶/۱	۳	۱۲	۱۶/۲	-۲/۹	-۶/۶	
$(x_i - \bar{X})^2$	۶۵/۶۱	۴۳/۵۶	۰/۰۱	۴۷/۶۱	۵۹/۲۹	۳۷/۲۱	۹	۱۴۴	۲۶۲/۴۴	۸/۴۱	۴۳/۵۶	مجموع ۷۲۰/۷ =

$$\delta \text{ انحراف معیار} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_{11} - \bar{X})^2}{11}} = \sqrt{\frac{۷۲۰/۷}{11}} \approx ۸/۱$$

۵ در جدول زیر ارتفاع از سطح دریا برای بعضی از شهرهای استان مرکزی و کهگیلویه و بویراحمد دیده می‌شود (راهنمایی: $۱m = ۳/۲۸۱ft$ ، فوت: ft ، متر: m).

	مرکزی				کهگیلویه و بویراحمد			
	شهر	اراک	محلان	خمین	شازند	ياسوج	دهدشت	دنا
فاصله از سطح دریا		$۱۷۰۸(m)$	$۱۷۷۵(m)$	$۱۸۳۰(m)$	$۱۹۲۰(m)$	$۶۱۳۵/۴۷(ft)$	$۳۲۴۸/۱۹(ft)$	$۷۲۱۸/۲۰(ft)$

الف) میانگین ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟
ب) انحراف معیار ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟

ب) ارتفاع از سطح دریا برای شهرهای کدام استان بیشتر است؟
حل.

استان	مرکزی				کهگیلویه و بویراحمد			
	شهر	اراک	محلات	خمین	شازند	یاسوج	دهدشت	دنا
فاصله از سطح دریا	۱۷۰۸ (m)	۱۷۷۵ (m)	۱۸۳۰ (m)	۱۹۲۰ (m)	۶۱۳۵/۴۷ (ft)	۳۲۴۸/۱۹ (ft)	۷۲۱۸/۲۰ (ft)	
					۱۸۷۰ (m)	۹۹۰ (m)	۲۲۰۰ (m)	

ابتدا به عنوان مثال ارتفاع از سطح دریا برای شهر یاسوج را برحسب متر، به دست می‌آوریم:

$$\text{ارتفاع از سطح دریا برحسب متر} = \frac{۶۱۳۵/۴۷}{۳/۲۸۱} = ۱۸۷۰$$

$$\bar{X} = \frac{۱۷۰۸ + ۱۷۷۵ + ۱۸۳۰ + ۱۹۲۰}{۴} = ۱۸۰۸/۲۵ \quad \text{الف}$$

ب)

x_i ارتفاع از سطح دریا استان مرکزی	۱۷۰۸	۱۷۷۵	۱۸۳۰	۱۹۲۰	
$x_i - \bar{X}$	-۱۰۰/۲۵	-۳۳/۲۵	۲۱/۲۵	۱۱۱/۲۵	
$(x_i - \bar{X})^2$	۱۰۰۵۰/۶۲۵	۱۱۰۵/۶۲۵	۴۷۳/۶۲۵	۱۲۴۸۸/۶۲۵	مجموع ۲۴۱۱۶/۷۵ =

$$\delta = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + (x_3 - \bar{X})^2 + (x_4 - \bar{X})^2}{۴}}$$

$$= \sqrt{\frac{۲۴۱۱۶/۷۵}{۴}} = \sqrt{۶۰۲۹/۱۸۷۵} = ۷۷/۶۵$$

$$\bar{Y} = \frac{۱۸۷۰ + ۹۹۰ + ۲۲۰۰}{۳} = ۱۶۸۷ \quad \text{پ}$$

با توجه به میانگین بیشتر استان مرکزی، ارتفاع از سطح دریا برای شهرهای استان مرکزی بیشتر است.

نمونه سؤالات ارزشیابی فصل ۷

۱ دو تاس را هم زمان پرتاب می کنیم اگر بدانیم مجموع دو تاس کمتر از ۶ است. به چه احتمالی عدد هردو تاس مثل هم هستند؟

۲ اگر $P(A-B) = \frac{1}{4}$ و $P(A) = \frac{3}{4}$ ، مقدار $P(B|A)$ را محاسبه کنید.

۳ یک فضای نمونه ای متشکل از ۴ برآمد a, b, c, d است. اگر $P(\{b, c, d\}) = \frac{2}{3}$ و $P(\{b\}) = \frac{1}{4}$

مطلوب است: الف) $P(\{a, c, d\} | \{b, c, d\})$ ب) $P(\{a\} | \{a, c, d\})$

۴ یک تاس را دو بار پرتاب می کنیم پیشامدهای A و B را به صورت زیر در نظر می گیریم:

پیشامد A : مجموع شماره های ظاهر شده در دو پرتاب ۸ باشد.

پیشامد B : شماره های ظاهر شده در دو پرتاب مساوی باشد.

الف) $P(A)$ و $P(B)$ را به دست آورید.

ب) آیا پیشامدهای A و B مستقل هستند؟

ب) اگر پیشامد A اتفاق بیفتد، احتمال اینکه پیشامد B اتفاق بیفتد، چه قدر است؟

۵ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشد به طوری که $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ و

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

الف) آیا دو پیشامد A و B مستقل هستند؟ ب) $P(A|B)$ را به دست آورید.

۶ احتمال آنکه در ده سال آینده اعتراضات مردمی در کشور A به سقوط دولت بینجامد $\frac{1}{7}$ و احتمال

آنکه اعتراضات مردمی در کشور B باعث سقوط دولت شود $\frac{1}{4}$ است. چه قدر احتمال دارد:

الف) تا دو سال آینده، دولت در هردو کشور سقوط کند.

ب) حداقل یکی از دولت ها ظرف ده سال آینده سقوط کند.

۷ A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S می باشند و $P(A) = \frac{1}{25}$ و $P(B) = \alpha$ و $P(A \cup B) = \frac{1}{7}$

اگر A و B مستقل باشد، α چه قدر است؟

۸ اگر تمام داده های x_1 و x_2 و \dots و x_n را در ۵ ضرب کنیم در مورد تغییرات موارد زیر بحث کنید.

الف) میانگین ب) واریانس پ) ضریب تغییرات

۹ جاهای خالی را پر کنید.

الف) مهم ترین شاخص مرکزی است.

(ب) دامنه تغییرات با از داده‌ها سروکار دارد.

(پ) برای ازمین بردن واحد اندازه‌گیری از شاخص استفاده می‌کنیم.

۱۰ اگر دامنه تغییرات داده‌های x_1 و x_2 و x_3 و x_4 و x_5 برابر صفر باشد. میانه داده‌های زیر را به دست آورید.

$$2x_1 - 1 \text{ و } 3x_2 - 3 \text{ و } x_3 - 2 \text{ و } x_4 + 1$$

۱۱ اگر ده داده آماری را دو برابر کنیم و ۵ واحد به هر کدام از آنها اضافه کنیم ضریب تغییرات داده‌های

جدید $1/5$ برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است مجموع داده‌های قبلی را به دست آورید.

۱۲ ۱۳ داده آماری با واریانس ۱۰ و ۱۲ داده آماری با واریانس ۶ را با هم ترکیب می‌کنیم. اگر میانگین

هر دو گروه یکسان باشد، انحراف معیار ۲۵ داده حاصل را به دست آورید.

۱۳ اگر ۲ درصد قیمت هر محصول به عنوان مالیات بر ارزش افزوده به محصولات یک کارخانه اضافه

شود. میانگین و ضریب تغییرات قیمت محصولات چه تغییری می‌کند.

۱۴ در داده‌های زیر چارک اول و سوم را تعیین کنید.

$$152, 155, 152, 150, 156, 155, 157, 140, 156, 157, 160$$

نمرات درس ریاضی سارا به صورت ۱۸ و ۱۷ و ۱۷ و ۱۴ و ۱۴ و ۱۷ و ۱۶ است.

الف) میانه و میانگین این داده‌ها را به دست آورید.

(ب) کدام یک از شاخص‌ها برای بررسی نمرات سارا بهتر است؟ چرا؟

(پ) برای اینکه معدل او $16/5$ باشد به جای نمره ۶ چه نمره‌ای باید بگیرد؟

۱۵ میانگین ۸ داده آماری برابر ۶ محاسبه شده است پس از بررسی مجدد معلوم شد که دو مقدار ۱۱ و

۱۲ باید به داده‌ها اضافه شود. میانگین جدید چقدر است؟

۱۶ در داده‌های زیر اگر داده‌های بیشتر از چارک سوم را حذف کنیم، میانگین داده‌های جدید را به دست آورید.

$$15 \text{ و } 12 \text{ و } 34 \text{ و } 41 \text{ و } 43 \text{ و } 32 \text{ و } 18 \text{ و } 25 \text{ و } 31 \text{ و } 19$$

۱۷ امتیازات مهارت کاری دو نفر از پرسنل یک آزمایشگاه در ۵ روز کاری به صورت زیر است. دقت

عمل کدام یک بیشتر است؟

$$A : 20 \text{ و } 23 \text{ و } 24 \text{ و } 26 \text{ و } 27$$

$$B : 21 \text{ و } 22 \text{ و } 23 \text{ و } 26 \text{ و } 28$$

۱۸ نمرات ریاضی ۲۰ دانش‌آموز به صورت زیر است:

$$9 \text{ و } 9 \text{ و } 18 \text{ و } 17 \text{ و } 17 \text{ و } 16 \text{ و } 16 \text{ و } 15 \text{ و } 15 \text{ و } 14 \text{ و } 13 \text{ و } 12 \text{ و } 12 \text{ و } 10 \text{ و } 9 \text{ و } 8 \text{ و } 8 \text{ و } 5$$

الف) میانگین، میانه و واریانس این داده‌ها را به دست آورید.

(ب) اگر معلم به خاطر کار کلاسی دانش‌آموزان یک نمره به تمام دانش‌آموزان اضافه کند، با استفاده از

مقادیری که در سؤال ۲۸ به دست آورده‌اید، ضریب تغییرات نمرات جدید را به دست آورید.

۱۹ میانگین و انحراف معیار امتیازات فنی پروازهای یک خلبان ۳۰ ساله $3/5$ و میانگین و انحراف

معیار یک خلبان ۴۰ ساله ۲۵ و ۴ است. دقت عمل کدام یک بیشتر است؟

