

فصل ۱

آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

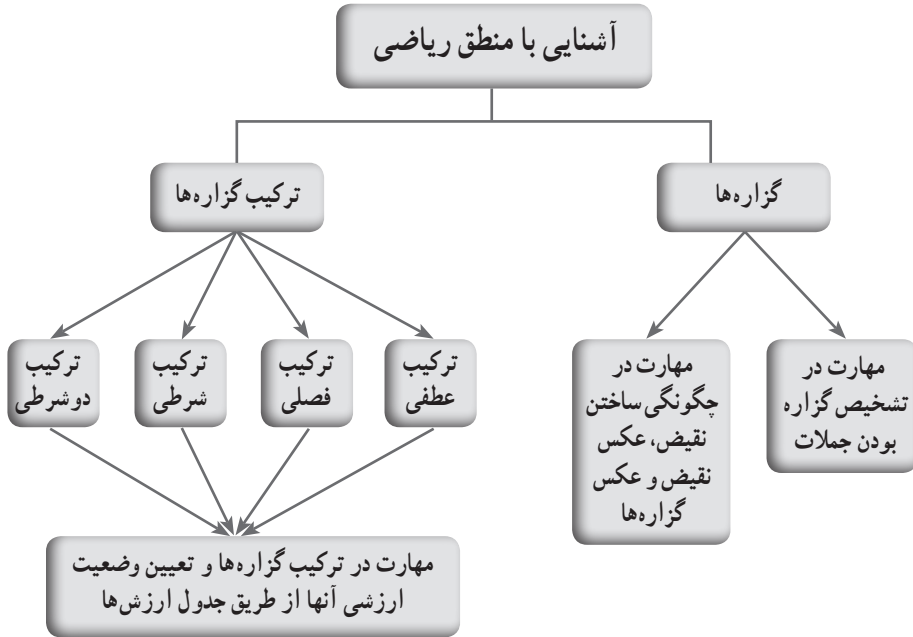
نگاه کلی به فصل

دانش‌آموزان در این فصل با مبانی منطق ریاضی و کاربرد آن در برخی زمینه‌های مختلف آشنا می‌شوند. پیدایش بسیاری از نظریه‌های علم ریاضی، نتیجه استدلال است و ما برای مطالعه شاخه‌های مختلف ریاضیات، به استدلال نیاز داریم؛ بنابراین، لازم است تعاریف، اصطلاحات و علامت‌هایی را که به کمک آنها مفاهیم ریاضی را از طریق استدلال بیان می‌کنیم، بشناسیم به این منظور به علم منطق رجوع می‌کنیم. مطالب این فصل شامل دو درس است. درس اول به مفهوم گزاره از دید علم ریاضی، یا به طور دقیق‌تر، منطق ریاضی می‌پردازد و وجوه تمایز آن با آنچه در محاوره از مفهوم گزاره به ذهن متبادر می‌شود را بیان می‌کند. در ادامه، انواع گزاره‌های موجود در منطق ریاضی مطرح می‌شود. در این بخش فقط به ساده‌ترین انواع گزاره‌ها پرداخته شده است. در ضمن انواع و ارزش هر یک از گزاره‌ها، از طریق جدول ارزش گزاره‌ها، بررسی شده است. در درس دوم (استدلال ریاضی) ضمن برقراری ارتباط با مباحث درس منطق که دانش‌آموزان رشته علوم انسانی و معارف اسلامی می‌گذرانند، از دیدگاه ریاضیاتی به همان مطالب پرداخته می‌شود؛ بنابراین، با مثال‌های ساده و مبتنی بر دانش قبلی این دانش‌آموزان، از زاویه دید استدلالی، موضوعات آشنای ریاضی بررسی می‌شود. دیران و دانش‌آموزان از این رهگذر با بدفهمی‌های رایج در ریاضی آشنا می‌شوند و آنها را برطرف می‌کنند.

هر درس شامل مثال‌هایی است تا دانش‌آموزان با الگو گرفتن از آنها به «فعالیت» و «کار در کلاس» بپردازند و به درک بهتری از موضوع درس برسند.

در پایان هر درس نیز تمرینات مختلفی، منطبق بر «فعالیت» و «کار در کلاس»، ارائه شده است تا دانش‌آموزان با حل آنها میزان تسلط خود بر مطالب را ارزیابی کنند.

نقشه مفهومی فصل اول



دانستنی‌های معلم

تاریخچه پیدایش منطق جدید

تاریخ منطق سنتی و نظام‌مند کردن آن توسط ارسطو (۳۲۳-۳۸۴ ق.م) و بارور شدن آن به دست مسلمانان برای کمتر کسی مبهم است. گرچه لایب‌نیس (۱۷۱۶-۱۶۴۶ میلادی) فیلسوف و ریاضی‌دان بزرگ آلمانی را پدر منطق جدید خوانده‌اند، زیرا او برای اولین بار در کتاب «حساب عمومی» از نهادهای شبه ریاضی برای بیان برخی مطالب منطقی بهره جست، اما مؤسس واقعی منطق جدید، گوتلوب فرگه (۱۸۳۸-۱۹۲۵ میلادی) فیلسوف و ریاضی‌دان آلمانی است. او نخستین نظام کامل اصل موضوعی را، که یکی از روش‌های عمده برای آموزش در منطق جدید است، بنیان نهاد. او با نوشتن کتاب «مفهوم‌نگاری» به گسترش هر چه بیشتر این دانش کمک کرد. تحقیقات فرگه به وسیله ژوزف پتانو (۱۸۵۸-۱۹۳۲ میلادی) ریاضی‌دان ایتالیایی و دو تن از فلاسفه و ریاضی‌دانان بزرگ انگلیسی به نام‌های برتراند راسل (۱۸۷۰-۱۸۷۲ میلادی) و آلفرد نورث وایتهد (۱۸۷۱-۱۹۳۷ میلادی) ادامه یافت. این دو کتابی به نام «اصول ریاضی» نگاشتند که بیش از پیش به رونق و

باروری منطق جدید کمک کرد.

«منطق جدید» را «منطق ریاضی» و «منطق نمادین (سمبلیک)» نیز می‌گویند.

مثلاً در ریاضیات داریم:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab - b^2$$

در رابطه فوق به ازای هر مقدار a و b همواره تساوی برقرار است و آن را به عنوان «اتحاد» می‌شناسیم. در منطق جدید هم قضایایی از قبیل قانون‌های دمورگان هست که به صورت زیر ارائه می‌شوند.

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

درستی این معادله‌های منطقی به مفاد و مضمون گزاره‌های p و q بستگی ندارد، بلکه صرفاً ناشی از صورت منطقی ترکیب آنها با یکدیگر است. به درستی‌هایی از این دست، «درستی منطقی» و یا «درستی صوری» (درستی از روی صورت) می‌گویند.

انگیزه و اهداف در منطق ریاضی

تحقیقات علمی درباره منطق ریاضی، در پی بروز پرسش‌های نوین در بنیان‌های ریاضیات پدید آمد؛ مثلاً فرگه می‌کوشید تا ریاضیات را بر پایه اصول برآمده از منطق و نظریه مجموعه‌ها قرار دهد. راسل کوشید تناقضات ناشی از دستگاه منطق فرگه را حذف کند و هدف هیلبرت نشان دادن این امر بود که «روش‌های مورد قبول عام در ریاضیات، هرگاه به طور همه‌جانبه، کلی‌نگرانه و به عنوان یک کل واحد در نظر گرفته شوند، به هیچ نوع تناقضی منجر نخواهد شد» (این موضوع به برنامه هیلبرت شهرت یافته است).

کاربردهای ریاضی

در منطق ریاضی، نه تنها از روش‌ها و نتایج به دست آمده در حل مسائل بنیانی استفاده می‌شود، بلکه در بسیاری شاخه‌های دیگر ریاضیات، نظیر جبر و توپولوژی، هم از آنها بهره‌برداری می‌شود.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ جاهای خالی را کامل کنید :

- (الف) ارزش گزاره $p \vee \sim p$ ، همواره است.
 (ب) اگر ارزش گزاره $q \Rightarrow p$ نادرست و p درست باشد، ارزش q است.
 (ج) اگر ارزش گزاره $q \Leftrightarrow p$ درست و $\sim q$ نیز درست باشد، ارزش p است.
 (د) عکس نقیض گزاره $q \Rightarrow \sim p$ ، گزاره است.
 (ه) هم‌ارزی $\sim p \vee q \equiv \sim(p \wedge q)$ به قانون معروف است.
 (و) در حالت کلی، n گزاره نسبت به یکدیگر دارای حالت ارزشی هستند.
 (ز) نقیض نقیض هر گزاره، هم‌ارز با است.

۲ کدام یک از جملات زیر گزاره هستند؟

- (الف) $-1 < -3$
 (ب) چه منظره زیبایی!
 (ج) چرا ریاضیات می‌خوانید؟
 (د) ۱۹ عددی فرد است.
 (ه) a^n عددی مثبت است.
 (و) لطفاً پرسشنامه را کامل کنید!
 (ز) معلم ریاضی مدرسه ما خوش اخلاق است.
 (ح) عدد ۲ گویا نیست.

۳ نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید :

- (الف) $\sqrt{2}$ عددی مثبت است.
 (ب) عدد ۸ بر ۴ بخش پذیر است.
 (ج) توکیو پایتخت ترکیه است.
 (د) عدد ۲ فرد است.
 (ه) $5 > 3$
 (و) $\sqrt{4+9} = 2+3$
 (ز) اگر a زوج باشد، آن‌گاه $a+1$ فرد خواهد بود.
 (ح) عدد ۱۵ فرد و بر ۳ بخش پذیر است.
 (ط) ۱۱ عددی اول است یا ۲ عددی منفی است.
 (ی) اگر چهارضلعی مستطیل باشد، آن‌گاه دو قطرش مساوی‌اند.

۴ عکس، نقیض و عکس نقیض گزاره‌های شرطی زیر را بنویسید :

- (الف) اگر دو عدد حقیقی با هم برابر باشند، آن‌گاه مجذور آن دو عدد مساوی هستند.
 (ب) اگر چهارضلعی $ABCD$ لوزی باشد، آن‌گاه اقطار آن بر هم عمودند.

۵ جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	کشور ایران در قاره آسیا قرار دارد و	✓	
۲	۳۱ عددی اول نیست یا		✓
۳	شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، آن است که روی نیمساز زاویه باشد.		
۴	اگر آن‌گاه $(a+b)^2 = a^2 + b^2$	✓	
۵	اگر، آن‌گاه و برعکس	✓	
۶ و	✓	
۷ یا		✓

۶ ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید :

(الف) مسکو پایتخت روسیه و تهران پایتخت ایران است.

(ب) $4^2 = 4^2$ و $3 - x = x - 3$

(ج) $1 > 2$ یا $4 < 1$

(د) ۲۱ عددی اول یا فرد است.

(ه) $\frac{2}{3} \neq 0$ یا $2^2 + 2^3 = 2^5$

(و) اگر عددی بر ۴ بخش پذیر باشد، آنگاه بر ۲ نیز بخش پذیر است.

(ز) اگر $a < 0$ ، آن‌گاه $|a| = -a$

(ح) ۶ عددی اول است، آن‌گاه $2^3 = 6$

(ط) $3 < 2$ اگر و تنها اگر $3 < -2$

(ی) $7 < 15$ اگر و تنها اگر $7 < 2 - 15$

(خ) اگر مثلث، قائم‌الزاویه باشد، آنگاه مربع یکی از ضلع‌ها، برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر است و برعکس.

۷ هرگاه $p \wedge q \sim p$ گزاره‌ای درست و r یک گزاره دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های زیر را در صورت امکان

مشخص کنید :

(ج) $(r \Rightarrow \sim p) \Rightarrow \sim q$

(ب) $(q \vee r) \wedge \sim p$

(الف) $p \vee (q \Rightarrow r)$

(هـ) $\sim(\sim p \wedge q) \wedge r$

(د) $(p \Leftrightarrow q) \vee r$

۸ اگر p یک گزاره درست و q و r گزاره‌های دلخواه باشند، بررسی کنید کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است.

الف) $\sim p \wedge q \Rightarrow r$ ب) $\sim p \vee q \Rightarrow r$

ج) $p \wedge q \Rightarrow r$ د) $p \vee q \Rightarrow r$

۹ اگر ارزش گزاره $p \Rightarrow (p \wedge q)$ درست باشد، ارزش گزاره $p \wedge \sim q$ چیست؟

۱۰ اگر ارزش گزاره $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$ نادرست باشد، ارزش گزاره $(p \vee q) \Rightarrow p$ چیست؟

۱۱ اگر p درست و q نادرست باشند، ارزش گزاره $(\sim q \Rightarrow p) \vee \sim p$ چیست؟

۱۲ ارزش گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$ را در حالت‌های زیر مشخص کنید:

الف) p نادرست و q درست ب) p نادرست و q نادرست

۱۳ گزاره‌های زیر در چه حالتی نادرست هستند؟

الف) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ب) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow \sim q$

۱۴ اگر گزاره مرکب S متشکل از گزاره‌های ساده p و q ، جدول ارزش زیر را داشته باشند، گزاره مرکب S را در هر حالت بیابید.

ب)

p	q	s
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

الف)

p	q	s
د	د	ن
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	ن

۱۵ جدول ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $\sim [\sim p \wedge (p \vee q)]$ ب) $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$

۱۶ با استفاده از جدول ارزش‌ها درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را نشان دهید:

الف) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q \equiv T$ ب) $p \wedge \sim [q \vee (p \wedge \sim q)] \equiv F$

ج) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$ د) $p \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)$

۱۷ با استفاده از جدول ارزش‌ها بررسی کنید ارزش کدام‌یک از گزاره‌های زیر همواره درست و کدام‌یک همواره نادرست است.

ب) $p \wedge \sim (p \vee q)$

الف) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

ج) $(p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q)$

گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

درس اول

اهداف درس اول

- ۱ آشنایی با مفهوم منطق ریاضی و کاربرد آن
- ۲ آشنایی با مفهوم گزاره‌ها و تعیین ارزش آنها
- ۳ مهارت چگونگی ساختن نفیض، عکس نفیض و عکس گزاره‌ها
- ۴ آشنایی با ترکیب گزاره‌ها و جدول ارزش‌ها
- ۵ مهارت در بررسی درستی گزاره‌های هم‌ارز با استفاده از جدول ارزش‌ها
- ۶ تشخیص استدلال‌های معتبر از استدلال‌های نامعتبر

روش تدریس

دانش‌آموزان در سال دهم، درسی به نام منطق را گذرانده‌اند و با مبحث منطق و تا حدی با گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها آشنایی دارند. در ابتدای درس، برای یادآوری، علم منطق و همچنین کاربرد آن، به اختصار، بیان شده سپس تعریف گزاره و چند مثال ذکر شده است.

فعالیت صفحه ۲ کتاب، برای مهارت در تشخیص گزاره بودن جملات است تا دانش‌آموزان بدانند شرط درستی یا نادرستی گزاره این است که جمله خبری معنادار باشد. قسمت الف سؤال ۱، جمله پرسشی است، پس گزاره نیست. قسمت ب، گزاره است و ارزش آن درست است. قسمت پ، گزاره است و ارزش آن نادرست است. قسمت ت گزاره و ارزش آن نادرست است. قسمت ث، گزاره و ارزش آن نادرست است. در جمله قسمت ج کلمه «همواره» آمده پس گزاره است و ارزش آن نادرست. قسمت چ، گزاره نیست؛ چون کلمه «خوشمزه» دارای مفهومی نسبی است. قسمت ح، جمله امری است، پس گزاره نیست.

بعد از تشخیص گزاره بودن جملات، در سؤال ۲ از دانش‌آموزان خواسته شده تا با درک و خلاقیت خودشان دو گزاره درست و دو گزاره نادرست و همچنین دو جمله که گزاره نباشند را مثال بزنند.

دو گزاره درست مانند :

۱ $\sqrt{2}$ عددی مثبت است.

۲ رودسر شهری در استان گیلان است.

دو گزاره نادرست مانند :

۱ $-2 < -1$

۲ عددی ۲۵ مربع کامل نیست.

دو جمله که گزاره نباشند مانند :

۱ کتاب را بردار!

۲ فرید دانش آموز خوبی است.

سپس تعیین ارزش دو یا چند گزاره مطرح شده است. در حالت کلی، n گزاره نسبت به یکدیگر دارای 2^n حالت ارزشی هستند.

در کتاب، جدول ارزش‌ها برای یک، دو و سه گزاره نشان داده شده است.

اگر p یک گزاره باشد، نقیض آن گزاره‌ای است منحصر به فرد که با $(\sim p)$ نمایش داده می‌شود. «کاردر کلاس» صفحه ۴ کتاب برای مهارت یافتن دانش‌آموزان در تشخیص نقیض گزاره‌ها و ارزش آنها است. حل برگزیده‌ای از «کار در کلاس» صفحه ۴ کتاب :

الف) چنین نیست که عدد ۵ زوج باشد. یا عدد ۵ فرد است (ارزش گزاره درست است).

ب) تساوی « $4=2 \times 2$ » برقرار نیست. (ارزش گزاره نادرست است).

ج) $(3 \times 7) \neq (5 \times 4)$ یا $(3 \times 7) \leq (5 \times 4)$. (ارزش گزاره درست است).

در مبحث ترکیب گزاره‌ها، به ترتیب ترکیب عطفی، ترکیب فصلی، ترکیب شرطی و ترکیب دوشروطی و نمادهای آنها معرفی شده و جدول ارزش‌های هر یک نشان داده شده است.

در تبیین ارزش‌دهی به گزاره‌های مرکب، غالباً دو رویکرد وجود دارد :

۱ ایجاد شهود نسبت به ارزش گزاره‌های ترکیبی و سپس معرفی جدول ارزش‌ها؛

۲ معرفی جدول ارزش‌ها و سپس شهودی کردن ارزش‌گذاری گزاره‌های مرکب.

بعد از معرفی هر یک از ترکیب‌های مذکور، فعالیتی برای درک بهتر دانش‌آموزان از مفهوم درس بیان شده است. در ردیفی از جدول فعالیت‌ها گزاره مرکبی داده شده و تشخیص ارزش درستی یا نادرستی آن خواسته شده است. در ردیف‌های دیگر، از دانش‌آموز خواسته شده است گزاره مرکب را طوری کامل کند که ارزش آن با ارزشی که در جدول برای آن تعیین شده است، مطابقت داشته باشد.

برای حل فعالیت صفحه ۵ کتاب، دانش‌آموزان آموخته‌اند اگر در بین دو گزاره، رابط «و» باشد، آن ترکیب، عطفی است و ارزش آن زمانی درست است که هر دو گزاره ارزش درست داشته باشند؛

مثلاً ردیف ۳ جدول، ارزش گزاره مرکب، نادرست در نظر گرفته شده است، پس حداقل ارزش یکی از گزاره‌ها باید نادرست باشد. چون ارزش گزاره دوم (۸ زوج است) درست است، پس برای گزاره اول باید گزاره‌ای را مثال بزنند که دارای ارزش نادرست است؛ مثل: $\sqrt{2}$ عددی گویا است.

برای حل فعالیت صفحه ۶ کتاب، دانش‌آموزان آموخته‌اند که اگر رابط بین دو گزاره، «یا» باشد، ترکیب فصلی است و ارزش آن زمانی درست است که حداقل ارزش یکی از گزاره‌ها درست باشد؛ مثلاً در ردیف ۴ جدول، ارزش گزاره مرکب، نادرست در نظر گرفته شده است. از طرفی ارزش گزاره دوم «افلاطون نویسنده کتاب ارغنون است» نادرست است، پس برای گزاره اول مثالی می‌نویسند که ارزش آن هم نادرست باشد؛ مثل: افلاطون شاگرد ارسطو است.

در فعالیت صفحه ۷ کتاب، دانش‌آموزان می‌دانند که در صورتی که رابط گزاره‌ای «اگر» باشد، ترکیب شرطی است و فقط زمانی ارزش آن نادرست است که ارزش مقدم درست و ارزش تالی نادرست باشند؛ مثلاً در ردیف ۷ جدول، ارزش گزاره مرکب، درست تعیین شده است. از طرفی ارزش تالی «۹۹ اول است» نادرست است؛ بنابراین، دانش‌آموز گزاره‌ای می‌نویسد که ارزش آن نادرست باشد و به این ترتیب، گزاره شرطی حاصل، به انتفای مقدم، دارای ارزش درست می‌شود؛ مثل: $3^2=6$

هدف از «کار در کلاس» صفحه ۷ کتاب، مهارت یافتن دانش‌آموزان در تعیین ارزش گزاره‌های مرکب است؛ مثلاً:

$$۳) (p \Rightarrow q) \wedge r \rightarrow (T \Rightarrow F) \wedge r \rightarrow F \wedge r \equiv F$$

$$۶) (p \Rightarrow q) \Rightarrow r \rightarrow (T \Rightarrow F) \Rightarrow r \rightarrow F \Rightarrow r \equiv T$$

ارزش این گزاره مرکب، به انتفای مقدم، همواره درست است.

در فعالیت صفحه ۸ کتاب، دانش‌آموز ترکیب دوشروطی و نماد و اصطلاحات آن را می‌شناسد و می‌داند ارزش گزاره دوشروطی، زمانی درست است که هر دو گزاره هم‌ارزش باشند؛ مثلاً در ردیف ۴ جدول، ارزش گزاره مرکب، نادرست تعیین شده است. پس دانش‌آموز باید دقت کند که برای هر کدام از گزاره‌های شرطی $q \Rightarrow p$ و $p \Rightarrow q$ مثالی بنویسد که هم‌ارزش نباشند؛ مثل:

اگر $x > 0$ ، آنگاه $x^2 > 0$ و برعکس.

در اینجا گزاره « $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$ » دارای ارزش درست است،

ولی عکس آن « $x^2 > 0 \Rightarrow x > 0$ » دارای ارزش نادرست است.

از «کار در کلاس» صفحه ۹ کتاب، چند سؤال را برای نمونه، پاسخ می‌دهیم.

ارزش گزاره مرکب نادرست است.
$$۱) (p \overset{د}{\longleftarrow} \underset{ن}{\longrightarrow} q) \wedge r \rightarrow$$

$$۳) (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \rightarrow \text{ارزش گزاره مرکب درست است.}$$

$$۵) (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q) \rightarrow \text{ارزش گزاره مرکب نادرست است.}$$

$$۷) (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow \text{ارزش گزاره مرکب نادرست است.}$$

مثال صفحه ۹ کتاب، بررسی درستی هم‌ارزی‌ها، با کمک جدول ارزش‌ها، خواسته شده است. در این مثال ابتدا دانش‌آموزان با کامل کردن جاهای خالی در جدول ارزش‌ها، با نحوه بررسی درستی هم‌ارزی گزاره‌ها آشنا می‌شوند؛ سپس با الگو گرفتن از آن، به تمرین ۳ صفحه ۱۱ کتاب پاسخ خواهند داد.

توصیه آموزشی

به همکاران محترم توصیه می‌شود:

- به کتاب درسی منطق سال دهم، نظری داشته باشند تا با آنچه دانش‌آموزان به عنوان پیش‌نیاز یاد گرفته‌اند، آشنا شوند.
- در تدریس مبحث گزاره‌ها، از حیطة مطالب کتاب خارج نشوند. همچنین سطح سؤال‌ها در یک کلاس معمولی، از آنچه در تمرینات کتاب مطرح شده است، فراتر نرود.
- در بررسی درستی گزاره‌های معادل (هم‌ارز)، فقط از جدول ارزش‌ها استفاده شود.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان

ممکن است برخی دانش‌آموزان در ابتدا برای بررسی درستی گزاره‌های هم‌ارز، در یک جدول دچار اشتباه شوند. می‌توانند برای گزاره‌های مرکب در دو طرف رابطه هم‌ارزی، جدول ارزش‌ها را به طور جداگانه تشکیل داده و سپس ستون آخر دو جدول را با یکدیگر مقایسه کنند.

نمونه: مثال ۱ قسمت الف در صفحه ۹ کتاب:

$$p \Rightarrow q \equiv (\sim p \vee q)$$

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

p	q	$\sim p$	$(\sim p \vee q)$
د	د	ن	د
د	ن	ن	ن
ن	د	د	د
ن	ن	د	د

حل تمرینات برگزیده درس اول (صفحه ۱۰ کتاب)

۱ جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	بزرگ‌ترین معجزه پیامبر اسلام <small>ﷺ</small> قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است.	✓	
۲	اگر ۲ عدد فرد باشد، آن‌گاه مربع هر عدد فرد عددی زوج است.	✓	
۳	اگر تهران پایتخت ایران است؛ آن‌گاه تهران در قاره آسیا نیست.		✓
۴	$4 \times 2 = 2^2 \Rightarrow 8^2 > 4^2$	✓	
۵	اگر عدد ۳ اول و عدد ۷ زوج باشد، آن‌گاه ۱۸ مربع کامل است.	✓	
۶	اگر ۲ عددی زوج یا منفی باشد، آن‌گاه عدد ۵ اول است.	✓	
۷	اگر فارابی معلم نانی است، آن‌گاه افلاطون معلم اول است.	✓	
۸	امام خمینی <small>رحمته</small> در سال ۱۳۴۳ تبعید شدند و در سال ۱۳۵۷ به ایران بازگشتند.	✓	
۹	حضرت علی <small>علیه السلام</small> اولین مردی است که به پیامبر اسلام، ایمان آوردند و همسر حضرت فاطمه <small>علیها السلام</small> بودند.	✓	
۱۰	اگر $4^2 = 3^2 + 1^2$ آنگاه $3^2 - 1^2 = 4^2$ و برعکس	✓	

ث) $(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

p	q	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$	$(p \vee q)$	$(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$
د	د	ن	د	د	د
د	ن	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

ج) $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

p	q	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$	$(p \Rightarrow q)$	$(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

استدلال ریاضی

درس دوم

اهداف درس دوم

هدف کلی این درس، آشنایی دانش‌آموزان با گوشه‌ای از استدلال ریاضی و اهمیت آن است. اهداف جزئی این درس به قرار زیر است:

- ۱ تبدیل عبارات کلامی به عبارات ریاضی (بدون حل مسئله ریاضی به دست آمده)؛
- ۲ استفاده از منطق گزاره‌ها برای بررسی صحت استدلال‌های ریاضی که در درس اول با آنها آشنا شدند.
- ۳ اثبات یک گزاره ریاضی جزء اهداف این درس نیست و مثال‌های ذکر شده فقط برای آشنایی دانش‌آموزان با نحوه استدلال ریاضی است.

روش تدریس

در ابتدای درس، با ارائه مثال‌هایی، به دانش‌آموز این انگیزه داده می‌شود که استفاده از ریاضی برای استدلال، به وضوح گزاره‌ها و عبارات و تشخیص درستی یا نادرستی استدلال‌ها کمک می‌کند. این مثال‌ها با یک مسئله که در فصل اول کتاب ریاضی و آمار ۱ آمده است، (به صورت نیمه حل شده) شروع می‌شود. لازم است که دبیران محترم با یادآوری آن سؤال، از آشنایی دانش‌آموزان با برخی مفاهیم مقدماتی (مانند اعمال روی عبارات جبری) اطمینان حاصل کنند (ارزشیابی تشخیصی). ادامه درس، اهمیت استدلال ریاضی مبتنی بر منطق گزاره‌ها و استفاده از ریاضی در استدلال را آشکار می‌کند.

در ابتدای درس، با ذکر ۳ مثال حل شده، اهمیت استفاده از ریاضی در خلاصه‌سازی عبارات کلامی و واضح‌سازی معنایی که در یک عبارت نهفته است نشان داده می‌شود.

در «کار در کلاس» صفحه ۱۳ از دانش‌آموزان خواسته شده که مشابه مثال‌های قبل، عبارات کلامی داده شده را به یک عبارت ریاضی برگردانند. لزوم کسب این مهارت برای دانش‌آموزان رشته‌های علوم انسانی و

معارف اسلامی در آن است که این سنخ تبدیلات یا مشابه آنها در فلسفه‌های متأخر (از جمله فلسفه تحلیلی) بسیار شایع است. از سوی دیگر در فرایند تبدیل عبارات کلامی به عبارات ریاضی، دانش‌آموزان قدرت ذهنی انتزاعی‌سازی مفاهیم را که در بسیاری از حوزه‌های علوم انسانی (مانند فلسفه، منطق و حقوق) کاربرد دارد و از شالوده‌های اصل نظریه‌پردازی در این حوزه‌هاست، فرا می‌گیرند.

در ادامه در صفحه ۱۴ به یک نوع از انواع قیاس‌ها، که دانش‌آموزان رشته علوم انسانی در درس منطق خود فرا می‌گیرند، پرداخته شده است. این نوع قیاس در استدلال‌های ریاضی بسیار پرکاربرد است. در این درس مثالی از کاربرد ناصحیح این قیاس آورده شده، تا بدفهمی‌های رایج از ساختار این قیاس رفع شود. دبیر محترم می‌تواند مشابه این نوع مثال‌ها را در کتاب منطق بیابد.

در «کار در کلاس» صفحه ۱۵ از دانش‌آموز خواسته می‌شود که قیاس استثنایی فراگرفته را در یک استدلال ریاضی اجرا کند.

پاسخ «کار در کلاس» صفحه ۵۱ (بالای صفحه)

۱

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

۲

دو خط هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند:

$$p \Rightarrow q \text{ دو خط موازی باشند} : p$$

$$p: x > 0 \Rightarrow q: x^2 > 0$$

$$\frac{p: 36^\circ}{\therefore 96^\circ} \quad \frac{p: \text{خطوط } L_1 \text{ و } L_2 \text{ موازی هستند}}{\therefore \text{خطوط } L_1 \text{ و } L_2 \text{ هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند}}$$

در ادامه درس، مثالی از یک معمای کلامی آورده شده که با استفاده از یک استدلال ریاضی ساده به جواب آن پی می‌بریم. این مثال و همین‌طور تعمیم آن که در کار در کلاس بعدی آمده است، فقط به منظور

آشنایی دانش‌آموزان با نحوه ورود مفاهیم ریاضی در استدلال‌هایی است که ظاهراً ربطی به ریاضی ندارند. کاربرد دیگر این مثال، تبیین این موضوع است که چگونه خواسته مسئله وقتی به زبان ریاضی درمی‌آید واضح‌تر می‌شود. به هر حال تأکید می‌شود که مشابه این گونه سؤالات در ارزشیابی استفاده نشود.

پاسخ «کار در کلاس» صفحه ۱۵ (پایین صفحه)

۱ این حالت به «حالت بدیهی» معروف است. کافی است دو لیوان کناری (A, C) را با یک حرکت به سمت بالا تغییر جهت داد تا همه لیوان‌ها به سمت بالا باشند. راه دیگر این است که ابتدا یکی از لیوان‌های کناری (A) یا (C) را همراه با لیوان B تغییر دهند که در این صورت لیوان کناری درست شده و لیوان وسطی (B) نادرست می‌شود (حرکت اول). اکنون دو لیوان نادرست داریم که با یک حرکت می‌توان آنها را نیز درست کرد (حرکت دوم).

۲ مطابق همان استدلال گفته شده در مثال حل شده بالای این کار در کلاس، هرگز نمی‌توان تعداد فردی لیوان وارونه را اصلاح کرد چرا که همواره S به اندازه یک عدد زوج تغییر می‌کند.

در صفحه ۱۶ ابتدا یک اثبات ریاضی آمده است که برای آشنایی با ترتیب و توالی به کارگیری منطق گزاره‌هاست. این نوع اثبات‌ها برای ارزشیابی مدنظر نیستند.

در ادامه این صفحه به چند مثال از استدلال‌های ریاضی غلط پرداخته شده. در این بخش از درس، فرصتی فراهم شده تا برخی اشکالات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان، که اغلب در برگه‌های امتحانی آنها وجود دارد، پرداخته شود. به دبیران محترم توصیه می‌شود که متناسب با سطح آموزشی دانش‌آموزان خود و با استفاده از اشتباهات رایج آنها در برگه‌های امتحانی، دانش‌آموزان را در تصحیح فرایند حل مسئله ریاضی کمک کنند. دانش‌آموزان باید یاد بگیرند که پس از حل هر مسئله چگونه صحت آن را از طریق استدلال ریاضی برای خود بررسی کنند.

در «کار در کلاس» صفحه ۱۷ نمونه‌های دیگری از استدلال‌ها ارائه شده است که فقط یک استدلال از بین آنها درست است (گزینه پ). توصیه می‌شود که دبیران محترم یک سؤال ساده از مطالب سال قبل را به دانش‌آموزان داده از آنها بخواهند سؤال را جواب دهند. سپس برگه‌های دانش‌آموزان، برای تصحیح، به صورت تصادفی میان آنان تقسیم شود طوری که دانش‌آموزان برگه خود را تصحیح نکنند. سپس از دانش‌آموزان خواسته شود درستی و نادرستی جواب داده شده در برگه را با دلیل شرح دهند.

پاسخ تمرین‌های برگزیده

۱ دقت شود که درستی یا نادرستی عبارت کلامی داده شده اهمیت ندارد و تنها تبدیل آن به نماد ریاضی

(بدون بررسی درستی یا نادرستی این عبارت) مدّ نظر است.

(ب) $x^2 > 7x + 5$	الف) $2\sqrt{x} = x$
(ت) $x^2 + y^2 \geq (x + y)^2$	پ) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq x + y$
	ث) $x \neq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{x}$

دقت شود که قسمت ت و ث دارای سطح دشواری بالاتری هستند و برای ارزشیابی، سؤالاتی در این سطح به صلاحدید دبیر محترم می‌تواند مطرح نشود.

۲ دقت شود که در این گونه سؤالات، استدلال داده شده و نیز نادرستی آن اعلام شده و دانش‌آموز فقط باید دلیل نادرست بودن آن را شرح دهد.

الف) در استدلال داده شده طول و عرض دو برابر نشده است.

ب) در استدلال داده شده در فاکتورگیری اشتباه شده و از مبحث تجزیه عبارات جبری می‌دانیم که عدد ۴ را نمی‌توان فاکتور گرفت.

پ) در استدلال گفته شده، عمل ساده کردن عدد ۳ از صورت و مخرج مجاز نیست؛ چون امکان فاکتورگیری از عدد ۳ وجود ندارد.

نمونه سؤالات ارزشیابی

۱ عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید:

الف) عددی با مربع خودش برابر است. پاسخ: $x = x^2$

ب) دو برابر عددی به علاوه خودش، برابر با عددی دیگر است. پاسخ: $2x + x = y$
 $3x = y$

ج) جذر عددی برابر مکعب خودش است. پاسخ: $\sqrt{x} = x^3$

۲ استدلال‌های زیر برای مسئله داده شده نادرست است. دلیل نادرستی آن را بیان کنید:

الف) اتحاد روبه‌رو برقرار است. $(a - b)^2 = a^2 - b^2$

استدلال:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

پاسخ: دلیل نادرستی استدلال، نادرست بودن ضرب علامت‌هاست. در واقع، حاصل ضرب عددی منفی در عدد منفی، مثبت است. (دبیران محترم دقت دارند که اشتباه در ضرب علامت‌ها از اشتباهات رایج دانش‌آموزان است که در قالب این گونه استدلال‌های نادرست می‌توان به آن پرداخت).

$$\frac{x^2 + x}{x^2} = x$$

(ب) عبارت گویای روبه‌رو را ساده کنید.

$$\frac{\cancel{x}^2 + x}{\cancel{x}^2} = x$$

استدلال:

پاسخ: دلیل نادرستی استدلال، عدم امکان ساده کردن صورت و مخرج در حالت جمعی است. (دیران محترم دقت دارند که این نیز از اشتباهات رایج در ساده‌سازی عبارات است).