بسم الله الرحمن الرحیم

راهنمای هنرآموز

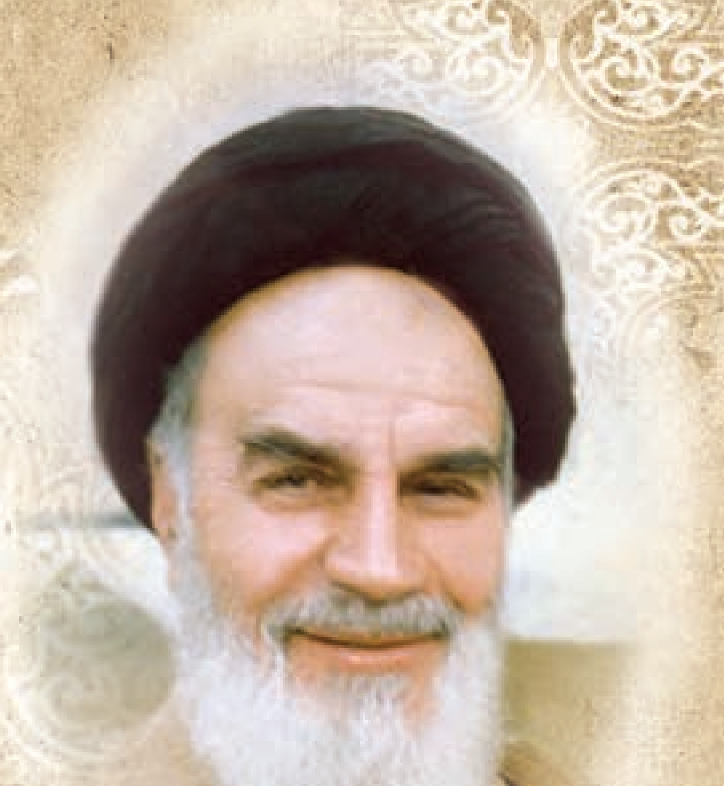
ریاضی (۲)

کلیه رشته‌ها
شاخهٔ فنی و حرفه‌ای و کاردانش
پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: راهنمای هنرآموز ریاضی (۲) ـ ۲۱۱۷۶۰
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای وکاردانش
شناسه افزوده برنامه‌ریزی وتألیف: افشار بهمنی، زیبا فانی ، مالک مختاری، شهرناز بخشعلی‌زاده، ناصر بروجردیان، زین‌العابدین دهقانی ابیانه (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
نسیم اصغری، شهرناز بخشعلی‌زاده ، ناصر بروجردیان، زین‌العابدین دهقانی ابیانه، سیدمحمد میرمعینی، نرگس یافتیان(اعضای گروه تألیف) ـ عزت‌الله خیرالله (ویراستار ادبی)
مدیریت آماده‌سازی هنری: ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: جواد صفری(مدیر هنری) ـ سمیه قنبری (صفحه‌آرا)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهرشمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش‌وپرورش (شهیدموسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،
وب‌گاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (دارو پخش) تلفن :۵ ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰
صندوق پستی: ۱۳۹ـ ۳۷۵۱۵
چاپخانه: شرکت چاپ‌ونشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اوّل ۱۳۹۶

شابک ۴ ـ ۲۹۵۸ ـ ۰۵ ـ ۹۶۴ ـ ۹۷۸ **ISBN 978 – 964 – 05 – 2958–4**



دست توانای معلم است که چشم‌انداز آینده ما را ترسیم می‌کند.

امام خمینی (قدِّسَ سِرّه الشّریف)

فهرست

مقدمه

موضوع اولین هدف عملیاتی سند تحول بنیادین آموزش و پرورش مربوط به پرورش تربیت‌یافتگانی است که با درک مفاهیم اقتصادی در چارچوب نظام معیار اسلامی از طریق کار و تلاش و روحیه انقلابی و جهادی، کارآفرینی، قناعت و انضباط مالی، مصرف بهینه و دوری از اسراف و تبذیر و با رعایت وجدان، عدالت و انصاف در روابط با دیگران در فعالیت‌های اقتصادی در مقیاس خانوادگی، ملی و جهانی مشارکت می‌نمایند. همچنین سند برنامه ملی درسی جمهوری اسلامی ایران «حوزه تربیت و یادگیری کار و فناوری» به قلمرو و سازماندهی محتوای این آموزش‌ها پرداخته است.

در برنامه‌های درسی فنی و حرفه‌ای علاوه بر اصول دین‌محوری، تقویت هویت ملی، اعتبار نقش یادگیرنده، اعتبار نقش مرجعیت هنرآموز، اعتبار نقش پایه‌ای خانواده، جامعیت، توجه به تفاوت‌های فردی، تعادل، یادگیری مادام‌العمر، جلب مشارکت و تعامل، یکپارچگی و فراگیری، اصول تنوع‌بخشی آموزش‌ها و انعطاف‌پذیری به آموزش بر اساس نیاز بازار کار، اخلاق حرفه‌ای، توسعهٔ پایدار و کاهش فقر و تولید ثروت، شکل‌گیری تدریجی هویت حرفه‌ای توجه شده است. مطالبات اسناد بالادستی، تغییرات فناوری و نیاز بازار کار داخل کشور و تغییر در استانداردها و همچنین توصیه‌های بین‌المللی، موجب شد تا الگوی مناسب که پاسخگوی شرایط مطرح‌شده باشد طراحی و برنامه‌های درسی بر اساس آن برنامه‌ریزی و تدوین شوند. تعیین سطوح شایستگی و تغییر رویکرد از تحلیل شغل به تحلیل حرفه و توجه به ویژگی‌های شغل و شاغل و توجه به نظام صلاحیت حرفه‌ای ملی، تلفیق شایستگی‌های مشترک و غیرفنی در تدوین برنامه‌ها از ویژگی‌های الگوی مذکور و برنامه‌های درسی است. بر اساس این الگو فرایند برنامه‌ریزی درسی آموزش‌های فنی و حرفه‌ای و مهارتی در دو بخش دنیای کار و دنیای آموزش طراحی شد. بخش دنیای کار شامل ده مرحله و بخش دنیای آموزش شامل پانزده مرحله است. نوع ارتباط و تعامل هر مرحله با مراحل دیگر فرایند به صورت طولی و عرضی است، با این توضیح که طراحی و تدوین هر مرحله متأثر از اعمال موارد اصلاحی مربوط به نتایج اعتباربخشی آن مرحله یا مراحل دیگر می‌باشد.

توصیه سند تحول بنیادین و برنامهٔ درسی ملی بر تدوین اجزای بستهٔ آموزشی جهت تسهیل و تعمیق فعالیت‌های یاددهی ـ یادگیری، کارشناسان و مؤلفان را بر آن داشت تا محتواهای آموزشی مورد نظر را در شبکه‌ای از اجزای یادگیری با تأکید بر برنامهٔ درسی رشته، برنامه‌ریزی و تدوین نمایند. کتاب راهنمای هنرآموز از اجزای شاخص بستهٔ آموزشی است و هدف اصلی آن توجیه و تبیین برنامه‌های درسی تهیه شده با توجه به چرخش‌های تحولی در آموزش فنی و حرفه‌ای و توصیه‌هایی برای اجرای مطلوب آن می‌باشد.

کتاب راهنمای هنرآموز در دو بخش تدوین شده است.

بخش نخست مربوط به تبیین جهت‌گیری‌ها و رویکردهای کلان برنامه درسی است که کلیات تبیین منطق برنامه درسی، چگونگی انتخاب و سازماندهی محتوا، مفاهیم و مهارت‌های اساسی و چگونگی توسعه آن در دوره، جدول مواد و منابع آموزشی را شامل می‌شود.

بخش دوم مربوط به طراحی واحدهای یادگیری است و تبیین منطق واحد یادگیری، پیامدهای یادگیری، ایده‌های کلیدی، طرح پرسش‌های اساسی، سازماندهی محتوا و تعیین تکالیف یادگیری و عملکردی با استفاده از راهبردهای مختلف و در آخر تعیین روش‌های ارزشیابی را شامل می‌شود.

همچنین در قسمت‌های مختلف کتاب راهنمای هنرآموز با توجه به اهمیت آموزش شایستگی‌های غیرفنی به آموزش مدیریت منابع، ایمنی و بهداشت، یادگیری مادام‌العمر و مسئولیت‌پذیری تأکید شده است.

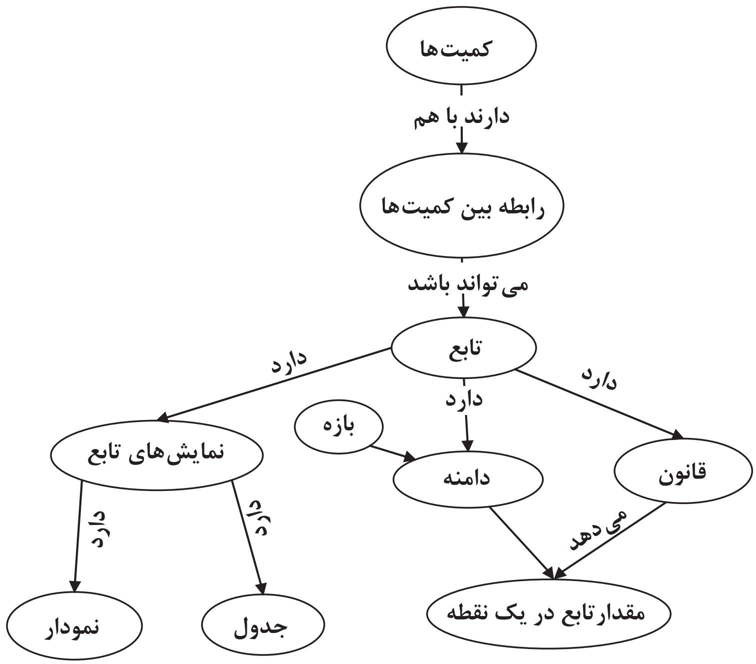
مسلماً اجرای مطلوب برنامه‌های درسی، نیازمند مساعدت و توجه ویژه هنرآموزان عزیز و بهره‌مندی از صلاحیت‌ها و شایستگی‌های حرفه‌ای و تخصصی مناسب ایشان می‌باشد.

دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش

پودمان اول

تابع

طرح کلی مفاهیم پودمان اول (نقشهٔ مفهومی)



اهداف کلی

- درک مفهوم رابطه بین کمیت‌ها در زمینه پدیده‌های طبیعی
- درک مفهوم تابع در زمینه پدیده‌های طبیعی
- آشنایی با قانون تابع و مفهوم متغیر تابع و دامنه تابع
- درک مفهوم بازه در اعداد حقیقی
- آشنایی با مقدار تابع در یک نقطه با استفاده از قانون تابع
- آشنایی با نمایش‌های جدولی و نموداری تابع
- آشنایی با مقدار تابع در یک نقطه با استفاده از نمودار تابع
- تشخیص رفتار تابع به کمک جدول یا نمودار تابع

پیش نیازهای پودمان

- آشنایی با چند جمله‌ای‌ها و یافتن مقدار عددی آنها به ازای مقدار برای متغیر
- آشنایی با مختصات نقطه و نمایش آن در صفحه محورهای مختصات
- آشنایی با مجموعه اعداد حقیقی و زیرمجموعه‌های آن

واژه‌های کلیدی

رابطه بین دو کمیت، تابع، دامنه، قانون تابع، بازه، جدول تابع، نمودار تابع

	فرایند	توضیح فرایند	مثال
استانداردهای فرایندی	حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	ـ ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی
		شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسائل و با انتخاب مناسب آنها	ـ ارائه نمایش‌های جدولی و نموداری تابع در مورد رابطه بین دو کمیت ـ بیان چگونگی تغییرات تابع از روی نمودار و جدول آن
	ارتباط کلامی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	ـ ارائه رابطه بین دو کمیت توسط آرش پس ازمثال‌های مختلف دبیر در مورد میزان نور چراغ و فاصله چراغ از ما
		استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	ـ ارائه رابطه ریاضی که مقدار مساحت مربع ساخته شده را بر حسب مقدار طول قطعه بریده شده از مفتول در کاردرکلاس ۱بیان می‌کند.
	استدلال و اثبات	به کارگیری استدلال	ـ بیان دلیل تشخیص چگونگی تغییرات تابع از روی نمایش‌های نموداری و جدول آن ـ بیان دلیل برای تشخیص مجموعه مقادیردامنه توابعی که در زمینه‌های واقعی ساخته می‌شوند. ـ بیان دلیل تابع بودن یا تابع نبودن رابطه بین دو کمیت
	پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	ـ تعیین رابطه بین طول فنر و جرم وزنه آویزان شده به آن ـ تعیین رابطه بین گنجایش بنزین در باک خودرو و میزان مسافت طی شده
		تشخیص‌چگونگی‌ارتباطات بین‌مفاهیم‌ریاضی	ـ نمایش بازه‌ها به‌صورت ریاضی و مجموعه‌ای و رسم نمودار آنها روی محور اعداد حقیقی
	بازنمایی‌ها	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	ـ نمایش‌های مختلف تابع شامل جدول، قانون، نمودار ـ ارائه نمایش‌های مختلف یک بازه
	سایر مهارت‌های تفکر	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی و ...	ـ توانایی تعمیم و الگویابی داده‌های جدول تابع برای نوشتن قانون آن ـ توانایی مقایسه بین جفت کمیت‌هایی که تابع هستند یا نیستند.

بخش اول: رابطه بین کمیت‌ها

اهداف بخش

- آشنایی با رابطه بین دو کمیت و درک آن در زمینه واقعی
- نوشتن قانون یا ضابطه برای بیان چگونگی رابطه بین دو کمیت و تعیین مقادیر ممکن برای کمیت‌ها

واژه‌های کلیدی: رابطه بین دو کمیت، مقادیر یک کمیت

نگاه کلی به بخش

این بخش، با مکالمه‌ای بین هنرآموز و هنرجو شروع می‌شود که سعی می‌کنند با یکدیگر یک مسئله را حل کنند. نکته اصلی این مسئله، دیدن رابطه بین کمیت‌هایی است که مشاهده می‌کنیم. برای متمرکزکردن هنرآموز به مفهوم اصلی رابطه بین کمیت‌ها، وضعیت‌هایی طراحی شده‌اند که در زمینه‌های مختلف وجود رابطه بین کمیت‌ها را نشان می‌دهند. پس از درک وجود رابطه بین کمیت‌ها، سعی در فرمول‌بندی این رابطه به زبان ریاضی می‌کنیم.

ورود به مطلب

یافتن رابطه بین کمیت‌ها، دلیل اصلی در پیدایش مفهوم تابع است. دبیران می‌توانند از طریق طرح مسئله‌ای که به یکی از این رابطه‌ها اشاره دارد، وارد مفهوم رابطه بین کمیت‌ها شوند. در کتاب از مسئله اندازه‌گیری فاصله ستارگان استفاده شده است تا از طریق آن به رابطه بین شدت نور و فاصله چشمه نور توجه شود. از این نوع رابطه‌ها در طبیعت بسیار دیده می‌شوند که هم به‌عنوان ورودی و هم به‌عنوان مثال می‌توانیم از آنها استفاده کنیم؛ مثلاً رابطه بین شدت صدا و فاصله منبع صدا، رابطه بین فشار هوا و ارتفاع از سطح دریا، رابطه بین فشار وارد بر سطح، مساحت سطح و ...

فعالیت آموزشی

پس از گفتگوی بین هنرجویان و هنرآموز که هنرجویان را آماده درک مفهوم رابطه بین کمیت‌ها می‌کند به فعالیت (۱) می‌رسیم که یکی از این رابطه‌ها را با دقت کافی بررسی کنیم.

اهداف موضوعی:

درک مفهوم:

۱ رابطه

۲ قانون رابطه

۳ مقادیر ممکن برای کمیت‌ها (آشنایی ضمنی با مفهوم دامنه تابع)

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ حل مسئله (مدل‌سازی)

۲ ارتباطات

۳ پیوندها و اتصال‌ها (ریاضی و خارج ریاضی)

۴ تفکر بصری

۵ بازنمایی‌ها (تصویر و نمادین)


فنری در اختیار داریم که در حالت طبیعی طول آن ۱۰ سانتی‌متر است. به ازای هر ۱۵ گرم وزنه که به آن آویزان می‌کنیم، ۱ سانتی‌متر به طول آن اضافه می‌شود. حداکثر طول این فنر ۴۰ سانتی‌متر است و اگر بیش از این کشیده شود پاره می‌شود.

در جاهای خالی کلمهٔ مناسب بگذارید.

الف) هر چه جرم وزنهٔ آویزان شده ـــــ شود، طول فنر ـــــ می‌شود.

ب) اگر به این فنر یک وزنهٔ ۳۰۰ گرمی آویزان کنیم برای پیدا کردن طول فنر، چون به ازای هر ۱۵ گرم، ۱ سانتی‌متر به طول آن اضافه می‌شود، پس ابتدا ۳۰۰ را بر ... تقسیم می‌کنیم و سپس

در حالت کلی، اگر جرم وزنهٔ آویزان شده را بر حسب گرم با x نشان دهیم و طول فنر را برحسب سانتی‌متر با l نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار l را برحسب مقدار x بیان کند.

حداکثر جرمی که می‌توانیم به این فنر آویزان کنیم، چقدر است؟ (راهنمایی: برای پیدا کردن حداکثر جرمی که می‌توانیم به این فنر آویزان کنیم ابتدا باید حداکثر تغییر طول فنر را به‌دست آورید.)

۱ الف) زیادتر ـ بلندتر، یا کمتر ـ کوتاه‌تر

ب) $۳۰ = ۱۰ + ۲۰=$ طول فنر $\Rightarrow ۲۰ = ۱۵ \div ۳۰۰$

۲ $۰ \leq a \leq ۷۵۰$ $\qquad l = \frac{a}{۱۵} + ۱۰$

۳ ۷۵۰ گرم $\qquad L=۶۰ \rightarrow ۶۰ = \frac{a}{۱۵} + ۱۰ \rightarrow \frac{a}{۱۵} = ۵۰ \quad a = ۱۵ \times ۵۰$

کار در کلاس ۱

مفتولی به طول ۱۰۰ سانتی‌متر در اختیار داریم. قسمتی از آن را می‌بریم و با قطعهٔ بریده شده یک مربع می‌سازیم. مساحت مربع به دست آمده با طول قطعهٔ بریده شده رابطه دارد.

اهداف:

- درک مفهوم رابطه در زمینه هندسی، درک قانون رابطه و مقادیر ممکن کمیت‌ها، حل مسئله، ارتباط کلامی، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال، بازنمایی‌ها (جدول، نمودار، معادله)

۱ خیر، زیرا مساحت عددی مثبت است. (در اینجا نیز قسمتی از مفتول بریده می‌شود.)

۲ اگر طول قطعه بریده شده را x در نظر بگیریم x عددی بین حداقل و حداکثر طول مفتول خواهد بود، یعنی بین صفر و ۱۰۰ سانتی‌متر

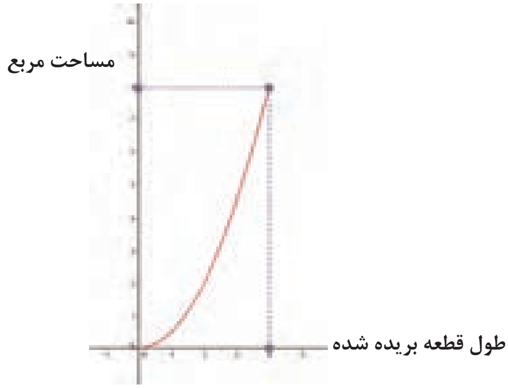
۳ با تقسیم ۸ بر ۴، ضلع مربع ۲ به دست می‌آید. بنابراین مساحت مربع ۴ سانتی‌متر مربع است.

۴ $۰ < x < ۱۰۰$, $s = (\frac{x}{۴})^۲ = \frac{x^۲}{۱۶}$, طول قطعه بریده شده $= x$

۵

۱۰۰	۶۰	۴۸	۳۲	۲۰	۴	۱	طول قطعهٔ بریده شده
۶۲۵	۲۲۵	۱۴۴	۶۴	۲۵	۱	$\frac{۱}{۱۶}$	مساحت مربع

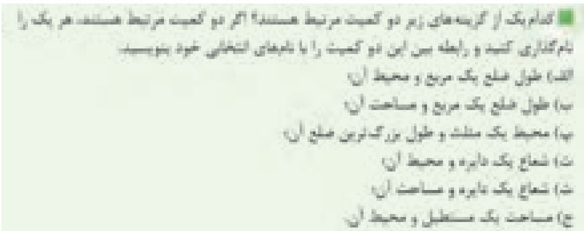
۶



۷ $۴۰ = \frac{x^۲}{۱۶} \Rightarrow x = ۸\sqrt{۱۰}cm$

۸ بله، به کمک جواب‌های سؤالات بند (۲) و (۴) جواب بقیه سؤالات را می‌توان داد.

مسائل


کدام یک از گزینه‌های زیر دو کمیت مرتبط هستند؟ اگر دو کمیت مرتبط هستند، هر یک را نام‌گذاری کنید و رابطه بین این دو کمیت را با نام‌های انتخابی خود بنویسید.
الف) طول ضلع یک مربع و محیط آن
ب) طول ضلع یک مربع و مساحت آن
پ) محیط یک مثلث و طول بزرگ‌ترین ضلع آن
ت) شعاع یک دایره و محیط آن
ث) شعاع یک دایره و مساحت آن
ج) مساحت یک مستطیل و محیط آن

مهارت‌ها و فرایندها:

● پیوندها و اتصال‌ها، ارتباطات مهارت تشخیص کمیت‌های مرتبط

الف) دو کمیت مرتبط هستند. اگر طول ضلع مربع را با x و محیط آن را با p نمایش دهیم، رابطه به‌صورت $p = ۴x$ است.

ب) دو کمیت مرتبط هستند. اگر طول ضلع مربع را با x و مساحت آن را با s نمایش دهیم، رابطه به‌صورت $s = x^۲$ است.

پ) دو کمیت مرتبط نیستند.

ت) دو کمیت مرتبط هستند. اگر شعاع دایره را با r و محیط آن را با p نمایش دهیم، رابطه به‌صورت $p = ۲\pi r$ است.

ث) دو کمیت مرتبط هستند. اگر شعاع دایره را با r و مساحت آن را با s نمایش

دهیم، رابطه به صورت $s = \pi r^{۲}$ است.

ج) دو کمیت مرتبط نیستند.

آیا درجه حرارت یک مکان بر حسب سانتی‌گراد و درجه حرارت آن بر حسب فارنهایت مرتبط هستند؟ اگر مرتبط هستند، هر یک را نام‌گذاری کنید و رابطه بین آنها را بنویسید.

مهارت‌ها و فرایندها:

- استدلال کردن، ارتباطات، پیوند و اتصال‌ها، مهارت تشخیص کمیت‌های مرتبط.

بله، دو کمیت مرتبط هستند. اگر درجه حرارت بر حسب سانتی‌گراد را با C و درجه حرارت بر حسب فارنهایت را با F نمایش دهیم رابطه به‌صورت $F = ۱/۸^{\circ} C + ۳۲$ است.

وزن جلد کتابی (با حداکثر ۲۰۰ صفحه) برابر ۴۰ گرم و وزن هر ورق آن ۰/۸ گرم است. رابطه‌ای بنویسید که به کمک آن بتوان وزن کتاب را بر حسب تعداد ورق‌های آن به‌دست آورد.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی

رابطه به‌صورت $W = ۴۰ + ۰/۸\ x$ است و $۰ \leq x \leq ۱۰۰$.

راننده‌ای مسافت ۳۵۰ کیلومتری بین دو شهر را با سرعت ثابت ۷۰ کیلومتر بر ساعت در حال طی کردن است.

الف) آیا مقدار مسافتی که طی می‌کند (d) و زمان (t)، دو کمیت مرتبط هستند؟ اگر دو کمیت مرتبط هستند، چه رابطه‌ای بین آنها برقرار است؟

ب) هر یک از این دو کمیت چه مقادیری را می‌توانند داشته باشند؟

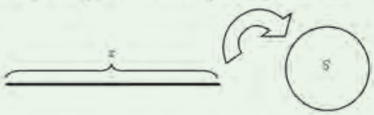
مهارت‌ها و فرایندها:

- بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی

الف) بله دو کمیت مرتبط هستند و رابطه به‌صورت $d = ۷۰\, t$ است.

ب) $۰ \leq t \leq ۵$ و $۰ \leq d \leq ۳۵۰$

طنابی به طول ۱۰ متر در اختیار داریم. قطعه‌ای از آن را می‌بُریم و با قطعهٔ بُریده شده یک حلقهٔ دایره‌ای شکل می‌سازیم. مساحت حلقه دایره‌ای شکل به‌دست آمده با طول قطعهٔ بریده شده رابطه دارد.



مهارت‌ها و فرایندها:

● حل مسئله، استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات، پیوندها و اتصال‌ها

الف) خیر، زیرا مساحت عددی مثبت است.

ب) $۰ < x < ۱۰$

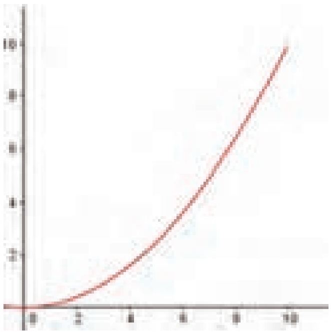
پ) $۲\pi r = ۴$ در نتیجه $r = \frac{۲}{\pi}$ و بنابراین $s = \frac{۴}{\pi}$.

ت) $۲\pi r = x$ در نتیجه $r = \frac{x}{۲\pi}$ و بنابراین $s = \frac{۱}{۴\pi}x^۲$.

ث)

۱۰	۸	۶	۴	۲	$\frac{۱}{۲}$	طول قطعه بریده شده
$\frac{۲۵}{۳}$	$\frac{۱۶}{۳}$	۳	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴۸}$	مساحت دایره

ج)



چ) نیازمندِ دانستن بندهای (ب) و (ت) هستیم.

دو کمیت مرتبط به هم مثال بزنید. هر یک را نام‌گذاری کنید و در صورت امکان رابطهٔ بین این دو کمیت را با نام‌های انتخابی خود بنویسید.

مهارت‌ها و فرایندها:

● حل مسئله، پرورش تفکر واگرا

جفت کمیت‌های مختلفی را می‌توان مثال زد؛ برای مثال، محیط و مساحت یک مربع یا محیط و مساحت یک دایره.

بخش دوم: مفهوم تابع

اهداف بخش

- درک تابع بودن یا نبودن رابطه بین دو کمیت
- درک مفاهیم دامنه و قانون یک تابع
- تعیین دامنه تابعی که در زمینه‌ای واقعی تعریف شده است، از طریق محدودیت‌های واقعی

واژه‌های کلیدی: تابع، دامنه، قانون تابع

نگاه کلی به بخش

روش آموزشی این کتاب برای معرفی تابع، با سایر کتاب‌ها فرق دارد و دبیران با توجه به این تفاوت باید شیوه نوینی برای آموزش مفهوم تابع در پیش بگیرند. هدف این کتاب ارائه مفهوم ریاضی تابع با همان روند تاریخی به وجود آمدن مفهوم تابع است. به همین دلیل در اینجا از تابع به‌عنوان مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب یاد نخواهیم کرد و بر مفهوم شهودی و اصلی تابع که عملگری است که به اعضای مجموعه مبدأ، عنصری معین در مجموعه مقصد نظیر می‌کند، تأکید خواهیم داشت. از لحاظ تاریخی، تابع به معنای رابطهٔ بین کمیت‌ها بوده است و ما نیز با همین روش مفهوم تابع را ارائه خواهیم کرد.

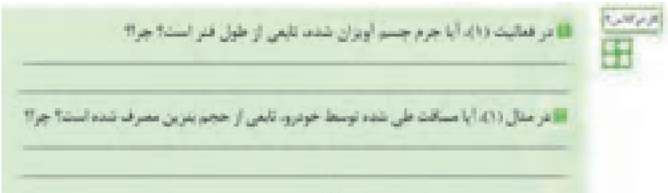
در این بخش ابتدا معرفی تابع به صورت غیررسمی انجام می‌شود و در طی مثال‌های متعدد، دو مفهوم زیربنایی دامنه و قانون تابع ارائه می‌شوند.

یک اشتباه رایج درباره مفهوم تابع این است که دامنه یک تابع را از طریق قانون (ضابطه) تابع تعیین می‌کنند، در حالی که این دو مفهوم مستقل از یکدیگرند. برای ساختن یا ارائه هر تابعی، ابتدا باید دامنه آن را ارائه کرد و سپس قانونی که روی این دامنه عمل می‌کند را باید بیابیم. دامنه یک تابع در زمینه پدیده‌های طبیعی را قانون آن معین نمی‌کند بلکه محدودیت‌های مسئله مورد بررسی، و آن چیزی که تابع قرار است توصیف کند، مشخص‌کننده دامنه تابع است. اگر در جهان ریاضی هم باشیم و هیچ محدودیت عملی هم نداشته باشیم، این شخصِ ارائه‌کننده تابع است که باید بگوید تابع مورد نظرش چه قانونی دارد و این قانونِ قرار است روی چه مجموعه‌ای عمل کند. برای تأکید روی این نکته، مثال‌ها و مسئله‌های متعددی آورده شده است.

ورود به مطلب

پس از بررسی چند وضعیت از رابطه بین کمیت‌ها که در فعالیت (۱) و مثال(۱) و

کار درکلاس(۱) آمده‌اند، هنرجویان با مفهوم رابطه بین کمیت‌ها آشنا شده‌اند و تاحدودی هم به‌طور غیرمستقیم با مفهوم دامنه و قانون تابع کار کرده‌اند. در این بخش مفهوم تابع به‌طور مستقیم ارائه می‌شود و سپس چند مثال ارائه می‌گردد. برای تأکید بر یکتایی مقدار تابع با یک مثال، حالتی که یک رابطه تابع نیست نیز تذکر داده می‌شود.



در فعالیت (۱)، آیا جرم جسم آویزان شده تابعی از طول فنر است؟ چرا؟

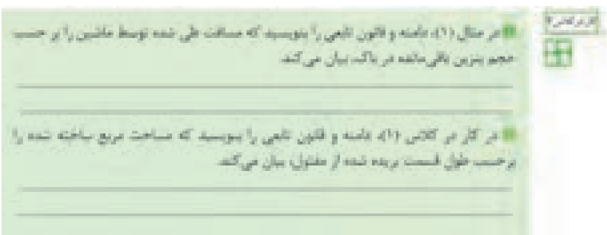
در مثال (۱)، آیا مسافت طی شده توسط خودرو، تابعی از حجم بنزین مصرف شده است؟ چرا؟

اهداف:

- تشخیص اینکه از دو کمیت مرتبط یک کمیت تابعی از کمیت دیگر است، استدلال، پیوندها و اتصال‌ها (ریاضی و خارج ریاضی).

۱ بله جرم جسم آویزان شده تابعی از طول فنر است، زیرا با مشخص شدن طول فنر، برای جرم جسم آویزان شده یک مقدار معین به‌دست می‌آید.

۲ بله، زیرا با مشخص شدن بنزین مصرف شده، برای مسافت طی شده یک مقدار معین به‌دست می‌آید.



در مثال (۱)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مسافت طی شده توسط ماشین را بر حسب حجم بنزین باقی‌مانده در باک بیان می‌کند.

در کار در کلاس (۱)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مساحت مربع ساخته شده را برحسب طول قسمت بریده شده از مفتول بیان می‌کند.

اهداف:

- کسب مهارت مدلسازی تابع و نمایش نمادین دامنه و قانون آن، پیوندها و اتصال‌ها (ریاضی و خارج ریاضی)

۱ دامنه تابع = $\{v \in \mathbb{R} \mid ۵ \leq v \leq ۶۰\}$

قانون تابع: $d = (۶۰ - v) \times ۱۲/۵$

۲ دامنه تابع = $\{x \in \mathbb{R} \mid ۰ < x < ۱۰۰\}$

قانون تابع: $s = \frac{x^{۲}}{۱۶}$

مسائل

■ آیا دمای کلاس شما در یک روز معین، تابعی از زمان است؟ چرا؟

مهارت‌ها و فرایندها:

- استدلال کردن، پیوندها و اتصال‌ها

بله، زیرا با مشخص بودن زمان، یک **مقدار معین** برای دمای کلاس به‌دست می‌آید.

■ دمای هوا در یک منطقه، در ارتفاعات مختلف از سطح دریا، متفاوت است و به ازای هر ۱۵۰متر افزایش ارتفاع، ۱ درجه از دمای هوا کاسته می‌شود. آیا دمای یک منطقه تابعی از ارتفاع آن منطقه از سطح دریا است؟ چرا؟

مهارت‌ها و فرایندها:

- استدلال کردن، پیوندها و اتصال‌ها

بله، زیرا با مشخص بودن ارتفاع در یک منطقه، یک **مقدار معین** برای دما به‌دست می‌آید.

■ یک مغازه شیرینی فروشی ماهانه ۲ میلیون تومان بابت اجارهٔ مغازه، آب، برق و دستمزد کارگران، به‌طور ثابت پرداخت می‌کند. تولید هر کیلوگرم شیرینی ۳۰۰۰ تومان هزینهٔ مواد اولیه دارد. ظرفیت تولید شیرینی در این مغازه حداکثر ۲۵۰۰ کیلوگرم در ماه است. قیمت هر کیلوگرم شیرینی در بازار ۱۲۰۰۰ تومان است و تمام تولیدات مغازه به فروش می‌رسد. اگر x میزان تولید شیرینی باشد:

الف) درآمد این مغازه تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با به‌دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

ب) هزینهٔ ماهانهٔ مغازه تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با به‌دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

پ) سود مغازه تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با مشخص کردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، استدلال کردن، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی

الف) اگر x میزان شیرینی بر حسب کیلوگرم باشد، داریم:

درآمد حاصل از فروش x واحد شیرینی = $R = ۱۲۰۰۰x \,,\, ۰ \leq x \leq ۲۵۰۰$

ب) $C = ۳۰۰۰x + ۷۰۰۰۰۰۰ \ , \ ۰ \leq x \leq ۲۵۰۰$ = هزینه تولید x واحد شیرینی

پ) $P = R - C = ۱۲۰۰۰x - (۳۰۰۰x + ۷۰۰۰۰۰۰) \ , \ ۰ \leq x \leq ۲۵۰۰$ = سود

$$P = ۹۰۰۰x - ۷۰۰۰۰۰۰ \ , \ ۰ \leq x \leq ۲۵۰۰$$

می‌توان در اینجا توضیح داد که حداقل باید ۷۷۸ کیلو شیرینی تولید شود تا شیرینی‌فروش ضرر نکند یعنی باید به جای x در این رابطه، عددی قرار داد که P را مثبت کند.

$$P = \text{سود} = ۹۰۰۰x - ۷۰۰۰۰۰۰ > ۰ \Rightarrow x \geq ۷۷۸$$

از منبع آبی با حجم ۵۰۰ لیتر برای پرکردن یک حوضچه استفاده می‌شود. اگر شیر آب منبع به‌طور کامل باز باشد، در هر دقیقه ۵ لیتر آب از آن خارج می‌شود.

الف) توضیح دهید که چرا حجم آب داخل حوضچه تابعی از زمان است.

ب) با فرض آنکه در لحظه صفر، حوضچه خالی است، قانون این تابع را با نوشتن حجم آب داخل حوضچه بر حسب زمان باز بودن شیر، بنویسید.

پ) دامنهٔ این تابع را مشخص کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

- ارتباطات، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی

الف) زیرا با مشخص بودن زمان، یک **مقدار معین** برای حجم آب داخل حوضچه به‌دست می‌آید.

ب) اگر حجم آب داخل حوضچه را بر حسب لیتر با v و زمان بازبودن شیر را بر حسب دقیقه با t نشان دهیم، قانون این تابع به‌صورت $v = ۵t$ است.

پ) $۰ \leq t \leq ۱۰۰$

سنگی را به هوا پرتاب می‌کنیم و بعد از ۳ ثانیه به زمین برمی‌گردد. در این صورت کمیت ارتفاع سنگ از سطح زمین و کمیت زمان، باهم مرتبط هستند.

الف) چرا ارتفاع سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است؟

ب) اگر زمان را بر حسب ثانیه اندازه بگیریم و مبدأ، زمان شروع پرتاب باشد، دامنهٔ این تابع چیست؟

مهارت‌ها و فرایندها:

● استدلال کردن، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات

زیرا در هر لحظه، سنگ در جایی معین است و ارتفاع آن نیز معین است. از آنجا که این حرکت فقط در ۳ ثانیه انجام می‌شود، دامنه این تابع مجموعه اعداد بین ۰ تا ۳ است.

یک مقاومت ثابت ۳۰۰ اهمی (R_1)، به‌طور موازی به یک مقاومت متغیر (R_2) متصل شده است. مقاومت نهایی (R_{eq}) تابعی از مقاومت متغیر است. اگر مقاومت متغیر، حداقل ۵ اهم و حداکثر ۱۵۰۰ اهم باشد، دامنه و قانون تابعی را به‌دست آورید که مقاومت نهایی را بر حسب مقاومت متغیر بیان می‌کند. (راهنمایی: از فرمول $\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ کمک بگیرید.)

مهارت‌ها و فرایندها:

● حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات

$$\frac{۱}{۳۰۰}+\frac{۱}{R_۲}=\frac{۱}{R_{eq}} \Rightarrow R_{eq}=\frac{۳۰۰R_۲}{۳۰۰+R_۲} \;,\; ۵\leq R_۲\leq ۱۵۰۰$$

فرض کنیم که x^2 مربع عدد حقیقی x باشد. آیا با مشخص بودن x^2، برای x یک مقدار معین در اعداد حقیقی به‌دست می‌آید؟ آیا یک عدد، تابعی از مربع آن است؟ چرا؟

مهارت‌ها و فرایندها:

● استدلال کردن، ارتباطات

یک عدد، تابعی از مربع خودش نیست، زیرا اگر $x^۲$ مشخص باشد برای x یک مقدار معین به‌دست نمی‌آید؛ مثلاً اگر $x^۲$ برابر ۴ باشد برای x دو مقدار ۲ و ۲ـ به دست می‌آید.

بخش سوم: بازه‌ها

اهداف بخش

- درک مفهوم بازه (فاصله)
- استفاده از بازه‌ها در تعیین دامنهٔ توابع
- معرفی و نمایش هندسی بازه‌ها
- آشنایی با نماد بی‌نهایت و چگونگی استفاده از آن برای نمایش یک بازه

واژه‌های کلیدی : بازه، بی‌نهایت

نگاه کلی به بخش

در این بخش بازه‌ها و نمایش آنها مطرح می‌شوند تا در بیان ریاضی دامنه تابع‌ها، دچار مشکل نشویم.

ورود به مطلب

هدف این بخش فقط نمادگذاری برای نمایش برخی زیرمجموعه‌های مهم در مجموعه اعداد حقیقی است. بنابراین تنها انگیزه مهم این بخش نمادگذاری برای ساده‌تر صحبت کردن است و مناسب است که با مراجعه به بخش‌های قبل و دیدن برخی زیرمجموعه‌ها که به آنها برخورد کرده‌بودیم انگیزه لازم برای نام‌گذاری آنها را فراهم کنید. بازه‌ها دسته خاصی از زیرمجموعه‌های مجموعه اعداد حقیقی هستند که بسیار به کار می‌آیند و به همین دلیل آنها را نام‌گذاری می‌کنیم.

کار درکلاس ۴

۱ بازه‌های زیر را با نماد مجموعه نمایش داده و روی یک محور نشان دهید. سپس تعیین کنید $-\frac{۴}{۱۰}$ متعلق به کدام‌یک از بازه‌ها می‌باشد.

[۲،۵]

(-۱،۳)

(۴،۷]

[-۴،-۲)

۲ هر یک از مجموعه‌های زیر را روی یک محور نمایش داده و با نماد بازه‌ها نشان دهید.

$\{x\in\mathbb{R} \mid \frac{-1}{4}<x<4\}$

$\{x\in\mathbb{R} \mid 3<x\leq 55\}$

$\{x\in\mathbb{R} \mid 1\leq x<10\}$

$\{x\in\mathbb{R} \mid -4\leq x\leq 5\}$

● **اهداف:** بازنمایی‌های چندگانه

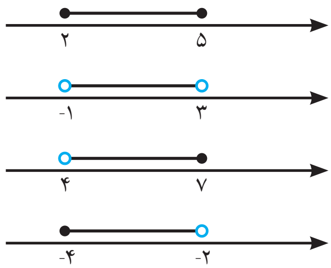
۱

$[۲ , ۵] = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲ \leq x \leq ۵\}$

$(-۱ , ۳) = \{x \in \mathbb{R} \mid -۱ < x < ۳\}$

$(۴ , ۷] = \{x \in \mathbb{R} \mid ۴ < x \leq ۷\}$

$[-۴ , -۲) = \{x \in \mathbb{R} \mid -۴ \leq x < -۲\}$



$\frac{-۳}{۱۰}$ متعلق به بازه $(-۱ , ۳)$ می‌باشد.

۲

$(۳ , ۵۵] , (-\frac{۱}{۳} , ۲) , [-۳ , ۸] , [۱ , ۱۰)$

توصیه: اعداد دیگری نظیر $\sqrt{۲}$ را انتخاب کرده و از هنرجو بخواهید بررسی کند داخل بازه‌ها هستند یا خیر. این تصور اشتباه در برخی هنرجویان وجود دارد که بازه مثلاً $[۱ , ۵]$ فقط شامل اعداد طبیعی است یا فقط اعداد ۱ و ۵ را دارد با انتخاب مناسب اعدادی نظیر $\sqrt{۲}$ و ... این تصور در هنرجویان اصلاح خواهد شد. در ادامه این بخش، نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ برای نمایش بازه‌های بی‌کران معرفی می‌شوند.

توجه داشته باشید که $+\infty$ و $-\infty$ نماد هستند و نشان‌دهنده هیچ عدد حقیقی نیستند و اشاره به نقطهٔ خاصی روی محور اعداد حقیقی ندارند. استفاده از این نمادها در بازه‌ها به معنای بی‌کران بودن بازه از بالا یا پایین است؛ مثلاً اگر بخواهیم مجموعه همهٔ اعداد بیشتر از ۲، یعنی $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq ۲\}$، را نشان دهیم، می‌توانیم آن را به‌صورت $[۲ , +\infty)$ نمایش دهیم.

چون هر بازه، زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی است می‌توانید از اجتماع و اشتراک بازه‌ها نیز صحبت کنید و گاهی ممکن است این اعمال مجموعه‌ای، مجدداً یک بازه ایجاد کند. همچنین می‌توانید در صورت لزوم از نماد $(-\infty , +\infty)$ برای نمایش کل مجموعه اعداد حقیقی استفاده نمایید.

کار در کلاس ۵

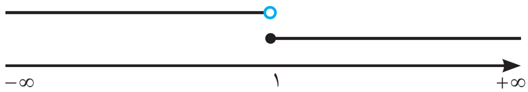
۱ بازهٔ $[۱, +\infty)$ را روی محور نمایش دهید.

۲ بازهٔ $(-\infty, ۱)$ را روی محور نمایش دهید.

۳ اجتماع این دو بازه را روی محور نمایش دهید. اجتماع این دو بازه، چه مجموعه‌ای است؟

● **اهداف:** کسب مهارت نمایش هندسی بازه‌ها، بازنمایی‌ها (داخل ریاضی)

۱و۲)



۳)

$$(-\infty\ ,\ ۱) \cup [۱\ ,\ +\infty) = (-\infty\ ,\ +\infty) = \mathbb{R}$$

مسائل

۱ مجموعه‌های زیر را با بازه نمایش دهید و روی محور مشخص کنید.

الف) مجموعهٔ اعداد حقیقی کوچک‌تر از ۳-؛

ب) مجموعهٔ اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۲؛

پ) مجموعهٔ اعداد حقیقی بین ۳- و ۵.

مهارت‌ها و فرایندها:

● بازنمایی‌های چندگانه

الف)

$$(-\infty\ ,\ -۳) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -۳\}$$

ب)

$[۲ \,,\, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid ۲ \leq x\}$

پ)

$(-۳ \,,\, ۵) = \{x \in \mathbb{R} \mid -۳ < x < ۵\}$

مجموعه‌های زیر را روی محور مشخص کنید.
الف) $(۰ , ۳)$
ب) $[-۱ , ۵)$
پ) $(-۱ , ۴]$

مهارت‌ها و فرایندها:

● بازنمایی‌های چندگانه

پ)

ب)

الف)

مجموعهٔ جواب نامعادله $۲x-۵>۱$ را با یک بازه نمایش دهید.

مهارت‌ها و فرایندها:

● بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات

$۲x - ۵ > ۱ \Rightarrow x > ۳ \Rightarrow$ مجموعه جواب $= (۳ \,,\, +\infty)$

جدول زیر را کامل کنید.

توصیف مجموعه	نمایش روی محور اعداد	نمایش با بازه	نمایش با نماد مجموعه
			$\{x \in \mathbb{R} \mid ۰ \leq x < ۲\}$
		$[۱, ۴)$	
	۱		
مجموعه اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۲			

مهارت‌ها و فرایندها:

- بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات

توصیف مجموعه	نمایش روی محور اعداد	نمایش با بازه	نمایش با نماد مجموعه
مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۰ و کوچک‌تر از ۲	۰ ۲	$[۰ , ۲)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid ۰ \leq x < ۲\}$
مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۱ و کوچک‌تر از ۴	۱ ۴	$[۱ , ۴)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid ۱ \leq x < ۴\}$
مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۱	۱	$[۱ , +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid ۱ \leq x\}$
مجموعه اعداد حقیقی کوچک‌تر یا مساوی ۲	۲	$(-\infty , ۲]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq ۲\}$

بخش چهارم : نمادگذاری تابع‌ها

اهداف بخش

- آشنایی با نحوه نام‌گذاری تابع‌ها و دامنه آنها
- آشنایی با مفهوم مقدار تابع در یک نقطه و بیان جبری قانون تابع از طریق یک متغیر
- درک مفهوم دامنۀ یک تابع به عنوان مجموعه مقادیر متغیر آن تابع
- درک تمایز بین مفهوم تابع و قانون تابع
- درک تفاوت تابع‌های با قانون یکسان و دامنه‌های مختلف

واژه‌های کلیدی: متغیر، دامنه تابع، مقدار تابع

نگاه کلی به بخش

پس از درک مفهوم تابع برای بررسی جزئیات این مفهوم، نیازمند نام‌گذاری اجزای مفهوم تابع هستیم تا بتوانیم با سهولت در مورد آنها صحبت کنیم. به همین دلیل شیوه نام‌گذاری خود تابع، دامنه آن و مقادیر تابع به کمک متغیرها مطرح شده‌اند. در این بخش برای داشتن یک تصویر ذهنی بهتر از ماهیت تابع، به‌طور غیرمستقیم به نمایش فلشی تابع در یک مثال خاص اشاره شده است. ولی کار با چنین نمایشی از اهداف کتاب نیست. دبیران در صورت نیاز می‌توانند برای کمک به درک مفهوم تابع به عنوان یک عملگر عمل‌کننده روی بعضی مقادیر و ایجاد مقادیری دیگر، از این نمایش استفاده کنند. این نمایش برای توصیف توابع دلخواه بسیار مفید است. از آنجا که در این کتاب فقط با توابع با متغیر عددی و مقادیر عددی سروکار خواهیم داشت، از این نمایش استفاده‌ای نکردیم.

اشتباه رایج:

در ادامه از طریق مکالمه بین هنرجو و هنرآموز به اشتباهی رایج در مفهوم تابع پرداخته‌ایم. در این اشتباه، هنرجویان برای محاسبه مقدار تابع در یک نقطه، به قانون تابع نگاه می‌کنند که آیا در آن نقطه معنا دارد یا خیر، درحالی‌که برای محاسبه مقدار تابع در یک نقطه باید به دامنه تابع توجه کرد که آیا آن نقطه در دامنه تابع می‌باشد یا خیر. این اشتباه ناشی از این بدفهمی‌است که تابع و قانون تابع یکسان گرفته می‌شوند در حالی که دامنه تابع نیز بخشی از مفهوم تابع است که مستقل از قانون تابع تعیین می‌شود.

در این بخش با ارائه مثال‌ها و مسئله‌ها و کار در کلاس‌های متنوع، سعی شده است اهمیت دامنه و شیوه‌های تعیین آن مشخص شود. در تعیین دامنه، نکته اصلی در آن است که آن تابع قرار است چه پدیده‌ای را توصیف کند. محدودیت‌هایی که

شرایط آن پدیده ایجاد می‌کند وضعیت دامنه تابع را مشخص می‌کند. البته ارائه تابع در جهان ریاضی هم انجام می‌شود که هیچ پدیده واقعی هم در کار نیست. در این حالت، این ارائه‌کننده تابع است که باید دامنه تابع را مشخص کند نه اینکه خودبه‌خود از روی قانون تابع، دامنه آن مشخص باشد.

ورود به مطلب

هدف اصلی این بخش نام‌گذاری توابع است و شیوه ورود به این‌گونه مباحث، یادآوری ضرورت نام‌گذاری برای سخن‌گفتن است؛ مثلاً اگر در مورد چند تابع بخواهیم صحبت کنیم باید نامی داشته باشند تا به آنها اشاره کنیم و برای آنکه بتوانیم در مورد تفاوت‌های این توابع صحبت کنیم باید جزئیات عملیاتی که با توابع انجام می‌دهیم را بتوانیم بیان کنیم.

درباره اهمیت توجه به دامنه توابع، می‌توانید از مثال‌های کتاب استفاده کنید یا مثال‌هایی شبیه آن را که متناسب هنرجویان کلاس باشد بیابید و مطرح کنید.

کار در کلاس

الف) تابع به‌دست آمده در مثال (۱) که مسافت طی شده توسط خودرو را بر حسب حجم بنزین موجود در باک بیان می‌کند، g بنامید و D_g را بنویسید. قانون تابع g چگونه نوشته می‌شود؟

ب) مقدارهای $g(۴۵)$ و $g(۱۸)$ را بیابید. آیا مقدار $g(۷۵)$ معنایی دارد؟ چرا؟

پ) اگر متغیر این تابع را با t نشان دهیم، مجموعه‌ای که t در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

ت) اگر متغیر این تابع را با u نشان دهیم، مجموعه‌ای که u در آن است چه نام دارد؟ قانون تابع چگونه نوشته می‌شود؟

ث) دو تابع قسمت‌های (پ) و (ت) را از نظر قانون و دامنه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) تابع به دست آمده در کار در کلاس (۱) که مساحت مربع ساخته شده بر حسب طول مفتول بریده شده را بیان می‌کند h نام‌گذاری کنید و D_h را بنویسید.

ب) مقدارهای $h(۵)$ و $h(۱۲)$ را بیابید. آیا مقدار $h(۲۰۰)$ معنایی دارد؟ چرا؟

پ) اگر متغیر این تابع را با x نشان دهیم، مجموعه‌ای که x در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟

ت) اگر این تابع را با k و متغیر این تابع را با z نشان دهیم، قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟ مجموعه‌ای را که z در آن است، مشخص کنید.

ث) دو تابع قسمت‌های (پ) و (ت) را از نظر قانون و دامنه مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

اهداف: تقویت مهارت نام‌گذاری تابع و بیان قانون و دامنهٔ آن با استفاده از نمادهای ریاضی، کسب مهارت محاسبه مقدار تابع با استفاده از قانون تابع، حل مسئله (مدلسازی)، استدلال، مقایسه کردن، استنتاج، ارتباطات کلامی

۱ الف) x را میزان مصرف بنزین بر حسب لیتر در نظر می‌گیریم.

$g(x) = (۶۰ - x)۱۲/۵ \qquad D_g = [۵ , ۶۰]$

ب)

$g(۴۵) = (۶۰ - ۴۵)۱۲/۵ = ۱۸۷/۵$

$g(۱۸) = (۶۰ - ۱۸)۱۲/۵ = ۵۲۵$

خیر، $g(۷۵)$ معنی ندارد، زیرا ۷۵ در دامنه این تابع نیست. همچنین اگر به مفهومی که این تابع بیان می‌کند مراجعه کنیم، عددی که مقدار این تابع در آنجا محاسبه می‌شود حجم بنزین موجود در باک خودرو است و یک خودرو که باک آن حداکثر ۶۰ لیتر گنجایش دارد نمی‌تواند ۷۵ لیتر بنزین در خود داشته باشد.

پ) مجموعه‌ای که متغیر یک تابع در آن تغییر می‌کند همان دامنه آن تابع است. اگر نام متغیر t باشد قانون این تابع به‌صورت $g(t) = (۶۰ - t)۱۲/۵$ نوشته می‌شود.

ت) اگر نام متغیر v باشد قانون این تابع به‌صورت $g(v) = (۶۰ - v)۱۲/۵$ نوشته می‌شود و مجموعه‌ای که v در آن تغییر می‌کند دامنه g است.

ث) تغییر نام متغیر تابع تأثیری در تابع ندارد و آن تابع را تغییر نمی‌دهد. اگرچه شکل بیان قانون یک تابع ممکن است عوض شود، ولی تابع عوض نمی‌شود.

۲ الف) $D_h = (۰ , ۱۰۰]$ و قانون تابع با متغیر t به‌صورت $h(t) = \frac{t^۲}{۱۶}$ است.

ب)

$$h(۵) = \frac{۵^۲}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶} = ۱/۵۷$$

$$h(۱۲) = \frac{۱۲^۲}{۱۶} = ۹$$

خیر، $h(۲۰۰)$ معنی ندارد، زیرا ۲۰۰ در دامنه تابع نیست. همچنین اگر به مفهومی که این تابع بیان می‌کند مراجعه کنیم، عددی که مقدار این تابع در آنجا محاسبه می‌شود طول مفتول بریده شده از یک مفتول ۱۰۰ سانتی‌متری است و نمی‌توان از چنین مفتولی، یک مفتول ۲۰۰سانتی‌متری برید.

پ) اگر نام متغیر تابع x باشد قانون تابع به‌صورت $h(x)=\frac{x^{۲}}{۱۶}$ نوشته می‌شود و x در دامنه تابع h تغییر می‌کند.

ت) در این حالت $D_k=(۰\ ,\ ۱۰۰)$ و $k(z)=\frac{z^{۲}}{۱۶}$ و $z\in D_k$

ث) تغییر نام متغیر تابع تأثیری در تابع ندارد و آن تابع را تغییر نمی‌دهد. اگرچه شکل بیان قانون یک تابع ممکن است عوض شود ولی تابع عوض نمی‌شود.

مسائل

جاهای خالی را برای تابع با قانون $f(x)=x^{۲}-x+۲$ و دامنهٔ $\mathbb{R}$ پر کنید.

x	$x^{۲}-x+۲$	$f(x)$
۲ـ	ــــ	$f(-۲)=$ــ
۰	ــــ	ــــ
۲	ــــ	ــــ

مهارت‌ها و فرایندها:

- مهارت یافتن مقدار تابع به‌ازای مقادیر مختلف برای متغیر تابع، ارتباطات

x	$x^{۲}-x+۲$	$f(x)$
۲ـ	۸	$f(-۲)=۸$
۰	۲	$f(۰)=۲$
۲	۴	$f(۲)=۴$

تابع g با قانون $g(x)=۴x^{۲}-۴x$ و دامنهٔ $D_g=[-۲\ ,\ ۳]$ را در نظر بگیرید. $g(-۲)$ و $g\left(-\frac{۴}{۳}\right)$ را محاسبه کنید. آیا $g(۴)$ معنایی دارد؟ چرا؟

مهارت‌ها و فرایندها:

- مهارت یافتن مقدار تابع به‌ازای مقادیر مختلف برای متغیر تابع، استدلال کردن،

$$g(-۲)=۴\times ۴+۶=۲۲ \quad \text{و} \quad g\left(-\frac{۴}{۳}\right)=۴\times\frac{۱۶}{۹}+۴=\frac{۱۰۰}{۹}$$

خیر، $g(۴)$ معنی ندارد، زیرا ۴ در دامنه این تابع نیست.

تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و قانون $f(x)=x^2-۴$ مفروض است. مقادیر خواسته شده را بیابید.

الف) $f(-۲)=$ ب) $f\left(\frac{۱}{۲}\right)=$ پ) $f\left(\sqrt{۲}\right)=$

مهارت‌ها و فرایندها:

- مهارت پیدا کردن مقدار تابع

الف) $f(-۲)=۰$ و ب) $f(\frac{۱}{۲})=\frac{-۱۵}{۴}$ و پ) $f(\sqrt{۲})=-۲$

کرایه تاکسی وابسته به طول مسیر مسافر است. ورودیهٔ تاکسی ۶۰۰ تومان است و به ازای هر ۱۰۰ متر، ۵۰ تومان کرایه گرفته می‌شود. قانون تابعی را به‌دست آورید که کرایهٔ تاکسی را بر حسب مسافت طی شده بیان می‌کند. با توجه به آنکه تاکسی‌ها در روز حداکثر ۵۰۰ کیلومتر طی می‌کنند، دامنهٔ این تابع را مشخص کنید. نامی برای این تابع و متغیر آن انتخاب کنید و دامنه و قانون این تابع را با نام‌های انتخابی خود بیان کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، استدلال‌کردن، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات (زبان ریاضی)

فرض مسئله به معنای آن است که به ازای هر ۲ متر، ۱ تومان کرایه دریافت می‌شود. مسافت طی شده را برحسب متر و کرایه را برحسب تومان در نظر می‌گیریم. اگر متغیر این تابع را با x و خود تابع را با k نشان دهیم، x طول مسافت طی شده بر حسب متر خواهد بود و داریم:

$$k(x)=\frac{۱}{۲}x+۶۰۰ \qquad D_k=[۰\ ,۵۰۰۰۰۰]$$

اگر متغیر را با l و تابع را با f نشان دهیم، در این‌صورت داریم:

$$f(l)=\frac{۱}{۲}l+۶۰۰ \qquad D_f=[۰\ ,۵۰۰۰۰۰]$$

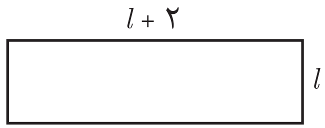
مستطیل‌هایی را در نظر بگیرید که طول آنها ۲ واحد بیشتر از عرض آنها است. مساحت این مستطیل‌ها تابعی از عرض آنها است. این تابع را g بنامید و متغیر آن را با l نمایش دهید. دامنه و قانون این تابع را بنویسید. آیا $g(-۱)$ معنایی دارد؟

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارتباطات

$g(l) = l(l+۲)$ $\qquad$ $D_g = (۰\ ,+\infty)$

خیر $g(-۱)$ معنی ندارد، زیرا طول و عرض یک پاره‌خط نمی‌تواند منفی باشد.



سنگی را از بالای یک ساختمان ۲۵ متری رها می‌کنیم. طبق قوانین فیزیکی، ارتفاع این سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است. اگر زمان را بر حسب ثانیه با t و ارتفاع از سطح زمین را بر حسب متر اندازه‌گیری کنیم و با $f(t)$ نشان دهیم و لحظهٔ رها کردن سنگ، لحظهٔ صفر باشد، قانون این تابع به‌صورت $f(t)=-۵t^۲+۲۵$ است.

الف) دامنهٔ این تابع را تعیین کنید.

ب) مقدارهای $f(۱)$ و $f(۲)$ را حساب کنید. این مقادیر چه چیزی را نشان می‌دهند؟

پ) آیا $f(۳)$ و $f(-۱)$ معنایی دارند؟ چرا؟

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارتباطات

الف) قانون این تابع تا زمانی اعتبار دارد که سنگ به زمین برسد و بعد از آن اعتبار ندارد. رسیدن سنگ به زمین در زمانی رخ می‌دهد که $f(t) = ۰$ و با حل معادله $f(t) = -۵t^۲ + ۲۵ = ۰$ دیده می‌شود که زمان رسیدن سنگ به زمین در لحظه $t = \sqrt{۵}$ است. پس $D_f = [۰\ ,\ \sqrt{۵}\ ]$.

ب) $f(۱) = -۵(۱)^۲ + ۲۵ = ۲۰$ و $f(۲) = -۵(۲)^۲ + ۲۵ = ۵$؛ یعنی در پایان ۱ ثانیه، سنگ در ارتفاع ۲۰متری و در پایان ۲ ثانیه، سنگ در ارتفاع ۵ متری از زمین قرار دارد.

پ) هیچ معنایی ندارند، زیرا این اعداد در دامنه تابع نیستند و اگر به مفهومی‌که این تابع بیان می‌کند مراجعه کنیم دیده می‌شود شروع حرکت از لحظه صفر به بعد است و قبل از صفر، چنین حرکتی وجود ندارد و همچنین در لحظه $\sqrt{۵}$ حرکت خاتمه می‌یابد و بعد از آن، قانونِ تابع اعتباری ندارد.

بخش پنجم: نمایش‌های تابع: جدول و نمودار

اهداف بخش

- آشنایی با جدول تغییرات تابع
- آشنایی با نمودار تابع
- کسب مهارت در رسم جدول مقادیر تابع
- کسب مهارت در رسم نمودار تابع از روی جدول
- تشخیص رفتار تابع از روی جدول و نمودار
- درک رابطه بین نمودار تابع و جدول مقادیر تابع

نگاه کلی به بخش

در این بخش با طرح یک مسئله، هنرجو برای درک عمیق‌تری از تابع که ممکن است قانون یا فرمولی نداشته باشد، آماده می‌شود. همچنین، نمایش جدولی توابع نیز مطرح خواهند شد. در این قسمت همزمان دو هدف دنبال می‌شود که یکی درک و پذیرش توابعی که فرمول ندارند، است و دیگری دیدن نمایش جدول تغییرات یک تابع. در این بخش سعی شده که مثال‌های بیشتری در متن درس آورده شود.

از آنجا که رسم نمودار تابع‌ها کار آسانی نیست و هنرجویان هنوز مطالب کافی برای رسم نمودار تابع‌ها را فرا نگرفته‌اند، نرم افزار جئوجبرا می‌تواند به عنوان یک ابزار، هنرجویان را در رسم نمودار تابع‌ها یاری دهد.

ورود به مطلب

برای ورود به نمایش جدولی و نموداری توابع و اهمیت آن می‌توانید تابعی را مطرح کنید و سؤالاتی را در مورد دامنه و مقادیر تابع مطرح کنید. سپس با یافتن نقطه‌به‌نقطه مقادیر تابع و یادداشت این مقادیر در یک جدول، هم به سؤالات مطرح شده پاسخ دهید و هم غیرمستقیم جدول یک تابع را به دست آورده و آن را به‌عنوان نمایش جدولیِ تابع معرفی کنید. نمایش نموداری نیز مستقیماً از نمایش جدولی ساخته می‌شودِ که درک بصری و کاملی از مقادیر یک جدول به دست می‌دهد.

فعالیت ۲

عدد π تا ده رقم اعشار برابر است با:

$$\pi \approx ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵$$

برای $n=۱,۲,۳,...,۱۰$، اگر $f(n)$، رقم nام اعشاری π را نشان دهد، برای مثال داریم:

$f(۱)=۱$ ، $f(۲)=۴$

۱ جاهای خالی را پر کنید.

$f(۶)=$ ...... $f(۹)=$ ...... $f(۱۰)=$ ...... $f(۸)=$ ......

۲ دامنهٔ این تابع را با یک مجموعه نشان دهید.

۳ جدول زیر را با توجه به دامنه داده شده کامل کنید.

n	۱	۲
$f(n)$	۱	۴

اهداف موضوعی:

- آشنایی با نمایش‌های مختلف تابع (نمایش تابع به‌صورت جدول)

مهارت‌ها و فرایندها

- پیوندها و اتصال‌ها

۱

$f(۸)=۵$ و $f(۱۰)=۵$ و $f(۹)=۳$ و $f(۶)=۲$

۲ $\{۱, ..., ۱۰\}$

۳

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$f(n)$	۱	۴	۱	۵	۹	۲	۶	۵	۳	۵

مسائل

هر یک از جدول‌های زیر نمایش یک تابع با دامنهٔ $\{۳, ۲, ۱, ۰, -۱\}$ می‌باشد. نمودار هریک را در صفحهٔ مختصات رسم کنید. در صورت امکان، قانون تابع را بنویسید.

الف)

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	-۲	۰	۲	۴	۶

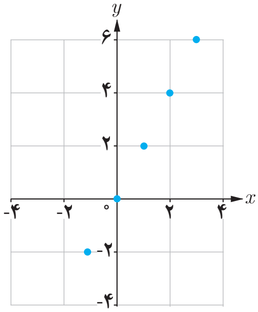
ب)

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۱	۰	۱	۴	۹

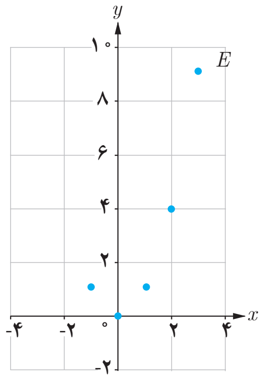
مهارت‌ها و فرایندها:

● بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات

الف) $y = ۲x$



ب) $y(x^{۲})$



نمایش جدول تابع f با دامنهٔ $\{-۲، ۰، ۱، ۲، ۴\}$ به‌صورت زیر است:

x	-۲	۰	۱	۲	۴
$f(x)$	۰	۳	-۱	۳	۱

الف) مقادیر $f(۴)$، $f(۱)$ و $f(۰)$ را بیابید.

ب) نمودار f را در صفحهٔ مختصات رسم کنید.

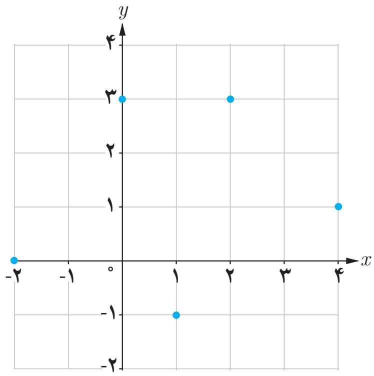
مهارت‌ها و فرایندها:

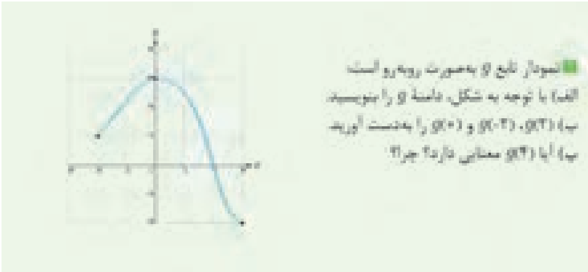
● بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات

الف)

$f(۰) = ۳$ و $f(۱) = -۱$ و $f(۴) = ۱$

ب)





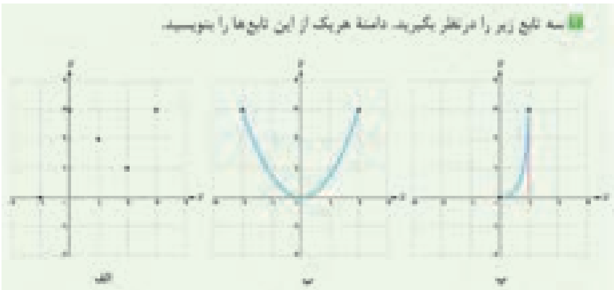
مهارت‌ها و فرایندها:

● بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات، پرورش تفکر بصری

الف) [-۲ , ۳]

ب) g(۲) = ۰ و g(۰) = ۳ و g(-۲) = ۱

پ) g(۴) معنایی ندارد، زیرا عدد ۴ در دامنه نیست.

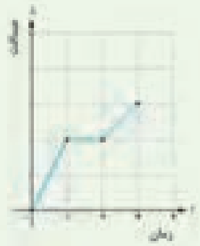


مهارت‌ها و فرایندها:

● پرورش تفکر بصری، بازنمایی‌های چندگانه

الف) {-۱ , ۰ , ۱ , ۲ , ۳} و ب) [-۲ ,۲] و ج) [۰ ,۱]

وضعیتی از زندگی روزمره را بنویسید که نمودار زیر نشان‌دهندهٔ آن وضعیت باشد.



مهارت‌ها و فرایندها:

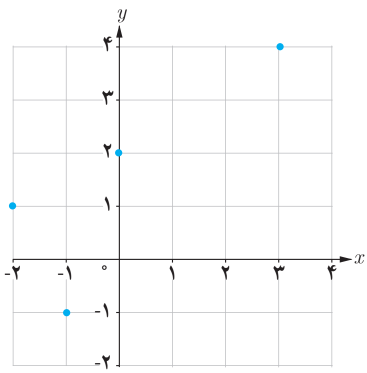
- بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات، پرورش تفکر واگرا

برای مثال، می‌تواند وضعیت شخصی باشد که در ثانیه اول مسافتی به اندازه ۲ متر را طی می‌کند و در ثانیه دوم متوقف می‌شود و سپس در ثانیه سوم مسافتی به اندازه یک متر دیگر را طی می‌کند.

تابع g با دامنه $\{-۲, -۱, ۰, ۳\}$ را طوری رسم کنید که $g(-۲) = ۱$ و $g(۰) = ۲$.

مهارت‌ها و فرایندها:

- بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن، پرورش تفکر بصری
- با تعیین دلخواه مقادیر $g(-۱)$ و $g(۳)$ توابع بسیاری را می‌توان مثال زد و برای نمونه یک تابع در زیر رسم شده که $g(-۱)$ و $g(۳)$ به ترتیب برابر ۱- و ۴ در نظر گرفته شده است:

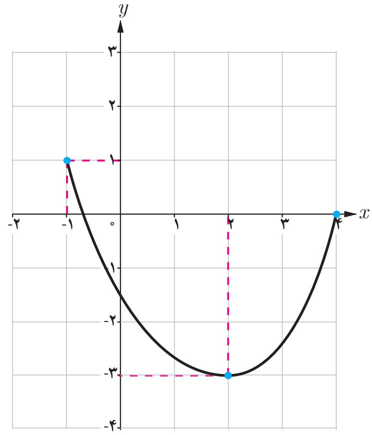


تابع دلخواه f با دامنهٔ $[-۱, ۴]$ را طوری رسم کنید که $f(-۱) = ۱$ و $f(۲) = -۳$.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن، پرورش تفکر بصری

توابع بسیاری را می‌توان مثال زد. برای نمونه یک تابع در زیر رسم شده است:



تابع h با دامنهٔ $[۰ , ۳]$ و قانون $h(x)=۳x^۲+a$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار a را طوری بیابید که $h(۱) = ۲$.

ب) $h(۲)$ را بیابید.

پ) آیا $h(۴)$ معنایی دارد؟ چرا؟

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، استدلال کردن

الف) $۳ + a = ۲ \Rightarrow a = -۱$

ب) $h(۲) = ۱۲ - ۱ = ۱۱$

ج) $h(۴)$ معنایی ندارد، زیرا عدد ۴ در دامنه نیست.

تاریخ مفهوم تابع

تابع از اواخر قرن شانزدهم به دنیای ریاضی وارد شد. مفهوم تابع در تشخیص ارتباط بین مقادیر چند کمیت با هم است. تا زمانی که مسئله‌ای برای انسان پیش نیامده بود که حل آن، نیازمند شناخت ارتباط بین کمیت‌ها باشد، نیازی به مفهوم

تابع نبوده است. اولین مسائلی که نیازمند مفهوم تابع بود توسط گالیله مطرح شد که به مطالعه حرکت اجسام و سقوط آزد اجسام پرداخت. در این مسئله، یافتن ارتباط بین زمان و مکان اجسام مطرح بود که امروزه تابع حرکت جسم نام دارد. همچنین دکارت در اوایل قرن هفدهم با ساختن هندسه تحلیلی، برای توصیف خط‌ها و خم‌ها به ارتباط بین مؤلفه‌های طول و عرض نقاط این شکل‌ها رسید که بیان صریح آنها نیازمند مفهوم تابع بود.

ریاضی در طول تاریخ خود، همواره با فیزیک و مسائل مربوط به محیط پیرامونی همراه و عجین بوده است و تا شروع قرن بیستم هر ریاضی‌دانی مفاهیم ریاضی را در قالب مفاهیم فیزیکی یا هندسی دنیای پیرامون خود می‌دیده است. اولین جاهایی که مفهوم تابع رخ می‌دهد، ارتباط بین کمیت‌های متغیر فیزیکی است، به‌همین‌خاطر، نگاه اولیه به تابع به صورت ارتباط بین دو کمیت در حال تغییر است که متغیر اصلی را متغیر مستقل و کمیت وابسته به آن را متغیر تابع می‌نامند. در این نگاه، مفهوم تابع بسیار فیزیکی است و کمیتی در کار است که در حال تغییرکردن است و اصطلاح «متغیر» نیز از همین‌جا به وجود می‌آید.

رسیدن به مفهوم تابع به عنوان یک شیء مستقل و نام و نشان‌دار که هیچ پیشینه‌ای در ذهن کسی ندارد، کار آسانی نیست و ریاضیدان‌ها باید بسیار کار کنند تا به تعریفی درخور دست پیدا کنند. عملاً این فعالیت ریاضی‌دان‌ها از دوره لایب‌نیتس و نیوتون تا اوایل قرن بیستم که تعریف امروزین تابع به وجود آمد حدوداً سه و نیم قرن ادامه یافت. در این مدت هرکس برای خود تعریفی و برداشتی از تابع داشت و پس از پالایش‌های بسیار، ما امروز تعریف شسته و رُفته‌ای از تابع در اختیار داریم.

در زمان گالیله و دکارت، تنها اشیاء شناخته شده در ریاضی، اعداد و نقاط و خط و صفحه هندسی و اشیای ساخته شده از طریق آنها بوده‌اند. حتی چیزی به نام مجموعه اعداد به عنوان یک شیء ریاضی مورد قبول نبود. روابط و اعمال بین اعداد، در بیان خواص و گزاره‌ها به کار می‌رفت ولی به عنوان شیء مستقل دیده نمی‌شدند؛ مثلاً ما اشیای فیزیکی اطراف خود را به عنوان شیء به رسمیت می‌شناسیم ولی رابطه بالا یا پایین بودن دو شیء نسبت به یکدیگر را به عنوان یک شیی نمی‌شناسیم. تابع نیز از جنس رابطه است ولی نه رابطه‌ای بین دو عدد خاص بلکه رابطه‌ای بین دسته‌ای از اعداد با دسته‌ای از اعداد دیگر. چنین موجودی در آن زمان وجود نداشت و باید به طریقی به وجود می‌آمد.

در مورد برخی توابع خاص که در عمل با آنها برخورد می‌شد، قانونی که ارتباط بین دو کمیت را برقرار می‌ساخت وجود داشت و در تعریف اولیه از تابع، ریاضی‌دان‌ها می‌توانستند برای شناسایی تابع به همین قانون که با یک عبارت جبری و تحلیلی بیان می‌شد، اشاره کنند. چنین برداشتی از تابع را اولر در سال ۱۷۴۸ میلادی در یکی از کتاب‌هایش به این صورت ارائه کرد:

«یک تابع از یک متغیر، فرمولی جبری و تحلیلی است که از طریق اَعمال محاسباتی دل‌بخواهانه‌ای روی متغیر و اعداد، تشکیل شده است.»

توابعی که به این شکل به وجود می‌آیند را می‌توانیم توابع اولری بنامیم. اگرچه توابع اولری، همه توابعی را که ما می‌شناسیم دربرنمی‌گیرند ولی برای رفع نیاز به تابع در آن زمان کافی بوده‌اند. با کار روی توابع، این مفهوم توانست به عنوان یک شیء مستقل و با نام و نشان ریاضی، هویت بیابد و پذیرفته شد که در مورد توابع، همانند اعداد می‌توان صحبت کرد و خواص آنها را مورد مطالعه قرار داد، به ویژه مفاهیم پیوستگی و مشتق‌پذیری در مورد آنها قابل طرح است.

در برخورد با مسائل دیگری که در آنها خود تابع به عنوان مجهول مطرح می‌شود، نیاز به توابعی احساس شد که ممکن بود تابع اولری نباشند؛ مثلاً دالامبر در ۱۷۴۶ شکل یک تار مرتعش که نمودار یک تابع است را مورد مطالعه قرار داد و نتیجه گرفت شکل تار مرتعش وابسته به شکل اولیه آن است. آیا شکل اولیه یک تار حتماً به‌صورت نمودار یک تابع اولری است؟ دالامبر خودش معتقد بود که شکل اولیه تار باید به صورت نمودار یک تابع با عبارت تحلیلی باشد، ولی اولر با این نظر مخالفت کرد و نهایتاً در ۱۷۵۵ تعریف خود از تابع را کلیت داد و در کتاب دیگر خود تابع را به صورت زیر تعریف کرد:

«اگر کمیتی به گونه‌ای وابسته به یک کمیت دیگر باشد، که تغییر کمیت دوم موجب تغییری در کمیت اول شود، کمیت اول را تابعی از کمیت دوم می‌نامیم. این تعریف در کلی‌ترین حالت قابل به‌کار بردن است و شامل هر طریقی که مقدارهای کمیت دوم بر حسب مقدارهای کمیت اول مشخص شوند، می‌شود. بنابراین، اگر x مقدار کمیت متغیر را نشان دهد، هر کمیت دیگری که به هر شکلی توسط آن تعیین شود تابعی از x نامیده می‌شود.»

در این زمان تابع هویت مستقل خود را در افکار اکثر ریاضی‌دان‌ها یافته بود و نیازی نبود تا برای اشاره به آن حتماً عبارتی تحلیلی در کار باشد تا به وجود تابع اطمینان پیدا کنند و وجود رابطه‌ای تعیین‌کننده با هر نوع ماهیتی، برای قبول وجود یک تابع کافی بود. البته توافق همگانی نسبت به مفهوم تابع به سادگی قابل حصول نبود و هر ریاضی‌دانی نظر گاه خاص خود را داشت، زیرا توابع به شکل‌های گوناگونی در مسائل ظاهر می‌شدند و رویه واحدی برای برخورد با توابع وجود نداشت و هنوز معلوم نبود چه نگاهی به تابع ارزشمند و مناسب است.

یکی از تغییراتی که در مفهوم تابع رخ داد، آزادشدن آن از ارتباط بین تغییرات کمیت‌های فیزیکی است. تعریف فوریه از تابع به گونه‌ای است که به تغییرات یک متغیر به عنوان مقادیر عددی معمولی نگاه می‌کند که متغیر می‌تواند اختیار کند و مقدارهای تابع نیز مقادیر عددی هستند که به ازای مقدارهای در نظرگرفته شده برای متغیر با روشی معین که لزوماً تحت قانون ثابتی هم نیستند، به دست

می‌آیند. در این نگاه لزومی ندارد که برای درک تابع، به مفاهیم فیزیکی و تغییراتی که در زمان رخ می‌دهند متوسل شویم و همان روش برای تعیین یک عدد از طریق یک عدد دیگر، تابع را مشخص می‌کند. دیریکله با کامل کردن کارهای فوریه در یافتن شرایط هم‌گرایی سری‌های فوریه با تبعیت از فوریه تعریف تابع را در سال ۱۸۳۷ به شکل زیر ارائه می‌کند:

«y تابعی از x است ، هرگاه طبق قانونی به ازای هر مقدار x، مقدار منحصر به‌فردی برای y نظیر شود.»

در آن زمان این تعریف بسیار کلی به نظر می‌آمد و ضرورت چنین تعریفی روشن نبود. این سؤال مطرح بود که آیا آنالیز و حسابان نیازی به این‌گونه توابع که معلوم نیست قانون آنها چگونه ساخته شده است، دارد؟ با رشد ریاضی و ایجاد شاخه آنالیز و پیدایش نظریه مجموعه‌ها و واردشدن مسائل پیچیده‌تر، نیاز به تعمیم مفاهیم، موجب پیدایش فضاهای کلی‌تر مانند فضاهای متریک و توپولوژیک شد. بحث توابع روی این فضاها نشان داد، دامنه و بُرد توابع نقشی اساسی در خواص توابع، بازی می‌کنند. در تعمیم تعریف تابع، کاراتئودری در ۱۹۱۷، مجموعه‌های غیرعددی را نیز به عنوان دامنه تابع معرفی کرد و نهایتاً بورباکی در ۱۹۳۹ تعریف تابع را به عنوان قانون نظیرسازی از اعضای یک مجموعه به مجموعه دیگر عرضه کرد که نهایتاً زیرمجموعه‌ای از مجموعه حاصل‌ضرب را می‌سازد. این، تعریف رسمی تابع در ریاضیات امروزین است.

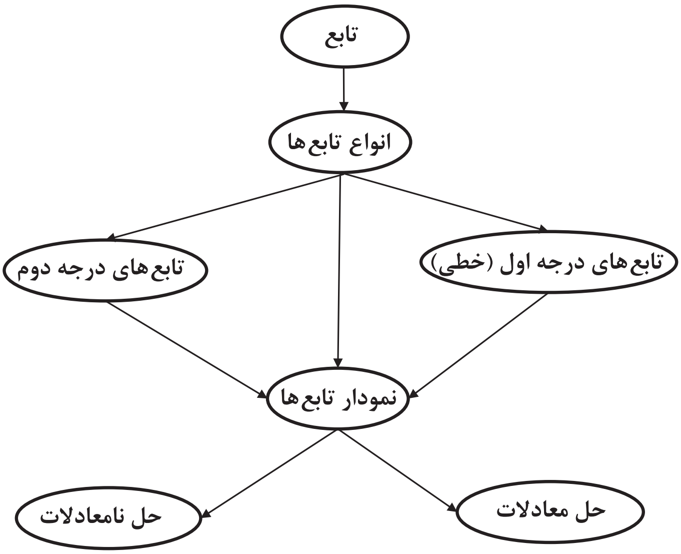
تعریف امروزین تابع در ریاضیات دانشگاهی بسیار مختصر، مفید و منطقی است و براساس مجموعه‌ها انجام می‌شود. ولی این تعریف مختصر و منطقی برای شروع آموزش تابع مفید نیست، زیرا بر اساس دانش قبلی هنرآموز بنا نمی‌شود و مفهوم واقعی تابع را که ارتباط بین دو کمیت است به خوبی نشان نمی‌دهد. آموزش صحیح یک مفهوم معمولاً از طریق تعریف منطقی صورت نمی‌گیرد و روش‌های مفهوم‌سازی باید به کار گرفته شوند. به همین علت در این کتاب هیچ‌گونه بحثی از تعریف منطقی تابع به صورت مجموعه زوج مرتبی دیده نمی‌شود.

پس از تبحر روی مفهوم تابع‌های با متغیر عددی و مقادیر عددی می‌توان از تابع‌های با دامنه‌های دیگر هم صحبت کرد. مثلاً تابع‌های با دامنه گسسته از انسان‌ها یا سیارات یا چیزهایی دیگر که در ارتباط با زندگی روزمره هم باشد و فایده‌ای در تعریف آنها دیده شود. گسترش مفهوم تابع بستگی به نیاز هنرجویان دارد که نهایتاً در کجاها با چه نوع تابع‌هایی روبه‌رو شوند.

پودمان دوم

تابع‌های خطی و درجهٔ دوم و کاربرد آنها در حل معادله‌ها و نامعادله‌ها

طرح کلی مفاهیم پودمان دوم (نقشهٔ مفهومی)



اهداف کلی

- آشنایی با تابع‌های درجه اول و دوم
- آشنایی با نمودار تابع‌های درجه اول و دوم
- آشنایی با رسم نمودار تابع‌های درجه اول و دوم (با استفاده از جئوجبرا) و تشخیص شکل کلی نمودار این تابع‌ها
- حل معادلات و نامعادلات درجه اول و دوم به کمک نمودار تابع‌های درجه اول و دوم
- آشنایی کلی با حل انواع معادلات و نامعادلات از طریق رسم نمودار تابع‌های متناظر با آنها

پیش نیازهای پودمان

- مفهوم تابع
- قانون تابع
- دامنهٔ تابع
- مقدار تابع در یک نقطه
- نمودار تابع

	فرایند	توضیح فرایند	مثال
استانداردهای فرایندی	حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	توصیف یک موقعیت مسئله‌ای که از طریق نمادین سازی، به یک مسئله در ریاضی تبدیل می‌شود که قبل از هر فعالیت انجام شده است.
		شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسائل و یا انتخاب مناسب آنها	برقراری ارتباط بین معادلهٔ $f(x)=0$ و نمودار تابع $y=f(x)$ برای یافتن جواب‌های معادله
	ارتباطات و گفت‌وگو	سازماندهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	صحبت و گفت‌وگوی صدرا در موقعیت مسئله کوهنوردی که او و هم‌کلاسی‌هایش در مورد رابطهٔ دما و ارتفاع بحث می‌کنند و سعی می‌کنند رابطهٔ بین آنها را تشخیص دهند.
		استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	در موقعیت مسئله‌ای کوهنوردی، پس از تشخیص ارتباط دما و ارتفاع این رابطه به کمک مفهوم تابع بیان می‌شود.
	استدلال اثبات	به‌کارگیری استدلال	بیان علت خطی بودن یا نبودن تابع
	پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	تشخیص مفهوم تابع خطی در رابطهٔ بین دما و ارتفاع در مسئلهٔ کوهنوری
		تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی	تشخیص رابطهٔ بین جواب‌های معادله $f(x)=0$ و محل تلاقی نمودار تابع $y=f(x)$ با محور طول‌ها
	بازنمایی و مدلسازی	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	تابع خطی را به‌صورت جبری (قانون)، هندسی (نمودار) و جدول مقادیر (عددی) نمایش دهد.
	سایر مهارت‌های تفکر	مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی، دسته بندی کردن	توانایی تعمیم رسم نمودار تابع خطی برای مقادیر مختلف ضریب x یعنی a و همچنین توانایی تعمیم و پیش‌بینی نمودار تابع درجهٔ دوم

بخش اول: تابع‌های خطی

اهداف بخش

- تشخیص تابع‌های خطی و ویژگی اساسی آنها
- رسم نمودار تابع‌های خطی با شیب مثبت، منفی و صفر
- مفهوم تابع ثابت

پیش‌نیازها

- مفهوم تابع، دامنه
- تعیین مقدار تابع به ازای یک مقدار از دامنه
- درک محورهای مختصات و تعیین نکات نقطه

واژه‌های کلیدی:تابع خطی، شیب خط

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش معرفی تابع‌های چندجمله‌ای از درجهٔ ۱ یا همان تابع‌های خطی است. در ابتدا به معرفی انواع پدیده‌های طبیعی و رویدادهای اجتماعی که روابط بین متغیرهای آنها، قابل توصیف و تبیین به‌وسیلهٔ یک تابع خطی است، پرداخته می‌شود. پس از اینکه این پدیده‌ها با یک تابع خطی معرفی شدند، انواع تابع‌های خطی که شیب نمودار آنها مثبت یا منفی است معرفی می‌شوند. در نهایت یک تابع خطی خاص معرفی می‌شود که شیب نمودار آن صفر است که همان تابع ثابت است.

ورود به مطلب

برای شروع تدریس، می‌توان انواعی از روابط و پدیده‌ها مانند رشد گیاهان، حرکت یک متحرک مانند اتومبیل یا یک قطار با سرعت یکنواخت را مطرح کرد و با تأکید روی رشد با سرعت ثابت، تمرکز بحث را به سمت ایجاد سؤال برای نحوهٔ توصیف این‌گونه پدیده‌ها به زبان ریاضی برد.

فعالیت آموزشی

کتاب با بحث بین محمد و مادرش درباره رشد یک گیاه خاص شروع می‌شود که محمد قصد دارد میزان رشد گیاه را بر حسب زمان به‌دست آورد که هدف فعالیت (۱) است. در این فعالیت اهداف زیر دنبال می‌شوند.

فعالیت (۱)

نوعی بامبو پس از آنکه به ارتفاع ۲۰ سانتی‌متر می‌رسد به‌طور تقریبی در هر ساعت ۳/۸ سانتی‌متر رشد می‌کند. ارتفاع بامبو تابعی از زمان است و اگر ارتفاع بامبو را (برحسب سانتی‌متر) پس از t ساعت با $h(t)$ نشان دهیم داریم: $h(t)=20+3/8t$.

اگر رشد بامبو را در یک شبانه‌روز در نظر بگیریم، دامنه این تابع $[0,24]$ خواهد بود.

■ جدول زیر را کامل کنید و اختلاف مقادیر تابع را در داخل مربع‌ها بنویسید.

t (برحسب ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴
h (برحسب سانتی‌متر)					

نمودار زیر، نمودار تابع $h(t)=20+3/8t$ را نشان می‌دهد.

■ به ازای هر یک واحد افزایش مقدار t، مقدار h چه تغییری می‌کند؟

■ رابطه بین دو کمیت h و t، خطی است یا غیر خطی؟ چرا؟

■ $h(2)$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟ $h(18)$ چطور؟

■ اگر $h(a)=39$، a را پیدا کنید. این مقدار چه چیزی را نشان می‌دهد؟

اهداف موضوعی

۱ درک مفهوم تابع خطی

۲ تقویت مهارت یافتن مقدار تابع به‌ازای مقدار متغیر تابع و بالعکس.

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ حل مسئله،

۲ پیوندها واتصال‌ها،

۳ الگویابی،

۴ استدلال،

۵ بازنمایی‌ها،

۶ ارتباطات.

در این فعالیت، هنرجویان پدیده‌هایی که به‌صورت یکنواخت تغییر می‌کنند را تشخیص می‌دهند و در این مثال خاص، تابعی که رشد یکنواخت گیاه را با سرعت ثابت ۳/۸ سانتی‌متر توصیف می‌کند، به‌دست می‌آورند. در بندهای مختلف این فعالیت، هنرجو با سرعت رشد (۳/۸ سانتی‌متر) که همان شیب نمودار تابع خطی است آشنا می‌شوند. همچنین مقادیر تابع را به ازای مقادیر مختلف دامنه به دست می‌آورند.

حل فعالیت

t (بر حسب ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴
h (بر حسب سانتی‌متر)	۲۰	۲۳/۸	۲۷/۶	۳۱/۴	۳۵/۲
	+۳/۸	+۳/۸	+۳/۸	+۳/۸	

۲ به اندازهٔ ۳/۸

۳ خطی است. زیرا به ازاء هر یک واحد افزایش مقدار t، مقدار h به اندازهٔ ثابت ۳/۸ تغییر می‌کند.

۴ ارتفاع بامبو در ساعت دوم را نشان می‌دهد. ارتفاع بامبو در ساعت ۱۸ اُم را نشان می‌دهد.

۵ $h(a)$ =۳۹ یعنی ارتفاع بامبو در ساعتِ a، ۳۹ متر است.

کار در کلاس

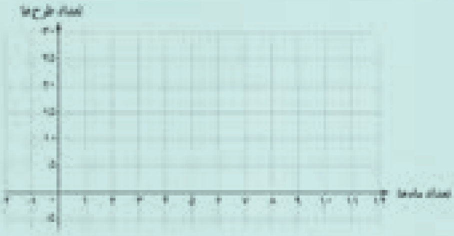
رضا علاقهٔ زیادی به طراحی داشت. او تا سال قبل، ۵ طرح رسم کرده بود و تصمیم گرفت از این به بعد هر ماه ۲ طرح ارائه کند و این کار را تا ۱۲ ماه ادامه دهد.

■ رضا قبل از این تصمیم، چند طرح داشت؟ او در آخر ماه اول چند طرح داشت؟ در آخر ماه پنجم چطور؟

■ اگر تعداد ماه‌های سپری شده را با x و تعداد کل طرح‌ها پس از x ماه را با $f(x)$ نمایش دهیم، قانون تابع f و دامنهٔ آن را بنویسید.

■ مقادیر $f(۱۰)$ و $f(۰)$ را به‌دست آورید و معنای آن را بیان کنید. آیا $f(-۱)$ معنایی دارد؟

■ اگر دامنهٔ تابع را بازهٔ $[۰, ۱۲]$ در نظر بگیریم، نمودار تابع را رسم کنید.



■ اگر $f(x)=۱۷$، مقدار x را به‌دست آورید و معنای آن را بیان کنید.

حل کار در کلاس ۱

اهداف: تقویت مهارت استفاده از توابع خطی در توصیف وضعیت‌های واقعی، حل مسئله (مدلسازی)، پیوندها واتصال‌ها، ارتباطات ارزیابی، بازنمایی‌ها.

۱ ۵ طرح تا سال قبل ـ در آخر ماه اول ۷ طرح ـ در آخر ماه پنجم ۱۵ = (۵) ۲+ ۵

۲ $f(x)=۲x+۵$، چون عمل طراحی فقط ۱۲ماه ادامه دارد، دامنه این تابع مجموعه $\{۰،۱،۲،...،۱۲\}$ است.

۳ $f(۰)$ یعنی رضا قبل از این تصمیم، ۵ طرح داشته است.

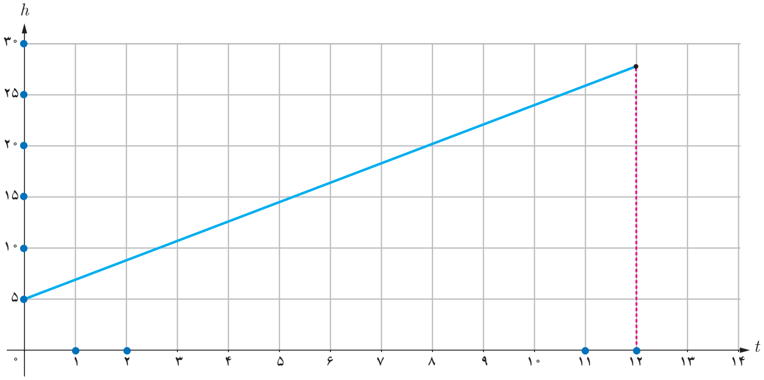
$f(۰)=۲\times ۰+۵=۵$

$f(۱۰)$ یعنی رضا بعد از ماه دهم، ۱۵ طرح دارد.

$f(۱۰)=۲\times ۱۰+۵=۲۵$

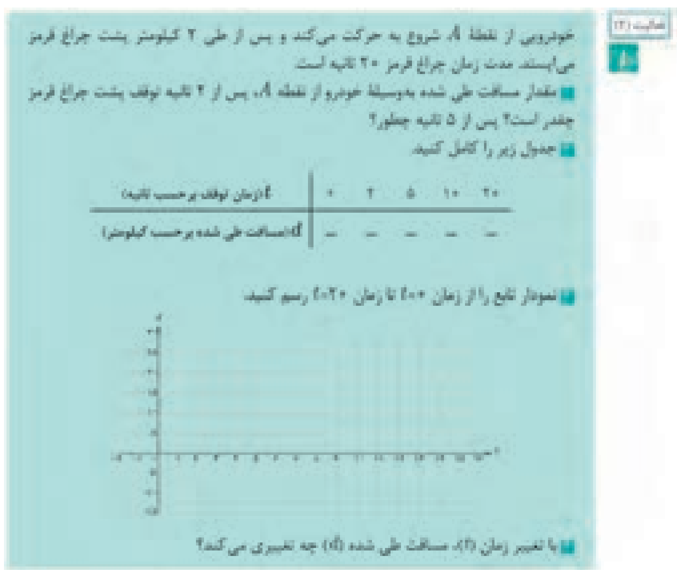
$f(-۱)$ معنا ندارد زیرا این تابع فقط از ماه اول به بعد را توصیف می‌کند و در مورد قبل از آن اطلاعاتی را نمی‌دهد.

۴ دامنه واقعی تابع مجموعه گسسته $\{۰،۱،۲، ...، ۱۲\}$ است ولی در اینجا دامنه را به‌صورت بازه $[۰،۱۲]$ در نظر گرفته‌ایم.



۵ معنی $f(a)=۱۷$ یعنی اینکه رضا پس از a ماه، ۱۷ طرح داشته است که پاسخ ۶ ماه است.

پس از معرفی توابع خطی که شیب نمودار در آنها مثبت و یا منفی است، می‌خواهیم توابع خطی با شیب صفر و در واقع توابع ثابت را معرفی کنیم.



فعالیت (۲)

خودرویی از نقطهٔ A شروع به حرکت می‌کند و پس از طی ۲ کیلومتر پشت چراغ قرمز می‌ایستد. مدت زمان چراغ قرمز ۲۰ ثانیه است.

- مقدار مسافت طی شده به‌وسیلهٔ خودرو از نقطهٔ A، پس از ۲ ثانیه توقف پشت چراغ قرمز چقدر است؟ پس از ۵ ثانیه چطور؟
- جدول زیر را کامل کنید.

t (زمان توقف برحسب ثانیه)	۰	۲	۵	۱۰	۲۰
d (مسافت طی شده برحسب کیلومتر)	ـــ	ـــ	ـــ	ـــ	ـــ

- نمودار تابع را از زمان $t=۰$ تا زمان $t=۲۰$ رسم کنید.
- با تغییر زمان (t)، مسافت طی شده (d) چه تغییری می‌کند؟

هدف فعالیت:

معرفی تابع ثابت و تشخیص عدم تغییر مقدار تابع با تغییر مقدار متغیر

هدف موضوعی:

درک مفهوم تابع ثابت

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ حل مسئله،

۲ پیوندها و اتصال‌ها،

۳ الگویابی،

۴ بازنمایی‌ها،

۵ ارتباطات.

حل فعالیت ۲

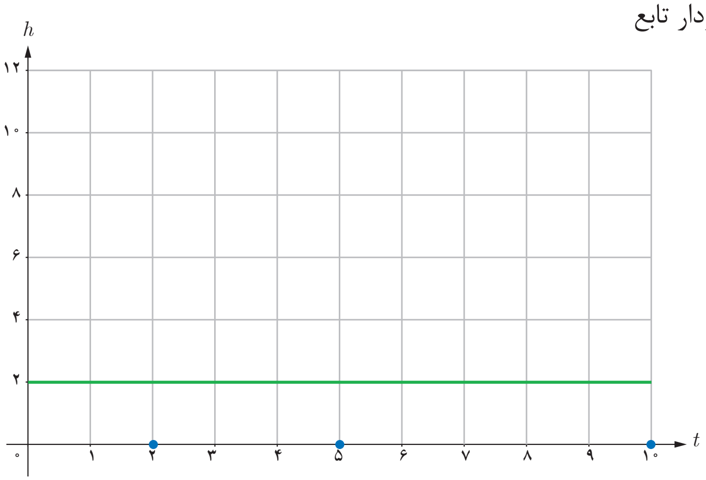
هدف از این فعالیت معرفی تابع ثابت است. خودرویی پس از طی ۲ کیلومتر مسافت از نقطه شروع حرکتش، پشت چراغ قرمز متوقف می‌شود و تا ۲۰ ثانیه بعد که چراغ قرمز هست، هیچ حرکتی ندارد و در نتیجه مسافت طی شده‌اش تغییر نمی‌کند.

۱ پس از ۲ ثانیه، ۲ کیلومتر . پس از ۵ ثانیه ۲ کیلومتر.

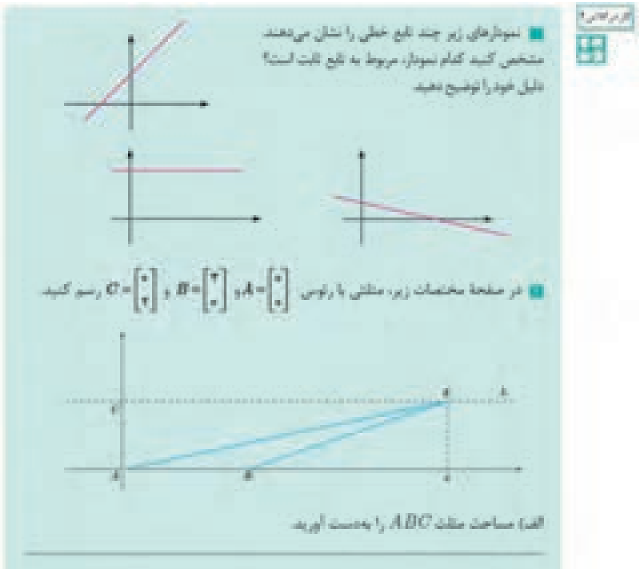
۲

t	۰	۲	۵	۱۰
d	۲	۲	۲	۲

۳ نمودار تابع



۴ با گذشت زمان، مسافت تغییر نمی‌کند.



حل کار در کلاس ۲

اهداف: تقویت مهارت تشخیص توابع خطی، تفکر بصری، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال، ارتباطات، بازنمایی‌ها.

۱ نمودار دوم نمودار تابع ثابت است. زیرا نمودار آن خطی به موازات محور xها است و این نشان می‌دهد با تغییر مقدار x، مقدار تابع تغییر نمی‌کند.
مثلث‌های ABC و ABC' و هر مثلث دیگر که یک ضلع آن AB است و رأس سوم آن (C) روی خط L قرار داشته باشد دارای مساحت‌های مساوی ۳ هستند. مساحت‌های این مثلث‌ها تابعی از طول نقطهٔ C روی خط L هستند که البته مقدار آنها، مقدار ثابت ۳ است.

الف) $S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۲ = ۳$

ب)

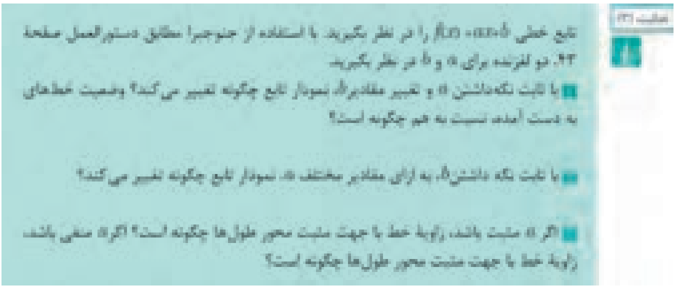
x	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳
S	۳	۳	۳	۳	۳	۳

اختلاف مقادیر تابع در همه نقاط صفر است.

پ) به ازاء هر یک مقدار برای x، فقط یک مقدار برای مساحت S به دست می‌آید بنابراین S تابعی از x است و $S(x)=۳$.

ت) مقدار $S(x)$ هیچ تغییری نمی‌کند. شیب نمودار تابع (شیب خط) صفر است.

ث) نمودار تابع خطی موازی محور طول‌ها است.



فعالیت ۳

تابع خطی $f(x)=ax+b$ را در نظر بگیرید. با استفاده از جئوجبرا مطابق دستورالعمل صفحهٔ ۴۴، دو لغزنده برای a و b در نظر بگیرید.

- با ثابت نگه‌داشتن a و تغییر مقادیر b، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟ وضعیت خط‌های به دست آمده نسبت به هم چگونه است؟
- با ثابت نگه داشتن b، به ازای مقادیر مختلف a، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟
- اگر a مثبت باشد، زاویهٔ خط با جهت مثبت محور طول‌ها چگونه است؟ اگر a منفی باشد، زاویهٔ خط با جهت مثبت محور طول‌ها چگونه است؟

هدف فعالیت ۳

درک نقش پارامترهای a و b در تعیین وضعیت (شیب، عرض از مبدأ و ...) نمودار خط $y=ax+b$

مهارت‌ها وفرایندها:

۱ حل مسئله،

۲ تقویت مهارت استفاده از نرم‌افزار،

۳ بازنمایی،

۴ ارزیابی،

۵ تعمیم دادن،

۶ تفکر بصری،

۷ ارتباطات.

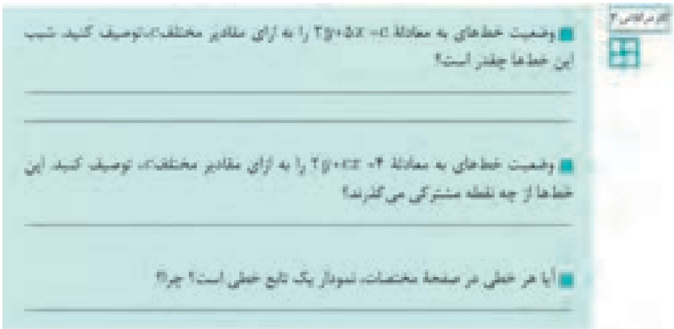
حل فعالیت ۳

در این فعالیت با استفاده از جئوجبرا نمودار تابع‌های خطی $y=ax+b$ را رسم می‌کنیم.

۱ محل تلاقی نمودار این توابع با محور yها نقطه b است که با تغییر b، محل تلاقی روی محور yها بالا و پایین می‌رود. همهٔ این خطوط موازی‌اند، چون a تغییر نمی‌کند.

۲ همهٔ این توابع از نقطه‌ای به عرض b و طول صفر عبور می‌کنند و همدیگر را در این نقطه قطع می‌کنند و فقط شیب خطوط متفاوت است.

۳ زمانی‌که علامت a مثبت است نمودار (خط) با جهت مثبت محور طول‌ها زاویهٔ بین ۰ تا ۹۰ درجه می‌سازد و زمانی‌که علامت a منفی است نمودار (خط) با جهت مثبت محور طول‌ها زاویهٔ بین ۹۰ تا ۱۸۰ درجه می‌سازد.


کار در کلاس ۳

وضعیت خط‌های به معادلهٔ $5x+2y=c$ را به ازای مقادیر مختلف c توصیف کنید. شیب این خط‌ها چقدر است؟

وضعیت خط‌های به معادلهٔ $cx+2y=4$ را به ازای مقادیر مختلف c توصیف کنید. این خط‌ها از چه نقطهٔ مشترکی می‌گذرند؟

آیا هر خطی در صفحهٔ مختصات، نمودار یک تابع خطی است؟ چرا؟

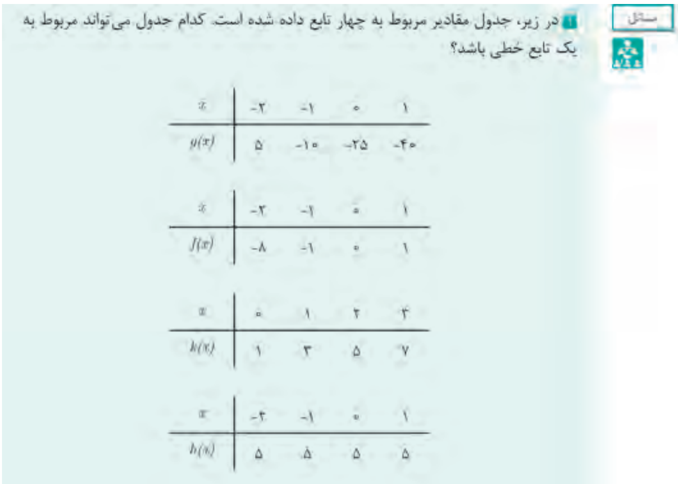
حل کار در کلاس ۳

اهداف: درک نقش پارامترهای a و c در تعیین وضعیت (شیب، عرض از مبدأ و ...) نمودار خط $ax+by=c$، استدلال، ارتباطات، بازنمایی‌ها، تقویت مهارت استفاده از نرم‌افزار.

۱ تمام این خطوط با هم موازی هستند و برای مقادیر مختلف c عرض از مبدأ آنها مختلف خواهد بود. شیب آنها ۵/۲- است.

۲ این خطوط متقاطع هستند و شیب آنها با تغییر مقدار c تغییر می‌کند. این خطوط یکدیگر را در نقطه (۰،۲) قطع می‌کنند.

۳ خیر، خطوطی که به موازات محور عرض‌ها (yها) است نمودار تابع نیستند. زیرا برای هر x، فقط یک y نداریم.



مسائل

۱ در زیر، جدول مقادیر مربوط به چهار تابع داده شده است. کدام جدول می‌تواند مربوط به یک تابع خطی باشد؟

x	−۲	−۱	۰	۱
$g(x)$	۵	−۱۰	−۲۵	−۴۰

x	−۲	−۱	۰	۱
$f(x)$	−۸	−۱	۰	۱

x	۰	۱	۲	۴
$k(x)$	۱	۳	۵	۷

x	−۴	−۱	۰	۱
$h(x)$	۵	۵	۵	۵

حل مسائل

۱ــ اهداف: تشخیص تابع خطی از طریق چگونگی تغییر مقادیر تابع

مهارت‌ها و فرایندها:

استدلال، حل مسئله.

تابع g خطی است زیرا به ازای یک واحد افزایش مقدار x، مقدار $g(x)$ به اندازه ثابت ۱۵ واحد کاهش می‌یابد. یعنی شیب نمودار این تابع ثابت بوده و مقدار آن ۱۵− است.

x	−۲	−۱	۰	۱
$g(x)$	۵	−۱۰	−۲۵	−۴۰

تابع f خطی نیست زیرا با تغییر یک واحد متغیر x، مقدار تابع به اندازه ثابت، تغییر نمی‌کند.

x	-۲	-۱	۰	۱
$f(x)$	-۸	-۱	۰	۱

تابع k خطی است زیرا با یک واحد افزایش متغیر x، مقدار تابع به اندازه ثابت ۲ واحد افزایش می‌یابد.

x	۰	۱	۲	۳
$k(x)$	۱	۳	۵	۷

تابع h خطی است. زیرا با یک واحد تغییر مقدار x، مقدار تابع به اندازه ثابت صفر تغییر می‌کند.

x	-۲	-۱	۰	۱
$h(x)$	۵	۵	۵	۵

علی در یک شرکت بیمه کار می‌کند و ۱,۰۰۰,۰۰۰ تومان به‌عنوان حقوق پایه دریافت می‌کند و به ازای هر مشتری جدید که جذب می‌کند ۵۰,۰۰۰ تومان به حقوقش اضافه می‌شود.
الف) قانونی برای حقوق علی به‌عنوان تابعی از تعداد مشتری‌هایی که ماهانه جذب می‌کند، بنویسید.
ب) اگر او در یک ماه ۱۲ مشتری جدید برای شرکت جذب کرده باشد میزان حقوق او در آن ماه چقدر خواهد بود؟
پ) چرا این تابع خطی است؟
ت) اگر علی بخواهد در یک ماه ۲,۰۰۰,۰۰۰ تومان حقوق بگیرد، در این ماه چند مشتری باید جذب کند؟

۲ـ اهداف: تشخیص تابع خطی و یافتن قانون و دامنه آن

مهارت‌ها و فرایندها:

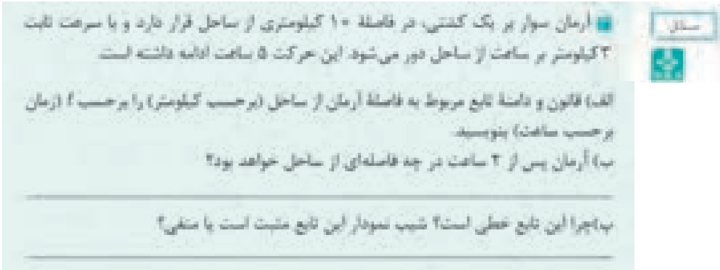
استدلال کردن، حل مسئله، ارتباطات، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی.

الف) $f(x) = ۵۰۰۰۰x + ۱۰۰۰۰۰۰$

ب) $f(۱۲) = ۵۰۰۰۰ \times ۱۲ + ۱۰۰۰۰۰۰ = ۱۶۰۰۰۰۰$

پ) این تابع خطی است زیرا به ازاء اضافه شدن هر یک مشتری، مقدار ثابت ۵۰۰۰۰ تومان حقوق افزایش می‌یابد.

ت) اگر بخواهد دو میلیون تومان حقوق بگیرد باید داشته باشیم $f(x)=2000000$
در این صورت داریم $2000000=50000x+1000000$، بنابراین $x=20$.



مسئله

آرمان سوار بر یک کشتی، در فاصلهٔ ۱۰ کیلومتری از ساحل قرار دارد و با سرعت ثابت ۳ کیلومتر بر ساعت از ساحل دور می‌شود. این حرکت ۵ ساعت ادامه داشته است.

الف) قانون و دامنهٔ تابع مربوط به فاصلهٔ آرمان از ساحل (برحسب کیلومتر) را برحسب t (زمان برحسب ساعت) بنویسید.

ب) آرمان پس از ۲ ساعت در چه فاصله‌ای از ساحل خواهد بود؟

پ) چرا این تابع خطی است؟ شیب نمودار این تابع مثبت است یا منفی؟

۳ــ اهداف: تمرین در تشخیص تابع خطی و یافتن قانون و دامنه آن

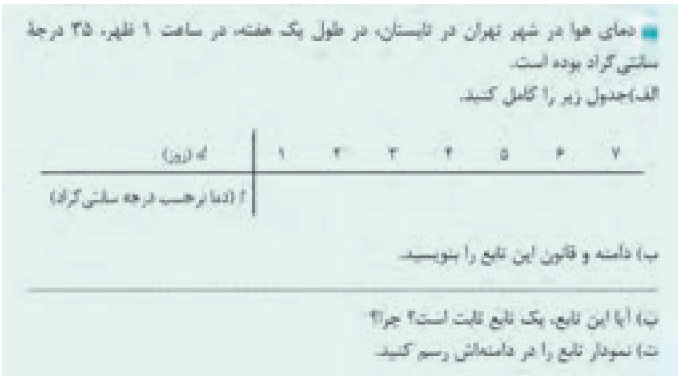
مهارت‌ها و فرایندها:

استدلال کردن، حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات.

الف) $d(t)=10+3t$، دامنه $=[0,5]$

ب) $d(2)=10+3(2)=16$

پ) خطی است زیرا در هر ساعت، به اندازهٔ مقدار ثابت ۳ کیلومتر فاصله‌اش از ساحل بیشتر می‌شود. شیب مثبت است.



دمای هوا در شهر تهران در تابستان، در طول یک هفته، در ساعت ۱ ظهر، ۳۵ درجهٔ سانتی‌گراد بوده است.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

d (روز)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
t (دما برحسب درجه سانتی‌گراد)							

ب) دامنه و قانون این تابع را بنویسید.

پ) آیا این تابع، یک تابع ثابت است؟ چرا؟

ت) نمودار تابع را در دامنه‌اش رسم کنید.

۴ــ اهداف: تشخیص تابع ثابت

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، استدلال، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات.

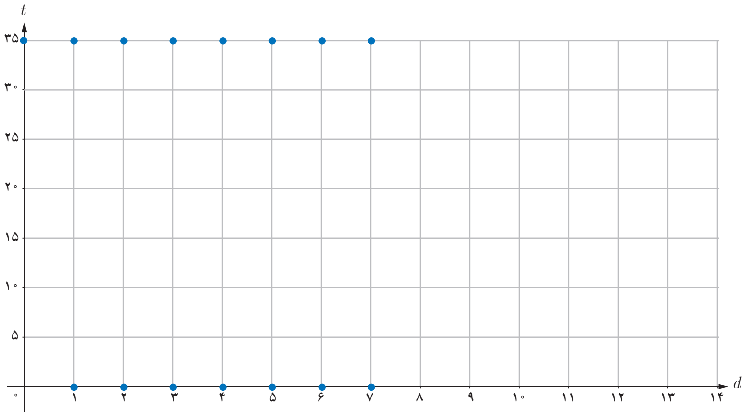
الف)

d (روز)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
t (دما برحسب درجهٔ سانتی‌گراد)	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵	۳۵

ب) دامنه این تابع روزهای هفته یعنی $D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ است و قانون آن به صورت $t(d)=۳۵$ است.

پ) این تابع، تابع ثابت است زیرا مقادیر تابع تغییر نمی‌کند و ثابت است.

ت) نمودار این تابع به خاطر گسسته بودن دامنه به صورت چند نقطه هستند که روی خطی موازی محور طول‌ها قرار دارند.



رابطهٔ بین دو واحد اندازه‌گیری دما، درجهٔ سانتی‌گراد (c) و درجهٔ فارنهایت (F) با قانون $F(c)=\frac{۹}{۵}c+۳۲$ بیان می‌شود.

الف) مقدارهای $F(۲۸)$ و $F(-۴۰)$ را محاسبه کنید و معنای آن را بیان کنید.

ب) دمای صفر درجهٔ سانتی‌گراد، معادل چند درجهٔ فارنهایت است؟

پ) اگر $F(c)=۲۱۲$، مقدار c را حساب کنید. c چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۵ــ اهداف: کار با تابع خطی در یک زمینه فیزیکی

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، استدلال، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات.

الف) دمای ۲۸ درجهٔ سانتی‌گراد با ۸۲/۴ درجهٔ فارنهایت برابر است.

$$f(۲۸)=\frac{۹}{۵}(۲۸)+۳۲=۸۲/۴$$

$$f(-۴۰)=\frac{۹}{۵}(-۴۰)+۳۲=-۴۰$$

ب) اگر $c=۰$ داریم:

$$f(۰)=\frac{۹}{۵}(۰)+۳۲=۳۲$$

پ) از $f(c)=\frac{۹}{۵}c+۳۲=۲۱۲$ نتیجه می‌شود $\frac{۹}{۵}c=۱۸۰$ ، پس $c=۱۰۰$

یعنی دمای ۲۱۲ درجه فارنهایت برابر ۱۰۰ درجه سانتی‌گراد است.

بخش دوم: تابع‌های درجهٔ دوم

اهداف بخش

- معرفی تابع‌های درجه دوم با قانون $y=ax^2+bx+c$
- استفاده از جئوجبرا برای رسم نمودار تابع درجهٔ دوم
- رسم نمودار تابع با استفاده از انتقال به چپ و راست و بالا و پایین نمودار $y=kx^2$

پیش‌نیازها

- مفهوم تابع
- نمودار $y=x^2$
- مربع کامل کردن

واژه‌های کلیدی: تابع، تابع درجهٔ دوم، تابع $y=x^2$

نگاه کلی به بخش

هدف این بخش معرفی تابع درجهٔ دوم است. در ابتدای بخش، داستانی آورده شده است که دانش‌آموز را با موقعیت‌هایی که ممکن است با نمودار توابع درجه دوم برخورد کند، معرفی می‌کند. سپس به کمک جئوجبرا انواع حالات ممکن برای نمودار تابع‌های درجه دوم بررسی می‌شود.

ورود به مطلب

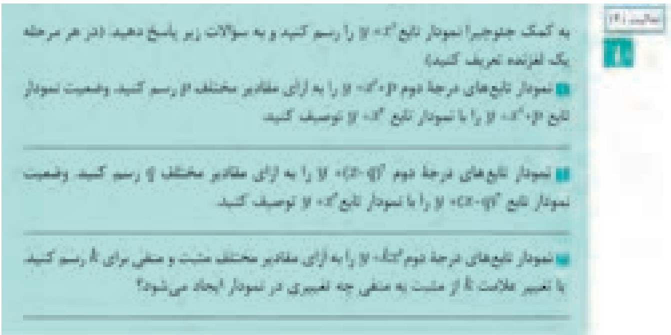
مناسب است که در زمینه‌هاییِ واقعی که تابع‌های درجه دوم و نمودار آنها دیده می‌شوند بحث آغاز شود. مثلاً حرکت پرتابه‌ها مثال خوبی است. فواره‌ها به‌طور طبیعی نمودار یک تابع درجه دوم را رسم می‌کنند. پرتاب یک توپ بسکتبال نیز مثال خوبی است. با توجه به این مثال‌ها می‌توان وارد نمودار تابع‌های درجه دوم شد.

فعالیت آموزشی

با معرفی تابع‌های درجه دوم به فعالیت (۴) می‌رسیم که به کمک جئوجبرا شکل‌های مختلف نمودارهای تابع‌های درجه دوم در آن بررسی می‌شود.

اهداف فعالیت (۴):

رسم نمودار تابع‌های $y=x^2+p$ و $y=(x-q)^2$ و $y=kx^2$ به کمک جئوجبرا و بررسی وضعیت آنها نسبت به نمودار تابع $y=x^2$.



فعالیت (۴)

به کمک جئوجبرا نمودار تابع $y=x^2$ را رسم کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید (در هر مرحله یک لغزنده تعریف کنید.)

نمودار تابع‌های درجهٔ دوم $y=x^2+p$ را به ازای مقادیر مختلف p رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y=x^2+p$ را با نمودار تابع $y=x^2$ توصیف کنید.

نمودار تابع‌های درجهٔ دوم $y=(x-q)^2$ را به ازای مقادیر مختلف q رسم کنید. وضعیت نمودار تابع $y=(x-q)^2$ را با نمودار تابع $y=x^2$ توصیف کنید.

نمودار تابع‌های درجهٔ دوم $y=kx^2$ را به ازای مقادیر مختلف مثبت و منفی برای k رسم کنید. با تغییر علامت k از مثبت به منفی چه تغییری در نمودار ایجاد می‌شود؟

اهداف موضوعی:

۱ درک وضعیت نمودار تابع‌های درجه دوم $y=x^2+p$ و $y=(x-q)^2$ و $y=kx^2$ به کمک تابع $y=x^2$

۲ تقویت مهارت رسم نمودار تابع‌های درجه دوم $y=x^2+p$ و $y=(x-q)^2$ و $y=kx^2$ با استفاده از نمودار $y=x^2$

مهارتها و فرایندها:

۱ حل مسئله

۲ تقویت مهارت استفاده از نرم‌افزار

۳ تعمیم دادن

۴ تفکر بصری

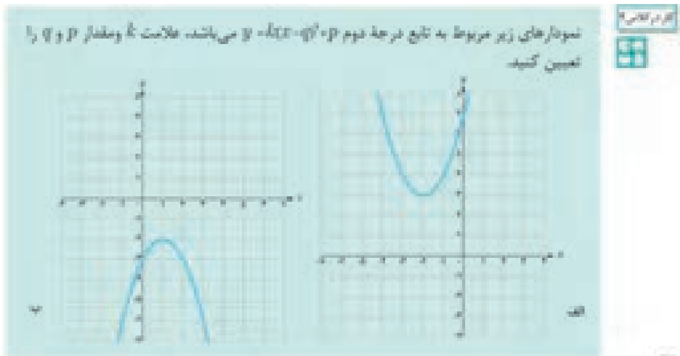
۵ بازنمایی‌ها

حل فعالیت ۴

۱ با انجام عملیات مربوطه در جئوجبرا مشخص می‌شود که با تغییر p نمودار تابع $y=x^2+p$ همان نمودار تابع $y=x^2$ که به اندازه p به بالا یا پایین جابه‌جا شده است.

۲ با انجام عملیات مربوطه در جئوجبرا مشخص می‌شود که با تغییر q نمودار تابع $y=(x-q)^2$ همان نمودار تابع $y=x^2$ که به اندازه q به چپ یا راست منتقل شده است.

۳ برای $k>0$ نمودار مشابه نمودار $y=x^2$ است که شاخه‌های آن به خط عمود (در اینجا محور yها) نزدیک‌تر یا از آن دورتر شده است. برای $k<0$ نمودار مشابه نمودار $y=-x^2$ است که شاخه‌های آن به خط قائم نزدیک‌تر یا دورتر شده است.



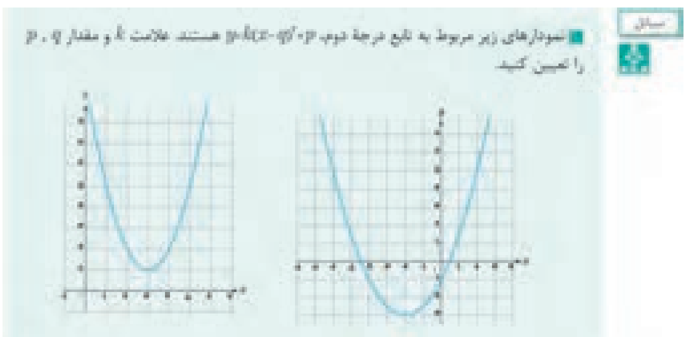
اهداف: تقویت مهارت یافتن معادلهٔ تابع‌های درجه دوّم از روی نمودار آنها به کمک قوانین انتقال تابع، بازنمایی‌ها، تفکر بصری.

حل کار در کلاس ۴

اهداف:

الف) $k>0$ زیرا نمودار رو به بالا است. از آنجا که نمودار ۲ واحد به چپ منتقل شده است پس $q=-2$ و ۳ واحد به بالا منتقل شده است پس $p=3$.

ب) k منفی است زیرا نمودار رو به پایین است. از آنجا که نمودار ۱ واحد به راست منتقل شده است پس $q=1$ و ۲ واحد به پایین منتقل شده است پس $p=-2$.



حل مسائل

۱ــ اهداف: تشخیص قانون تابع‌ها از روی نمودار تابع‌های درجه دوم و تعیین

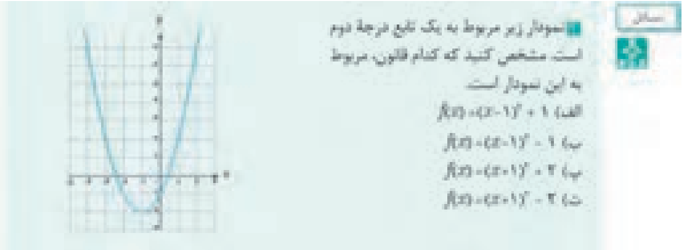
ضرایب و علامت‌های آن

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله به روش هندسی.

در شکل سمت راست k مثبت است، زیرا نمودار $y=kx^۲$ رو به بالاست. نمودار ۲ واحد به چپ منتقل شده، پس $q=-۲$ و ۳ واحد به پایین منتقل شده، پس $p=-۳$ است.

در شکل سمت چپ نمودار $y=kx^۲$ رو به بالاست پس k مثبت است، ۳ واحد به راست منتقل شده پس $q=۳$ و ۱ واحد به بالا منتقل شده است. پس: $p=۱$



مسائل

نمودار زیر مربوط به یک تابع درجهٔ دوم است مشخص کنید که کدام قانون، مربوط به این نمودار است.

الف) $f(x)=(x-1)^2+1$

ب) $f(x)=(x-1)^2-1$

پ) $f(x)=(x+1)^2+2$

ت) $f(x)=(x+1)^2-2$

۲ــ اهداف: تشخیص قانون تابع درجهٔ دوم از روی نمودار آن نمودار این تابع ۱ واحد به چپ و ۲ واحد به پایین منتقل شده است پس $q=-۱$ و $p=-۲$. از طرفی نمودار روبه بالاست پس $k>۰$ است. پس گزینه ت جواب است.

مسائل

فرید بسکتبال بازی می‌کند. تصویر زیر یک پرتاب او را به سمت سبد نشان می‌دهد. صفحهٔ مختصات طوری قرار داده شده است که مبدأ مختصات دقیقاً روی نقطهٔ پرتاب توپ قرار گیرد. ارتفاع توپ از سطح زمین در هر لحظه یک تابع درجهٔ دوم با قانون $h(x)=k(x-q)^2+p$ است. علامت k و p و q را تعیین کنید.

۳ــ اهداف: تمرین روی شکل نمودار تابع‌های درجه دوم در یک زمینه واقعی

k منفی است زیرا نمودار روبه پایین است و نمودار $y=-x^۲$ به چپ و بالا منتقل شده است پس $q<۰$، $p>۰$.

بخش سوم: کاربرد تابع‌ها در حل معادله‌ها

اهداف بخش

- حل معادلهٔ $ax+b=0$ با استفاده از رسم نمودار تابع $f(x)=ax+b$
- حل معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ با استفاده از رسم نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$
- برقراری ارتباط بین محل برخورد نمودار تابع $f(x)$ با محور xها و جواب‌های معادله $f(x)=0$

پیش نیازها

- رسم نمودار تابع خطی $y=ax+b$
- تشخیص نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ از طریق علامت ضرایب c,b,a و برعکس

واژه‌های کلیدی: تابع خطی، تابع درجهٔ دوم، معادله، تلاقی نمودارها

نگاه کلی به بخش

در ابتدای بخش، زمینه و بافتی معرفی شده است که در آن رابطهٔ بین ارتفاع (h) و دمای هوا t به صورت قانون یک تابع توصیف شده است. هدف یافتن ارتفاعی است که در آن ارتفاع، دما صفر درجهٔ سانتی‌گراد است که این، به معنی آن است که محل تلاقی نمودار تابع دما را با محور طول‌ها به‌دست آوریم و از طرف دیگر این به معنی حل یک معادله دما بر حسب ارتفاع است.

ورود به مطلب

معادلات و تابع‌ها بسیار به هم نزدیک‌اند. مناسب است یک معادله مثال بزنید و تابع متناظر آن را بنویسید. بر عکس یک تابع و معادله تناظر آن را بنویسید. چنین تناظری نشان از آن دارد که مفاهیم مربوط به تابع و معادله‌ها در ارتباط با یکدیگر خواهند بود. پرسش اصلی آن است که ارتباط بین معادلات و تابع‌ها چگونه است و این ارتباط چه مسائلی را حل خواهد کرد.

فعالیت آموزشی

پس از یک بحث داستانی و طرح یک مسئله، به فعالیت (۵) می‌رسیم که هدف از آن حل معادله درجهٔ اول از طریق نمودار یک تابع خطی است.

هدف فعالیت (۵): حل معادلهٔ درجهٔ اول با استفاده از نمودار تابع خطی

اهداف موضوعی:

۱ درک طول نقطهٔ برخورد نمودار تابع درجهٔ اول با محور xها به‌عنوان ریشهٔ تابع،

۲ کسب مهارت حل معادلهٔ درجهٔ اول با استفاده از نمودارِ تابع متناظر آن.

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ حل مسئله،

۲ مقایسه‌کردن،

۳ بازنمایی‌ها،

۴ ارتباطات،

۵ تفکر بصری،

۶ پیوندها و اتصال‌ها.

فعالیت (۵)

اگر دما در سطح دریا ۱۵ درجهٔ سانتی‌گراد باشد در کوه دماوند رابطهٔ بین دما (T بر حسب درجه سانتی‌گراد) و ارتفاع از سطح دریا (h بر حسب متر) با تساوی $T(h)=۱۵-\frac{h}{۱۵۰}$ مشخص می‌شود در اینجا T تابعی از h است و دامنهٔ این تابع بازهٔ $[۰,۵۶۱۰]$ است (۵۶۱۰ ارتفاع قلهٔ دماوند برحسب متر است).

۱ $T(۰)$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۲ در ارتفاع ۱۸۰۰ متری از سطح دریا، دما چند درجه است؟

۳ در زیر نمودار تابع T رسم شده است با توجه به نمودار به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. (ارتفاع h را روی محور افقی (هر واحد را ۱۰۰ متر در نظر می‌گیریم) و دمای T را روی محور عمودی نمایش داده شده است).

الف) تابع T، از درجهٔ ... است.

ب) نمودار این تابع در چه نقطه‌ای محور افقی (ارتفاع) را قطع می‌کند؟ این نقطه چه چیزی را نشان می‌دهد؟

حل فعالیت ۵

۱ $T(۰)$ یعنی مقدار دما در ارتفاع صفر که همان سطح دریاست.

۲ درجهٔ سانتی‌گراد

$$T(۱۸۰۰)=۱۵-\frac{۱۸۰۰}{۱۵۰}=۳$$

۳ الف) تابع T از درجه یک است.

ب) محل تقاطع نمودار این تابع با محور طول‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

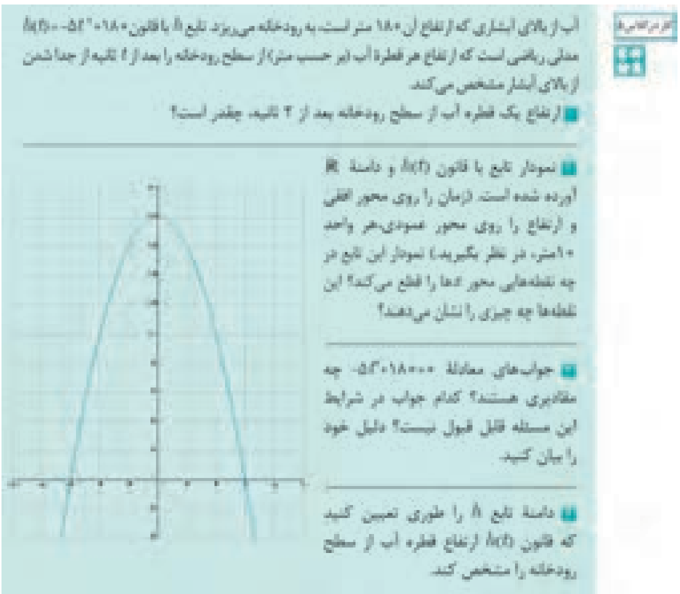
$$T=\circ \Rightarrow T(h)=۱۵-\frac{h}{۱۵\circ}=\circ \Rightarrow \frac{h}{۱۵\circ}=۱۵ \Rightarrow h=۲۲۵\circ$$

این نقطه نشان می‌دهد که دما در ارتفاع ۲۲۵۰ متری از سطح دریا، صفر درجه است.

۴ این معادله نیز همان معادله بالا است. $۱۵-\frac{h}{۱۵\circ}=\circ \Rightarrow h=۲۲۵\circ$. جواب این معادله نیز به همان معنای بالا است و همان ارتفاعی را نشان می‌دهد که در آن، دما صفر است.

۵ نتیجه می‌گیریم برای به‌دست آوردن جواب معادله $۱۵-\frac{h}{۱۵\circ}=\circ$ کافی است محل تلاقی نمودار تابع $T(h)=۱۵-\frac{h}{۱۵\circ}$ را با محور xها به‌دست آوریم.

در جمع‌بندی این فعالیت نتیجه گرفته می‌شود این روش برای هرگونه معادله‌ای قابل به‌کار بردن است و در مثال ۶ یک معادلهٔ درجهٔ ۳ داده شده است و با رسم نمودار ریشه‌های این معادله به دست آمده است.


آب از بالای آبشاری که ارتفاع آن ۱۸۰ متر است به رودخانه می‌ریزد. تابع h با قانون $h(t)=۱۸۰-۵t^{۲}$ مدلی ریاضی است که ارتفاع هر قطرهٔ آب (بر حسب متر) از سطح رودخانه را بعد از t ثانیه از جدا شدن از بالای آبشار مشخص می‌کند.

ارتفاع یک قطره آب از سطح رودخانه بعد از ۴ ثانیه، چقدر است؟

نمودار تابع با قانون $h(t)$ و دامنهٔ $\mathbb{R}$ آورده شده است. (زمان را روی محور افقی و ارتفاع را روی محور عمودی، هر واحد ۱۰ متر، در نظر بگیرید.) نمودار این تابع در چه نقطه‌هایی محور tها را قطع می‌کند؟ این نقطه‌ها چه چیزی را نشان می‌دهند؟

جواب‌های معادلهٔ $۱۸۰-۵t^{۲}=\circ$ چه مقادیری هستند؟ کدام جواب در شرایط این مسئله قابل قبول نیست؟ دلیل خود را بیان کنید.

دامنهٔ تابع h را طوری تعیین کنید که قانون $h(t)$ ارتفاع قطره آب از سطح رودخانه را مشخص کند.

حل کار در کلاس ۵

اهداف: تقویت مهارت حل معادلهٔ درجهٔ دوم با استفاده از نمودار، حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال، ارتباطات، بازنمایی‌ها.

۱ $d(۲)=-۵(۲)^{۲}+۱۸۰ \Rightarrow d(۲)=۱۶۰$ متر

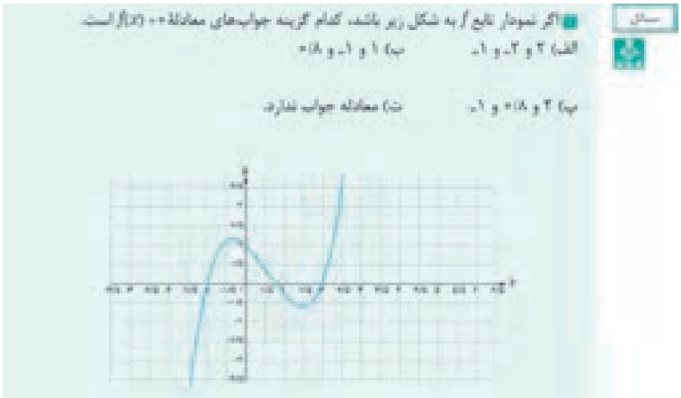
۲ نمودار این تابع در نقاط ۶ و ۶- محور طول‌ها را قطع می‌کند. لحظه ۶ همان لحظه‌ای است که آب به سطح زمین می‌رسد. اما ۶- از لحاظ فیزیکی معنا ندارد.

۳

$$-۵t^{۲}+۱۸۰=۰ \Rightarrow -۵t^{۲}=-۱۸۰ \Rightarrow t^{۲}=۳۶ \Rightarrow t=\pm ۶$$

$t=۶$ یعنی پس از ۶ ثانیه یک قطره به سطح رودخانه می‌رسد امّا $t=-۶$ قابل قبول نیست زیرا این تابع وضعیت قطره آب را در زمان‌های منفی توصیف نمی‌کند.

۴ قانون این تابع فقط از لحظه سقوط قطره آب تا رسیدن به سطح رودخانه اعتبار دارد پس از لحظه $t=۰$ تا $t=۶$ می‌توان از این قانون استفاده کرد و دامنه این تابع بازه $[۰،۶]$ است.



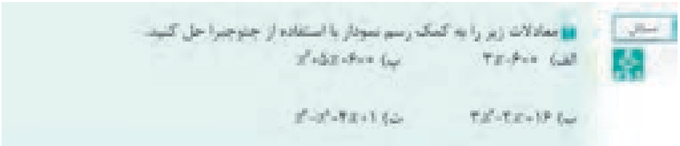
حل مسائل

۱ــ اهداف: حل معادلهٔ $f(x)=۰$ با استفاده از نمودار تابع f.

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله (به روش هندسی)، پرورش تفکر بصری.

گزینهٔ پ. زیرا نمودار تابع در این سه نقطه نمودار محور طول‌ها را قطع می‌کند.


معادلات زیر را به کمک رسم نمودار با استفاده از جئوجبرا حل کنید.

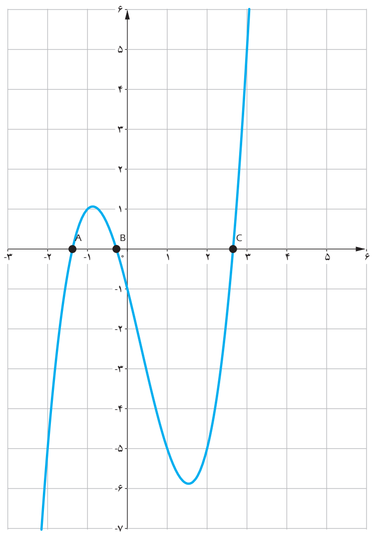
الف) $3x-6=0$ ب) [illegible]

پ) [illegible] ت) [illegible]

۲ـ اهداف: حل معادلهٔ $f(x) = 0$ با استفاده از نمودار تابع f.

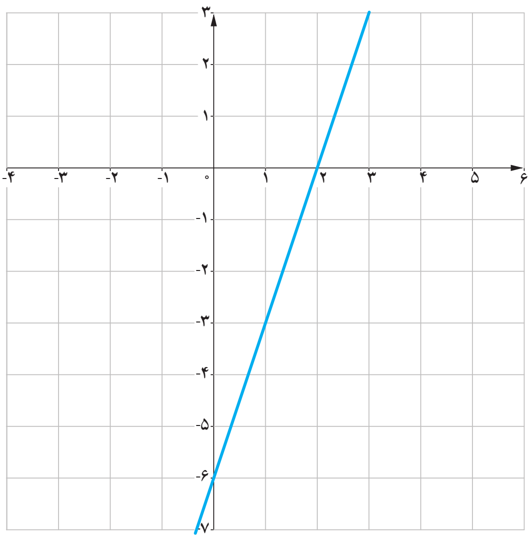
مهارت‌ها و فرایندها:

بازنمایی‌های چندگانه، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، حل مسئله.

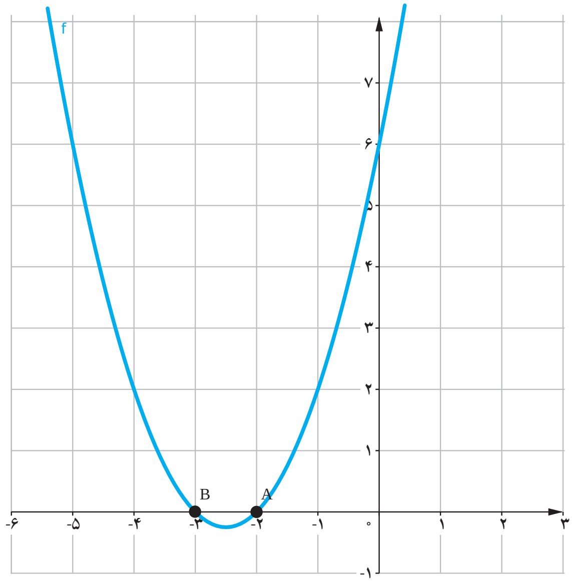


(ت)

این نمودار محور طول‌ها را در نقاط ۱/۸۳- و ۰/۲۷- و ۲/۶۵ قطع می‌کند، پس جواب‌های معادله ۱/۳۸- و ۰/۲۷- و ۲/۶۵ است.

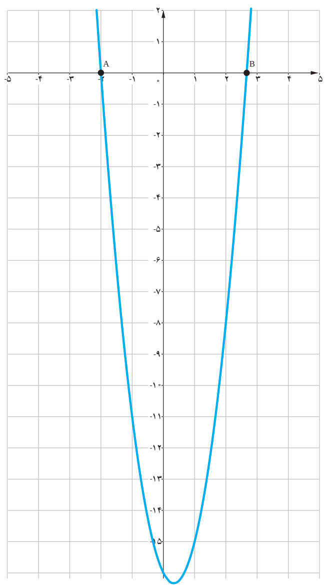

(الف)

این نمودار محور طول‌ها را در نقطه ۲ قطع می‌کند پس جواب معادله ۲ است.



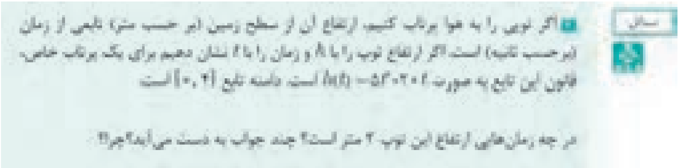
این نمودار محور طول‌ها را در نقاط ۲- و ۳- قطع می‌کند، پس جواب‌های معادله ۲- و ۳- است.

(ب)



(پ)

این نمودار محور طول‌ها را در نقاط ۲- و ۲/۶۷ قطع می‌کند، پس جواب‌های معادله ۲- و ۲/۶۷ است.


مسئله

اگر توپی را به هوا پرتاب کنیم، ارتفاع آن از سطح زمین (بر حسب متر) تابعی از زمان (بر حسب ثانیه) است. اگر ارتفاع توپ را با h و زمان را با t نشان دهیم برای یک پرتاب خاص، قانون این تابع به صورت $h(t)=-5t^2+20t$ است. دامنه تابع $[0, 4]$ است.

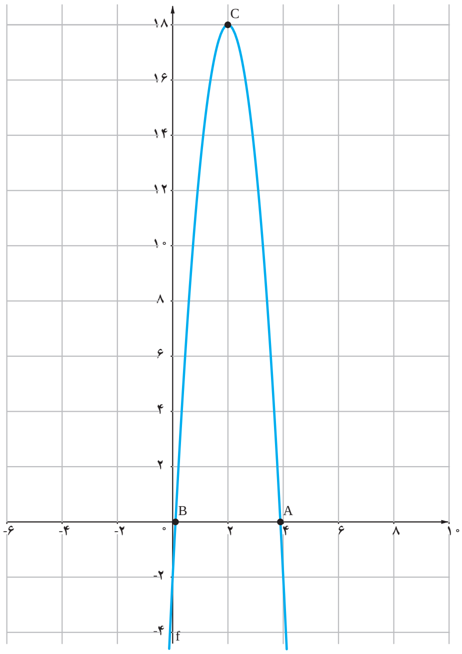
در چه زمان‌هایی ارتفاع این توپ ۲ متر است؟ چند جواب به دست می‌آید؟ چرا؟

۳ــ اهداف: حل یک معادله درجهٔ دوم در زمینه و بافت زندگی و درک معنای جواب یک معادله

مهارت‌ها و فرایندها:
بازنمایی‌ها، پیوند و اتصال با خارج ریاضی، پرورش تفکر واگرا، حل مسئله، استدلال.

$$h(t)=-۵t^۲+۲۰t=۲ \Rightarrow t=۲+\frac{۳}{۵}\sqrt{۱۰} \quad \text{و} \quad t=۲-\frac{۳}{۵}\sqrt{۱۰}$$

مسئله دو جواب دارد. یک بار وقتی که توپ بالا می‌رود و یک بار وقتی که پایین می‌آید.



$y=-۵x^۲+۲۰x$

باید با رسم نمودارها به کمک جئوجبرا حل شوند.
نمودار محور طول‌ها را در نقاط ۰/۱ و ۳/۹ قطع می‌کند، پس جواب‌های معادله ۰/۱ و ۳/۹ است.

بخش چهارم: کاربرد تابع‌ها در حل نامعادله‌ها

اهداف بخش

- حل نامعادلهٔ $ax+b>0$ یا $ax+b<0$ با استفاده از رسم نمودار تابع $f(x)=ax+b$
- حل نامعادلهٔ $ax^2+bx+c>0$ یا $ax^2+bx+c<0$ با استفاده از رسم نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$
- برقراری ارتباط بین وضعیت نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور xها و جواب‌های نامعادله‌های $f(x)>0$ و $f(x)<0$

پیش‌نیازها

- رسم نمودار تابع‌های خطی $y=ax+b$ و نمودار تابع‌های درجه دوم $y=ax^2+bx+c$
- تشخیص علامت مقادیر یک تابع $f(x)$ و وضعیت $f(x)$ نسبت به محور طول‌ها

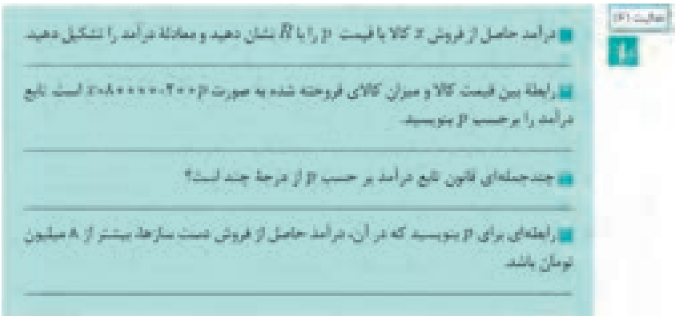
واژه‌های کلیدی: تابع خطی، تابع درجهٔ دوم، نامعادله، علامت مقادیر تابع

نگاه کلی به بخش

در این بخش، به حل نامعادله‌های درجهٔ ۱ و درجهٔ ۲ و بالاتر با استفاده از رسم نمودار می‌پردازیم. در ابتدای فصل یک موقعیت داستانی توصیف شده است که این موقعیت به‌وسیلهٔ یک مدل ریاضی (نامعادله) توصیف شده است. در فعالیت اول هدف ارتباط دادن این موقعیت و نامعادله است و در فعالیت دوم روش حل نامعادله‌ها با استفاده از رسم نمودار مشخص می‌شود.

ورود به مطلب

معادلات و نامعادلات بسیار به هم نزدیک‌اند و هر معادله‌ای متناظر نامعادله‌هایی است. می‌توان ابتدا مفهوم نامعادله را یادآوری کرد و در زمینه‌های واقعی نمونه‌هایی از آن را نشان داد. قبلاً نامعادله‌های درجه اول آموزش داده شده‌اند و بر مبنای آن می‌توان سایر نامعادله‌ها را نیز مطرح کرد. در کتاب در یک زمینهٔ واقعی نمونه‌ای از نامعادله‌های درجه دوم طرح شده است. سپس با ایده گرفتن از حل معادلات به کمک نمودارها روش حل نموداری نامعادله‌ها و امکان آن می‌تواند طرح شود و طبق فعالیت‌های کتاب پیش رفت.


فعالیت (۶)

درآمد حاصل از فروش x کالا با قیمت p را با R نشان دهید و معادلهٔ درآمد را تشکیل دهید.

رابطهٔ بین قیمت کالا و میزان کالای فروخته شده به صورت $x=80000-200p$ است. تابع درآمد را برحسب p بنویسید.

چندجمله‌ای قانون تابع درآمد بر حسب p از درجهٔ چند است؟

رابطه‌ای برای p بنویسید که در آن، درآمد حاصل از فروش دست سازها بیشتر از ۸ میلیون تومان باشد.

فعالیت آموزشی

پس از توصیف کوتاه یک موقعیت به فعالیت (۶) می‌رسیم که هدف از آن مدل‌سازی ریاضی یک موقعیت واقعی و رسیدن به یک نامعادله درجه دوم است.

هدف فعالیت (۶): نوشتن نامعادلهٔ درجهٔ دوم برای توصیف یک موقعیت واقعی

اهداف موضوعی:

۱ درک مفهوم نامعادله درجه دوم،

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ حل مسئله(مدل‌سازی)،

۲ پیوندها و اتصال‌ها،

۳ ارتباطات.

حل فعالیت ۶

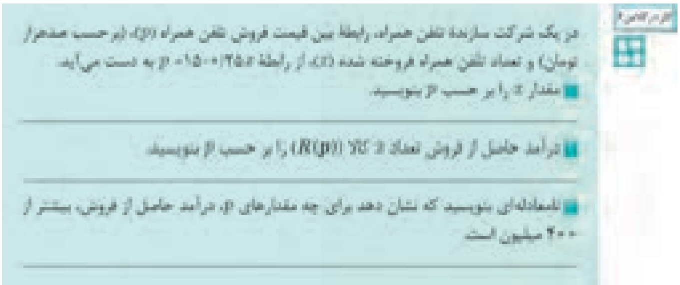
۱ $R=p\times x$

۲ $R=p\times(80000-200p)$ بنابراین $R=80000p-200p^2$

۳ از درجهٔ ۲

۴ $R>8000000 \Rightarrow 80000p-200p^2>8000000 \Rightarrow -p^2+400p-40000>0$

با انجام این فعالیت به یک نامساوی می‌رسیم که نمونه‌ای از یک نامعادله از درجهٔ ۲ است.



کار در کلاس ۶

در یک شرکت سازندهٔ تلفن همراه، رابطهٔ بین قیمت فروش تلفن همراه (p) (بر حسب صدهزار تومان) و تعداد تلفن همراه فروخته شده (x)، از رابطهٔ $p=۱۵-۰/۲۵x$ به دست می‌آید.

■ مقدار x را بر حسب p بنویسید.

■ درآمد حاصل از فروش تعداد x کالا ($R(p)$) را بر حسب p بنویسید.

■ نامعادله‌ای بنویسید که نشان دهد برای چه مقدارهای p، درآمد حاصل از فروش بیشتر از ۴۰۰ میلیون است.

حل کار در کلاس ۶

اهداف: تقویت مهارت مدل‌سازی پدیده‌ها با استفاده از نامعادلهٔ درجهٔ دوم، پیوندها و اتصال‌ها، ارتباطات.

۱ $x=۶۰-۴p$

۲ $R=xp=(۶۰-۴p)p=۶۰p-۴p^۲$

۳ $۶۰p-۴p^۲>۴۰۰۰$ (قیمت بر حسب صد هزار تومان است)

در ادامه به شیوه‌های حل نامعادله‌ها از طریق نمودارهای تابع‌ها پرداخته می‌شود.

اهداف موضوعی:

۱ تعیین علامت مقادیر تابع درجهٔ دوم به‌ازای مقادیر مختلف متغیر تابع با استفاده از نمودار،

۲ کسب مهارت حل نامعادلهٔ درجهٔ دوم با استفاده از نمودار

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ مقایسه کردن،

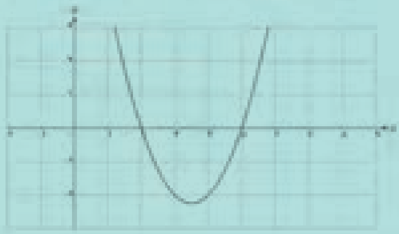
۲ استدلال،

۳ بازنمایی،

۴ ارتباطات.

فعالیت ۷

تابع $f(x)=x^2-7x+10$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. نمودار آن در زیر رسم شده است.



۱ طول نقاط محل برخورد نمودار تابع با محور xها، چه چیزی را نشان می‌دهند؟

۲ با استفاده از نمودار، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را به دست آورید.

۳ آن قسمت از نمودار تابع را که بالای محور xها قرار گرفته است، رنگی(پررنگ) کنید، و جملهٔ زیر را کامل کنید:
عرض نقاط رنگی(کوچک‌تر از صفر / بزرگ‌تر از صفر) است.

۴ به ازای چه مقادیری از دامنه، مقدار تابع مثبت است؟ این مقادیر از دامنه را به صورت بازه نمایش دهید.

۵ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^2-7x+10>0$ با مجموعه به دست آمده در (۴) چه رابطه‌ای دارد؟ توضیح دهید.

۶ آن قسمت از نمودار تابع را که پایین محور xها قرار گرفته است با رنگ دیگری مشخص کنید.

۷ به ازای چه مقادیری از دامنه، مقدار تابع منفی است؟ این قسمت از دامنه را با استفاده از بازه‌ها بنویسید.

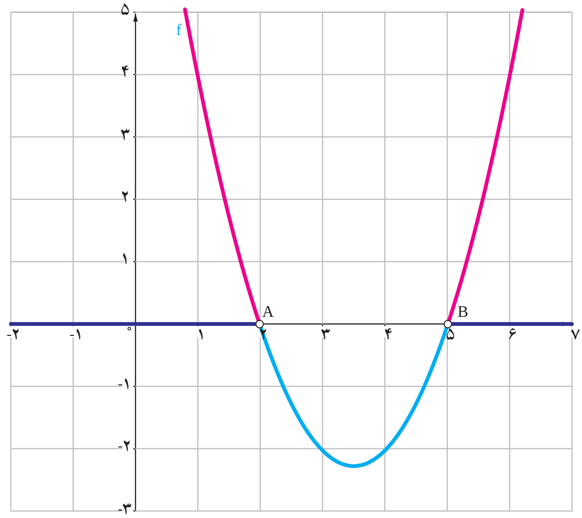
۸ آیا مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^2-7x+10<0$ همان مجموعهٔ به دست آمده در (۷) است؟ توضیح دهید.

حل فعالیت ۷

۱ طول نقاط محل برخورد نمودار تابع با محور xها، همان جواب‌های معادله $f(x)=x^2-7x+10=0$ هستند.

۲ نقاط برخورد $x=5$. $x=2$ هستند که همان جواب‌های معادله هستند.

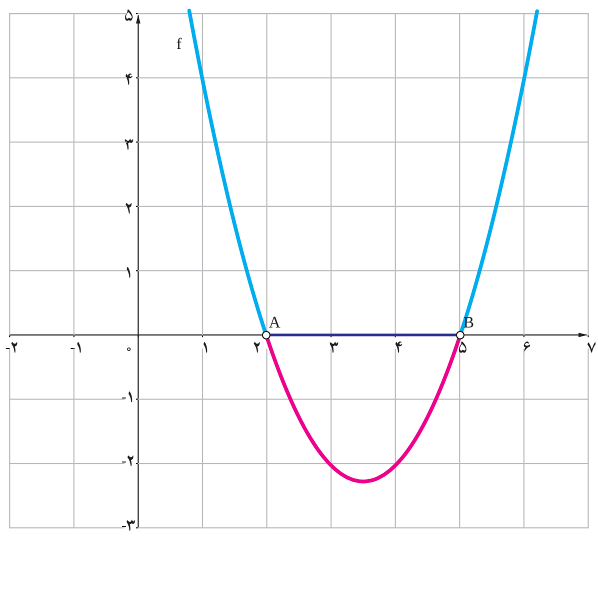
۳ عرض نقاط رنگی شده بزرگ‌تر از صفر هستند.



۴ به ازای طول نقاط رنگی شده مقدار تابع مثبت است و این نقاط مجموعه $(-\infty,۲) \cup (۵,+\infty)$ را تشکیل می‌دهند.

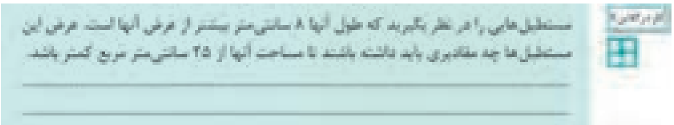
۵ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^۲-۷x+۱۰>۰$، یعنی تمام مقادیر x که $x^۲-۷x+۱۰$ بیشتر از صفر باشد که همان xهایی است به ازای آنها، مقدار تابع $f(x)$ مثبت است و همان مجموعهٔ $(-\infty,۲) \cup (۵,+\infty)$ است.

۶



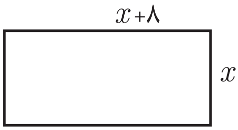
۷ بازه $(۲, ۵)$

۸ بله، مجموعهٔ جواب $x^۲-۷x+۱۰<۰$ یعنی تمام مقادیر x که $x^۲-۷x+۱۰$ کمتر از صفر باشد که همان xهایی است به ازای آنها، مقدار تابع $f(x)$ منفی است و همان مجموعهٔ $(۲, ۵)$ است.


کار در کلاس
مستطیل‌هایی را در نظر بگیرید که طول آنها ۸ سانتی‌متر بیشتر از عرض آنهاست. عرض این مستطیل‌ها چه مقادیری باید داشته باشند تا مساحت آنها از ۲۵ سانتی‌متر مربع کمتر باشد.

حل کار در کلاس (۷)

اهداف: تقویت مهارت حل نامعادلهٔ درجهٔ دوم با استفاده از نمودار، حل مسئله (مدل‌سازی)، پیوندها و اتصال‌ها، ارتباطات، کسب مهارت استفاده از نرم‌افزار.

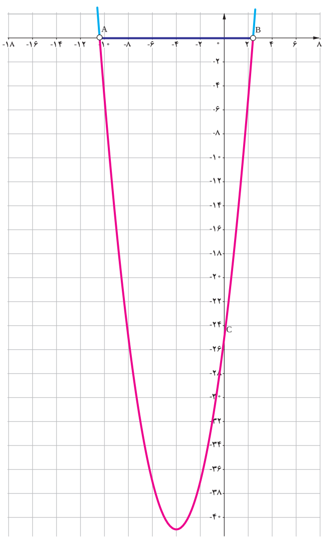


مساحت مستطیل $=(x+۸)x=x^۲+۸x$

$x^۲+۸x<۲۵$

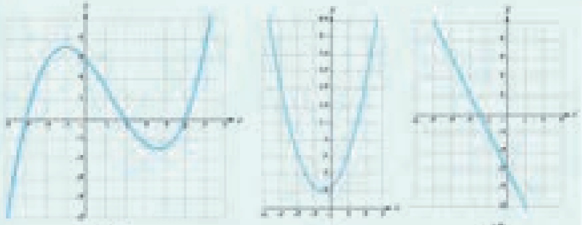
$x^۲+۸x-۲۵<۰$

برای حل نامعادله، نمودار تابع $f(x)=x^۲+۸x-۲۵$ را با دامنه $\mathbb{R}$ رسم می‌کنیم و قسمت پایین محور xها را انتخاب می‌کنیم. از روی شکل به‌طور تقریبی جواب‌های معادله $f(x)=x^۲+۸x-۲۵=۰$ عبارت‌اند از $x\approx -۱۰/۴$. $x\approx ۲/۴$ و قسمت پایین نمودار این تابع در بازه $(-۱۰/۴\ ,\ ۲/۴)$ رخ می‌دهد که جواب این نامعادله است.
اما این نامعادله و تابع مربوط به آن مربوط به عرض مستطیل‌ها است که مقادیر مثبتی دارند. یعنی دامنه تغییر x فقط در بازه $(۰, +\infty)$ است. بنابراین این نامعادله روی بازه مطرح است و نمودار تابع فقط در این بازه باید رسم شود. که نتیجه می‌دهد مجموعه جواب نامعادله بازه $(۰\ ,\ ۱۰/۴)$ است.



مسائل

در زیر نمودارهای چهار تابع رسم شده است. در هر مورد مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $f(x)\geq 0$ را مشخص کنید.



الف   ب   پ

حل مسائل

۱ــ اهداف: تشخیص دیداری مجموعه جواب‌های نامعادله‌ها از روی نمودار تابع‌ها

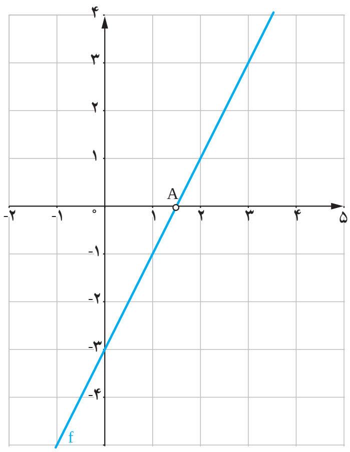
مهارت‌ها و فرایندها:
پرورش تفکر بصری، حل مسئله

الف: $(-\infty, -۱/۵]$ ب: $\mathbb{R}$ پ: $[-۳,۲] \cup [۵,+\infty)$

مسائل

نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $۲x-۳<۰$ ب) $۴x^2-۵x-۱\geq ۰$ پ) $-x^2+۴x+۳\geq -۲$



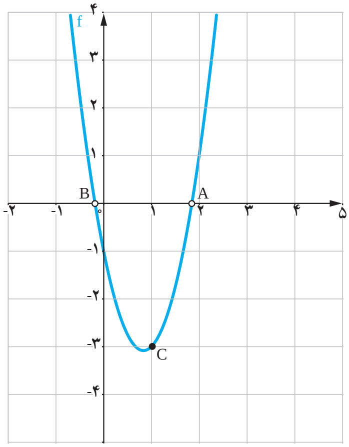
۲ــ اهداف: تمرین روی حل نامعادله‌ها با استفاده از نمودار تابع‌ها

مهارت‌ها و فرایندها: پرورش تفکر بصری، بازنمایی‌های چندگانه، مهارت کار با ابزار، حل مسئله.

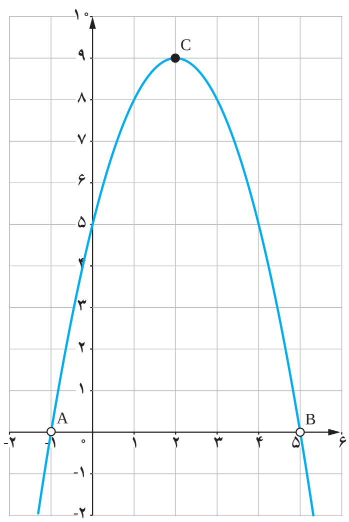
الف) $(-\infty,\frac{۳}{۲})$

نمودار در بازه $(-\infty,\frac{۳}{۲})$ زیر محور xها است و این بازه مجموعهٔ جواب نامعادله است.

ب) از طریق نمودار مجموعه جواب نامعادله به‌طور تقریبی مجموعه $(-\infty, -۰/۱۸) \cup (۱/۸۵, +\infty)$ است.



پ) از طریق نمودار مجموعه جواب نامعادله به‌طور تقریبی بازه $[-۱, ۵]$ است.



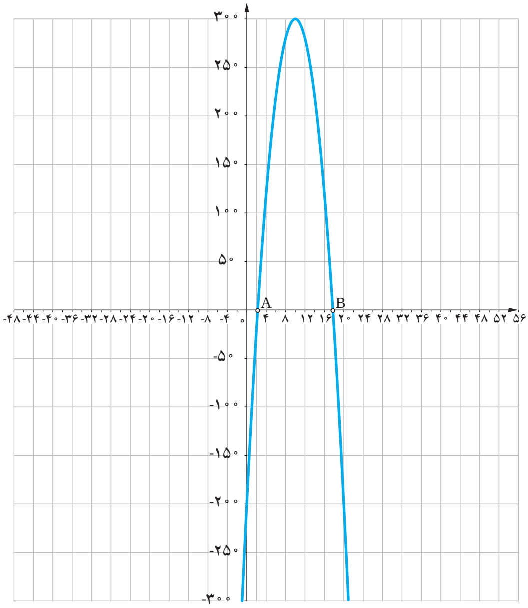
مسئله

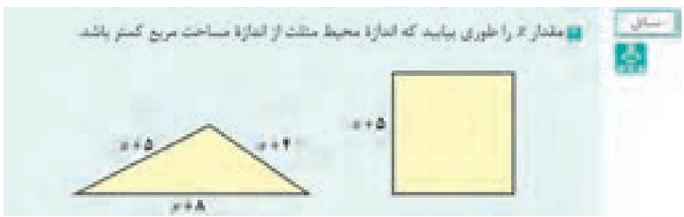
پرتابه‌ای به طور عمودی به هوا پرتاب می‌شود. ارتفاع این پرتابه از سطح دریا (برحسب متر) به صورت تابعی از زمان (برحسب ثانیه) با رابطهٔ $h(t) = -۵t^2 + ۱۰۰t$ داده شده است. مشخص کنید در چه بازهٔ زمانی، ارتفاع این پرتابه بیش از ۲۰۰ متر خواهد بود.

۳ـ اهداف: حل یک مسئله در زمینه و بافت زندگی واقعی و توجه به محدودیت‌های آن و تفسیر جواب
مهارت‌ها و فرایندها: پیوند و اتصال با خارج ریاضی، حل مسئله به روش هندسی.

$$-5t^2+100t>200 \Rightarrow -t^2+20t-40>0$$

از طریق رسم نمودار تابع با دامنه $\mathbb{R}$ مجموعه جواب نامعادله به طور تقریبی بازه (۲/۲۵,۱۷/۷۵) است. از آنجا که دامنه واقعی تابع شامل این بازه است، همین جواب درست است. اولین زمان مربوط به بالاتر رفتن پرتابه از ارتفاع ۲۰۰ متر است و دومین زمان مربوط به بازگشت از بالا و رسیدن به ارتفاع ۲۰۰ متر است.





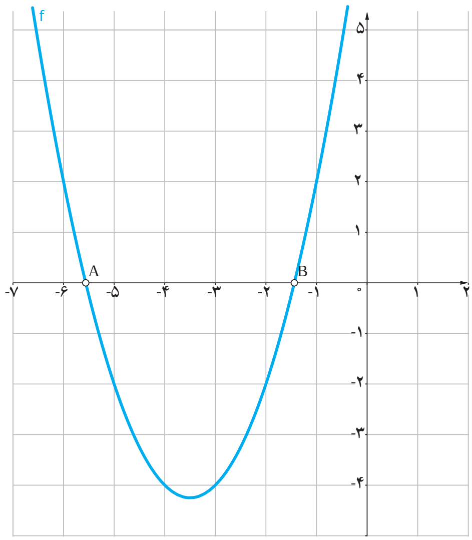
۴ـ اهداف: استدلال، یافتن رابطه‌ها، حل نامعادله و تفسیر جواب
مهارت‌ها و فرایندها: حل مسئله.

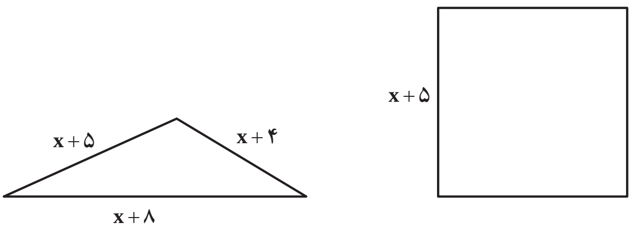
محیط مثلث= $x+5+x+4+x+8=3x+17$

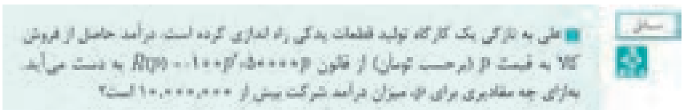
مساحت مربع $= (x+۵)^۲$

$۳x+۱۷۲(x+۵)^۲ \Rightarrow x^۲+۷x+۸>۰$

با رسم نمودار تابع با دامنه $\mathbb{R}$، مجموعه جواب این نامعادله به‌طور تقریبی به‌صورت $(-۱/۴,+\infty) \cup (-\infty,-۵/۵)$ است. اما با توجه به آنکه طول اضلاع مثلث و مربع مثبت باید باشند باید داشته باشیم $-۴<x$. پس مجموعه جواب اصلی بازه $(-۱/۴,+\infty)$ است.






علی به تازگی یک کارگاه تولید قطعات یدکی راه اندازی کرده است. درآمد حاصل از فروش کالا به قیمت p (برحسب تومان) از قانون $R(p)=-۱۰۰p^۲+۵۰۰۰۰p$ به دست می‌آید. بەازای چه مقادیری برای p، میزان درآمد شرکت بیش از ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ است؟

۵ــ اهداف: حل یک نامعادله در یک زمینه واقعی و توجه به محدودیت‌های عملی

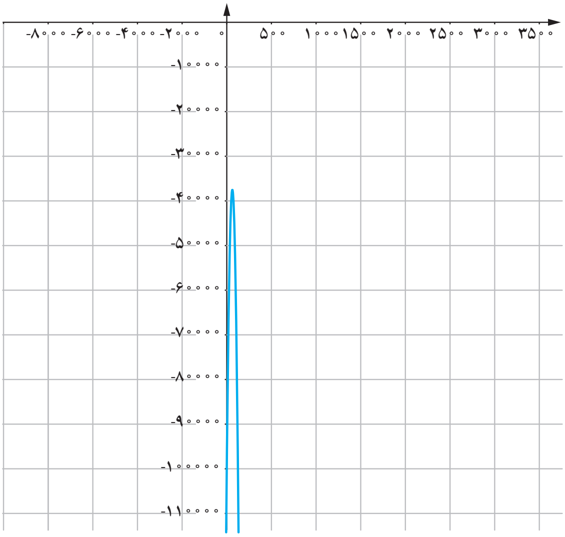
مهارت‌ها و فرایندها: حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج آن.

$R(p) = -۱۰۰p^۲ + ۵۰۰۰۰p$

$-۱۰۰p^۲ + ۵۰۰۰۰p > ۱۰۰۰۰۰۰۰$

$-p^۲ + ۵۰۰p - ۱۰۰۰۰۰ > ۰$

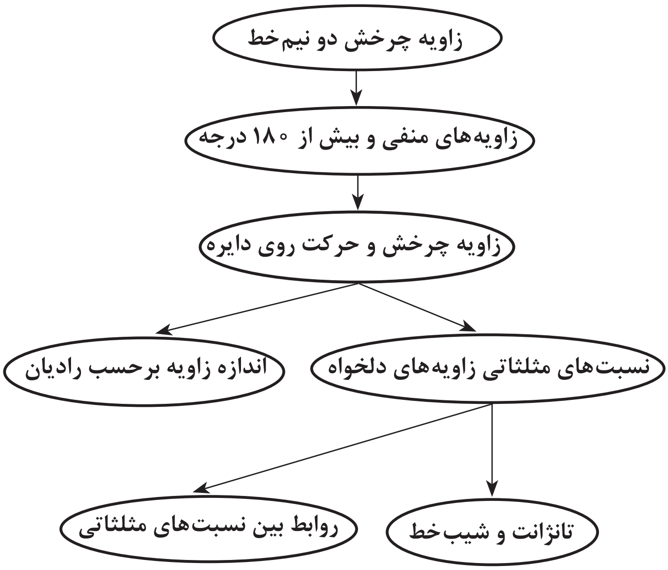
برای حل نامعادله، نمودار آن را به کمک جئوجبرا رسم می‌کنیم و مجموعهٔ جواب را به‌دست می‌آوریم که مجموعهٔ جواب تهی است یعنی در هیچ شرایطی درآمدش بیشتر از ده میلیون نخواهد شد.



پودمان سوم

نسبت‌ها و تابع‌های مثلثاتی

طرح کلی مفاهیم پودمان سوم (نقشهٔ مفهومی)



اهداف کلی

- درک مفهوم زاویه‌های دلخواه به عنوان زاویه چرخش
- آشنایی با زاویه چرخش در یک دایره و نقطه متناظر زاویه‌ها در دایره
- آشنایی با واحد اندازه‌گیری رادیان برای زاویه‌های دلخواه
- درک نسبت‌های مثلثاتی تانژانت، سینوس و کسینوس زاویه‌های دلخواه در دایره مثلثاتی
- آشنایی با ربع‌های مختلف دایره مثلثاتی و علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع‌های مختلف
- آشنایی با روابط بین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه
- آشنایی با رابطه بین شیب یک خط و تانژانت زاویه بین آن خط و محور طول‌ها

پیش نیازهای پودمان

- آشنایی با مفهوم زاویه‌های تند و باز
- آشنایی با چرخش یک نقطه روی یک دایره و طول کمان طی شده
- آشنایی با نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های تند
- آشنایی با معادله خط و شیب خط

	فرایند	توصیف فرایند	مثال
استاندارد های فرایندی	حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	تعیین موقعیت کابین در بخش اوّل، تعمیم مفهوم نسبت‌های مثلثاتی بخش دوم، مسئله یکسانی شیب جاده و شیب خط، پیدا کردن ارتفاع کابین چرخ و فلک بر حسب زاویه چرخش بخش چهارم
		شناخت‌وبه‌کارگیری‌استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسائل	استراتژی رسم شکل برای فهم زاویه طی شده بخش اوّل، مشابهت با موقعیت‌های پیشین در متناسب بودن اندازه زاویه چرخش با طول کمان طی شده در بخش اوّل، تعمیم از حالات خاص به حالات عمومی‌تر در بخش دوم، ایجاد تناظر بین مفاهیم جبری و هندسی در روابط بین نسبت‌های مثلثاتی در بخش دوم، حدس و فرضیه‌سازی در یکسانی شیب خط و جاده در بخش سوم
	ارتباط کلامی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	طرح سؤال توسط هنرجویان و مباحثه در همه بخش‌ها، توصیف موقعیت‌ها و بیان موقعیت‌ها با مفاهیم ریاضی در همه بخش‌ها، سعی در دقیق‌سازی سؤالات مطرح شده
		برای بیان نظریات خود از زبان ریاضی به طور دقیق استفاده کند	استفاده از مفاهیم هندسی در بیان موقعیت چرخ و فلک در بخش اوّل، بیان ریاضی کمیت‌های متناسب اندازه زاویه و طول کمان طی شده در بخش اوّل، استفاده از دایره و مختصات نقاط در بیان نسبت‌های مثلثاتی در بخش دوم، تبدیل جاده و زمین به خط و صفحه مختصات در بخش سوم، استفاده از تابع برای حل مسئله ارتفاع کابین چرخ و فلک در بخش چهارم
	استدلال و اثبات	انواع مختلف استدلال و روش‌های اثبات را انتخاب کرده و به‌کاربرد و آنها را ارزیابی کند.	یافتن رابطه بین زاویه چرخش و کمان طی شده از طریق متناسب بودن دو کمیت در بخش اوّل، یافتن روابط بین نسبت‌های مثلثاتی از طریق تناظر با مفاهیم هندسی در بخش دوم، یافتن شیب خط‌ها و تانژانت زاویه بین خط و محور طول‌ها با تناظر هندسی و محاسبات جبری در بخش سوم، محاسبات هندسی روی دایره در بخش چهارم
	پیوندها و اتصالات	ریاضیات را در سایر مضامین بیرون از چهارچوب موضوع ریاضیات (کاربردها در علوم دیگر) تشخیص و به‌کار گیرد.	ارتباط بین حرکت چرخ و فلک و حرکت یک نقطه روی دایره و ارتباط مسافت طی شده توسط کابین و طول کمانی از دایره در بخش اوّل، ارتباط شیب جاده و شیب خط در بخش سوم، ارتباط ارتفاع کابین‌ها و مفهوم تابع در بخش چهارم
		پیوستگی بین موضوع‌های ریاضی (اتصال جبر و هندسه)	ارتباط بین محاسبات جبری و هندسی در همه بخش‌ها، ارتباط بین دایره و نسبت‌های مثلثاتی در بخش دوم
	بازنمایی‌ها	جهت حل مسئله بازنمایی‌های مناسب را انتخاب نموده معنی کند و به‌کارگیرد.	رسم شکل دایره برای نمایش چرخ و فلک در بخش اوّل، نمایش جهت چرخش و دورهای چرخش با فلش‌های چرخنده، در بخش اوّل، رسم مختصات نقاط روی یک دایره و نمایش نسبت‌های مثلثاتی توسط آن در بخش دوم، رسم محورهای سینوس و کسینوس و تانژانت برای درک هندسی و بصری از نسبت‌های مثلثاتی بخش دوم، رسم جاده و خط برای نمایش مفاهیم در بخش سوم، رسم دایره به عنوان چرخ و فلک و محاسبات از طریق شکل در بخش چهارم
		از بازنمایی‌ها برای مدل‌سازی و مقایسه پدیده‌های فیزیکی و ریاضی استفاده کند	
	سایر مهارت‌های تفکر	مقایسه و مشابهت	مشابهت چرخش چرخ و فلک و حرکت روی دایره در بخش اوّل، مشابهت ربع‌های دایره مثلثاتی با یکدیگر برای تعریف نسبت‌های مثلثاتی در بخش دوم، مشابهت جاده و خط در بخش سوم.
		تعمیم	تعمیم زاویه هندسی به زاویه چرخش در بخش اوّل، تعمیم نسبت‌های مثلثاتی برای زاویه‌های دلخواه در بخش دوم

بخش اوّل: زاویهٔ چرخش

اهداف بخش

- درک مفهوم زاویه‌های دلخواه به عنوان زاویه چرخش دو نیم‌خط نسبت به هم
- آشنایی با زاویه چرخش در یک دایره و نقطه متناظر زاویه‌ها در دایره

پیش‌نیازهای بخش:

- آشنایی با مفهوم زاویه‌های تند و باز

واژه‌های کلیدی: زاویه، چرخش و دوران

نگاه کلی به بخش

این بخش به آموزش مفهوم زاویه‌های دلخواه از طریق چرخش نیم‌خط‌ها و چرخش یک نقطه روی دایره اختصاص دارد. رویکرد کلی آموزشی این بخش، ارائه مفاهیم جدید در قالب یک داستان و مباحثه بین هنرجویان و هنرآموز و انجام چند فعالیت است. نقش اصلی داستان‌ها در آموزش مفاهیم در آن است که هنرجویان را در محیطی آشنا قرار می‌دهد که هنرجویان با اکثر مفاهیم رخ داده در آن محیط آشنا هستند و فقط با مفاهیم مورد نظر ما آشنایی کامل ندارند ولی یک آشنایی کیفی و کلی از آن مفاهیم دارند. این وضعیت موجب می‌شود هنرجویان به سادگی مفاهیم جدید را درک کنند و آنها را با مفاهیمی که از قبل می‌دانند پیوند ایجاد کنند.
داستان مورد استفاده در این بخش درباره حرکت یک چرخ و فلک و تشخیص موقعیت کابین‌های یک چرخ و فلک است. از طریق این داستان، با مباحثه بین هنرجویان و هنرآموز مفهوم زاویه چرخش و اندازه‌گیری آن ساخته می‌شود.

ورود به مطلب

برای آموزش مفهوم زاویه‌های دلخواه نیازمند آنیم که موقعیتی فیزیکی را مطرح سازیم که شامل چرخیدن یک نیم‌خط حول یک نیم‌خط دیگر است. زاویه دلخواه یک مفهوم کاملاً هندسی نیست و نمی‌توان صرفاً با استفاده از مفاهیم هندسی زاویه‌های دلخواه را تعریف کرد.
در هندسه، زاویه مفهومی است که وضعیت دو نیم‌خط غیر هم‌راستا با مبدأ یکسان را نسبت به هم بیان می‌کند. زاویه بین دو نیم‌خط، بر حسب درجه، همواره عددی بین صفر و ۱۸۰ است. برای رسیدن به مفهوم زاویه‌های دلخواه باید از مفهوم حرکت و چرخش و جهت حرکت نیز استفاده کنیم. جاهایی که این حرکت‌ها رخ می‌دهند زمینه مناسبی برای آموزش مفهوم زاویه‌های دلخواه است. در کتاب از

حرکت یک چرخ و فلک استفاده شده است ولی شما می‌توانید از هر نوع حرکتِ مشابه دیگری که درک آن برای هنرجویان شما آسان‌تر است استفاده کنید. مثلاً چرخش یکی از عقربه‌های ساعت، یا چرخش یک فرفره به دور خود، یا چرخیدن ورزشکاران باستانی به دور خود، یا چرخش زمین دور خورشیدو … نیز می‌تواند استفاده شود. پس از انتخاب زمینه مناسب می‌توانید مانند کتاب عمل کنید و تعاریف مناسب را ارائه کنید.

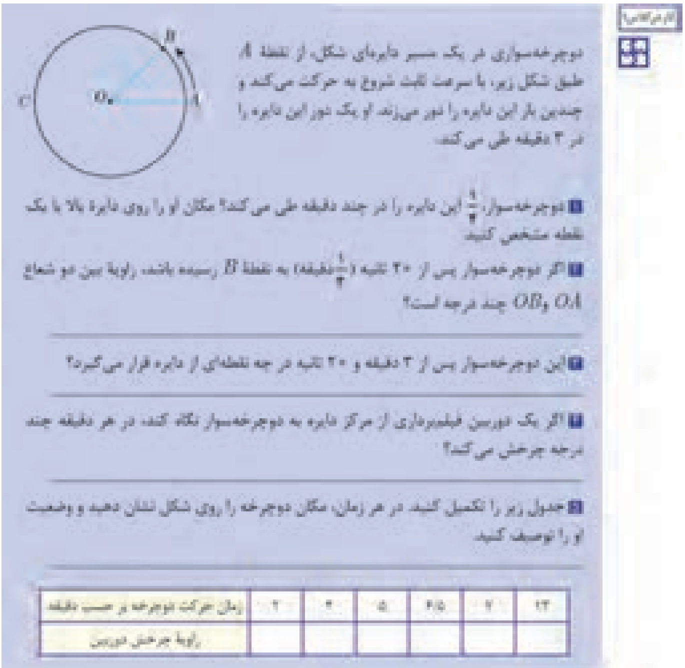
فعالیت آموزشی

این بخش، با داستان چرخ و فلک و یافتن موقعیت‌های کابین چرخ و فلک آغاز می‌شود. در این موقعیت، مفهوم چرخش و زاویه چرخش آسان‌تر فهمیده می‌شود. با دنبال کردن داستان، مفهوم زاویه‌های بیش از ۱۸۰ درجه و زاویه‌های منفی توجیه می‌شوند. در ادامه، به طور رسمی، مفهوم زاویه چرخش بین دو نیم‌خط، به همراه مثال‌هایی، ارائه می‌شود. در این قسمت جهت قراردادی مثبت و منفی برای اندازه‌گیری زاویه‌ها معرفی می‌شود.

همچنین، این نکته مهم تذکر داده می‌شود که مفهوم زاویه چرخش یک مفهوم صرفاً هندسی نیست و در آن از حرکت و جهت حرکت استفاده شده است. در واقع، وضعیت نهایی نیم‌خط‌ها، مشخص‌کننده مقدار زاویه چرخش نیست و باید جهت حرکت و تعداد دورهای زده شده نیز مشخص باشند.

در ادامه، این مفهوم به صورت حرکت یک نقطه روی محیط یک دایره نیز توصیف می‌شود و مفهوم زاویه چرخش با مقدار چرخش یک نقطه روی محیط یک دایره ارتباط برقرار می‌کند. به ویژه، مفهوم نقطه متناظر یک زاویه چرخش، روی دایره‌ای که مبدأ برای آن انتخاب شده است معرفی می‌شود.

برای تمرین روی این مفاهیم به کار در کلاس (۱) می‌رسیم.



کار در کلاس ۱

دوچرخه‌سواری در یک مسیر دایره‌ای شکل، از نقطهٔ A طبق شکل زیر، با سرعت ثابت شروع به حرکت می‌کند و چندین بار این دایره را دور می‌زند. او یک دور این دایره را در ۳ دقیقه طی می‌کند.

۱ دوچرخه‌سوار، $\frac{۱}{۴}$ این دایره را در چند دقیقه طی می‌کند؟ مکان او را روی دایرهٔ بالا با یک نقطه مشخص کنید.

۲ اگر دوچرخه‌سوار پس از ۳۰ ثانیه ($\frac{۱}{۲}$دقیقه) به نقطهٔ B رسیده باشد، زاویهٔ بین دو شعاع OA و OB چند درجه است؟

۳ این دوچرخه‌سوار پس از ۳ دقیقه و ۳۰ ثانیه در چه نقطه‌ای از دایره قرار می‌گیرد؟

۴ اگر یک دوربین فیلمبرداری از مرکز دایره به دوچرخه‌سوار نگاه کند، در هر دقیقه چند درجه چرخش می‌کند؟

۵ جدول زیر را تکمیل کنید. در هر زمان، مکان دوچرخه را روی شکل نشان دهید و وضعیت او را توصیف کنید.

زمان حرکت دوچرخه بر حسب دقیقه	۲	۳	۵	۴/۵	۷	۱۲
زاویهٔ چرخش دوربین						

حل کار در کلاس ۱

اهداف: تقویت مهارت یافتن زاویهٔ چرخش یک نقطه روی دایره، حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، ارتباطات، بازنمایی‌ها.

۱ کل مسیر یک دایره است و $\frac{۱}{۴}$ آن به اندازه یک ربع دایره است. بنابراین در نقطه متناظر زاویه ۹۰ درجه قرار خواهد گرفت. کل مسیر در ۳ دقیقه طی می‌شود، پس $\frac{۱}{۴}$ آن در $\frac{۳}{۴}$ دقیقه یعنی ۴۵ ثانیه طی خواهد شد.

یا به کمک جدول تناسب:

۱۸۰ ثانیه = ۳ دقیقه ←

$\frac{۱}{۴}$	۱
...	۱۸۰

← ... = ۴۵

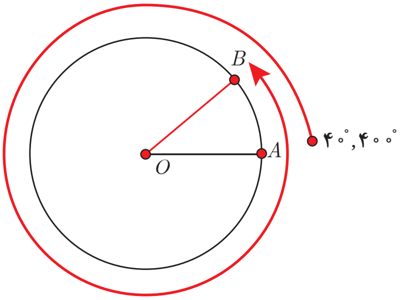
۲ طی کردن کل مسیر به معنای طی زاویه به اندازه ۳۶۰ درجه است. پس

۳۶۰ درجه در ۳ دقیقه طی می‌شود و در ۱ دقیقه ۱۲۰ درجه طی می‌شود. پس در $\frac{۱}{۳}$ دقیقه، ۴۰ درجه طی می‌شود.

یا به کمک جدول تناسب:

درجه ...	۳۶۰ درجه
۲۰ ثانیه	۱۸۰ درجه

$\rightarrow$ ... = ۴۰°



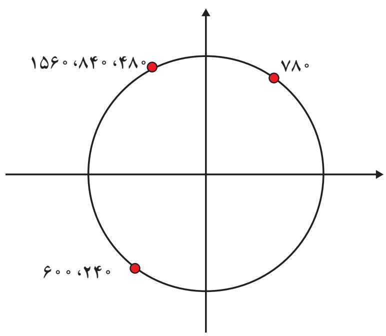
۳ پس از ۳ دقیقه دوچرخه سوار به مبدأ برگشته است و پس از ۲۰ ثانیه در ادامه حرکت طبق (۲)، ۴۰ درجه دیگر طی کرده است. پس در نقطه متناظر ۴۰ درجه قرار می‌گیرد.

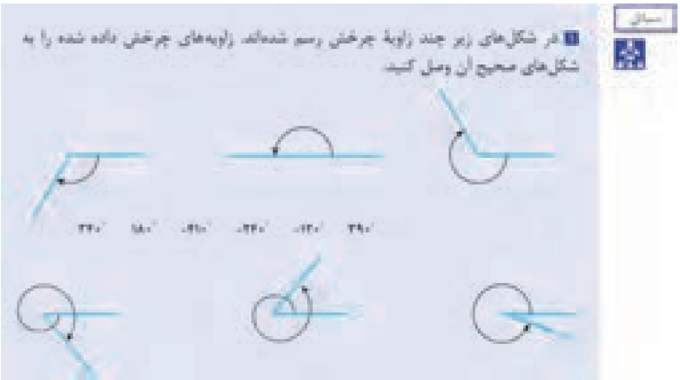
۴ در (۱) محاسبه کردیم که دوچرخه سوار در هر دقیقه ۱۲۰ درجه چرخش می‌کند.

۵ با توجه به (۳) جدول به شکل زیر در می‌آید.

زمان حرکت دوچرخه بر حسب دقیقه	۲	۴	۵	۶/۵	۷	۱۳
زاویه چرخش دوربین	۲۴۰	۴۸۰	۶۰۰	۷۸۰	۸۴۰	۱۵۶۰

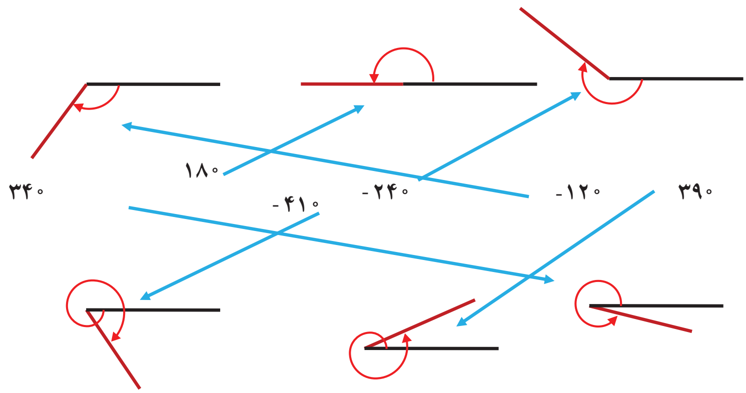
نقاط متناظر زاویه‌های چرخش این جدول به صورت زیرند.




مسائل

در شکل‌های زیر چند زاویهٔ چرخش رسم شده‌اند. زاویه‌های چرخش داده شده را به شکل‌های صحیح آن وصل کنید.

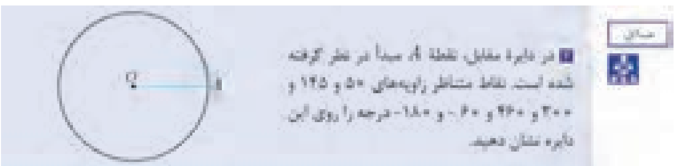
حل مسائل



مهارت‌ها و فرایندها:

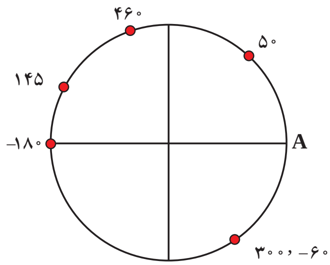
پرورش تفکر بصری.

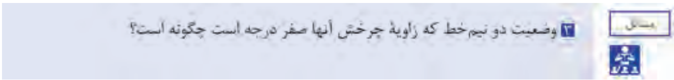
اهداف: تشخیص دیداری چرخش و مرتبط کردن با مفهوم اندازهٔ زاویهٔ چرخش


مسائل

در دایرهٔ مقابل نقطهٔ A مبدأ در نظر گرفته شده است. نقاط متناظر زاویه‌های ۵۰ و ۱۴۵ و ۳۰۰ و ۴۲۰ و ۶۰- و ۱۸۰- درجه را روی این دایره نشان دهید.

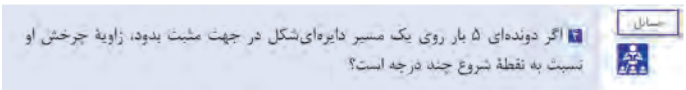
مهارت‌ها و فرایندها:
مهارت یافتن زاویهٔ دلخواه روی دایره.
اهداف: تشخیص چرخش مثبت و منفی و نقاط متناظر زاویه‌ها روی دایره
نقطه متناظر آنها به شکل زیرند.




مسائل
۳ وضعیت دو نیم‌خط که زاویهٔ چرخش آنها صفر درجه است چگونه است؟

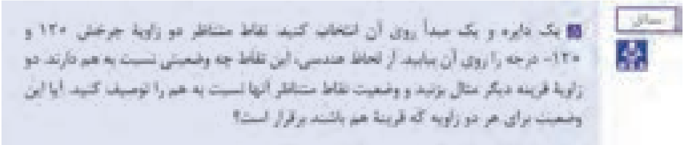
۳ وضعیت دو نیم‌خط که زاویه چرخش آنها صفر درجه است چگونه است؟
مهارت‌ها و فرایندها:
حل مسئله.

اهداف: تشخیص زاویه صفر و مفهوم آن
این دو نیم خط بر هم منطبق‌اند.


مسائل
۴ اگر دونده‌ای ۵ بار روی یک مسیر دایره‌ای‌شکل در جهت مثبت بدود، زاویهٔ چرخش او نسبت به نقطهٔ شروع چند درجه است؟

مهارت‌ها و فرایندها:
حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی.

اهداف: تشخیص رابطه بین اندازهٔ زاویهٔ چرخش و تعداد دورهای زده شده برای هر دور ۳۶۰ درجه چرخیده است و برای ۵ دور ۳۶۰×۵ یعنی ۱۸۰۰ درجه چرخیده است.

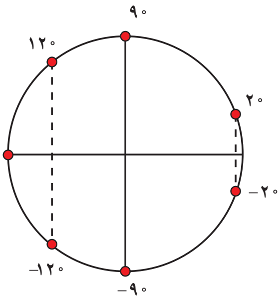

یک دایره و یک مبدأ روی آن انتخاب کنید. نقاط متناظر دو زاویهٔ چرخش ۱۲۰ و ۱۲۰- درجه را روی آن بیابید. از لحاظ هندسی این نقاط چه وضعیتی نسبت به هم دارند. دو زاویهٔ قرینه دیگر مثال بزنید و وضعیت نقاط متناظر آنها نسبت به هم را توصیف کنید. آیا این وضعیت برای هر دو زاویه که قرینهٔ هم باشند برقرار است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، استدلال کردن، ارتباطات.

اهداف: تشخیص رابطه بین دو زاویه قرینه

نقاط متناظر دو زاویه ۱۲۰ و ۱۲۰- درجه نسبت به محور افقی قرینه یکدیگرند. برای سایر زاویه‌های قرینه هم همین وضعیت برقرار است.



بخش دوم: واحد اندازه‌گیری زاویه: رادیان

اهداف بخش

- آشنایی با واحد اندازه‌گیری رادیان برای زاویه‌های دلخواه
- آشنایی با تبدیل واحدهای درجه و رادیان به یکدیگر

پیش‌نیازهای بخش:

- آشنایی با چرخش یک نقطه روی یک دایره و طول کمان طی شده

واژه‌های کلیدی: زاویه، طول کمان دایره، چرخش در دایره

نگاه کلی به بخش

در این بخش واحد جدیدی برای اندازه‌گیری زاویه به نام رادیان مطرح می‌شود. رویکرد ما در این بخش استفاده مجدد از داستان چرخ و فلک است تا مسافت طی شده توسط کابین‌های چرخ و فلک مورد توجه قرار گیرند. با مطرح شدن طول کمان طی شده توسط کابین‌ها و رابطه آن با زاویه چرخش مفهوم واحد رادیان برای اندازه‌گیری زاویه‌ها ساخته می‌شود.

ورود به مطلب

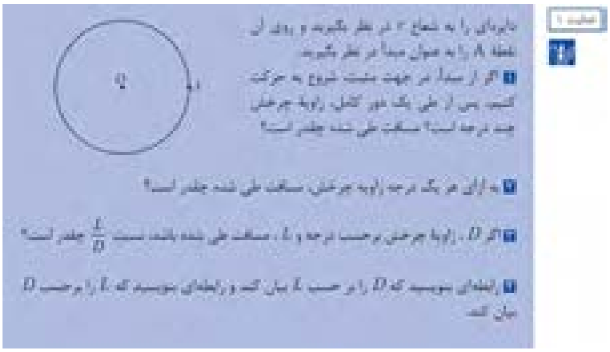
در این بخش که واحد جدیدی برای اندازه‌گیری زاویه ارائه می‌شود، به رابطه مستقیم بین طول کمان طی شده و اندازه زاویه چرخش اشاره شده است. چون تنها واحد اندازه‌گیری زاویه، که فعلاً می‌شناسیم درجه است، رابطه بین طول کمان طی شده و زاویه چرخش بر حسب درجه به دست آمده است. از آنجا که از زاویه طی شده می‌توان مسافت طی شده را یافت و برعکس از مسافت طی شده می‌توان زاویه طی شده را یافت، این نکته مطرح می‌شود که طول کمان طی شده نیز می‌تواند اندازه زاویه را به عنوان یک واحد جدید، اندازه‌گیری کند که این واحد جدید را رادیان می‌نامند.

البته واحدهای اندازه‌گیری همگی قراردادی هستند، ولی در مورد زاویه می‌توان مطرح کرد که اندازه زاویه بر حسب طول کمان طی شده (در دایره به شعاع ۱) یک واحد طبیعی است. مثلاً واحد درجه از تقسیم زاویه قائمه به ۹۰ قسمت مساوی به دست می‌آید. عدد ۹۰ ویژگی مهمی ندارد و شاید بهتر بود زاویه قائمه را به ۱۰۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کردیم که در این صورت زاویه به دست آمده را ۱ گراد می‌نامند. در هر صورت هر گونه تقسیم زاویه قائمه اختیاری است و ارجحیتی

نسبت به هم ندارند. اما واحد رادیان بسیار طبیعی است و با طول کمان طی شده در دایره به شعاع ۱ بیان می‌شود. طبیعی بودن این واحد وقتی مشخص می‌شود که رابطه بین طول کمان یک دایره دلخواه را با شعاع دایره و زاویه کمان به دست می‌آوریم.

فعالیت آموزشی

در این بخش، به معرفی واحد رادیان برای اندازه‌گیری زاویه‌ها پرداخته می‌شود. واحد رادیان در ارتباط با طول کمان طی شده برای یک زاویه چرخش است. طول کمان طی شده به شعاع دایره هم بستگی دارد و نسبت کمان طی شده به شعاع دایره متناسب با اندازه زاویه است و همین مقدار به عنوان اندازه زاویه بر حسب رادیان تعریف می‌شود.
در این بخش نیز در طی یک مباحثه این سؤال مطرح می‌شود که رابطه طول کمان طی شده با اندازه زاویه چگونه است. این رابطه در فعالیت (۱) به دست می‌آید.


دایره‌ای را به شعاع r در نظر بگیرید و روی آن نقطه A را به عنوان مبدأ در نظر بگیرید.

۱ اگر از مبدأ در جهت مثبت شروع به حرکت کنیم، پس از طی یک دور کامل زاویهٔ چرخش چند درجه است؟ مسافت طی شده چقدر است؟

۲ به ازای هر یک درجه زاویه چرخش، مسافت طی شده چقدر است؟

۳ اگر D، زاویهٔ چرخش برحسب درجه و L، مسافت طی شده باشند نسبت $\frac{L}{D}$ چقدر است؟

۴ رابطه‌ای بنویسید که D را بر حسب L بیان کند و رابطه‌ای بنویسید که L را برحسب D بیان کند.

اهداف موضوعی:

۱ درک ارتباط زاویهٔ چرخش یک نقطه روی دایره و طول کمان طی شده،

۲ زمینه‌سازی برای معرفی واحد رادیان،

۳ ارائه قانون رابطهٔ بین کمان طی شده و اندازهٔ زاویهٔ چرخش.

مهارت‌ها و فرایندها:

- پیوندها و اتصال‌ها.

حل فعالیت (۱)

۱ در یک دور کامل زاویه چرخش ۳۶۰ درجه است و طول مسافت طی شده

همان محیط دایره است که برابر $2\pi r$ است.

۲ به خاطر یکسانی طول کمان‌ها در هر ۱ درجه، به ازای هر یک درجه مسافت طی شده $\frac{2\pi r}{360}$ است.

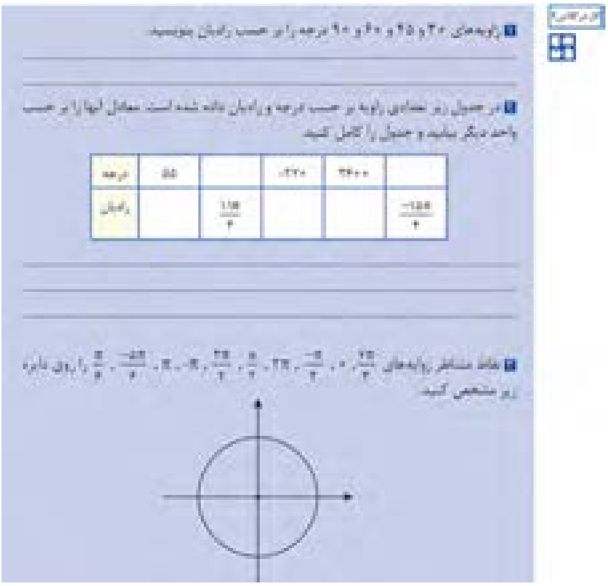
۳ به ازای هر یک درجه، مسافت طی شده $\frac{2\pi r}{360}$ است، پس به ازای D درجه مسافت طی شده $\frac{2\pi r}{360}D$ است. یعنی $L=\frac{2\pi r}{360}D$، پس $\frac{L}{D}=\frac{\pi r}{180}$.

۴ از تساوی بالا می‌توان نتیجه گرفت: $L=\frac{\pi r}{180}D$ و $D=\frac{180}{\pi r}L$

پس از جمع‌بندی نتایج به‌دست آمده از این فعالیت، واحد رادیان معرفی می‌شود و روابط تبدیل کننده واحدهای درجه و رادیان به یکدیگر ارائه می‌شوند و مثال‌هایی از این تبدیل واحدها ارائه می‌شود.

در ادامه به یک بدفهمی رایج درباره عدد π پرداخته می‌شود. π یک عدد مشخص در ریاضی است که تقریباً ۳/۱۴ است. هر کجا که عدد π ظاهر می‌شود مقدار تقریبی آن همین مقدار است. مثلاً زاویه π رادیان یعنی تقریباً ۳/۱۴ رادیان. همواره باید مشخص باشد اندازه زاویه داده شده بر حسب درجه است یا رادیان. بسیاری از زاویه‌های آشنا بر حسب رادیان، نماد π در آن به‌کار رفته است، یک قرارداد نیمه رسمی وجود دارد که هر اندازه زاویه که در آن نماد π به‌کار رفته است بر حسب رادیان است. اما π یک عدد مانند سایر اعداد است و می‌توان از π برای درجه هم استفاده کرد. مثلاً π درجه هم داریم که تقریباً همان ۳/۱۴ درجه است ولی چنین اندازه‌ای عموماً به‌کار نمی‌رود. در هر صورت در هر اندازه‌ای از زاویه باید واحد اندازه‌گیری مشخص باشد، مگر آنکه به طور ضمنی واحد اندازه‌گیری مشخص باشد.

برای تمرین روی تبدیل واحدهای درجه و رادیان به یکدیگر و نقطه متناظر بر حسب واحد رادیان به کار در کلاس (۲) می‌رسیم.



۱ زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ و ۶۰ و ۹۰ درجه را بر حسب رادیان بنویسید.

۲ در جدول زیر تعدادی زاویه بر حسب درجه و رادیان داده شده است. معادل آنها را بر حسب واحد دیگر بیابید و جدول را کامل کنید.

درجه	۵۵		-۲۷۰	۳۶۰۰	
رادیان		$\frac{۱۱\pi}{۳}$			$\frac{-۱۵\pi}{۴}$

۳ نقاط متناظر زاویه‌های ... را روی دایره زیر مشخص کنید.

اهداف: تقویت مهارت تبدیل واحدهای درجه و رادیان به یکدیگر، تقویت مهارت نمایش زاویه‌های دلخواه روی یک دایره، تعیین وضعیت یک نقطه روی دایره با استفاده از زاویهٔ چرخش و وضعیت اولیهٔ آن، پیوندها و اتصال‌ها، بازنمایی‌ها.

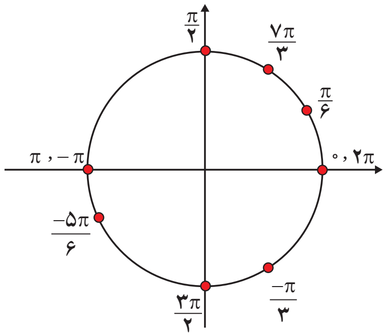
حل کار در کلاس ۲

۱ زاویه‌های داده شده را به کمک رابطه تبدیل‌کننده درجه به رادیان، به رادیان تبدیل می‌کنیم که به ترتیب $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{\pi}{۲}$ خواهند بود.

۲ کامل شده جدول به صورت زیر است:

درجه	۵۵	۶۶۰	-۲۷۰	۳۶۰۰	-۶۷۵
رادیان	$\frac{۱۱\pi}{۳۶}$	$\frac{۱۱\pi}{۳}$	$-\frac{۳\pi}{۲}$	۲۰π	$\frac{-۱۵\pi}{۴}$

۳



۴ رئوس شش ضلعی منتظم کل دایره را به شش قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. پس هر رأس نسبت به رأس قبلی ۶۰ درجه چرخش کرده است. از زاویه صفر که شروع کنیم، به ترتیب زاویه‌های ۰، ۶۰، ۱۲۰، ۱۸۰و ۲۴۰ و ۳۰۰ را به دست می‌آوریم.

۵ با دوران این چند ضلعی به اندازه ۳۰ درجه، کلیهٔ زاویه‌ها ۳۰ درجه اضافه می‌شوند و به صورت ۳۰، ۹۰، ۱۵۰، ۲۱۰ و ۲۷۰ و ۳۳۰ در می‌آیند.
در آخر این بخش به مسائل می‌رسیم که حل آنها به شکل زیر است:


مسائل
۱ زاویه‌های ۱۵، ۱۹۰، ۵۳۰ و ۱۰۰۰- درجه را بر حسب رادیان بنویسید.

حل مسائل

مهارت‌ها و فرایندها:

مهارت تبدیل اندازه زاویه برحسب درجه به رادیان

اهداف: بالا بردن توانایی عملی تبدیل واحد درجه به رادیان و استفاده از رابطه بین درجه و رادیان

با استفاده از رابطه تبدیل کننده درجه به رادیان که به صورت $R=\frac{\pi}{۱۸۰}D$ است، معادل این زاویه‌ها را برحسب رادیان به دست می‌آوریم. به ازای D=۱۵ داریم $R=\frac{\pi}{۱۸۰}\times ۱۵=\frac{\pi}{۱۲}$، به ازای D=۱۹۰ داریم $R=\frac{\pi}{۱۸۰}\times ۱۹۰=\frac{۱۹\pi}{۱۸}$، به ازای D=۵۳۰ داریم $R=\frac{\pi}{۱۸۰}\times ۵۳۰=\frac{۵۳\pi}{۱۸}$، به ازای D=۱۰۰۰ داریم $R=\frac{\pi}{۱۸۰}\times ۱۰۰۰=\frac{۵۰\pi}{۹}$.

مهارت‌ها و فرایندها:

مهارت تبدیل اندازه زاویه برحسب رادیان به درجه

اهداف: بالا بردن توانایی عملی تبدیل واحد رادیان به درجه و استفاده از رابطه بین درجه و رادیان.

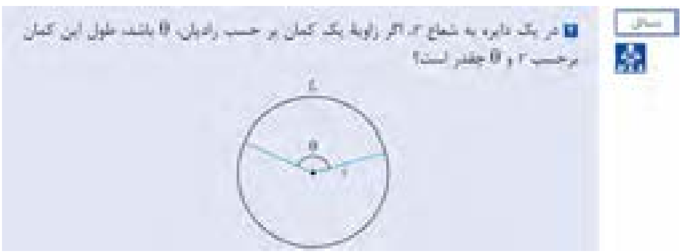
با استفاده از رابطه تبدیل‌کننده رادیان به درجه که به صورت $D=\frac{۱۸۰}{\pi}R$ است، معادل این زاویه‌ها را برحسب درجه به دست می‌آوریم. به ازای $R=\frac{\pi}{۷}$ داریم: $D=\frac{۱۸۰}{\pi}\times\frac{\pi}{۷}=\frac{۱۸۰}{۷}$ ، به ازای $R=\frac{۴\pi}{۳}$ داریم: $D=\frac{۱۸۰}{\pi}\times\frac{۴\pi}{۳}=۲۴۰$ ، به ازای $R=\frac{-۸\pi}{۳}$ داریم: $D=\frac{۱۸۰}{\pi}\times\frac{-۸\pi}{۳}=-۴۸۰$ ، به ازای $R=\frac{-۱۴\pi}{۵}$ داریم : $D=\frac{۱۸۰}{\pi}\times\frac{-۱۴\pi}{۵}=-۵۰۴$.

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، ارتباطات

اهداف: تشخیص زاویه‌هایی که مربوط به دورهای کامل روی دایره هستند.

وقتی یک نیم خط، بعد از چرخش، روی خود منطبق می‌شود ممکن است یک دور یا ۲ دور یا بیشتر چرخیده باشد ولی در هر صورت تعداد صحیحی دور در جهت مثبت یا منفی چرخیده است. پس زاویه چرخش به صورت $۲\pi k$ رادیان یا $۳۶۰k$ درجه است که k یک عدد صحیح (مثبت یا منفی) است.

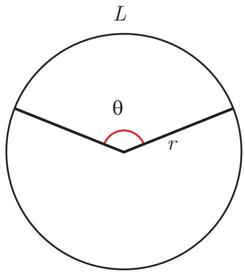


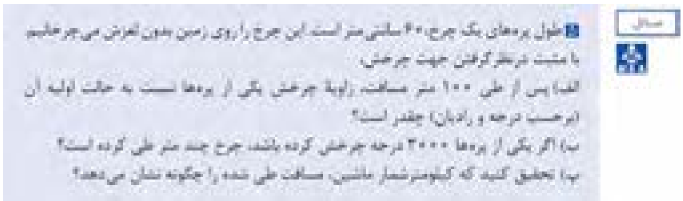
مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله

اهداف: تشخیص رابطه بین اندازه زاویه بر حسب رادیان و طول کمان و چگونگی تأثیر شعاع دایره بر آن

اگر طول کمان را با L نشان دهیم، با توجه به تعریف اندازه زاویه بر حسب رادیان داریم $\theta = \frac{L}{r}$، پس $L=r\theta$.





مسائل

طول پره‌های یک چرخ ۶۰ سانتی‌متر است. این چرخ را روی زمین بدون لغزش می‌چرخانیم با مثبت درنظرگرفتن جهت چرخش.

الف) پس از طی ۱۰۰ متر مسافت، زاویهٔ چرخش یکی از پره‌ها نسبت به حالت اولیه آن (برحسب درجه و رادیان) چقدر است؟

ب) اگر یکی از پره‌ها ۳۰۰۰ درجه چرخش کرده باشند، چرخ چند متر طی کرده است؟

پ) تحقیق کنید که کیلومترشمار ماشین، مسافت طی شده را چگونه نشان می‌دهد؟

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی.

اهداف: دیدن مفهوم زاویه چرخش در یک زمینه عملی و اهمیت واحد رادیان در محاسبات

الف) وقتی چرخ مسافت ۱۰۰ متر طی می‌کند، مانند آن است که طول کمان طی‌شده با چرخش یک نقطه از محیط دایره چرخ، ۱۰۰ متر است. شعاع دوچرخه ۰/۶ متر است، پس زاویه چرخش (بر حسب رادیان) برابر $\frac{۱۰۰}{۰/۶}$ یعنی $\frac{۵۰۰}{۳}$ رادیان است. مقدار زاویه چرخش بر حسب درجه از طریق رابطه $D=\frac{۱۸۰}{\pi}R$ به دست می‌آید. پس،

$$D=\frac{۱۸۰}{\pi}\times\frac{۵۰۰}{۳}=\frac{۳۰۰۰۰}{\pi}\approx ۹۵۴۹$$

ب) چون رابطه طول کمان طی شده با زاویه بر حسب رادیان آسان‌تر است، ۳۰۰۰ درجه را بر حسب رادیان می‌نویسیم. داریم: $R=\frac{\pi}{۱۸۰}D=\frac{\pi}{۱۸۰}\times ۳۰۰۰=\frac{۵۰\pi}{۳}$

اگر مسافت طی شده (بر حسب متر) L باشد داریم:

$$L=\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۵۰\pi}{۳}=۱۰\pi\approx ۳۱/۴$$

پ) این سؤال نیازمند تحقیق است و ظاهراً کیلومترشمار ماشین با اندازه‌گیری تعداد دورهای چرخش یکی از چرخ‌ها تشخیص می‌دهد مسافت طی شده توسط ماشین چقدر است. حاصل‌ضرب تعداد دورهای چرخش در محیط چرخ برابر است با مسافت طی شده است.


سؤال

در یک چرخ و فلک به شعاع ۱۰ متر، اگر یک کابین نسبت به حالت اولیهٔ خود به اندازهٔ ۱ رادیان چرخیده باشد، چه مسافتی را طی کرده است؟ اگر مسافت طی شده توسط کابین ۷۰ متر باشد، زاویهٔ چرخش کابین برحسب رادیان و درجه چقدر است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی.

اهداف: به کارگیری واحد رادیان در یک زمینه عملی و دیدن رابطه طبیعی واحد رادیان و طول کمان طی شده طبق رابطه طول کمان با زاویه کمان بر حسب رادیان، اگر ۱ رادیان چرخش داشته باشیم طول کمان طی شده به اندازه شعاع دایره است، یعنی یک کابین به ازای ۱ رادیان چرخش ۱۰ متر طی می‌کند.

اگر کابین ۷۰ متر طی کرده باشد، زاویه چرخش آن بر حسب رادیان $\frac{۷۰}{۱۰}$ یعنی ۷ رادیان است که بر حسب درجه $۷\times\frac{۱۸۰}{\pi}$ یعنی تقریباً ۴۰۱ درجه خواهد شد.

بخش سوم: نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دلخواه

اهداف بخش

- آشنایی با سینوس و کسینوس و تانژانت زاویه‌های دلخواه
- آشنایی با دایره مثلثاتی و ربع‌های آن
- آشنایی با روابط بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها در ربع اوّل با نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها در ربع‌های دیگر
- آشنایی با روابط بین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه

پیش‌نیازهای بخش:
صفحه مختصات و مختصات نقطه در آن، زاویه چرخش، تشابه، فاصله نقطه تا مبدأ
واژه‌های کلیدی: مختصات نقطه، زاویه چرخش، نسبت مثلثاتی

نگاه کلی به بخش

در این بخش، مفهوم نسبت‌های مثلثاتی که قبلاً برای زاویه‌های تند تعریف شده‌اند، برای زاویه‌های دلخواه تعمیم داده می‌شوند. برای این تعمیم، ابتدا طی یک مباحثه بین هنرآموز و هنرجویان، به رابطه بین مختصات یک نقطه روی ربع دایره به شعاع ۱ و نسبت‌های مثلثاتی کسینوس و سینوس زاویه تند متناظر آن، توجه داده می‌شود. سپس از هنرجویان خواسته می‌شود نقطه را به نیم‌دایره به شعاع ۱ حرکت دهند و به این رابطه همچنان توجه داشته باشند تا حدس مناسبی برای سینوس و کسینوس زاویه‌های باز ارائه کنند. این حدس خود به خود برای سایر زاویه‌ها در نظر گرفته می‌شود و تعریف رسمی سینوس و کسینوس زاویه‌های دلخواه ارائه می‌شود.
نهایتاً اصطلاح دایره مثلثاتی و محور سینوس‌ها و محور کسینوس‌ها معرفی می‌شوند. با تقسیم‌بندی دایره مثلثاتی به ربع‌های اوّل تا چهارم روابط بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها در ربع اوّل با ربع‌های دوم و سوم بررسی می‌شوند. به کمک این رابطه‌ها، محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌هایی که در ربع دوم و سوم قرار دارند به محاسبه نسبت‌های مثلثاتی در ربع اوّل برگردانده می‌شوند و روشی برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی این‌گونه زاویه‌ها به دست می‌آید. همچنین رابطه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها و قرینه زاویه‌ها بررسی می‌شود و اینکه با اضافه شدن مضارب صحیح به یک زاویه نسبت‌های مثلثاتی آن تغییر نمی‌کند ارائه می‌شوند و از این طریق نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه‌ای را می‌توان به نسبت‌های مثلثاتی یک

زاویه تند تبدیل کرد.
تا اینجا فقط درباره سینوس و کسینوس زاویه‌ها بحث شده است. برای ارائه تعریف تانژانت زاویه‌های دلخواه، ابتدا در یک فعالیت رابطه بین تانژانت و سینوس و کسینوس زاویه‌های تند ارائه می‌شود تا از طریق آن تعریف تانژانت زاویه‌های دلخواه معرفی شود.
نهایتاً در پایان این بخش با انجام یک تمرین در کلاس، چند رابطه مهم بین نسبت‌های مثلثاتی معرفی می‌شوند.

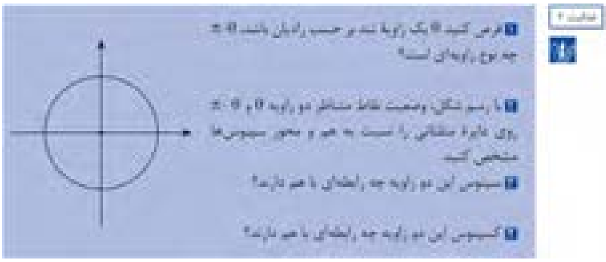
ورود به مطلب

برای آموزش هر مفهوم جدید مناسب است، انگیزه و سؤال موجه و جالبی را مطرح سازیم تا از طریق تلاش برای جواب به آن سؤال مفهوم جدید ارائه شود. البته، مفهوم مورد نظر این بخش با تعمیم سر وکار دارد و می‌توان به سادگی پرسشی درباره امکان تعمیم مفاهیم نسبت‌های مثلثاتی به زاویه‌های دلخواه بحث را شروع کرد. در کتاب به سادگی فقط امکان تعمیم نسبت‌های مثلثاتی به زاویه‌های دلخواه مطرح شده است و در طی یک مباحثه سعی در انجام این تعمیم شده است. اما، اگر روابط دیگری از نسبت‌های مثلثاتی داشته باشیم که برای زاویه‌های باز هم درست باشد، شاید بتوانیم برای این تعمیم انگیزه بهتری داشته باشیم.
مثلاً ممکن است هنرجویان را ابتدا با تساوی $BC^۲=AB^۲+AC^۲-۲AB.AC.\cos\theta$ در یک مثلث ABC با زاویه تند θ در رأس A آشنا کنیم. سپس، این سؤال قابل طرح است که در حالتی که θ زاویه باز باشد، آیا این تساوی می‌تواند درست باشد؟ این سؤال به معنای آن است که باید برای $\cos\theta$ در حالتی که θ یک زاویه باز است، تعریف مناسبی داشته باشیم. البته به‌کارگیری این روش‌ها نیازمند قوت علمی کافی برای هنرجویان است. برای هنرجویانی که قوت علمی کافی ندارند، همانند کتاب می‌توانید سؤال از تعمیم را مستقیماً طرح کنید.

فعالیت آموزشی

در ابتدای این بخش از زبان هنرجو، از امکان تعمیم نسبت‌های مثلثاتی برای زاویه‌های دلخواه پرسش می‌شود. این پرسش‌ها توسط هنرآموز هدایت می‌شود تا به جواب مطلوب رسیده شود. مفهوم نسبت‌های مثلثاتی برای زاویه‌های تند در ربع دایره واحد بررسی و نهایتاً به کل دایره توسعه می‌یابد. تعریف رسمی نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس و دایره مثلثاتی در این قسمت معرفی می‌شوند و پس از آشنایی کافی، به تعمیم تعریف تانژانت پرداخته می‌شود. پس از ارائه چند مثال به فعالیت (۲) می‌رسیم که در آن چگونگی محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های

باز مشخص می‌شود.


فعالیت ۲

۱ فرض کنید θ یک زاویهٔ تند بر حسب رادیان باشد. π-θ چه نوع زاویه‌ای است؟

۲ با رسم شکل، وضعیت نقاط متناظر دو زاویهٔ θ و π-θ روی دایرهٔ مثلثاتی را نسبت به هم و محور سینوس‌ها مشخص کنید.

۳ سینوس این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴ کسینوس این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

هدف موضوعی:

درک وجود رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ باز و مکمل آن،

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ حل مسئله،

۲ پیوندها و اتصال‌ها،

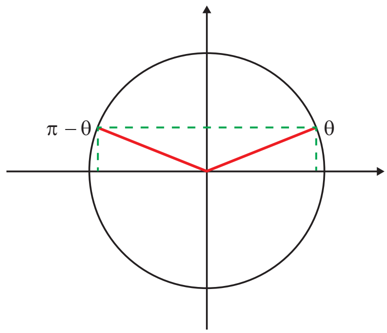
۳ مقایسه‌کردن،

۴ تعمیم.

حل فعالیت ۲

۱ وقتی θ (بر حسب رادیان) زاویه تند باشد، $\pi-\theta$ که زاویه مکمل آن است، یک زاویه باز است.

۲ از روی دایره مثلثاتی وضعیت نقاط متناظر زاویه تند θ و زاویه باز $\pi-\theta$ را تشخیص می‌دهیم.



دیده می‌شود نقاط متناظر دو زاویه θ و $\pi-\theta$ نسبت به محور عمودی قرینه یکدیگرند.

۳ به خاطر ویژگی به دست آمده در (۲) سینوس این دو زاویه مساوی هم هستند.

۴ به خاطر ویژگی به دست آمده در (۲) کسینوس این دو زاویه قرینه هم هستند.
پس از جمع‌بندی نتایج به دست آمده از این فعالیت، کاربردهایی از روابط به‌دست آمده در محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های باز ارائه شده است تا به کار در کلاس (۳) می‌رسیم تا نتایج مشابهی برای زاویه‌های θ و $\pi+\theta$ به دست آوریم.

حل کار در کلاس ۳

اهداف: یافتن رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌هایی به صورت θ و $\pi+\theta$، پیوندها و اتصال‌ها، مقایسه‌کردن، تعمیم.

۱ وقتی نقطه متناظر زاویه θ در ربع اوّل است، نقطه متناظر زاویه $\pi+\theta$ در ربع سوم است.

۲ با توجه به شکل داده شده، نقاط متناظر زاویه‌های θ و $\pi+\theta$ نسبت به مبدأ مختصات قرینه یکدیگرند.

۳ مختصات طولی و عرضی این نقاط قرینه یکدیگرند.

۴ بنابراین، سینوس و کسینوس این دو زاویه قرینه یکدیگرند.

روابط به دست آمده برای هر زاویه دلخواه θ برقرارند. با ارائه مثال‌هایی، چگونگی استفاده از این روابط برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌هایی که نقاط

متناظرشان در ربع سوم قرار می‌گیرد، مشخص می‌شود. برای تکمیل بحث و یافتن روابط اساسی بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها، در کاردرکلاس (۴) روابط بین نسبت‌های مثلثاتی θ و $-\theta$ بررسی می‌شود.


1 اگر θ زاویه‌ای در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی باشد، نقطهٔ متناظر زاویهٔ $-\theta$ در کدام ربع قرار دارد؟

2 وضعیت نقاط متناظر زاویه‌های θ و $-\theta$ نسبت به هم چگونه است؟

3 طول و عرض این نقاط چه رابطه‌ای با هم دارند؟

4 نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

حل کار در کلاس ۴

اهداف: یافتن رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌هایی به صورت θ و $-\theta$، پیوندها و اتصال‌ها، مقایسه‌کردن، تعمیم.

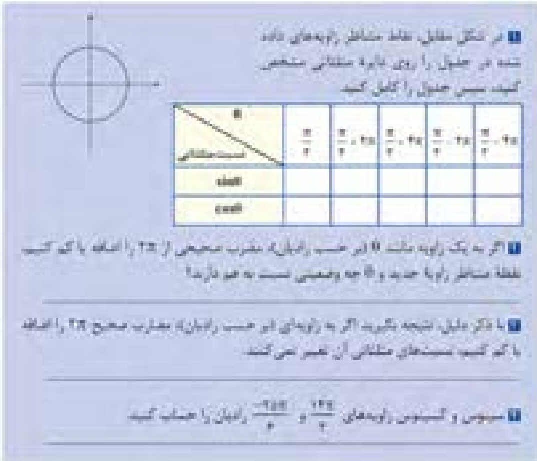
۱ اگر نقطه متناظر زاویه θ در ربع اوّل باشد، نقطه متناظر زاویه $-\theta$ در ربع چهارم است.

۲ نقاط متناظر θ و $-\theta$ نسبت به محور افقی قرینه یکدیگرند.

۳ طول این نقاط مساوی هستند ولی عرض آنها قرینه یکدیگرند.

۴ بنابراین،کسینوس این دو زاویه مساوی یکدیگرند و سینوس این دو زاویه قرینه یکدیگرند.

به کمک نتایج به دست آمده در این مسئله، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های منفی نیز قابل محاسبه هستند و مثال‌هایی ارائه شده است تا به کار در کلاس (۵) می‌رسیم تا تکلیف نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های بزرگ‌تر از 2π (بر حسب رادیان) در آن مشخص شود.



۱ در شکل مقابل نقاط متناظر زاویه‌های داده شده در جدول را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنید سپس جدول را کامل کنید.

θ / نسبت مثلثاتی	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}+2\pi$	$\frac{\pi}{3}+4\pi$	$\frac{\pi}{3}-2\pi$	$\frac{\pi}{3}-4\pi$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					

۲ اگر به یک زاویه مانند θ (بر حسب رادیان) مضرب صحیحی از 2π را اضافه یا کم کنیم، نقطهٔ متناظر زاویهٔ جدید و θ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟

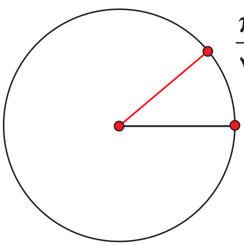
۳ با ذکر دلیل نتیجه بگیرید اگر به زاویه‌ای (بر حسب رادیان) مضارب صحیح 2π را اضافه یا کم کنیم نسبت‌های مثلثاتی آن تغییر نمی‌کند.

۴ سینوس و کسینوس زاویه‌های $\frac{13\pi}{4}$ و $\frac{-25\pi}{4}$ رادیان را حساب کنید.

حل کار در کلاس ۵

اهداف: تشخیص عدم تغییر نسبت‌های مثلثاتی وقتی مقدار زاویه (بر حسب رادیان) با مضرب صحیحی از 2π جمع شود، پیوندها و اتصال‌ها، بازنمایی‌ها، مقایسه‌کردن، استدلال، تعمیم، ارتباطات.

۱ زاویه‌های داده شده همگی همان $\frac{\pi}{3}$ هستند که با مضارب صحیحی از 2π جمع یا تفریق شده‌اند و نقطه متناظر همگی آنها یک نقطه است. چون نقطه متناظر تمامی این زاویه‌ها یکی است نسبت‌های مثلثاتی آنها با هم مساوی است و مساوی نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{\pi}{3}$ هستند.



$$\frac{\pi}{3}\,,\ \frac{\pi}{3}+2\pi\,,\ \frac{\pi}{3}+4\pi\,,\ \frac{\pi}{3}-2\pi\,,\ \frac{\pi}{3}-4\pi$$

نسبت مثلثاتی \ θ	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۳}+۲\pi$	$\frac{\pi}{۳}+۴\pi$	$\frac{\pi}{۳}-۲\pi$	$\frac{\pi}{۳}-۴\pi$
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\cos\theta$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$

۲ وقتی به زاویه‌ای، مضرب صحیحی از ۲π اضافه یا کم شود نقطه متناظر آن تغییری نمی‌کند.

۳ از آنجا که نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه، به نقطه متناظر آن در دایره مثلثاتی بستگی دارد و با اضافه یا کم شدن مضارب صحیح ۲π به یک زاویه، نقطه متناظر آن تغییر نمی‌کند، نسبت‌های مثلثاتی آن نیز تغییر نمی‌کند.

۴ از آنجا که $\frac{۱۴\pi}{۳}=۴\pi+\frac{۲\pi}{۳}$ داریم

$$\cos\frac{۱۴\pi}{۳}=\cos\left(۴\pi+\frac{۲\pi}{۳}\right)=\cos\frac{۲\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}.$$

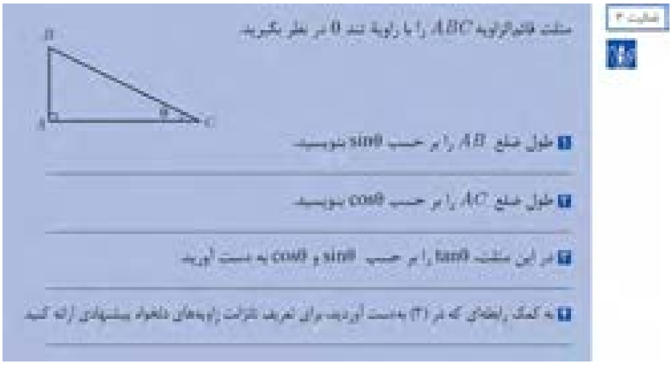
$$\sin\frac{۱۴\pi}{۳}=\sin\left(۴\pi+\frac{۲\pi}{۳}\right)=\sin\frac{۲\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۵ به همین ترتیب داریم: $-\frac{۲۵\pi}{۶}=-۴\pi-\frac{\pi}{۶}$، بنابراین

$$\cos\frac{-۲۵\pi}{۶}=\cos\left(-۴\pi-\frac{\pi}{۶}\right)=\cos\frac{-\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin\frac{-۲۵\pi}{۶}=\sin\left(-۴\pi-\frac{\pi}{۶}\right)=\sin\frac{-\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$

پس از بحث کافی در روابط بین سینوس و کسینوس زاویه‌ها، به تعمیم مفهوم تانژانت از طریق فعالیت (۳) می‌پردازیم.


فعالیت ۳

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را با زاویهٔ تند θ در نظر بگیرید.

۱ طول ضلع AB را بر حسب $\sin\theta$ بنویسید.

۲ طول ضلع AC را بر حسب $\cos\theta$ بنویسید.

۳ در این مثلث $\tan\theta$ را بر حسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ به دست آورید.

۴ به کمک رابطه‌ای که در (۳) به‌دست آوردید برای تعریف تانژانت زاویه‌های دلخواه پیشنهادی ارائه کنید.

اهداف موضوعی:

۱ درک وجود رابطه بین تانژانت زاویهٔ دلخواه و سینوس و کسینوس آن زاویه،

۲ درک مفهوم تانژانت زاویهٔ دلخواه.

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ پیوندها و اتصال‌ها،

۲ تعمیم،

۳ ارتباطات.

حل فعالیت ۳

۱ در مثلث قائم‌الزاویه رسم شده داریم: $\sin\theta=\dfrac{AB}{BC}$، پس $AB=BC.\sin\theta$.

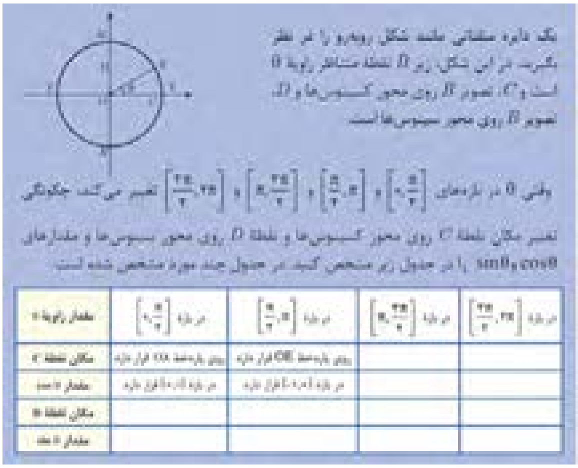
۲ در مثلث قائم‌الزاویه رسم شده داریم: $\cos\theta=\dfrac{AC}{BC}$، پس $AC=BC.\cos\theta$.

۳ در مثلث قائم‌الزاویه رسم شده داریم: $\tan\theta=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BC.\sin\theta}{BC.\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

۴ با توجه به رابطه بین تانژانت و سینوس و کسینوس در زاویه‌های تند، اگر این رابطه بخواهد برای زاویه‌های دیگر هم برقرار باشد، بهتر است تانژانت زاویه‌های دلخواه به صورت تقسیم سینوس آنها بر کسینوس آنها تعریف شود.

البته ممکن است هنرجویان نتوانند نتیجه‌گیری (۴) را انجام دهند یا فرض کنند خودبه‌خود باید این اتفاق بیفتد. هنرآموزان در این قسمت باید هنرجویان را به جواب درست راهنمایی کنند که تعریف به گونه‌ای انجام می‌شود که این تساوی برقرار بماند.

در ادامه در فعالیت (۴) به بررسی مقادیر ممکن برای سینوس و کسینوس و تانژانت زاویه‌ها پرداخته می‌شود.



اهداف موضوعی:

درک مقادیر ممکن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دلخواه.

مهارت‌ها و فرایندها:

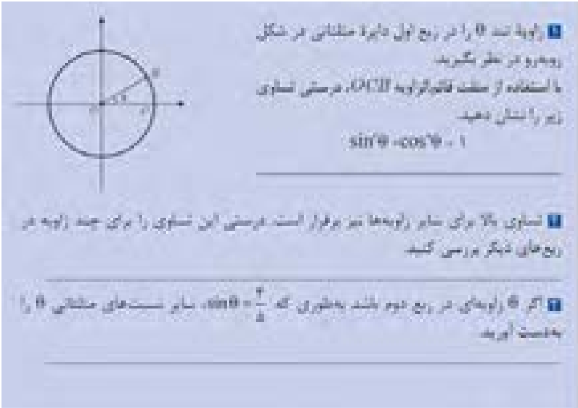
۱ پرورش تفکر بصری،

۲ تعمیم.

حل فعالیت ۴

مقدار زاویه θ	در بازه $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$	در بازه $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$	در بازه $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$	در بازه $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$
مکان نقطه C	روی پاره‌خط OA قرار دارد.	روی پاره‌خط OE قرار دارد.	روی پاره‌خط OE قرار دارد.	روی پاره‌خط OA قرار دارد.
مقدار cosθ	در بازه [۰,۱] قرار دارد.	در بازه [-۱,۰] قرار دارد.	در بازه [-۱,۰] قرار دارد.	در بازه [۰,۱] قرار دارد.
مکان نقطه D	روی پاره‌خط OM قرار دارد.	روی پاره‌خط OM قرار دارد.	روی پاره‌خط ON قرار دارد.	روی پاره‌خط ON قرار دارد.
مقدار sinθ	در بازه [۰,۱] قرار دارد.	در بازه [۰,۱] قرار دارد.	در بازه [-۱,۰] قرار دارد.	در بازه [-۱,۰] قرار دارد.

پس از این فعالیت در ارتباط با قرارداد توان‌رسانی نسبت‌های مثلثاتی صحبت می‌شود و در ادامه، به کار در کلاس (۶) می‌رسیم که در آن به یک رابطه اساسی بین سینوس و کسینوس پرداخته می‌شود تا از طریق آن، با داشتن یکی از نسبت‌های مثلثاتی بتوان سایر نسبت‌های مثلثاتی را هم محاسبه کرد.



۱ زاویهٔ تند θ را در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی در شکل روبه‌رو در نظر بگیرید.
با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه OCD، درستی تساوی زیر را نشان دهید.

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

۲ تساوی بالا برای سایر زاویه‌ها نیز برقرار است. درستی این تساوی را برای چند زاویه در ربع‌های دیگر بررسی کنید.

۳ اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم باشد به‌طوری که $\sin\theta=\frac{3}{5}$، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به‌دست آورید.

اهداف: یافتن رابطهٔ بین نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه، کسب مهارت در استفاده از رابطهٔ بین نسبت‌های مثلثاتی، استدلال و اثبات، تعمیم.

حل کار در کلاس (۶)

اهداف: یافتن برخی روابط مهم بین نسبت‌های مثلثاتی

۱ با رسم یک دایره مثلثاتی و با در نظرگرفتن یک زاویه در ربع اوّل، مثلث قائم‌الزاویه‌ای را که طول اضلاع آن $\sin\theta$ و $\cos\theta$ هستند و طول وتر آن ۱ است، رسم می‌کنیم و طبق قضیه فیثاغورس نتیجه می‌شود:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

۲ در سایر ربع‌ها نیز این تساوی برقرار است، فقط علامت $\sin\theta$ و $\cos\theta$ ممکن است منفی شود که در درستی تساوی بالا تأثیری ندارد.

۳ از تساوی $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ نتیجه می‌شود

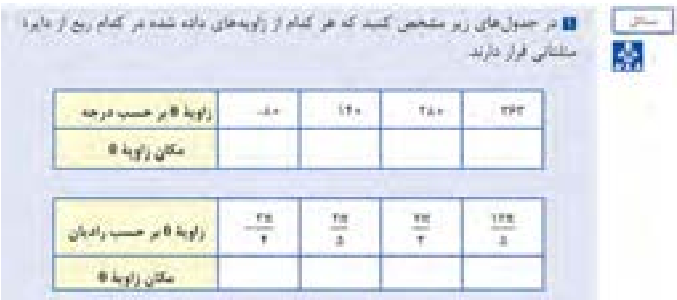
$$\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta} \quad \text{و} \quad \cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

انتخاب علامت بستگی به آن دارد که زاویه در کدام ربع قرار گرفته باشد. در این مسئله، زاویه در ربع دوم است و کسینوس آن منفی است، پس

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$$

تانژانت این زاویه نیز از طریق سینوس و کسینوس آن محاسبه می‌شوند. $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

در این کتاب از سایر روابط بین نسبت‌های مثلثاتی صحبتی نشده است و بنا نیست بیش از این به این روابط پرداخته شود. هنرجویان هر کجا در عمل به روابط بیشتری نیاز داشته باشند می‌توانند این روابط را به دست آورند. مثلاً رابطه بین تانژانت و کسینوس نیامده است و اگر لازم شود با داشتن تانژانت، سایر نسبت‌های مثلثاتی محاسبه شود می‌توان از دو رابطه $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ و $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ هم‌زمان استفاده کرد و سینوس و کسینوس آن زاویه را به دست آورد. البته آن ربعی که زاویه در آن است نیز باید داده شده باشد.


در جدول‌های زیر مشخص کنید که هر کدام از زاویه‌های داده شده در کدام ربع از دایرهٔ مثلثاتی قرار دارند.

زاویهٔ θ بر حسب درجه	۳۶۳	۲۸۰	۱۴۰	-۸۰
مکان زاویهٔ θ				

زاویهٔ θ بر حسب رادیان	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
مکان زاویهٔ θ				

حل مسائل

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله.

اهداف: تشخیص نقاط متناظر زاویه‌ها که در کدام ربع واقع شده‌اند از طریق اندازه آنها

زاویه θ بر حسب درجه	۳۶۳	۲۸۰	۱۴۰	-۸۰
مکان زاویه θ	ربع اوّل	ربع چهارم	ربع دوم	ربع چهارم

سؤال

با تعیین مکان زاویهٔ $-\frac{5\pi}{4}$ تعیین کنید کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است.

الف) $0<\sin(-\frac{5\pi}{4})$ و $0<\cos(-\frac{5\pi}{4})$

ب) $0<\sin(-\frac{5\pi}{4})$ و $\cos(-\frac{5\pi}{4})<0$

پ) $\sin(-\frac{5\pi}{4})<0$ و $0<\cos(-\frac{5\pi}{4})$

ت) $\sin(-\frac{5\pi}{4})<0$ و $\cos(-\frac{5\pi}{4})<0$

مهارت‌ها و فرایندها:

مهارت مشخص کردن زاویه روی دایره، بازنمایی‌های چندگانه.

اهداف: تمرین روی مکان‌یابی نقاط متناظر زاویه‌ها که در کدام ربع واقع می‌شوند.

از آنجا که $-\pi-\frac{\pi}{۴}=\frac{-۵\pi}{۴}$ این زاویه در ربع دوم قرار دارد و گزینه (ب) صحیح است.

سؤال

جدول زیر را با مشخص کردن علامت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها کامل کنید. در هر مورد مثالی بزنید.

θ / علامت نسبت مثلثاتی	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin\theta$				
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				

مهارت‌ها و فرایندها:

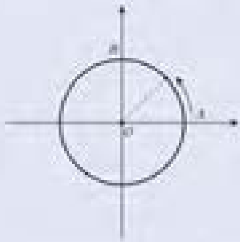
حل مسئله.

اهداف: درک علامت نسبت‌های مثلثاتی وابسته به مکان نقاط متناظر آنها در ربع‌های مختلف

θ / علامت نسبت مثلثاتی	ربع اوّل	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin\theta$	مثبت	مثبت	منفی	منفی
$\cos\theta$	مثبت	منفی	منفی	مثبت
$\tan\theta$	مثبت	منفی	مثبت	منفی

دوچرخه‌سواری روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع ۵۰ متر، با سرعت ثابت ۲ متر بر ثانیه از نقطهٔ A، شروع به حرکت می‌کند. دو محور عمود بر هم (مانند شکل) در این دایره رسم می‌کنیم.

الف) اندازهٔ زاویهٔ چرخش (بر حسب رادیان) دوچرخه سوار را بر حسب زمان (ثانیه) به‌دست آورید.



ب) اگر دوچرخه‌سوار پس از ۳۰ دقیقه حرکت بایستد، در کدام ربع از دایره ایستاده است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله. پرورش، تفکر بصری، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی

اهداف: دیدن مفهوم زاویه بر حسب رادیان در یک حرکت چرخشی و مکان‌یابی در ربع‌ها

الف) دوچرخه‌سوار در هر ثانیه ۲ متر حرکت می‌کند و شعاع دایره ۵۰ متر است، یعنی در هر ثانیه $\frac{۲}{۵۰}$ رادیان چرخش می‌کند.

ب) ۳۰ دقیقه معادل ۱۸۰۰ ثانیه است و زاویه چرخش دوچرخه‌سوار برابر $\frac{۲}{۵۰}\times ۱۸۰۰$ رادیان یعنی ۷۲ رادیان است. باید تشخیص دهیم نقطه متناظر ۷۲ رادیان در کدام ربع قرار دارد. برای یافتن نزدیک‌ترین مضرب صحیح از ۲π نزدیک ۷۲ مقدار تقریبی $\frac{۷۲}{۲\pi}$ را حساب می‌کنیم که تقریباً ۱۱/۴ است. مقدار $۷۲-۱۱\times۲\pi$ تقریباً ۲/۹ است. نقطه متناظر ۲/۹ رادیان تقریباً همان نقطه متناظر ۷۲ رادیان است. داریم $\frac{\pi}{۲} < ۲/۹ < \pi$، پس نقطه متناظر ۷۲ رادیان در ربع دوم است.

زاویهٔ θ در ربع سوم است و $\cos\theta = -\frac{۱}{۵}$ ، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به‌دست آورید.

مهارت‌ها و فرایندها:
حل مسئله.

اهداف: یافتن سایر نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه وقتی یکی از نسبت‌ها معلوم است و مکان نقطه متناظر زاویه معلوم است که در کدام ربع واقع شده است.

در ربع سوم سینوس، مقداری منفی است، پس

$$\sin\theta = -\sqrt{۱-\cos^{۲}\theta} = -\sqrt{۱-\left(\frac{-۱}{۵}\right)^{۲}} = -\sqrt{\frac{۲۴}{۲۵}} = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}$$

تانژانت این زاویه با تقسیم سینوس آن بر کسینوس آن به دست می‌آید.

$$\tan\theta = ۲\sqrt{۶}$$

اگر برای زاویهٔ θ داشته باشیم $\sin\theta = \frac{-۲}{۳}$، آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به‌دست آورد؟ چرا؟ چه اطلاعات دیگری را هم باید بدانیم؟

مهارت‌ها و فرایندها:
استدلال کردن، ارتباطات

اهداف: تشخیص اهمیت دانستن مکان نقطه متناظر زاویه که در کدام ربع واقع است و کافی نبودن دانستن یکی از نسبت‌های مثلثاتی برای یافتن بقیه نسبت‌های مثلثاتی

دیدیم که رابطه $\cos\theta$ بر حسب $\sin\theta$ به صورت $\cos\theta = \pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\theta}$ است.

برای مشخص شدن علامت کسینوس باید بدانیم که زاویه θ در کدام ربع واقع شده است. علامت $\sin\theta$ به تنهایی نمی‌تواند علامت $\cos\theta$ را مشخص کند.

نشان دهید برای زاویهٔ دلخواه θ تساوی‌های زیر برقرارند.

$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$ ، $\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$ ، $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

مهارت‌ها و فرایندها:
استدلال کردن.

اهداف: یافتن رابطه بین تانژانت زاویه‌های θ و $-\theta$ و $\pi+\theta$ و $\pi-\theta$.

کافیست از روابط به دست آمده برای سینوس و کسینوس استفاده کنیم.

$$\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

$$\tan(\pi+\theta)=\frac{\sin(\pi+\theta)}{\cos(\pi+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\tan(-\theta)=\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$

---

۸ دو زاویه مشخص کنید که تانژانت آنها ۱- است.

مهارت‌ها و فرایندها:
حل مسئله، پرورش تفکر واگرا
اهداف: یافتن زاویه از طریق داشتن نسبت مثلثاتی آن زاویه و درک یکتا نبودن جواب و رابطه بین این جواب‌ها می‌دانیم $\tan\frac{\pi}{۴}=۱$، پس $\tan\left(-\frac{\pi}{۴}\right)=-۱$.

پس $-\frac{\pi}{۴}$ یکی از جواب‌های مسئله است. زاویه $\pi-\frac{\pi}{۴}$ نیز یک جواب دیگر است.

بخش چهارم: شیب خط و تانژانت زاویه‌ها

اهداف بخش

- درک رابطه بین شیب یک خط و تانژانت زاویه بین خط و محور طول‌ها

پیش‌نیازهای بخش:
آشنایی با معادله خط، شناخت تانژانت زاویه‌های تند و باز
واژه‌های کلیدی: شیب خط، تانژانت زاویه

نگاه کلی به بخش

این بخش با مفهوم شهودی شیب جاده‌ها شروع می‌شود. با شبیه‌سازی جاده با یک خط، مفهوم شیب جاده با مفهوم شیب خط‌ها متناظر می‌شود. با حدس آنکه شیب خط و جاده باید مفاهیم یکسانی باشند محاسباتی انجام می‌شود تا درستی این حدس برای خط‌های با شیب مثبت بررسی شود. با این بررسی، رابطه بین تانژانت زاویه بین خط و محور طول‌ها با شیب خط به دست می‌آید. در ادامه همین مسئله برای خط‌های با شیب منفی بررسی می‌شود تا در حالت کلی این رابطه برای هر خطی به دست آید.
در حالت خط‌های عمود بر محور طول‌ها، شیب خط تعریف نمی‌شود و زاویه بین خط و محور طول‌ها ۹۰ درجه است و تانژانت ۹۰ درجه نیز تعریف نمی‌شود. این نکته در کتاب نیامده است و در صورت درک کافی هنرجویان مناسب است این نکته را برای آنها مطرح سازید.

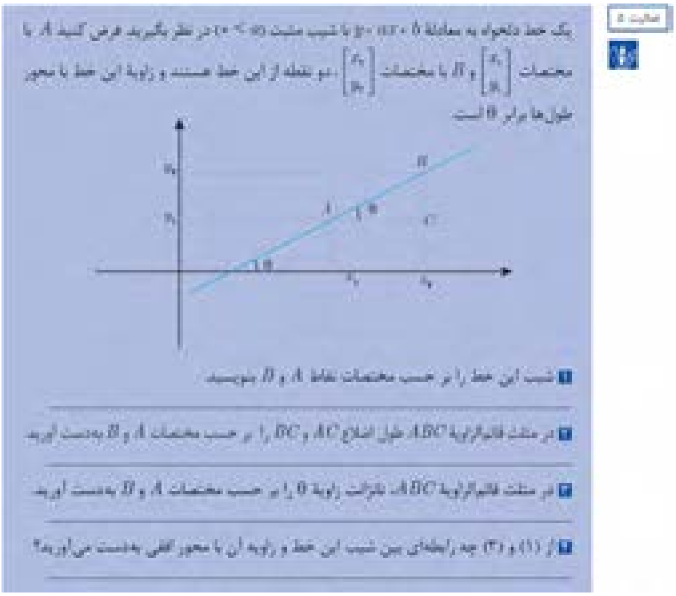
ورود به مطلب

برای آموزش این رابطه، مناسب است که موقعیتی را ترسیم کنیم که این رابطه به سادگی در آن دیده شود. در کتاب از مفهوم شیب جاده استفاده شده است که دیده می‌شود مفهوم شیب جاده، مستقیماً با تانژانت زاویه جاده با خط افق یکسان است. سپس با یک شبیه‌سازی جاده با خط، این ارتباط به خط‌ها نیز منتقل می‌شود.

فعالیت آموزشی

هدف این بخش، آشنایی با شیب خط‌ها، به عنوان تانژانت زاویه بین خط و محور طول‌ها است. در کتاب از مفهوم شیب جاده‌ها شروع شده است که مستقیماً همان تانژانت زاویه جاده با سطح افق است. سپس با طرح این سؤال که آیا شیب خط‌ها

مانند شیب جاده است به فعالیت (۵) می‌رسیم تا به این سؤال برای خط‌های با شیب مثبت پاسخ داده شود.


فعالیت ۵

یک خط دلخواه به معادلهٔ $y = mx + b$ با شیب مثبت $m > 0$ در نظر بگیرید. فرض کنید A با مختصات $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ و B با مختصات $\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$، دو نقطه از این خط هستند و زاویهٔ این خط با محور طول‌ها برابر θ است.

۱ شیب این خط را بر حسب مختصات نقاط A و B بنویسید.

۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC طول اضلاع AC و BC را بر حسب مختصات A و B به‌دست آورید.

۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC تانژانت زاویهٔ θ را بر حسب مختصات A و B به‌دست آورید.

۴ از (۱) و (۳) چه رابطه‌ای بین شیب این خط و زاویهٔ آن با محور افقی به‌دست می‌آورید؟

هدف موضوعی:

درک تساوی شیب خط (در خطوط با شیب مثبت) و تانژانت زاویهٔ تندی که با محور طول‌ها می‌سازد.

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ پیوندها و اتصال‌ها،

۲ مقایسه‌کردن،

۳ تعمیم‌دادن،

۴ ارتباطات.

حل فعالیت ۵

۱ از سال‌های گذشته، می‌دانیم که شیب یک خط که دو نقطه آن معلوم است

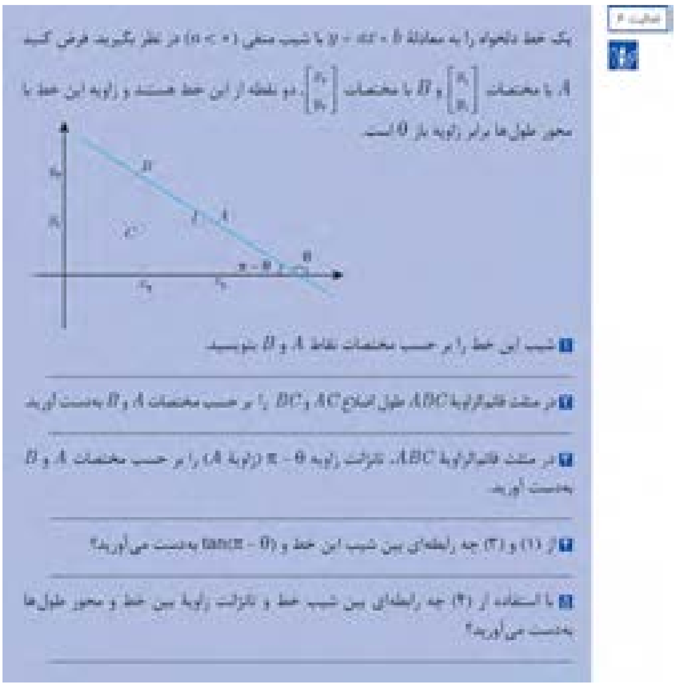
برابر $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ است.

۲ طول ضلع AC برابر x_2-x_1 و طول ضلع BC برابر y_2-y_1 است.

۳ طبق تعریف تانژانت زاویه‌های تند داریم $\tan\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

۴ از (۱) و (۳) نتیجه می‌شود: شیب خط (در حالت مثبت) همان تانژانت زاویه بین خط و محور طول‌ها است.

پس از نتیجه‌گیری از این فعالیت، سؤال برای خط‌های با شیب منفی طرح می‌شود که آیا شیب این خط‌ها نیز تانژانت یک زاویه است. در این حالت تعریف کلی‌تری از زاویه بین خط و محور طول‌ها عرضه می‌شود که در هر دو حالت خط‌های با شیب‌های مثبت و منفی قابل کاربرد باشد. تعریف، از طریق دوران محور طول‌ها در جهت مثبت و انطباق بر خط انجام می‌شود. در حالت خط‌های با شیب منفی، این زاویه باز است و تانژانت آن منفی است و در فعالیت (۶) به این پرسش پاسخ می‌دهیم که آیا تانژانت این زاویه همان شیب خط می‌شود یا نه.


فعالیت ۶

یک خط دلخواه را به معادلهٔ $y = ax + b$ با شیب منفی ($a < 0$) در نظر بگیرید. فرض کنید A با مختصات $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و B با مختصات $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$، دو نقطه از این خط هستند و زاویه این خط با محور طول‌ها برابر زاویه باز θ است.

۱ شیب این خط را بر حسب مختصات نقاط A و B بنویسید.

۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC طول اضلاع AC و BC را بر حسب مختصات A و B به‌دست آورید.

۳ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، تانژانت زاویه $\pi - \theta$ (زاویهٔ A) را بر حسب مختصات A و B به‌دست آورید.

۴ از (۱) و (۳) چه رابطه‌ای بین شیب این خط و $\tan(\pi - \theta)$ به‌دست می‌آورید؟

۵ با استفاده از (۴) چه رابطه‌ای بین شیب خط و تانژانت زاویهٔ بین خط و محور طول‌ها به‌دست می‌آورید؟

اهداف موضوعی:

درک تساوی شیب خط (در خطوط با شیب منفی) و تانژانت زاویهٔ تندی که با

محور طول‌ها می‌سازد.
مهارت‌ها و فرایندها:

۱ پیوندها و اتصال‌ها،

۲ مقایسه‌کردن،

۳ تعمیم‌دادن،

۴ ارتباطات.

حل فعالیت ۶

۱ از سال‌های گذشته، می‌دانیم که شیب یک خط که دو نقطه آن معلوم است برابر $\frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$ است، یعنی $a = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}$

۲ در این حالت، طول ضلع AC برابر $x_۱$-$x_۲$ است ولی طول ضلع BC همان $y_۲$-$y_۱$ است.

۳ طبق تعریف تانژانت زاویه‌های تند داریم $\tan(\pi - \theta) = \frac{BC}{AC} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۱ - x_۲}$.

۴ از (۱) و (۳) نتیجه می‌شود $\tan(\pi - \theta) = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۱ - x_۲} = -\frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = -a$.

۵ از آنجا که $\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$ داریم $-\tan\theta = -a$ ، یعنی $\tan\theta = a$. پس، در این حالت نیز شیب خط، همان تانژانت زاویه بین خط و محور طول‌ها است.
پس از این فعالیت نتیجه کلی به دست می‌آید که شیب همه خط‌ها همان تانژانت زاویه بین خط و محور طول‌ها است. حالت خاص خط‌های عمود بر محور طول‌ها بحث نشده است. در این حالت برای خط، شیب تعریف نمی‌شود و تانژانت زاویه قائمه نیز تعریف نمی‌شود. حالت خط‌های موازی محور طول‌ها که زاویه صفر در نظر گرفته می‌شود به طور صریح بحث نشده است و در یک کار در کلاس، گذرا سخنی درباره آن گفته شده است. در این حالت شیب خط صفر است و تانژانت زاویه صفر نیز صفر است.

پس از ارائه چند مثال برای کار کردن با این رابطه، به کار در کلاس (۷) می‌رسیم که روی این مفاهیم تمرین شود و حالت خط‌های موازی محور طول‌ها هم دیده شود.


کار در کلاس

۱ زاویه بین خط به معادله $\sqrt{۳}x+\sqrt{۳}=y$ و محور طول‌ها چند رادیان است؟

۲ معادله خطی را بنویسید که در نقطه به طول ۱- محور طول‌ها را قطع می‌کند و با آن زاویه ۱۵۰ درجه می‌سازد.

۳ شیب خط ۴- = y چقدر است؟ زاویه بین خط ۴- = y و محور طول‌ها چقدر است؟

اهداف موضوعی:

۱ تقویت مهارت استفاده از معادله یک خط برای یافتن زاویهٔ آن با محور طول‌ها و بالعکس،

۲ پیوندها و اتصال‌ها،

۳ بازنمایی،

۴ ارتباطات.

حل کار در کلاس ۷

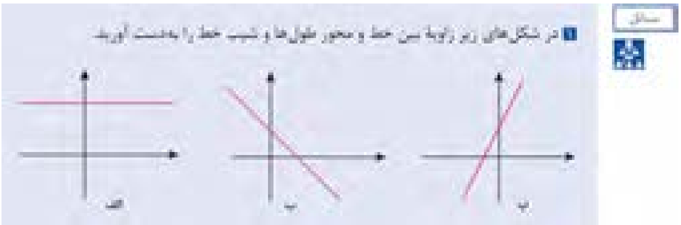
اهداف: کار با رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه بین خط با محور طول‌ها، و بررسی حالت شیب صفر

۱ شیب این خط $\sqrt{۳}$ است. و $\tan\frac{\pi}{۳}=\sqrt{۳}$. پس، زاویه این خط با محور طول‌ها $\frac{\pi}{۳}$ رادیان است.

۲ شیب این خط $\tan ۱۵۰$ است و $\tan ۱۵۰=\tan(۱۸۰-۳۰)=-\tan ۳۰=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$.

پس معادله خط $y=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}(x+۱)$ است.

۳ شیب خط $y=-۴$ صفر است. این خط با محور طول‌ها موازی است و زاویه آن با محور طول‌ها صفر است. تانژانت صفر نیز، صفر است.



حل مسائل

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، پرورش تفکر بصری

اهداف: تمرین روی رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه بین خط با محور طول‌ها به طور عملی و با اندازه‌گیری با خط‌کش و نقاله

در شکل (الف) خط موازی محور طول‌ها است و شیب آن صفر است و زاویه آن نیز صفر است. در شکل (ب) شیب منفی است و با توجه به آنکه فاصله محل تلاقی خط با محورها تا مبدأ یکسان است شیب ۱- است. زاویه این خط با محور طول‌ها ۱۳۵ درجه خواهد بود. در شکلِ (پ) شیب مثبت است و با اندازه‌گیری محل تقاطع خط با محورها شیب تقریباً ۲ خواهد بود و با اندازه‌گیری زاویه با نقاله مقدار زاویه تقریباً ۶۴ درجه خواهد بود.

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، ارتباطات، مهارت کار با ابزار.

اهداف: تمرین روی رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه بین خط با محور طول‌ها و استفاده از رسم یا ماشین حساب در محاسبه شیب خط و تانژانت یک زاویه کافی است شیب این خط که همان تانژانت ۲۰ درجه است، محاسبه کنیم. به کمک ماشین حساب داریم $\tan ۲۰^\circ \approx ۰/۳۶$. پس معادله این خط به صورت $y=۰/۳۶\,x+b$ است.با توجه به قرار داشتن نقطهٔ $\begin{bmatrix}-۱\\-۲\end{bmatrix}$ روی خط داریم: $-۲=۰/۳۶\,(-۱)+b$ در نتیجه $b=-۱/۶۴$

که معادله خط به‌صورت y=۰/۳۶ x −۱/۶۴ است.


مسائل

خطی که از دو نقطهٔ $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$ می‌گذرد چه زاویه‌ای با محور طول‌ها می‌سازد؟

(از رسم خط و نقاله استفاده کنید.)

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، مهارت کار با ابزار.

اهداف: تمرین روی رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه بین خط با محور طول‌ها و استفاده از ماشین حساب در محاسبه زاویه وقتی تانژانت زاویه را می‌دانیم با آزمون و خطا یا رسم شکل و استفاده از نقاله شیب این خط را حساب می‌کنیم.

$m=\frac{۵-۲}{۱-(-۱)}=\frac{۳}{۲}$ به کمک ماشین حساب یا با رسم و نقاله زاویه‌ای که تانژانت آن $\frac{۳}{۲}$ است را به دست می‌آوریم. این زاویه تقریباً ۵۶ درجه است


مسائل

خط به معادلهٔ ۴ = $۳y + ۲x$ در چه نقطه‌ای محور طول‌ها را قطع می‌کند و چه زاویه‌ای با آن می‌سازد؟

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله

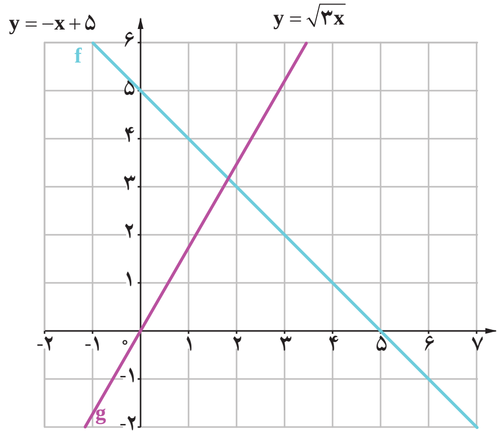
اهداف: تمرین روی رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه بین خط با محور طول‌ها و استفاده از ماشین حساب در محاسبه زاویه وقتی تانژانت زاویه را می‌دانیم با آزمون و خطا یا رسم شکل و استفاده از نقاله شیب این خط $-\frac{۲}{۳}$ است و در نقطه به طول ۲ محور طول‌ها را قطع می‌کند. با رسم این خط زاویه آن را با نقاله حساب می‌کنیم که تقریباً ۱۴۷ درجه است. tan۱۴۷ تقریباً برابر $-\frac{۲}{۳}$ است.


مسائل

از برخورد دو خط با معادله‌های $y=\sqrt{۳}x$ و $y=-x+۵$ و محور طول‌ها یک مثلث ساخته می‌شود. این مثلث را رسم کنید و زاویه‌های این مثلث را بر حسب رادیان به‌دست آورید.

مهارت‌ها و فرایندها:
حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه.

اهداف: ترسیم موقعیت و استدلال و استفاده رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه بین خط با محور طول‌ها
بهتر است این خط‌ها را رسم کنیم و مثلث تشکیل شده را تشخیص دهیم.



یکی از زاویه‌های این مثلث همان زاویه خط $y=\sqrt{۳}x$ با محور طول‌ها است. شیب این خط $\sqrt{۳}$ است و $\tan ۶۰=\sqrt{۳}$. پس این زاویه ۶۰ درجه است. زاویه دیگر، مکمل زاویه خط $y=-x+۵$ با محور طول‌ها است. شیب این خط ۱- است و $\tan ۱۳۵=-۱$. پس زاویه دیگر این مثلث ۴۵ درجه است. بنابراین زاویه سوم نیز ۷۵ درجه است.


خط‌های به معادلهٔ $۳x - ۵y = c$ با هم (موازی‌اند/ متقاطع‌اند). زاویهٔ این خط‌ها با محور طول‌ها برحسب درجه و رادیان به‌طور تقریبی چقدر است؟

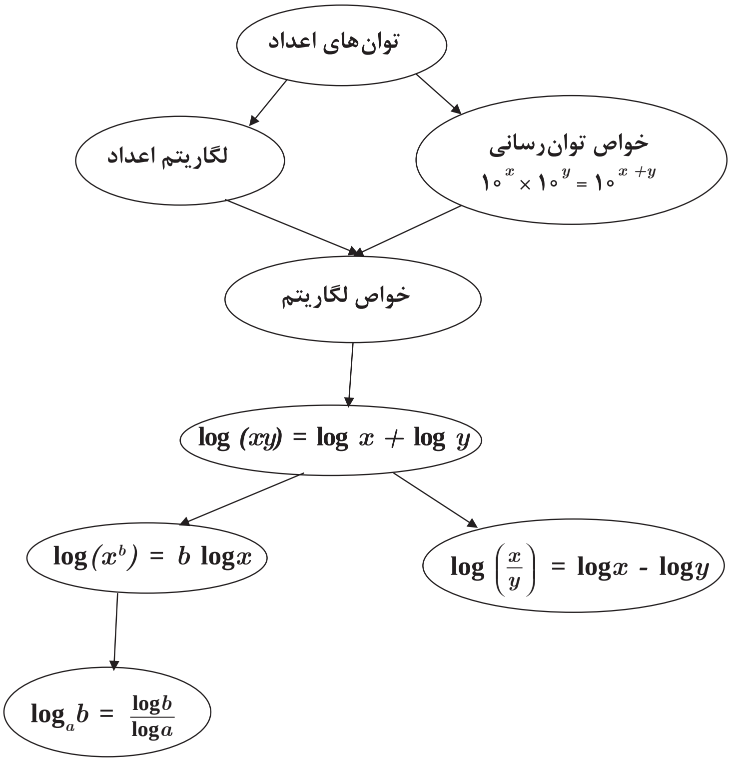
مهارت‌ها و فرایندها:
حل مسئله

اهداف: تشخیص دسته خط‌های موازی از طریق استدلال روی شیب‌های یکسان آنها
تمام این خط‌ها موازی‌اند زیرا شیب تمام آنها $\frac{۳}{۵}$ است. با رسم یکی از این خط‌ها و اندازه‌گیری زاویه آنها با محور طول‌ها یا با استفاده از ماشین حساب، این زاویه تقریباً ۳۱ درجه است که بر حسب رادیان تقریباً ۰/۵۴ رادیان است.

پودمان چهارم

لگاریتم و خواص آن

طرح کلی مفاهیم پودمان چهارم (نقشهٔ مفهومی)



اهداف کلی

- درک مفهوم لگاریتم.
- توجه به نقش لگاریتم در تسهیل محاسبات.
- توجه به نقش لگاریتم در حل مسائل
- آشنایی با خواص لگاریتم.
- درک تقریب اعشاری لگاریتم.

پیش نیازهای پودمان

- آشنایی با توان‌رسانی به توان عددهای گویا.
- آشنایی با خواص توان‌رسانی.

استانداردهای فرایندی		
حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	ـ معرفی لگاریتم برای محاسبهٔ فاصلهٔ بین زمین و ستارگان ـ ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متون ورودی
	ـ شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل مسئله و یا انتخاب مناسب آنها	ـ استفاده از الگویابی برای بیان خاصیت لگاریتم (فعالیت ۴ و ۵ و ۶)
ارتباط کلامی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی، انتقال تفکرات ریاضی خود به دیگران	ـ انتقال تفکرات حمید به معلم ریاضی (در مکالمه حمید و هنرآموز قبل از فعالیت ۴) و سازمان‌دهی آن
	استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	ـ استفاده از زبان ریاضی برای بیان خواص لگاریتم (کادرهای بعد از فعالیت ۴ و ۵ و ۶)
پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کارگیری ریاضیات در سایر مضامین بیرون از چهارچوب موضوع ریاضی	ـ تکثیر باکتری‌ها و محاسبه وزن آنها (ارتباط ریاضی با زیست‌شناسی)
	تشخیص و به‌کارگیری پیوستگی بین موضوع‌های ریاضی (جبر و هندسه و ...)	ـ ارتباط بین توان یک عدد و لگاریتم.
استدلال و اثبات	به‌کارگیری استدلال	ـ اثبات خاصیت لگاریتم تقسیم دو عدد (کار در کلاس ۵ شمارهٔ ۲) ـ دلیل مناسب نبودن عدد ۱ به عنوان مبنا (شمارهٔ ۴ و ۵ از فعالیت ۲)
بازنمایی‌ها	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	ـ دیاگرام مثال ۲ صفحهٔ ۹۸
سایر مهارت‌های تفکر	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی و ...	ـ تعمیم مثبت بودن توان‌های اعداد ۴ و ۳ به توان‌های هر عدد مثبت a (فعالیت ۳) ـ مقایسه مقادیر $\log(a+b)$ و $\log a+\log b$ (استفاده از ماشین حساب بعد از فعالیت ۴)

بخش اول: مفهوم لگاریتم

اهداف بخش

- درک مفهوم لگاریتم.
- نمایش معادل لگاریتمی عبارت‌های شامل توان‌های یک عدد
- محاسبهٔ لگاریتم اعدادی که توان‌هایی (صحیح یا گویا) از پایهٔ لگاریتم هستند.
- محاسبهٔ لگاریتم اعداد (در پایهٔ ۱۰) به کمک ماشین حساب.

واژه‌های کلیدی: لگاریتم

نگاه کلی به بخش

پس از نمادگذاری هندی ـ عربی و چگونگی محاسبات مربوط به کسرها، **لگاریتم** سومین اختراعی است که بشر را در فن محاسبات چیره‌دست کرده است و تا قبل از اختراع رایانه یکی از کاربردهای مهم آن تسهیل و سرعت بخشیدن به محاسبات بسیار پیچیدهٔ ریاضی است. اهمیت این اختراع به گونه ای بود که «پی یر سیمون لاپلاس» ریاضی‌دان برجسته در خصوص آن گفته است:

«وسیله‌ای ستودنی است که به کمک آن کار چند ماه به چند روز کاهش می‌یابد، عمر اخترشناسان را دو برابر می‌کند و از خطاهای کوچک می‌گذرد و از جمله‌های طولانی و جدانشدنی ریاضی بیزار است»

اولین بخش از این پودمان اختصاص به معرفی مفهوم لگاریتم و نمادهای مرتبط با آن دارد. فرایند معرفی این مفهوم متکی بر ریشهٔ تاریخی شکل‌گیری آن می‌باشد. ویژگی‌های اعدادی که به عنوان مبنای لگاریتم می‌توان انتخاب کرد یا اعدادی که می‌توان از آنها لگاریتم گرفت در قالب فعالیت‌ها ارائه شده است تا درک درستی از این ویژگی‌ها در هنرجو ایجاد شود.

در این بخش ابتدا با طرح جملهٔ مربوط به «لاپلاس» سعی در جلب توجه هنرجویان به موضوع می‌شود. سپس با توجه به ریشهٔ تاریخی ابداع لگاریتم در قالب یک فعالیت، دشواری‌های کار با اعداد بزرگ مطرح و نقش لگاریتم در تسهیل کار با این اعداد مشخص می‌شود. با توجه به اینکه هدف این فعالیت تمرکز هنرجویان بر توان اعداد برای جایگزین کردن عمل جمع و تفریق به جای ضرب و تقسیم می‌باشد تا از این طریق لگاریتم معرفی شود. بنابراین در ابتدا از توان‌های طبیعی اعداد (که ساده‌تر می‌باشد) استفاده شده است و فاصلهٔ بین ستارگان به نزدیک‌ترین توان طبیعی عدد ۳ گرد شده است. فعالیت‌های بعدی در این بخش به بیان علت برخی

محدودیت‌ها در انتخاب اعداد به عنوان مبنا و سایر موارد دارد.
به منظور کسب مهارت استفاده از ماشین حساب در یافتن تقریب اعشاری لگاریتمِ اعداد، در این بخش کار با ماشین حساب نیز پیش‌بینی شده است. مثال (۴) به ارائهٔ نقشی دیگر از لگاریتم می‌پردازد که این نقش از لگاریتم در حل معادلات توانی استفاده می‌شود. برخی از ویژگی‌های لگاریتم در قالب کار در کلاس معرفی شده است (کار در کلاس ۵) و مثال‌هایی که کاربرد این ویژگی‌ها را مشخص می‌کند نیز ارائه شده است.

ورود به مطلب

رویکرد کلی کتاب در آموزش هر مفهوم جدید طرح سؤال در یک زمینه واقعی و پاسخ‌گویی به سؤال در فعالیت‌های طراحی شده است. اما، با توجه به سطح هنرجویان و علاقه‌مندی‌های خاصی که در کلاس وجود دارد هنرآموزان می‌توانند روش خود را به اجرا در آورند. در کتاب سعی شده است با طرح یک سخن جالب از دانشمندان و انگیزه‌بخشی به هنرجویان برای درک این سخن مفهوم لگاریتم ارائه شود. سؤال ابتدای این قسمت که مربوط به بیان لاپلاس می‌باشد. سپس می‌توانیم از هنرجویان بخواهیم که فعالیت (۱) را انجام دهند. همچنین هنرآموز می‌تواند از هنرجویان بخواهد متن ابتدای این قسمت را مطالعه کنند تا برای انجام فعالیت (۱) آمادگی داشته باشند. در هر صورت بیان جملهٔ لاپلاس، کنجکاوی هنرجویان را بر می‌انگیزد و آمادگی آنها را برای درک مفهوم بیشتر می‌کند. در فعالیت (۱) مخصوصاً از اعداد بزرگ استفاده شده است تا هنرجویان از نقش لگاریتم در تسهیل محاسبات با اعداد بزرگ آگاه شوند و تا حدودی به نحوهٔ پیدایش این مفهوم پی ببرند.

فعالیت آموزشی

در این فعالیت به‌طور غیرمستقیم با مفهوم لگاریتم کار خواهیم کرد.


فعالیت ۱

۱ فاصلهٔ زمین از خورشید تقریباً ۱۲۹۱۴۰۱۶۳کیلومتر و فاصلهٔ ستارهٔ پروکسیما قنطورس تا زمین تقریباً ۱۷۷۱۴۷برابر فاصلهٔ زمین تا خورشیداست. برای تعیین فاصلهٔ این ستاره تا زمین باید از کدام چهار عمل اصلی استفاده کرد؟ حدس می‌زنید برای انجام این عمل چقدر زمان نیاز دارید؟

۲ ستارهٔ شباهنگ (سیروس) در فاصلهٔ تقریباً ۶۸۶۳۰۳۷۷۳۶۴۸۸۳ کیلومتری از زمین است. اگر بخواهیم بدانیم فاصلهٔ ستاره شباهنگ از زمین چند برابر فاصلهٔ خورشید تا زمین است چه عملی باید انجام دهید؟ حدس می‌زنید زمان انجام این عمل چقدر است؟

۳ با استفاده از جدول مقابل که در آن توان‌هایی از ۳ محاسبه شده است، جاهای خالی را کامل کنید و حاصل را با استفاده از ضرب اعداد توان‌دار بنویسید.

$۱۲۹۱۴۰۱۶۳ \times ۱۷۷۱۴۷ = ۳^{\dots} \times ۳^{\dots} = ۳^{\dots}$

$۶۸۶۳۰۳۷۷۳۶۴۸۸۳ \div ۱۲۹۱۴۰۱۶۳ = ۳^{\dots} \div ۳^{\dots} = ۳^{\dots}$

۴ با استفاده از قسمت قبل و جدول مقابل به سؤال‌های (الف) و (ب) پاسخ دهید.

الف) فاصلهٔ پروکسیما قنطورس از زمین چقدر است؟

ب) فاصلهٔ ستارهٔ شباهنگ (سیروس) چند برابر فاصلهٔ خورشید تا زمین است؟

۵ محاسبهٔ مستقیم سادهتر است یا استفاده از جدول؟ زمان انجام کدام روش کمتر است؟

نزدیک‌ترین ستاره به زمین که فقط در نیمکره جنوبی قابل رؤیت است پروکسیما قنطورس و نزدیک‌ترین ستاره که از همهٔ نقاط زمین قابل رؤیت است شباهنگ (سیروس) است.

n	۳^n	حاصل
۰	$۳^۰$	۱
۱	$۳^۱$	۳
۲	$۳^۲$	۹
۳	$۳^۳$	۲۷
⋮	⋮	⋮
۱۱	$۳^{۱۱}$	۱۷۷۱۴۷
۱۲	$۳^{۱۲}$	۵۳۱۴۴۱
⋮	⋮	⋮
۱۷	$۳^{۱۷}$	۱۲۹۱۴۰۱۶۳
۱۸	$۳^{۱۸}$	۳۸۷۴۲۰۴۸۹
⋮	⋮	⋮
۲۷	$۳^{۲۷}$	۷۶۲۵۵۹۷۴۸۴۹۸۷
۲۸	$۳^{۲۸}$	۲۲۸۷۶۷۹۲۴۵۴۹۶۱
۲۹	$۳^{۲۹}$	۶۸۶۳۰۳۷۷۳۶۴۸۸۳

اهداف موضوعی:

۱ درک نقش لگاریتم در تسهیل محاسبات

۲ آشنایی با مفهوم لگاریتم،

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ پیوندها و اتصال‌ها در ریاضی و خارج ریاضی،

۲ تخمین زدن

۳ مقایسه کردن

۴ ارزیابی

حل فعالیت ۱

۱ عمل ضرب باید انجام شود، زمان زیادی لازم است زیرا اعداد بزرگی را باید در هم ضرب کنیم.

۲ عمل تقسیم باید انجام شود، زمان زیادی لازم است زیرا اعداد بزرگی را باید برهم تقسیم کنیم.

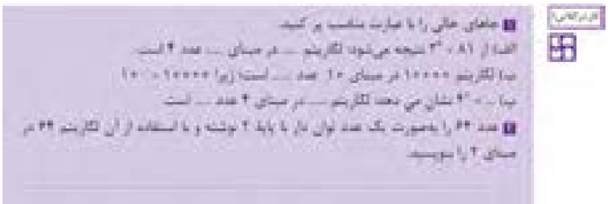
۳ $۳^{۱۷} \times ۳^{۱۱} = ۳^{۲۸}$ و $۳^{۲۹} \div ۳^{۱۷} = ۳^{۱۲}$

۴ مشاهده می‌کنیم که اعدادی که به عنوان فاصله داده شده‌اند همگی توان‌هایی از ۳ هستند، پس ضرب و تقسیم آنها به صورت ضرب و تقسیم دو عدد توان‌دار است.

الف) $۳^{۱۷} \times ۳^{۱۱} = ۳^{۲۸} = ۲۲۸۷۶۷۹۲۴۵۴۹۶۱$

ب) $۳^{۲۹} \div ۳^{۱۷} = ۵۳۱۴۴۱$

۵ ضرب و تقسیم اعداد بزرگ بسیار وقت‌گیر است ولی وقتی این اعداد به صورت اعداد توان‌دار با پایه یکسان باشند ضرب و تقسیم آنها به صورت جمع و تفریق توان‌ها در می‌آید که آسان‌تر است. در اینجا استفاده از جدول یعنی نوشتن عدد به صورت توان یک عدد خاص.



حل کار در کلاس ۱

اهداف: کسب مهارت برقراری ارتباط بین نمایش یک عدد توان‌دار و لگاریتم آن عدد، پیوندها و اتصال‌ها بین مفاهیم ریاضی.

۱ الف) ۸۱ ، ۳

ب) ۴ ، ۴

پ) ۱۶ ، ۱۶ ، ۲

۲ $64 = 2^6$ بنابراین لگاریتم ۶۴ در مبنای ۲ عدد ۶ است.
در فعالیت بعدی مشخص خواهد شد که از عدد ۱ نمی‌توان به عنوان مبنای لگاریتم استفاده کرد.

فعالیت ۲

تساوی‌های $1 = 1^0$ و $1 = \sqrt[3]{1} = 1^{\frac{1}{3}}$ و $1 = 1^2$ و $1 = 1^{-1}$ و $1 = \frac{1}{1} = 1^{-2}$ و $1 = 1^{\dots}$ و ... را در نظر بگیرید.

۱ در تساوی $1 = 1^{\dots}$ به‌جای نقطه چین چه اعدادی می‌توان قرار داد؟

۲ آیا می‌توان عدد a را طوری پیدا کرد که $2 = 1^a$؟ به عبارت دیگر آیا لگاریتم ۲ در مبنای ۱ قابل تعریف است؟

۳ آیا عدد a را می‌توان طوری یافت که در تساوی $3 = 1^a$ صدق کند به عبارت دیگر آیا لگاریتم ۳ در مبنای ۱ قابل تعریف است؟

۴ آیا عددی غیر از ۱ را می‌توان به‌صورت عددی توان‌دار با پایهٔ ۱ نوشت؟ چرا؟

۵ با توجه به نتایج بالا، فکر می‌کنید می‌توان عدد ۱ را به عنوان مبنای لگاریتم انتخاب کرد؟ چرا؟

اهداف موضوعی:

درک عدم امکان انتخاب عدد ۱ به‌عنوان مبنای لگاریتم.

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ پیوندها و اتصال‌ها،

۲ استدلال،

۳ تعمیم.

حل فعالیت ۲ :

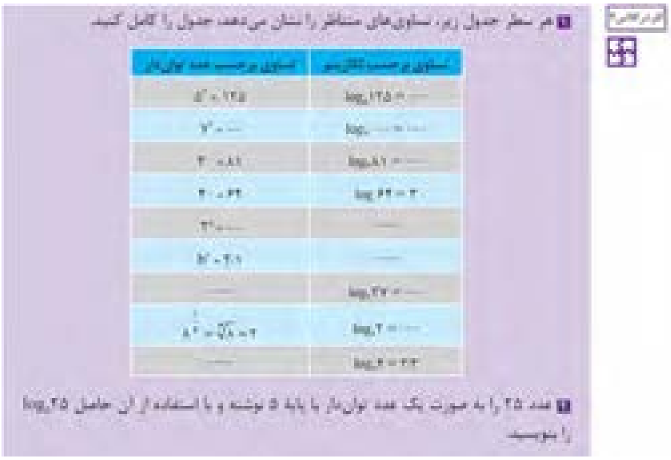
۱ نظیر نمونه‌های سطر اول فعالیت هر عدد طبیعی، صحیح، گویا و حتی گنگ می‌توان قرار داد.

۲ خیر ، زیرا ۱ به هر توانی برسد ، حاصل، عدد ۱ خواهد شد.

۳ خیر

۴ خیر زیرا حاصل هر عدد توان‌دار با پایهٔ ۱، عددِ ۱ است.

۵ خیر، با توجه به تعریف لگاریتم چون به جز ۱ هیچ عدد دیگری را نمی‌توان به صورت توانی از عدد ۱ نوشت، عدد ۱ نمی‌تواند به عنوان مبنای لگاریتم انتخاب شود.


کار در کلاس ۲

۱ هر سطر جدول زیر، تساوی‌های متناظر را نشان می‌دهد. جدول را کامل کنید.

تساوی برحسب لگاریتم	تساوی برحسب عدد توان‌دار
$\log_{۵} ۱۲۵ = \ldots$	$۵^{۳} = ۱۲۵$
$\log_{\ldots} \ldots = \ldots$	$۷^{۲} = \ldots$
$\log_{۳} ۸۱ = \ldots$	$۳^{\ldots} = ۸۱$
[illegible]	[illegible]
$\ldots$	[illegible]
$\ldots$	[illegible]
[illegible]	$\ldots$
$\log_{۸} ۲ = \ldots$	$۸^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$
[illegible]	$\ldots$

۲ عدد ۲۵ را به صورت یک عدد توان‌دار با پایهٔ ۵ نوشته و با استفاده از آن حاصل $\log_{۵} ۲۵$ را بنویسید.

حل کار در کلاس ۲

اهداف: تقویت مهارت محاسبهٔ لگاریتم اعداد.
پیوندها و اتصال‌ها بین مفاهیم ریاضی.

۱ تکمیل شدهٔ جدول :

تساوی برحسب لگاریتم	تساوی برحسب عدد توان‌دار
$\log_{۵} ۱۲۵ = ۳$	$۵^{۳} = ۱۲۵$
$\log_{۷} ۴۹ = ۲$	$۷^{۲} = ۴۹$
$\log_{۳} ۸۱ = ۴$	$۳^{۴} = ۸۱$
$\log_{۲} ۳۲ = ۵$	$۲^{۵} = ۳۲$
$\log_{۳} ۲۷ = ۳$	$۳^{۳} = ۷۲$
$\log_{۸} ۲ = \frac{۱}{۳}$	$۸^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$

۲ $۲۵ = ۵^۲ \Rightarrow \log_۵ ۲۵ = ۲$

اهداف موضوعی:

درک ضرورت مثبت بودن b در $\log_a^b$.

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ پیوندها و اتصال‌ها،

۲ استدلال،

۳ حدسیه‌سازی،

۴ تعمیم،

۵ ارزیابی.

حل فعالیت ۳

۱ جدول تکمیل شده :

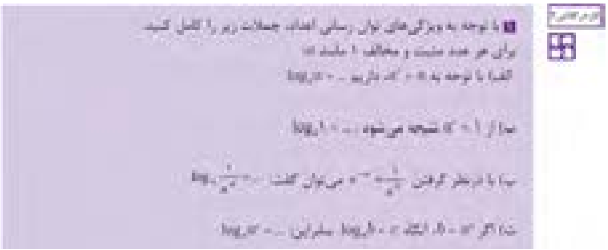
c	۲-	۱-	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲
b	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴	۱۶

۲ خیر ، علامت b مثبت است.

۳ علامت b در $\log_۴ b$ باید مثبت باشد.

۴ برای عدد ۳ نیز می‌توان دید : $۳^۲ = ۹ > ۰$ و $۳^{-۲} = \frac{۱}{۹} > ۰$ و $۳^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳} > ۰$
بنابراین علامت b در $\log_۳ b$ مثبت است.

۵ چون برای $a > ۰$ در تساوی $a^c = b$ مقدار b مثبت است ، پس علامت b در $\log_a b$ مثبت است. بنابراین از اعداد منفی نمی‌توان لگاریتم گرفت زیرا عدد مثبت به هر توانی برسد منفی نخواهد بود.


با توجه به ویژگی‌های توان رسانی اعداد، جملات زیر را کامل کنید.
برای هر عدد مثبت و مخالف ۱ مانند a

اهداف: آشنایی با برخی از خواص لگاریتم، پیوند و اتصال بین مفاهیم ریاضی.

حل کار در کلاس ۳ :

اهداف: آشنایی با برخی از خواص لگاریتم.

الف) $\log_a a = ۱$ ب) $\log_a ۱ = ۰$ پ) $\log_a \frac{۱}{a^n} = -n$ ت) $\log_a a^c = c$

توصیه: از هنرجویان بخواهید این خواص را به‌صورت کلامی نیز بگویند مثلاً در قسمت الف: لگاریتم هر عدد در مبنای خودش عدد ۱ است و...


استفاده ازماشین حساب
با استفاده از ماشین حساب حاصل لگاریتمهای زیر را به دست آورید.
الف) $\log ۹$
ب) $\log ۰/۰۰۱۶$

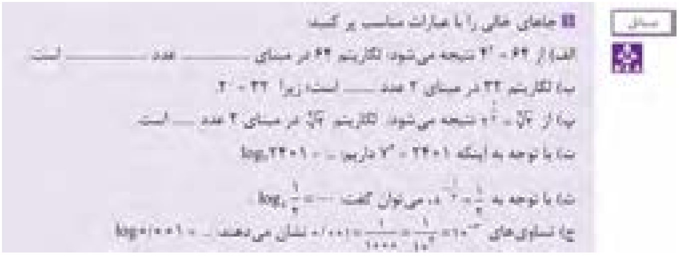
استفاده از ماشین حساب :

اهداف: آشنایی با تقریب اعشاری لگاریتم اعداد.

تقویت مهارت استفاده از ماشین حساب در محاسبه لگاریتم.
توجه به نقش ماشین حساب در محاسبهٔ لگاریتم یک عدد.

الف) $\log ۹ \approx ۰/۹۵$

ب) $\log ۰/۰۰۱۶ \approx -۲/۷۹$


جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

مهارت‌ها و فرایندها: پیوند و اتصال بین توان و لگاریتم

اهداف: تمرین روی مفهوم و محاسبه لگاریتم

الف) از $۶۴ = ۴^{۳}$ نتیجه می شود لگاریتم ۶۴ در مبنای ۴ عدد ۳ است.

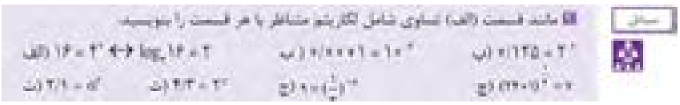
ب) لگاریتم ۳۲ در مبنای ۲ عدد ۵ است زیرا $۳۲ = ۲^{۵}$

پ) از $\sqrt[۳]{۲} = ۲^{\frac{۱}{۳}}$ نتیجه می شود لگاریتم $\sqrt[۳]{۲}$ در مبنای ۲ عددِ $\frac{۱}{۳}$ است.

ت) با توجه به اینکه $۲۴۰۱ = ۷^{۴}$ بنابراین : $\log_{۷} ۲۴۰۱ = ۴$.

ث) با توجه به $\frac{۱}{۲} = ۸^{-\frac{۱}{۳}}$ می‌توان گفت : $\log_{۸} \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۳}$.

ج) تساوی‌های $۱۰^{-۳} = \frac{۱}{۱۰^{۳}} = \frac{۱}{۱۰۰۰} = ۰/۰۰۱$ نشان می دهد : $\log_{۱۰} ۰/۰۰۱ = -۳$.


مانند قسمت (الف) تساوی شامل لگاریتم متناظر با هر قسمت را بنویسید.

مهارت‌ها و فرایندها: پیوند و اتصال بین توان و لگاریتم، ارتباطات

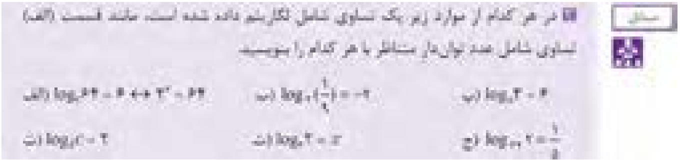
اهداف: برقرار کردن ارتباط مفهومی بین عمل توان‌رسانی و لگاریتم

۲ تساوی شامل لگاریتم متناظر با هر قسمت را بنویسید:

الف) $۱۶ = ۴^{۲} \leftrightarrow \log_{۴} ۱۶ = ۲$ ب) $\log_{۱۰} ۰/۰۰۰۱ = -۴$ پ) $\log_{۲} ۰/۱۲۵ = -۳$

ت) $\log_{a} ۲/۱ = ۳$ ث) $\log_{۲} ۴/۳ = x$

چ) $\log_{2401} 7 = \frac{1}{4}$　　　ج) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$


در هر کدام از موارد زیر یک تساوی شامل لگاریتم داده شده است. مانند قسمت (الف) تساوی شامل عدد توان‌دار متناظر با هر کدام را بنویسید.

الف) $\log_2 64 = 6 \leftrightarrow 2^6 = 64$　　ب) $\log_3 (\frac{1}{9}) = -2$　　پ) $\log_a 3 = 6$

ت) $\log_b c = 2$　　ث) $\log_3 2 = x$　　ج) $\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$

مهارت‌ها و فرایندها: پیوند و اتصال بین توان و لگاریتم، ارتباطات

اهداف: برقرار کردن ارتباط مفهومی بین عمل توان‌رسانی و لگاریتم

الف) $\log_2 64 = 6 \leftrightarrow 2^6 = 64$　　ب) $3^{-2} = \frac{1}{9}$　　پ) $a^6 = 3$

ت) $b^2 = c$　　ث) $3^x = 2$　　ج) $32^{\frac{1}{5}} = 2$


حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\log_7 49 = \dots$　　ب) $\log_5 125 = \dots$　　پ) $\log_2 128 = \dots$

ت) $\log_2 \frac{1}{8} = \dots$　　ث) $\log_{10} 0/0001 = \dots$

مهارت‌ها و فرایندها: مهارت محاسبه لگاریتم یک عدد

اهداف: محاسبهٔ لگاریتم

الف) $\log_7 49 = 2$　　ب) $\log_5 125 = 3$　　$\log_2 128 = 7$

ت) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$　　ث) $\log_{10} 0/0001 = -4$

تذکر: توصیه می‌شود از هنرجویان بخواهید برای محاسبهٔ لگاریتم در یک مبنا توان‌های مبنا را نوشته تا به عدد مورد نظر برسیم مثلاً برای مبنای ۲ می‌توان از جدول زیر استفاده کرد:

توان‌های ۲	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
حاصل	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸


سؤال

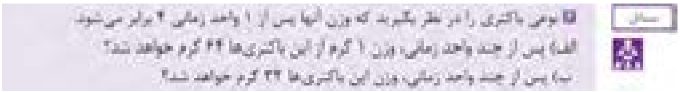
با استفاده از ماشین حساب حاصل لگاریتم‌های زیر را تا دو رقم اعشار بنویسید.

الف) $\log ۵۰ = ...$ ب) $\log ۱۲ = ...$ ج) $\log ۲ = ...$

مهارت‌ها و فرایندها: مهارت محاسبه لگاریتم یک عدد، مهارت استفاده از ابزار

اهداف: استفاده از ماشین حساب، تقویت مهارت قطع کردن در تقریب اعداد اعشاری.

الف) $\log ۵۰ = ۱/۶۹$ ب) $\log ۱۲ = ۱/۰۷$ ج) $\log ۲ = ۰/۳۰$


سؤال

نوعی باکتری را در نظر بگیرید که وزن آنها پس از ۱ واحد زمانی ۴ برابر می‌شود.

الف) پس از چند واحد زمانی، وزن ۱ گرم از این باکتری‌ها ۶۴ گرم خواهد شد؟

ب) پس از چند واحد زمانی، وزن این باکتری‌ها ۳۲ گرم خواهد شد؟

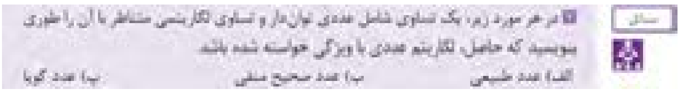
مهارت‌ها و فرایندها: حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی

اهداف: استفاده از لگاریتم در حل مسائل، استدلال

الف) قبلاً دیده بودیم وزن باکتری‌ها پس از x واحد زمانی ۴^x است. پس اگر $۶۴ = ۴^x$ داریم $x = \log_۴ ۶۴$. از آنجا که $\log_۴ ۶۴ = ۳$ پس بعد از ۳ واحد زمانی وزن باکتری‌ها ۶۴ گرم خواهد بود.

ب) با استدلال همانند بخش (الف) جواب مسئله $\log_۴ ۳۲$ است. برای محاسبه این مقدار داریم:

$۴^{\frac{۵}{۲}} = ۴^۲ \times ۴^{\frac{۱}{۲}} = ۴^۲ \times \sqrt{۴} = ۱۶ \times ۲ = ۳۲$ بنابراین $۲/۵ = \frac{۵}{۲} = \log_۴ ۳۲$ پس، بعد از ۲/۵ واحد زمانی وزن باکتری‌ها ۳۲ گرم خواهد بود.


سؤال

در هر مورد زیر، یک تساوی شامل عددی توان‌دار و تساوی لگاریتمی متناظر با آن را طوری بنویسید که حاصل لگاریتم عددی با ویژگی خواسته شده باشد.

الف) عدد طبیعی ب) عدد صحیح منفی پ) عدد گویا

مهارت‌ها و فرایندها: ارتباطات

اهداف: تمرین روی مفهوم لگاریتم

الف) $۶^۲ = ۳۶ \leftrightarrow \log_۶ ۳۶ = ۲$

ب) $۶^{-۲} = \frac{۱}{۳۶} \leftrightarrow \log_۶ \frac{۱}{۳۶} = -۲$

پ) $۶^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۶} \leftrightarrow \log_۶ \sqrt{۶} = \frac{۱}{۲}$

بخش دوم: خواص لگاریتم

اهداف بخش

- آشنایی با خواص لگاریتم
- کسب مهارت در استفاده از خواص لگاریتم

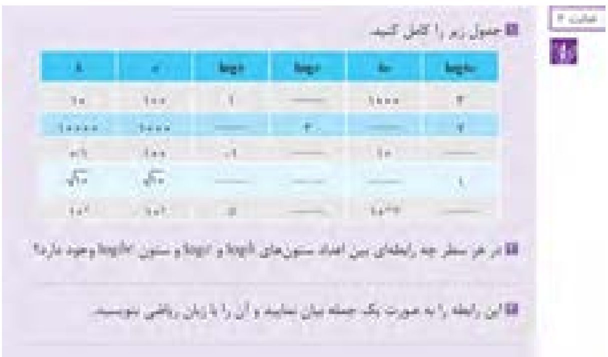
واژه‌های کلیدی: خواص لگاریتم

نگاه کلی به بخش

در این بخش ابتدا با طرح یک پرسش، زمینهٔ کنجکاوی هنرجویان برای ذکر خواص لگاریتم (که هدف اصلی ابداع لگاریتم می‌باشد) فراهم می‌شود. سپس با طرح فعالیت سعی در هدایت هنرجویان به درک این خواص می‌گردد برای بررسی برخی از اشتباهات متداول توسط هنرجویان از ماشین حساب استفاده شده است.

ورود به مطلب

می‌توانیم به بخش اول مراجعه کنیم و از دانش‌آموزان بخواهیم توضیح دهند لگاریتم اعداد چگونه می‌تواند مشکلات مربوط به محاسبات جمع و ضرب اعداد بزرگ را حل کند. پس از بحث در این مورد می‌توانیم به فعالیت (۴) بپردازیم تا یک خاصیت اساسی لگاریتم را به دست آوریم.



هدف موضوعی:

درک خواص لگاریتم،

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ الگویابی،

۲ مقایسه کردن،

۳ استدلال،

۴ تعمیم،

۵ ارتباطات کلامی،

حل فعالیت ۴ :

۱ تکمیل شدهٔ جدول:

b	c	$\log b$	$\log c$	bc	$\log (bc)$
۱۰	۱۰۰	۱	۲	۱۰۰۰	۳
۱۰۰۰۰	۱۰۰۰	۵	۳	۱۰۰۰۰۰۰۰۰	۸
۰/۱	۱۰۰	۱-	۲	۱۰	۱
$\sqrt{۱۰}$	$\sqrt{۱۰}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱۰	۱
۱۰^{x}	۱۰^{y}	x	y	۱۰^{x+y}	$x+y$

۲ در هر سطر مجموع اعداد مربوط به ستون $\log b$ و $\log c$ با عدد ستون $\log(bc)$ برابر است.

۳ لگاریتم حاصل ضرب دو عدد با مجموع لگاریتم‌های آنها برابر است.

استفاده از ماشین حساب :

اهداف:

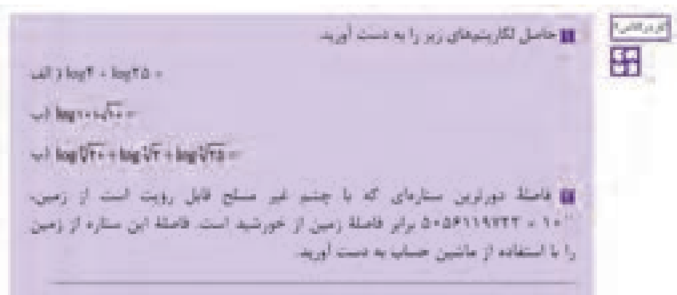
- آشنایی با تقریب اعشاری لگاریتم یک عدد.
- کسب مهارت در استفاده از ماشین حساب برای محاسبهٔ لگاریتم یک عدد.
- کسب مهارت در استفاده از ماشین حساب برای انجام محاسبات شامل لگاریتم
- تقویت مهارت قطع کردن تقریب اعشاری اعداد.
- درک یکسان نبودن: $\log(a+b)$ و $\log a + \log b$ با استفاده از تقریب اعشاری آنها.

گاهی دانش‌آموزان تصور می‌کنند که عبارات $\log(a+b)$ و $\log a + \log b$ مساوی هستند. به نظر می‌رسد ریشه این تصور غلط در این مطلب است که در عبارت $\log x + \log y$ عبارت log یک فاکتور مشترک است. این خطا بسیار رایج است و طرح این قسمت در کتاب جهت آشنایی هنرجویان با این تصور اشتباه می‌باشد تا در این قسمت درک درستی از لگاریتم داشته باشند.

با توجه به اینکه: $\log ۱۰۰=۲$ و $\log ۱۰۰۰=۳$ و با استفاده از ماشین حساب می‌توان دید: $\log ۱۱۰۰=۳/۰۴$

بنابراین :

$$۳/۰۴ \neq ۲+۳ \rightarrow \log(۱۰۰+۱۰۰۰) \neq \log ۱۰۰ + \log ۱۰۰۰ \rightarrow$$
$$\log(a+b) \neq \log a + \log b$$


کار در کلاس ۴

۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\log ۴ + \log ۲۵ =$

ب) [illegible]

پ) [illegible]

۲ فاصلهٔ دورترین ستاره‌ای که با چشم غیر مسلح قابل رویت است از زمین، [illegible] ۵۰۵۶۱۱۹۷۳۲ برابر فاصلهٔ زمین از خورشید است. فاصلهٔ این ستاره از زمین را با استفاده از ماشین حساب به دست آورید.

حل کار در کلاس ۴

اهداف: کسب مهارت در استفاده از خاصیت لگاریتم، تقویت مهارت استفاده از ماشین حساب.

۱ الف) $\log ۴ + \log ۲۵ = \log(۴ \times ۲۵) = \log ۱۰۰ = ۲$

ب) $\log 100\sqrt{10} = \log 100 + \log\sqrt{10} = 2 + \log 10^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

پ) $\log\sqrt[3]{20} + \log\sqrt[3]{2} + \log\sqrt[3]{25} = \log(\sqrt[3]{20} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{25}) =$

$\log\sqrt[3]{1000} = \log 10 = 1$

۲

$\log(5056119722 \times 10^{11} \times 14968000000) = \log 5056119722 + \log 10^{11} +$

$\log 14968000000 \approx 28/879$

با استفاده از ماشین حساب داریم :

$10^{28/879} \approx 7/568 \times 10^{28}$


جدول زیر را کامل کنید.

a	b	$\log a$	$\log b$	$\frac{a}{b}$	$\log\frac{a}{b}$
۱۰۰۰	۱۰	۳	——	۱۰۰	——
۱۰۰	۱۰	——	——	——	——
[illegible]	۱۰۰	[illegible]	——	[illegible]	——
[illegible]	[illegible]	——	[illegible]	——	——
[illegible]	[illegible]	[illegible]	——	[illegible]	——

در هر سطر چه رابطه‌ای بین اعداد ستون‌های $\log a$ و $\log b$ و ستون $\log\frac{a}{b}$ وجود دارد؟ این رابطه را به‌صورت یک جمله بیان کنید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

اهداف موضوعی:

درک خواص لگاریتم،

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ الگویابی،

۲ استدلال،

۳ مقایسه کردن،

۴ تعمیم دادن،

۵ ارتباطات.

حل فعالیت ۵

۱ جدول تکمیل شده:

b	c	$\log b$	$\log c$	$\frac{b}{c}$	$\log \frac{b}{c}$
۱۰۰۰	۱۰	۳	۱	۱۰۰	۲
۱۰۰	۱۰	۲	۱	۱۰	۱
۰/۱	۱۰۰	۱-	۲	۰/۰۰۱	۳-
$۱۰۰\sqrt{۱۰}$	$۱۰\sqrt{۱۰}$	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	۱۰	۱
۱۰^{x}	۱۰^{y}	x	y	۱۰^{x-y}	$x-y$

۲ در هر سطر تفاضل عدد ستون‌های $\log c$ از $\log b$ با عدد ستون $\log \frac{b}{c}$ برابر است. لگاریتم تقسیم دو عدد برابر است با تفاضل مقسوم علیه از مقسوم .

برای $b.c > ۰$ داریم: $\log \frac{b}{c} = \log b - \log c$

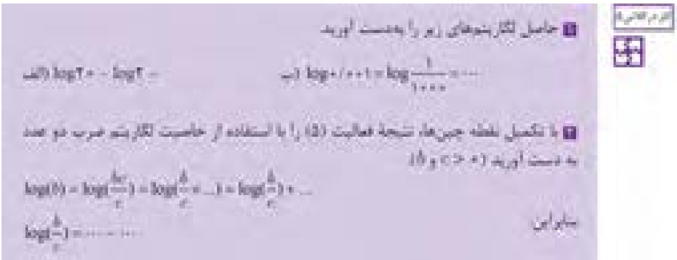
استفاده از ماشین حساب :

اهداف:

- آشنایی با تقریب اعشاری لگاریتم یک عدد.
- کسب مهارت در استفاده از ماشین حساب برای محاسبهٔ لگاریتم یک عدد.
- کسب مهارت در استفاده از ماشین حساب برای انجام محاسبات شامل لگاریتم
- تقویت مهارت قطع کردن تقریب اعشاری اعداد.
- درک نامساوی بودن : $\log(a-b)$ و $\log a - \log b$

با استفاده از ماشین حساب داریم : $\log ۶ \approx ۰/۷۷$ و $\log ۲ \approx ۰/۳۰$ و $\log ۸ \approx ۰/۹۰$
بنابراین :

$$۰/۷۷ \neq ۰/۹۰ - ۰/۳ \rightarrow \log(۸-۲) \neq \log ۸ - \log ۲$$
$$\rightarrow \log(a-b) \neq \log a - \log b$$



حل کار در کلاس ۵

اهداف : کسب مهارت در استفاده از خواص لگاریتم، تقویت مهارت در محاسبهٔ لگاریتم یک عدد

۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log ۲۰ - \log ۲ = \log \frac{۲۰}{۲} = \log ۱۰ = ۱$

ب) $\log ۰/۰۰۱ = \log \frac{۱}{۱۰۰۰} = \log ۱ - \log ۱۰۰۰ = ۰ - ۳ = -۳$

۲

$$\log b = \log\left(\frac{bc}{c}\right) = \log\left(\frac{b}{c} \times c\right) = \log\left(\frac{b}{c}\right) + \log c$$

بنابراین: $\log\left(\frac{b}{c}\right) = \log b - \log c$

هدف موضوعی:
درک خواص لگاریتم،
مهارت‌ها و فرایندها:

۱ مقایسه کردن،

۲ الگویابی،

۳ استدلال،

۴ تعمیم دادن،

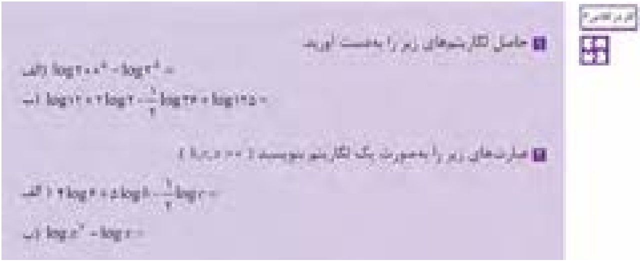
۵ ارتباطات.

حل فعالیت ۶

۱ جدول تکمیل شده:

b	n	b^n	$\log b$	$\log b^n$
۱۰۰	۲	۱۰۰۰۰	۲	۴
۱۰	۵	۱۰۰۰۰۰	۱	۵
۰/۱	۳	۰/۰۰۱	۱-	۳-
$\sqrt{۱۰}$	۴	۱۰۰	$\frac{۱}{۲}$	۲
۱۰^x	n	۱۰^{nx}	x	nx

۲ در هر سطر حاصل ضرب اعداد ستون‌های n و $\log b$ برابر عدد ستون $\log b^n$ می‌باشد. این لگاریتم هر توان از یک عدد با حاصل ضرب توان در لگاریتم آن عدد برابر است.
یعنی : برای $b > ۰$ و هر عدد حقیقی x داریم : $\log b^x = x \log b$



۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log ۲۰۰^{۵} - \log ۲^{۵} =$

ب) $\log ۱۲ + ۲\log ۲ - \frac{۱}{۲}\log ۳۶ + \log ۱۲۵ =$

۲ عبارت‌های زیر را به‌صورت یک لگاریتم بنویسید ($b, c, x > ۰$)

الف) $۴\log ۶ + ۵\log b - \frac{۱}{۲}\log c =$

ب) $\log x^{۲} - \log x =$

حل کار در کلاس ۶

اهداف: کسب مهارت در استفاده از خواص لگاریتم، کسب مهارت در محاسبهٔ لگاریتم یک عدد.

۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log ۲۰۰^{۵} - \log ۲^{۵} = ۵\log ۲۰۰ - ۵\log ۲ = ۵\log \frac{۲۰۰}{۲} = ۵\log ۱۰۰ = ۱۰$

ب) $\log \left(\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}\right)^{۵} = ۵\log \frac{۱}{\sqrt{۱۰}} = -\frac{۵}{۲}$

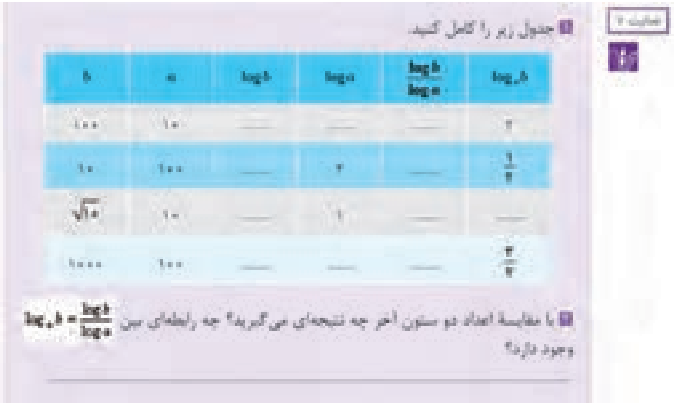
ج) $\log ۱۲ + ۲\log ۲ - \frac{۱}{۲}\log ۳۶ + \log ۱۲۵ = \log ۱۲ + \log ۲^{۲} - \log \sqrt{۳۶} + \log ۱۲۵$

$= \log\left(\frac{۱۲ \times ۴ \times ۱۲۵}{۶}\right) = \log ۱۰۰۰ = ۳$

۲ عبارات زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید($b . c . x > ۰$)

الف) $۴\log ۶ + ۵\log b - \frac{۱}{۲}\log c = \log ۶^{۴} + \log b^{۵} - \log \sqrt{c} = \log \frac{۶^{۴} b^{۵}}{\sqrt{c}}$

ب) $\log x^{۲} - \log x = ۲\log x - \log x = \log x$



فعالیت ۲

۱ جدول زیر را کامل کنید.

b	a	$\log b$	$\log a$	$\frac{\log b}{\log a}$	$\log_a b$
۱۰۰	۱۰	----	----	----	۲
۱۰	۱۰۰	----	۲	----	$\frac{۱}{۲}$
$\sqrt{۱۰}$	۱۰	----	۱	----	----
۱۰۰۰	۱۰۰	----	----	----	$\frac{۳}{۲}$

۲ با مقایسه اعداد دو ستون آخر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ چه رابطه‌ای بین $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$ وجود دارد؟

هدف موضوعی:

درک خواص لگاریتم،

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ مقایسه کردن،

۲ الگویابی،

۳ استدلال،

۴ تعمیم دادن،

۵ ارتباطات.

۱ نقطه چین‌ها را در جدول زیر تکمیل کنید :

b	a	$\log b$	$\log a$	$\frac{\log b}{\log a}$	$\log_a b$
۱۰۰	۱۰	۲	۱	۲	۲
۱۰	۱۰۰۰	۱	۳	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$
$\sqrt{۱۰}$	۱۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
۱۰۰۰	۱۰۰	۳	۲	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$

۲ با مقایسهٔ اعداد دو ستون آخر می‌توان گفت در هر سطر مقادیر $\frac{\log b}{\log a}$ و $\log_a b$ مساوی هستند.

در صورتی که هنرجویان آمادگی استدلال قوی‌تری را داشته باشند می‌توانید نتیجه بالا را به صورت زیر نیز برای آنها بیان کنید.

$$b = a^c \Rightarrow \log b = \log a^c = c \log a \Rightarrow c = \frac{\log b}{\log a}$$

از طرف دیگر تساوی $b = a^c$ به معنای آن است که $c = \log_a b$، پس $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$.


استفاده از ماشین حساب

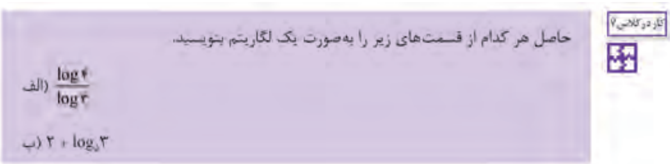
با استفاده از ماشین حساب حاصل $\log_5 8$ را به دست آورید.

استفاده از ماشین حساب:

اهداف:

- آشنایی با تقریب اعشاری لگاریتم یک عدد.
- کسب مهارت در استفاده از ماشین حساب برای محاسبهٔ لگاریتم یک عدد در مبنای دلخواه.
- کسب مهارت در استفاده از ماشین حساب برای انجام محاسبات شامل لگاریتم.
- تقویت مهارت قطع کردن تقریب اعشاری اعداد.

$\log_۵ ۸ = \log ۸ \div \log ۵ \approx ۱/۲۹$


کار در کلاس ۷

حاصل هر کدام از قسمت‌های زیر را به‌صورت یک لگاریتم بنویسید.

الف) $\frac{\log ۴}{\log ۳}$

ب) $۲ + \log_۵ ۳$

حل کار در کلاس ۷ :

اهداف: کسب مهارت در استفاده از خواص لگاریتم، کسب مهارتِ نمایش لگاریتمی یک عدد.

الف) $۲ + \log_۵ ۳ = \log_۵ ۲۵ + \log_۵ ۳ = \log_۵ (۲۵ \times ۳) = \log_۵ ۷۵$

ب) $\frac{\log ۴}{\log ۳} = \log_۳ ۴$

مسائل

عبارت‌های زیر را به‌صورت یک لگاریتم بنویسید و در صورت امکان ساده کنید.

الف) $\log\sqrt{۵}+\log\sqrt{۲}=\dots$

ب) $\log ۴۰۰۰-\log ۴=\dots$

پ) $۲\log ۵۰+۲\log ۲=\dots$

ت) $۵\log x-\log y=\dots$

ث) $۳\log a+۲\log b-\log z-\log a^{۲}+\log ۴=\dots$

ج) $۴+\log_{۴}۳$

چ) $۴-\log_{۳}۵$

حل مسائل:

اهداف: استفاده از خواص لگاریتم

مهارت‌ها و فرایندها: مهارت انجام محاسبات با لگاریتم

الف) $\log\sqrt{۵}+\log\sqrt{۲}=\log(\sqrt{۵}\times\sqrt{۲})=\log\sqrt{۱۰}=\log ۱۰^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}$

ب) $\log ۴۰۰۰-\log ۴=\log\frac{۴۰۰۰}{۴}=\log ۱۰۰۰=۳$

پ) $۲\log ۵۰+۲\log ۲=۲(\log ۵۰+\log ۲)=۲\log(۵۰\times ۲)=۲\log ۱۰۰=۴$

ت) $۵\log x-\log y=\log x^{۵}-\log y=\log\frac{x^{۵}}{y}$

ث) $۳\log a+۲\log b-\log z-\log a^{۲}+\log ۴=\log\frac{۴a^{۳}b^{۲}}{za^{۲}}=\log\frac{۴ab^{۲}}{z}$

ج) $۴+\log_{۴}۳=\log_{۴}۲۵۶+\log_{۴}۳=\log_{۴}(۲۵۶\times ۳)=\log_{۴}۷۶۸$

چ) $۴-\log_{۳}۵=\log_{۳}۸۱-\log_{۳}۵=\log_{۳}\frac{۸۱}{۵}=\log_{۳}۱۶/۲$

مسائل

اگر $\log ۲=۰/۳۰۱$ و $\log ۳=۰/۴۷۷$ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log ۴$ ب) $\log ۶$ پ) $\log ۱۸$ ت) $\log\frac{۳}{۲}$ ث) $\log ۵$ ج) $\log ۴۵$

مهارت‌ها و فرایندها:

انجام محاسبات با لگاریتم

اهداف: استفاده از خواص لگاریتم

مهارت‌ها و فرایندها: انجام محاسبات با لگاریتم

الف) $\log ۴=۲\log ۲\approx ۲\times ۰/۳۰۱=۰/۶۰۲$

ب) $\log(۲\times ۳)=\log ۲+\log ۳\approx ۰/۳۰۱+۰/۴۷۷=۰/۷۷۸$

پ) $\log ۱۸=\log(۹\times ۲)=۲\log ۳+\log ۲\approx ۲\times ۰/۴۷۷+۰/۳۰۱=۱/۲۵۵$

ت) $\log \frac{۲}{۳} = \log ۲ - \log ۳ \approx -۰/۱۷۶$

ث) $\log ۵ = \log \frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ \approx ۰/۶۹۹$

ج) $\log ۴۵ = \log (۹ \times ۵) = ۲\log ۳ + \log ۵ \approx ۱/۶۵۳$

مهارت‌ها و فرایندها: ارزیابی کردن

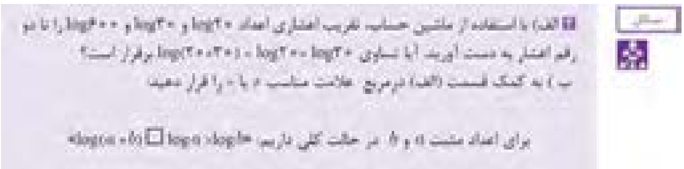
اهداف: ارزیابی کردن، مقایسه کردن

این مسئله اشاره به اشتباهات متداولی دارد که هنرجویان معمولاً در محاسبات مرتکب می‌شوند.

الف) $\frac{\log ۱۰}{\log ۱۰۰} = \frac{۱}{۲} \neq \frac{۱}{۱۰}$

ب) $\log ۱۰۰ + \log ۰/۰۱ = \log(۱۰۰ \times ۰/۰۱) = \log ۱ = ۰$

ج) $\left.\begin{array}{r} \log ۱۰۰۰^{۲} = ۲\log ۱۰۰۰ = ۲ \times ۳ = ۶ \\ (\log ۱۰۰۰)^{۲} = ۳^{۲} = ۹ \end{array}\right\} \xrightarrow{۶ \neq ۹} \log ۱۰۰۰^{۲} \neq (\log ۱۰۰۰)^{۲}$

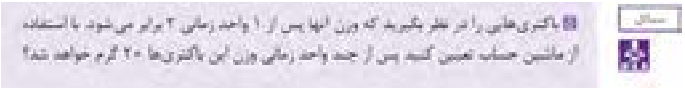


مهارت‌ها و فرایندها: استدلال کردن، مهارت تعمیم دادن، مهارت استفاده از ابزار

اهداف: استفاده از ماشین حساب، گرد کردن تقریب اعشاری، ارزیابی کردن، مقایسه کردن.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \log ۲۰ \approx ۱/۳۰ \\ \log ۳۰ \approx ۱/۴۷ \end{array}\right\} \log ۲۰ \times \log ۳۰ \approx ۱/۹۱۱ \\ \log(۲۰ \times ۳۰) = \log ۶۰۰ \approx ۲/۷۷ \end{array}\right\} \xrightarrow{۱/۹۱۱ \neq ۲/۷۷}$$

$$\log(۲۰ \times ۳۰) \neq \log ۲۰ \times \log ۳۰ \rightarrow \log(a \times b) \neq \log a \times \log b$$


سؤال

باکتری‌هایی را در نظر بگیرید که وزن آنها پس از ۱ واحد زمانی ۲ برابر می‌شود. با استفاده از ماشین حساب تعیین کنید پس از چند واحد زمانی وزن این باکتری‌ها ۲۰ گرم خواهد شد؟

اهداف: حل مسئله، استفاده از ماشین حساب.

$$\log_{۲} ۲۰ = \frac{\log ۲۰}{\log ۲} = \log ۲۰ \div \log ۲ \approx ۴/۳۲$$

مطالب بیشتر دربارهٔ لگاریتم

در اینجا برخی از کاربردهای لگاریتم را مطرح می‌سازیم که به سایر نقش‌های دیگر این مفهوم اشاره دارند.

حسابداری: قانون بِنفورد بیان می‌کند در فهرست عددهایی که در بسیاری از پدیده‌های زندگی واقِعی رخ می‌دهند، قانونی حاکم است که قانون رقم اول نیز گفته می‌شود طبق این قانون تعداد تکرارهای اعدادِ ۱ تا ۹ در اولین رقم از سمت راستِ داده‌ها به طور یکنواخت توزیع نشده است بلکه توزیع لگاریتمی دارد.

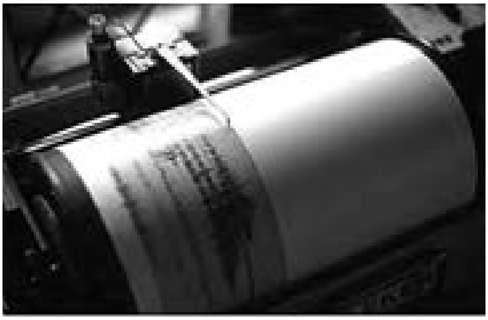
امروزه این قانون در حسابرسی‌های قانونی به شکل گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد، چرا که اگر حساب‌ها با قانون بنفورد مطابقت نداشته باشند به این معنی خواهد بود که حساب‌ها و اعداد به احتمال فراوان جعلی هستند.

این قانون به ظاهر عجیب در بسیاری از داده‌ها برقرار است، مثلاً در صورت حساب‌های برق، شمارهٔ خیابان‌ها، قیمت سهام، مقدار جمعیت، آمار مرگ‌ومیر، طول رودخانه‌ها، ثابت‌های فیزیک و ریاضیات، و فرایندهایی که از توزیع توانی پیروی می‌کنند (که در طبیعت بسیار فراوان‌اند). این قانون مستقل از پایه‌ای که عددها در آن بیان می‌شوند برقرار است.

لگاریتم در تعیین بهره مرکب و مسائل مالی کاربرد فراوانی یافته است. پس از اختراع لگاریتم اویلر رابطه بین عدد e و بهره مرکب را دریافت و فهمید که حد بهره به سمت عددی متناسب (یا مساوی در شرایط خاص) ، که همان عدد e است میل می‌کند.

صوت: حساسیت گوش انسان در ارتباط با بسامد (فرکانس) است هرچه شدت صوت بیشتر باشد انرژی دریافت شده توسط گوش انسان بیشتر است و انسان صدا را بلندتر احساس می‌کند با این حال بلندی صوت احساس شده با انرژی دریافت شده توسط گوش انسان نسبت مستقیم ندارد یعنی اگر انرژی دریافت شده دو برابر شود، بلندی احساس شده دو برابر نمی‌شود به همین دلیل برای بلندی احساس شده توسط گوش از واحد تراز شدت صوت استفاده می‌شود این واحد (دسی‌بل، بل) به صورت لگاریتمی از نسبت شدت صوت به صوت مبنا (آستانهٔ شنوایی) می‌باشد. از این واحد شدت صوت در موسیقی (هنر) استفاده می‌شود.

زلزله: مقیاس ریشتر بیانگر میزان انرژی آزاد شده در کانون زلزله است مقدارِ ریشترِ یک زلزله، از محاسبه لگاریتمِ اندازه امواج ثبت شده در یک لرزه نگار به‌دست می‌آید. بنابراین اندازه امواجی که منجر به زلزله‌ای به بزرگی ۵ در مقیاس ریشتر می‌شود، ۱۰ برابر اندازه امواجی است که یک زلزله ۴ ریشتری ایجاد می‌کند. میزان انرژی‌ای که توسط یک زلزله آزاد می‌گردد، می‌تواند بسیار بسیار زیاد باشد! انرژی‌ای که از یک زلزلهٔ ۵ ریشتری آزاد می‌گردد، ۶/۱۳ برابر انرژی آزاد شده از یک زلزله ۴ ریشتری است.



لرزه نگار دستگاهی است که نوسانات زمینی ناشی از ورود امواج لرزه‌ای را همراه با علائم بسیار دقیق زمانی ثبت می‌کند.

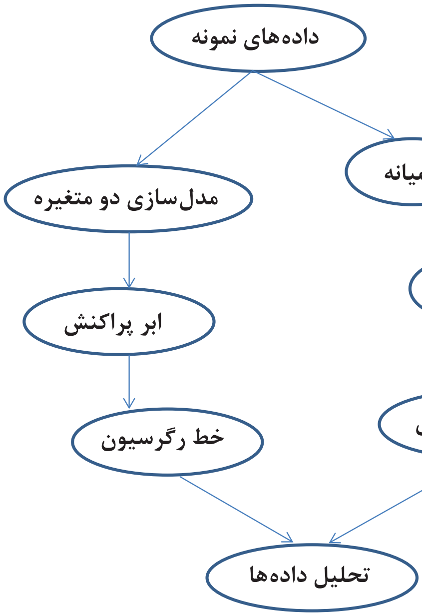
شیمی: مقدار **pH** محلول‌ها (که شاخصی برای بیان شدت اسیدی یا قلیایی آنهاست) به صورت رابطه‌ای **لگاریتمی** از تراکم یا غلظت یون هیدروژن بیان می‌شود.
برای اندازه‌گیری قدمت بقایای موجودات زنده از نیمه عمر عنصر کربن ۱۴ (مدت زمانی که طول می‌کشد تا مقدار کربن ۱۴ نصف شود) استفاده می‌شود. موجودات زنده تا زمانی که در قید حیات هستند میزان کربن ۱۴ و کربن ۱۲ در بدن آنها برابر است به محض اینکه یک موجود زنده می‌میرد، کربن ۱۴ به‌تدریج و با سرعت بسیار کم، از بین می رود؛ در حالی که مقدار کربن ۱۲ ثابت است. قدمت موجود زنده با استفاده از رابطهٔ **لگاریتمی** درصد کربن ۱۴ باقیمانده و نیمه عمر کربن ۱۴ تعیین می‌شود.

شهر سوخته نام بقایای شهری باستانی است که در فاصله شهرهای زابل و زاهدان در استان سیستان و بلوچستان کنونی واقع شده است. این شهر در ۳۲۰۰ سال پیش از میلاد پایه‌گذاری شده و مردم این شهر در چهار دوره بین سال‌های ۳۲۰۰ تا ۱۸۰۰ پیش از میلاد در آن سکونت داشته‌اند.

پودمان پنجم

آمار توصیفی

طرح کلی مفاهیم پودمان پنجم (نقشهٔ مفهومی)



اهداف کلی

- آشنایی با روش‌های مدل‌سازی و تحلیل داده‌های دو متغیره
- استفاده از شاخص‌های مرکزی برای تحلیل داده‌ها

پیش نیازهای پودمان

- آشنایی با مختصات یک نقطه
- مهارت نقطه‌یابی در صفحه مختصات
- مهارت کار با نمودار تابع‌های خطی
- آشنایی با میانگین و موارد استفاده از آن
- مهارت کار با نرم‌افزار $Excel$

	فرایند	توصیف فرایند	مثال
استانداردهای فرایندی	حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	تبیین مناسب نبودن میانگین در توصیف وضعیت پرداخت حقوق‌ها و نیاز به معرفی شاخصی جدید
		شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسائل	استفاده از معادله و نمودار در پیش‌بینی
	ارتباط کلامی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	ارائه توضیح برای معناداری مقدار پیش‌بینی در برون‌یابی
		برای بیان نظریات خود از زبان ریاضی به‌طور دقیق استفاده کند.	مدل‌سازی به کمک معادله خط بهترین برازش
	استدلال و اثبات	انواع مختلف استدلال و روش‌های اثبات را انتخاب کرده و به‌کار برند و آنها را ارزیابی کنند.	ارائه دلیل برای چرایی وجود تفاوت بین مقدار پیش‌بینی شده توسط معادله و به کمک خط بهترین برازش
	پیوندها و اتصالات	ریاضیات را در سایر مضامین بیرون از چهارچوب موضوع ریاضیات (کاربردها در علوم دیگر) تشخیص داده و به‌کار گیرند.	تفسیر وضعیت‌های زندگی روزانه به کمک میانه و نمودار جعبه ای
		پیوستگی بین موضوع‌های ریاضی (اتصال جبر و آمار)	ارتباط بین جبر (معادله خطی) و آمار (ابر پراکنش و خط بهترین برازش)
	بازنمایی‌ها	جهت حل مسئله بازنمایی‌های مناسب را انتخاب نموده، معنی کند و به‌کارگیرد.	استفاده مناسب از نمودار جعبه‌ای
		از بازنمایی‌ها برای مدل سازی و مقایسه پدیده‌های فیزیکی و ریاضی استفاده کند.	مدل‌سازی به کمک خط بهترین برازش
	سایر مهارت‌های تفکر	پیش‌بینی کردن	پیش‌بینی به کمک درون‌یابی و برون‌یابی
		تصمیم‌سازی	تصمیم‌گیری و تصمیم‌سازی به کمک تحلیل‌های آماری
		مقایسه کردن	مقایسه موارد استفاده میانگین و میانه
		تفکر واگرا	پرورش تفکر واگرا به کمک طرح مسئله

بخش اول: خط بهترین برازش

اهداف بخش

- آشنایی با نمودار پراکنش به عنوان نموداری برای مدل‌سازی نمونه‌های دو متغیره
- آشنایی با خط بهترین برازش به عنوان ابزاری برای پیش‌بینی
- رسم خط بهترین برازش به کمک $Excel$
- پیش‌بینی تغییرات متغیرها توسط خط بهترین برازش
- پرورش این احساس که روش‌های آماری ابزاری قدرتمند برای تصمیم‌گیری هستند.

پیش نیازهای بخش

- آشنایی با مختصات یک نقطه
- مهارت نقطه‌یابی در صفحه مختصات
- مهارت کار با نمودار تابع‌های خطی
- مهارت کار با نرم‌افزار $Excel$

واژه‌های کلیدی: نمودار پراکنش، خط بهترین برازش

نگاه کلی به بخش

مطالب این بخش در دو قسمت طراحی شده است. در قسمت اول هنرجویان با نمودار پراکنش و خط بهترین برازش به عنوان یکی از روش‌های مدل‌سازی نمونه‌های دو متغیره آشنا می‌شوند. در قسمت دوم هنرجویان با کاربرد خط بهترین برازش برای پیش‌بینی مقادیر یک کمیت با داشتن مقادیر متناظر کمیت دیگر آشنا می‌شوند. هدف این بخش، آموزش مفهوم رگرسیون و همبستگی و ضریب همبستگی نیست؛ بلکه هدف کاربرد این نمودار در مدل‌سازی وضعیت‌های آشنا و حل مسئله و درک روش‌های آماری به‌عنوان ابزاری برای تصمیم‌گیری است. به منظور دستیابی به این هدف از دانش پیشین هنرجو در ارتباط با معادله خط و تابع خطی و آشنایی وی با نرم‌افزار $Excel$ کمک گرفته می‌شود. در تحلیل وضعیت‌های مختلف به کمک روش‌های آماری، موارد بسیاری وجود دارند که لازم است ارتباط بین متغیرها مورد بررسی قرار گیرد. در این کتاب با متغیرهای پیوسته کار می‌کنیم. هدف این است که رابطه‌ای پیدا کنیم که بتوانیم مقادیر یکی از کمیت‌ها را با داشتن مقدار کمیت دیگر پیدا کنیم. به عبارت دیگر باید دید که آیا

می‌توان یکی از کمیت‌ها را به صورت تابعی ریاضی از کمیت دیگر بیان کرد یا خیر. فرض کنید برای دو کمیت به صورت نمونه‌ای مقادیر متناظر y_i را برای کمیت دوم به ازای مقدار x_i برای کمیت اول به‌دست آورده باشیم. برای پیدا کردن بهترین رابطه خطی بین این دو کمیت، از روش کمترین مربعات استفاده می‌شود. در این روش اگر معادله این خط را با $y=ax+b$ نمایش دهیم، مقدار به‌دست آمده از روی این معادله به ازای x_i عموماً با مقدار نمونه‌ای متناظر y_i برای کمیت دوم متفاوت است. می‌خواهیم مجموع خطاهای به‌دست آمده حداقل باشد. یعنی مقادیر a و b را طوری پیدا کنیم که عبارت $\Sigma(ax_i+b-y_i)^2$ مینیمم شود. اگر مشتق نسبت به a و مشتق نسبت به b را مساوی صفر قرار دهیم، می‌توانیم مقادیر a و b را محاسبه کنیم. این عملیات در نرم‌افزارهای آماری خود به خود انجام می‌شود و ما خودمان را درگیر این محاسبات نخواهیم کرد.
لازم است به این نکته توجه شود که برای هر تعداد نقطه در صفحه و با هر شکلی از پراکندگی می‌توان خط رگرسیون را رسم کرد ولی لزوماً این خط ممکن است مدل مناسبی برای داده‌ها نباشد. به عبارت دیگر ممکن است داده‌ها از یک مدل خطی پیروی نکنند. مشاهده نمودار پراکنش می‌تواند ما را به تشخیص مدل برازش داده‌ها هدایت کند. در این کتاب ما صرفاً مدل‌خطی برازش را در نظر داریم.

ورود به مطلب

برای ورود به مطلب موقعیتی آشنا در تولید محصول و یک سؤال طرح می‌شود. فعالیتی که در ادامه آمده است به هنرجویان کمک می‌کند تا فرایند پاسخگویی به سؤال طرح شده را بهتر درک کنند. در این مرحله می‌توانید از هنرجویان بخواهید تا وضعیت‌های مشابهی که در آنها دو کمیت مرتبط را می‌توانند مدل‌سازی کنند (مرتبط با رشته و یا علاقه‌شان) مطرح کنند.

فعالیت آموزشی

هدف این فعالیت آشنایی با خط بهترین برازش است. با توجه به اینکه معادله خط به کمک نرم‌افزار پیدا می‌شود، پر کردن ستون‌های خطا و مجذورات خطاها کمک می‌کند تا درک بهتری نسبت به این خط پیدا شود. از هنرجویان بخواهید در مورد اینکه کدام خط بهترین تقریب را ارائه می‌کند یا آیا می‌توان همه داده‌ها را به طور معناداری با یک خط تقریب زد، بحث کنند.
در صورتی که وقت باشد، می‌توانید قبل از این فعالیت نمونه‌ای که در آن دو کمیت رابطه خطی دارند و در نتیجه نقاط نمودار پراکنش دقیقاً روی خط واقع می‌شوند را طرح کنید.

فعالیت ۱

نظریه‌ای وجود دارد که نشان می‌دهد بین اندازهٔ دور مچ دست و اندازهٔ دور گردن افراد یک رابطهٔ خطی وجود دارد. تولیدکنندگان با داشتن این رابطه می‌توانند اندازه‌های مناسبی برای محصولات خودشان در نظر بگیرند. برای آشنایی با فرایند پیدا کردن این رابطه، اندازهٔ دور گردن و دور مچ دست ۱۵ نفر در جدول زیر آورده شده است.

اندازهٔ دور گردن (y) برحسب (cm)	اندازهٔ دور مچ (x) برحسب (cm)
۳۲/۵	۱۴/۵
۳۲	۱۵
۳۵/۲	۱۵/۴
۳۴/۳	۱۵/۷
۳۳/۷	۱۶/۱
۳۴/۲	۱۶/۲
۳۵/۵	۱۶/۴
۳۵/۸	۱۶/۴
۳۶/۴	۱۶/۴
۳۷/۳	۱۶/۷
۳۵/۵	۱۶/۹
۳۶/۶	۱۷/۱
۳۸/۵	۱۷/۲
۳۶/۸	۱۷/۴
۳۸/۴	۱۷/۵

اهداف موضوعی:

۱ آشنایی با نمودار پراکنش،

۲ آشنایی با خط بهترین برازش،

۳ درک وجود خطا در استفاده از خط بهترین برازش،

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ پیوندها و اتصال‌ها،

۲ استفاده از نرم‌افزار،

۳ تقریب زدن،

۴ استدلال کردن،

۵ تفکر بصری،

۶ بازنمایی‌ها،

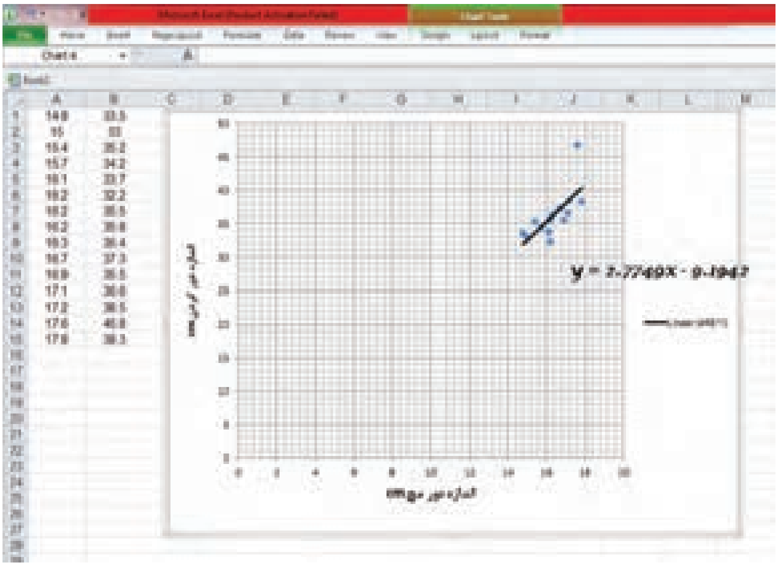
۷ ارتباطات،

حل فعالیت ۱

۱ هنرجو نقاط را روی صفحه مختصات مشخص می‌کند.

۲ مشاهده می‌شود نقاط روی یک خط راست قرار ندارند.

۳ هنرجو با توجه به توضیحات ارائه شده در سؤال، یک خط راست به‌صورت تقریبی بین نقاطی که مشخص کرده است، رسم می‌کند. در شکل بعد این خط رسم شده است.



۴ و ۵ به وسیله $Excel$ و با توجه به دستورالعمل داده شده خط و معادله آن به صورت زیر است:

y = ۲/۷۷۴۹x − ۹/۱۹۴۲

با توجه به جدول زیر پاسخ سؤال‌های ۶ تا ۸ به صورت زیر است:

x	y	y'	e=y-y'	e²
14.80	33.50	31.87	1.63	2.64
15.00	33.00	32.43	0.57	0.33
15.40	35.20	33.54	1.66	2.76
15.70	34.20	34.37	-0.17	0.03
16.10	33.70	35.48	-1.78	3.17
16.20	32.20	35.76	-3.56	12.67
16.20	35.50	35.76	-0.26	0.07
16.20	35.80	35.76	0.04	0.00
16.30	36.40	36.04	0.36	0.13
16.70	37.30	37.15	0.15	0.02
16.90	35.50	37.70	-2.20	4.85
17.10	36.60	38.26	-1.66	2.74
17.20	38.50	38.53	-0.03	0.00
17.60	46.80	39.64	7.16	51.21
17.80	38.30	40.20	-1.90	3.61
			جمع خطاها	جمع مجذور خطاها
			0.0	84.23

۶ ستون y' در جدول کامل شده است.
به‌طور مثال اگر $x =$ ۱۴/۸۰ باشد طبق معادله خط.

$y =$ ۲/۷۷۴۹x − ۹/۱۹۴۲

$y' =$ ۲/۷۷۴۹×(۱۴/۸۰) − ۹/۱۹۴۲ ≈ ۳۱/۸۷

۷ خیر. زیرا خط دقیقاً از روی نقطه‌ها عبور نمی‌کند.

۸ e برابر $y - y'$ می‌باشد که در جدول ستون مربوط به e کامل شده است.

۹ حاصل جمع خطاها باید مشخص کند که چقدر در محاسبات خطا داریم اما

در اینجا به علت منفی و مثبت بودن خطاها حاصل جمع مجموع واقعی خطاها را نشان نمی‌دهد.

۱۰ حاصل جمع مجذور خطاها (جمع ستون e^2) برابر ۸۴/۲۳ است.

۱۱ چون برخی از خطاها منفی و برخی مثبت هستند بنابراین مجذور خطاها را حساب می‌کنیم تا همهٔ خطاها در محاسبهٔ خطای کل لحاظ شود و برآورد درستی از خطاهای کل انجام شود.

در ادامه به مفهوم داده‌های پرت می‌رسیم. توجه به نمودار پراکنش و خط بهترین برازش می‌توان نقطه‌هایی را مشخص کرد که نسبت به سایر داده‌ها تفاوت قابل ملاحظه‌ای دارند که داده‌های پرت می‌باشند. در ارتباط با تأثیر داده‌های پرت در کلاس گفت‌وگو کنید.

۱ در فعالیت (۱) با حذف سطر مربوط به ۱۷۶ (در ستون اول) نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۱۲/۴ \\ ۴۴/۸ \end{bmatrix}$ را از داده‌هایتان خارج کنید و خطی رسم کنید که کمترین فاصله را با نقاط داشته باشد.

۲ ستون $\hat{y}$ را با دو رقم اعشار کامل کنید ([illegible] به کمک معادلهٔ جدید خط است)

۳ ستون e^2 را کامل کنید.

۴ مجموع مجذور خطاها را برای مقادیر بدست آمده برای $\hat{y}$ بدست آورید و با جواب قسمت ۱۰ در فعالیت (۱) مقایسه کنید.

۵ فکر می‌کنید کدام خط برای پیش‌بینی مناسب‌تر است؟ چرا این اتفاق می‌افتد؟

اهداف موضوعی:

۱ تشخیص دادهٔ پرت با استفاده از جدول و نمودار داده‌ها.

۲ درک نقش دادهٔ پرت در تعیین خط بهترین برازش

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ استفاده از نرم‌افزار،

۲ مقایسه و ارزیابی کردن،

۳ استدلال کردن،

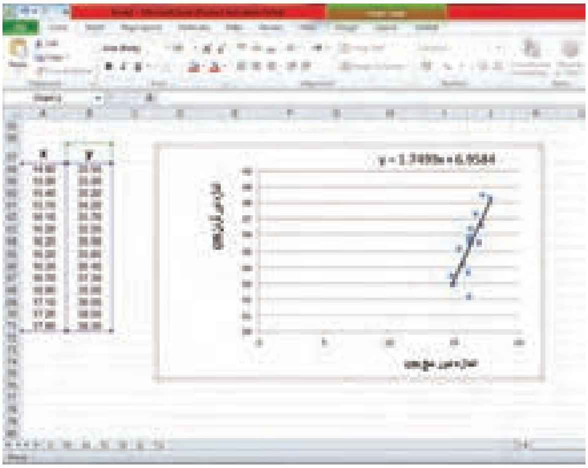
۴ بازنمایی‌ها،

۵ تفکر بصری،

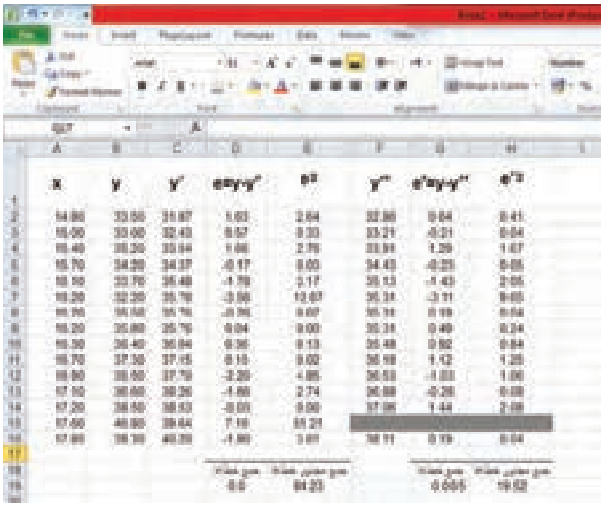
۶ ارتباطات،

حل فعالیت ۲

۱ با خارج کردن نقطه $\begin{bmatrix} ۱۷/۶ \\ ۴۶/۸ \end{bmatrix}$ از جدول، دوباره خط را رسم می‌کنیم و معادله آن را به‌دست می‌آوریم.



۲ و **۳** ابتدا ستون مربوط به y'' را با توجه به معادله خط جدید در جدول کامل کرده و سپس با استفاده از آن اعداد ستون $e' = y - y''$ در جدول زیر وارد می‌کنیم.



۴ حاصل جمع مجذور خطاها (جمع ستون $e'^{۲}$) برابر ۱۹/۵۲ است. این عدد در مقایسه با عدد به دست آمده از قسمت (۱۰) در فعالیت۱ خطای کمتری را نشان می‌دهد.

۵ چون جمع مجذورات خطای e' از جمع مجذورات خطای e کوچک‌تر است بنابراین مناسب‌تر است. علت این اختلاف وجود نقطه $\begin{bmatrix} ۱۷/۶ \\ ۴۶/۸ \end{bmatrix}$ در فعالیت ۱ می‌باشد.

در این فعالیت با خارج کردن داده‌ای که با سایر داده‌ها تفاوت قابل ملاحظه‌ای دارد (داده پرت) خطا کمتر شده و درک بهتری از وضعیت خواهیم داشت. شیب خط برازش $y = ۱/۷۴۹۹x + ۶/۹۵۸۴$ مثبت است که نشان می‌دهد هرچقدر اندازه دور مچ دست بیشتر باشد، اندازه دور گردن هم بیشتر خواهد شد.

مثال ۱

در یک مطالعه، تأثیر مصرف یک داروی خاص بر کاهش وزن بررسی شده است. وزن اولیه و وزن نهایی ۱۵ شرکت‌کننده در این مطالعه برحسب کیلوگرم در جدول زیر نشان داده شده است.

وزن نهایی	وزن اولیه
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]

نمودار پراکنش و خط بهترین برازش داده‌های بالا به شکل زیر است.

هدف: درک وجود ارتباط بین دو کمیت در یک زمینه واقعی. یادگیری نمودار پراکنش و خط بهترین برازش

معادله خط بهترین برازش به صورت $y = ۰/۸۰۳۲x + ۱۲/۸۸۳$ است با توجه به این معادله نیز اگر وزن اولیه ۷۲ کیلوگرم را به جای x قرار دهیم وزن نهایی تقریباً

برابر با ۷۱ است این موضوع را نیز می‌توان از روی شکل مشاهده کرد.

مثال ۲

در نمودارهای زیر، هر نقطه نشان‌دهندهٔ مقادیر متناظر بین دو کمیت است. در کدام نمودارها، بین این دو کمیت رابطه‌ای وجود دارد؟ رابطهٔ بین این دو کمیت را در هر نمودار، از لحاظ افزایشی یا کاهشی بودن یکی بر حسب دیگری، توصیف کنید.

هدف: درک ارتباط بین دو کمیت از روی نمودار و ارائه استدلال برای تأثیر دو کمیت روی یکدیگر

در این مثال از روی نقاط شکل (الف)، یک خط می‌گذرد یعنی کاملاً رابطه خطی دارند. شیب خط منفی است که مشخص کننده این است که با زیاد شدن مقادیر روی محور xها، مقادیر روی محور yها کاهش می‌یابد.

نقاط شکل (ب)، دارای خط بهترین برازش هستند که شیب آن مثبت است یعنی با افزایش مقادیر روی محور xها، عموماً مقادیر روی محور yها افزایش می‌یابد.

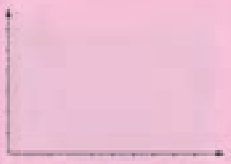
نقاط شکل (پ)، هیچ خط برازشی نمی‌تواند رابطه بین کمیت‌ها را به خوبی توصیف کند.

دقت پیش‌بینی از روی نمودار (الف) بیشتر از دقت پیش‌بینی از روی نمودار (ب) است.

کار در کلاس

برخی از هنرآموزان عقیده دارند که درصد قبولی هنرجویان در یک کلاس با تعداد هنرجویان در کلاس رابطه دارد. جدول زیر تعداد هنرجویان در کلاس‌های مختلف یک هنرستان و درصد قبولی آنها در امتحان پایان سال را نشان می‌دهد.

درصد قبولی	تعداد هنرجویان در کلاس
۸۰	۱۰
۶۰	۱۵
۵۵	۳۰
۸۰	۱۲
۵۵	۲۵
۵۴	۲۴
۷۵	۱۵
۷۰	۴۰
۹۰	۲۸
۸۰	۱۲



۱) نمودار پراکنش را رسم کنید.

۲) خط بهترین برازش را رسم کنید.

۳) پیش‌بینی می‌کنید چند درصد از هنرجویان در یک کلاس ۴۰ نفره قبول می‌شوند.

۴) برخی عقیده دارند نقطهٔ $\begin{bmatrix} 40 \\ 70 \end{bmatrix}$ (اطلاعات مربوط به یک کلاس ۴۰ نفره) یک دادهٔ پرت (مربوط به یک وضعیت غیر معمول) است. فکر می‌کنید اگر در تحلیل خود این داده را کنار بگذارید، بهتر است یا خیر؟ توضیح دهید چرا؟

۵) این داده را خارج کنید و پاسخ سؤال (۳) را مجدداً بدست آورید.

اهداف موضوعی:

۱ رسم نمودار پراکنش

۲ یافتن خط بهترین برازش و استفاده از آن

۳ تشخیص دادهٔ پرت،

۴ پیوندها و اتصال‌ها،

۵ استفاده از نرم‌افزار،

۶ مقایسه کردن،

۷ استدلال،

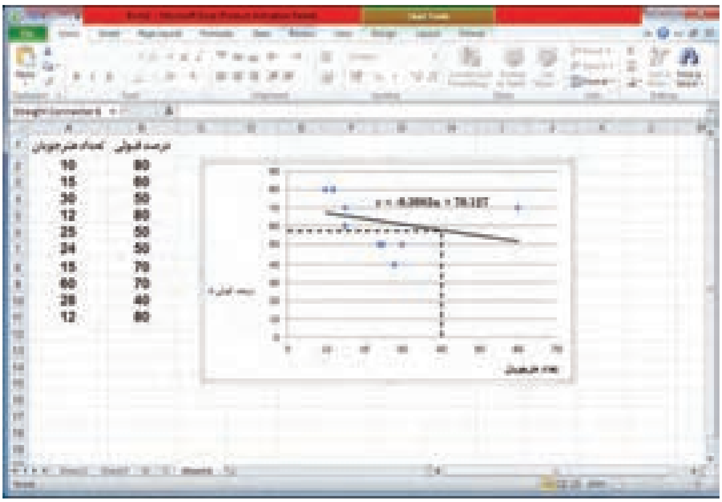
۸ ارزیابی،

۹ بازنمایی،

۱۰ ارتباطات،

هدف: .

۱و۲ـ نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را توسط نرم افزار $Excel$ رسم می‌کنیم.

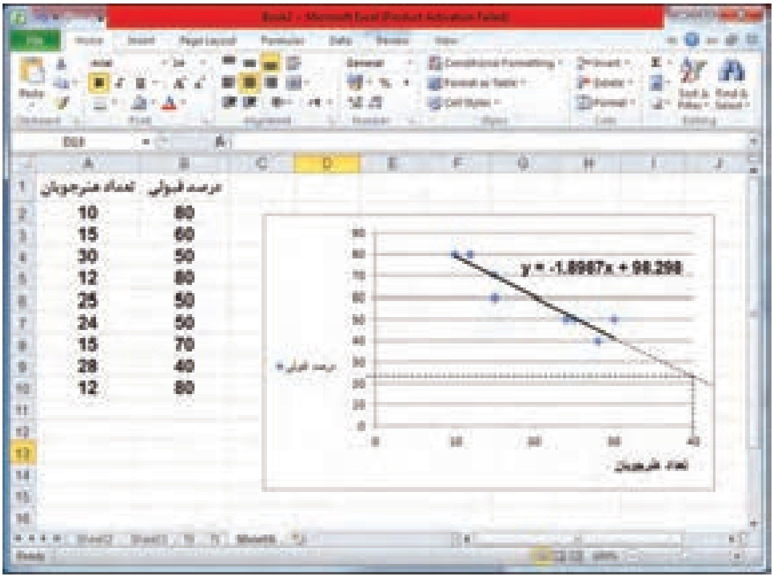


۳ـ با توجه به نمودار اگر تعداد هنرجویان ۴۰ نفر باشد از نقطه ۴۰ روی محور طول‌ها خطی نقطه‌چین به صورت عمود می‌کشیم تا خطِ برازش را قطع کند و از آنجا خطی نقطه‌چین به صورت افقی می‌کشیم که تقریباً عدد ۵۸ درصد را روی محور نشان می‌دهد. یعنی پیش بینی می‌کنیم ۵۸ درصد هنرجویان کلاس ۴۰

نفره قبول شوند.
یا اگر در معادله خط بهترین برازش یعنی $y = -۰/۳۰۸۵x + ۷۰/۱۲۷$ به جای x عدد ۴۰ را قرار دهیم درصد قبولی $y = ۵۷/۷۸۷$ خواهد شد. شیب خط برازش منفی است که نشان می‌دهد هرچقدر تعداد هنرجویان کلاس بیشتر شود درصد قبولی در امتحان پایان سال، رسم خواهد شد.

۴ـ بهتر است این داده را کنار بگذاریم زیرا در این صورت درک بهتری از وضعیت به ما می‌دهد.

۵ـ داده $\begin{bmatrix} ۶۰ \\ ۷۰ \end{bmatrix}$ را کنار می‌گذاریم و دوباره خط بهترین برازش را رسم می‌کنیم.



با ادامه دادن خط برازش مشاهده می‌کنیم که اگر کلاس ۴۰ نفره باشد تقریباً ۲۲ درصد قبول خواهند شد.
اگر در معادله خط بهترین برازش یعنی $y = -۱/۸۹۸۷x + ۹۸/۲۹۸$ به جای x عدد ۴۰ را قرار دهیم درصد قبولی $y \approx ۲۲/۳۵$ خواهد شد. در این رابطه شیب خط برازش منفی است که نشان می‌دهد هرچقدر تعداد هنرجویان کلاس بیشتر شود درصد قبولی در امتحان پایان سال، پایین‌تر خواهد آمد.

مهارت‌ها و فرایندها:

درک ارتباط بین کمیت‌ها از روی نمودار،

پرورش تفکر بصری، ارتباط

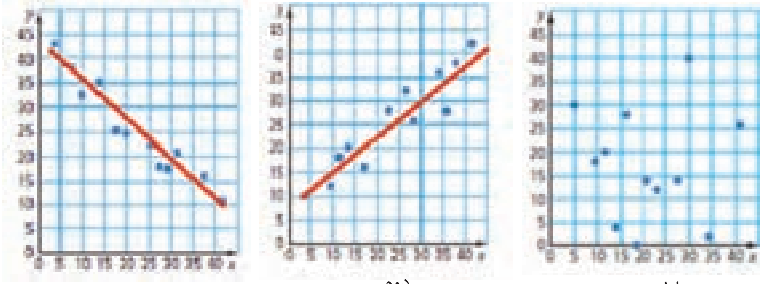
هدف: پیدا کردن خط بهترین برازش و رابطه بین دو کمیت x و y و تأثیر آنها روی یکدیگر

در نمودار **اول** متوجه می‌شویم که تغییرات مقادیر روی محور xها هیچ‌گونه اطلاعاتی درباره تغییرات مقادیر روی محور yها به ما نمی‌دهد. در این وضعیت رابطه بین دو کمیت را نمی‌توان به خوبی با یک خط راست نشان داد. یعنی نمی‌توان گفت رابطه بین دو کمیت افزایشی یا کاهشی است.

در نمودار **دوم** بین دو کمیت می‌توان خط بهترین برازش را در نظر گرفت. شیب این خط مثبت است یعنی با افزایش مقادیر روی محور xها، مقادیر روی محور yها، افزایش خواهد داشت.

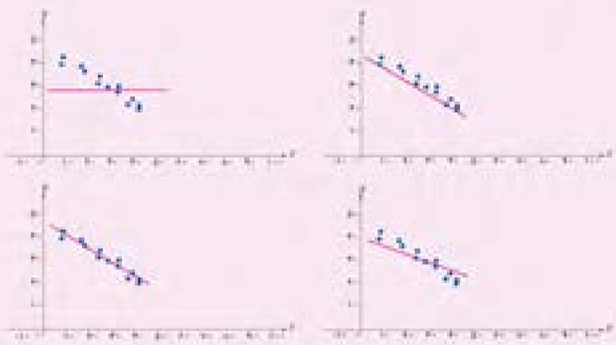
در نمودار **سوم** بین دو کمیت می‌توان خط بهترین برازش را در نظر گرفت. شیب این خط منفی است یعنی با افزایش مقادیر روی محور xها، مقادیر روی محور

yها، کاهش خواهد داشت.


اول　　دوم　　سوم

نمودار زیر رابطهٔ بین مدت زمانی که فرد رانندگی می‌کند و مسافت باقی‌مانده تا مقصد را نشان می‌دهد.

کدام‌یک از نمودارهای زیر، خط بهترین برازش برای نمودار پراکنش بالا را نشان می‌دهد؟ توضیح دهید.



مهارت‌ها و فرایندها:

ارتباطات،

پرورش تفکر بصری،

هدف: سازماندهی تفکرات ریاضی و استدلال جهت پیدا کردن خط بهترین برازش

در ردیف دوم، نمودار سمت چپ خط بهترین برازش را نشان می‌دهد زیرا تعداد نقاط دو طرف خط برازش تقریباً برابر است. همچنین با افزایش مقادیر روی محور xها، مقادیر روی محور yها کاهش می‌یابد یعنی هر چه زمان بیشتری رانندگی شود مسافت تا مقصد کمتر خواهد شد.

۴ جدول روبه‌رو طول قد و فاصلهٔ نوک دو انگشت وسط ۲۰ نفر را (در حالتی که دست‌ها از طرفین کاملاً باز است) برحسب سانتی‌متر نشان می‌دهد.

الف) نمودار پراکنش این داده‌ها را رسم کنید.

ب) آیا رابطه‌ای بین طول قد و فاصلهٔ نوک دو انگشت وسط افراد دیده می‌شود؟ توضیح دهید.

پ) خط بهترین برازش را رسم کنید و معادلهٔ آن را به‌دست آورید.

ت) به کمک معادله یا نمودار، با داشتن طول قد خودتان، فاصلهٔ نوک دو انگشت وسط خودتان را تخمین بزنید.

ث) فاصلهٔ نوک دو انگشت وسط خودتان را اندازه بگیرید. آیا با مقدار تخمین زده شده تفاوت دارد؟ اگر بله، توضیح دهید چرا؟

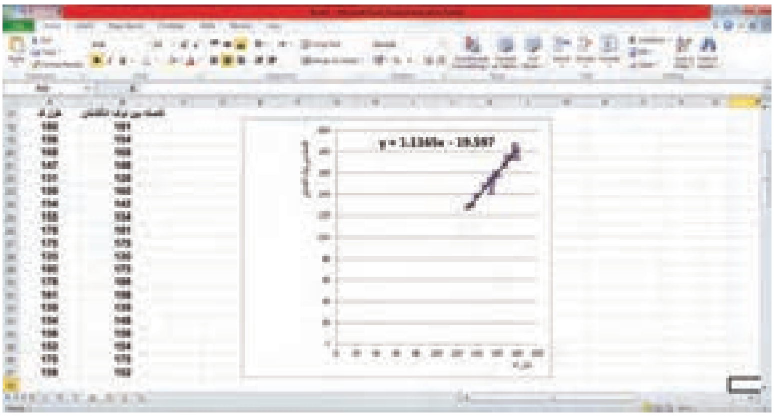
طول قد	فاصله بین نوک انگشتان
۱۸۰	۱۸۱
۱۵۶	۱۵۴
۱۶۸	۱۶۸
۱۴۷	۱۴۸
۱۳۱	۱۳۸
۱۵۹	۱۶۰
۱۵۴	۱۴۲
۱۵۵	۱۵۴
۱۷۸	۱۸۱
۱۷۵	۱۷۵
۱۳۵	۱۴۰
۱۸۰	۱۷۵
۱۷۸	۱۸۶
۱۶۱	۱۵۸
۱۳۹	۱۳۹
۱۵۴	۱۴۸
۱۵۶	۱۵۴
۱۵۲	۱۵۴
۱۷۰	۱۷۵
۱۵۶	۱۵۳

مهارت‌ها و فرایندها:

استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، پیوند و استدلال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات، مهارت کار با ابزار، حل مسئله به روش هندسی، مهارت تخمین زدن، پرورش تفکر بصری،

هدف: تشخیص و به‌کارگیری ریاضیات در روابط بین اندازه‌های دو کمیت در بدن انسان

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش به صورت زیر است:



ب) بله. با توجه به نمودار با زیاد شدن مقدار طول قد (مقادیر روی محور xها)، فاصله بین نوک انگشتان (مقادیر روی محور yها)، افزایش می‌یابد.
پ) خط بهترین برازش در قسمت (الف) توسط $Excel$ رسم شده و معادله خط بهترین برازش ۱۹/۵۹۷ + ۱/۱۱۶۵x = y است.
ت) اگر به طور مثال طول قد دانش‌آموز ۱۷۵ باشد فاصله بین دو انگشتان او از طریق معادله خط برابر است با:

$$\xrightarrow{x=۱۷۵} y = ۱/۱۱۶۵(۱۷۵) - ۱۹/۵۹۷ \longrightarrow y \approx ۱۷۵/۷۹$$

با استفاده از نمودار هم این مقدار را به صورت تقریبی می‌توان به‌دست آورد. به این صورت که روی محور xها از عدد ۱۷۵ خطی عمودی (موازی محور yها) رسم کرده تا خط برازش را قطع کند سپس از محل برخورد، خطی افقی (موازی محور xها) رسم کرده و هر کجا محور yها را قطع کند، جواب است.
ث) بله. زیرا خط بهترینِ برازش رابطه را در حالت کلی نشان می‌دهد و با توجه به اینکه تمام نقاط لزوماً روی این خط قرار ندارد، در واقع تخمینی از اندازه‌های واقعی به ما می‌دهد.

سینا می‌گوید: اگر ریاضی شما خوب باشد، علوم شما نیز خوب است. علی می‌خواهد درستی این گفته را بررسی کند. به همین دلیل نمرهٔ ریاضی و علوم ۷ نفر را پرسید. داده‌هایی که علی به‌دست آورده در جدول زیر ثبت شده است.

نمره ریاضی	۸	۶/۵	۱۰	۱۶	۹	۵/۵	۱۷
نمره علوم	۱۰	۹	۱۱	۱۵	۱۰	۸	۱۵

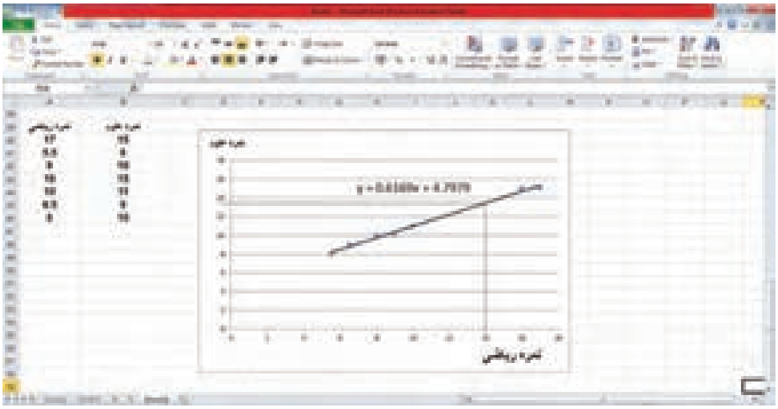
الف) نمودار پراکنش این داده‌ها را رسم کنید.
ب) آیا با گفتهٔ سینا موافق‌اید؟ دلیل خود را توضیح دهید.
پ) خط بهترین برازش را رسم کنید.
ت) پیش‌بینی می‌کنید نمرهٔ علوم دانش‌آموزی که در آزمون ریاضی ۱۴ شده است، چند باشد؟

هدف: انتقال تفکر و پیدا کردن رابطه خطی بین نمرات دو درس

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله به روش هندسی، مهارت کار با ابزار، پرورش تفکر بصری، استدلال کرد، بازنمایی‌های چندگانه، پیوند و استدلال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات، مهارت پیش‌بینی

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش در زیر رسم شده است:



ب) بله ـ زیرا هر دانش آموز که نمره ریاضی خوبی دارد، نمره علوم او نیز خوب است و برعکس

پ) خط بهترین برازش در نمودار بالا رسم شده است. و معادله خط آن به صورت $y = ۰/۶۱۶۹x + ۴/۷۹۷۹$ است.

ت) اگر نمره ریاضی دانش آموزی ۱۴ باشد با توجه به نمودار و نقاط خط چین روی آن، نمره علوم او تقریباً ۱۳/۵ می‌شود. همچنین می‌توان این عدد را از معادله خط به صورت زیر حساب کرد:

$$y = ۰/۶۱۶۹(۱۴) - ۴/۷۹۷۹ \longrightarrow y \approx ۱۳/۴۳$$

۴۴ جدول زیر، نمرات ریاضی و زبان ۱۰ دانش‌آموز را نشان می‌دهد.

نمره ریاضی	۸	۱۳	۱۴	۱۷	۱	۴	۱۳	۹	۹/۵	۱۹
نمره زبان	۹	۹	۱۴	۱۴	۴	۱۸	۱۸	۶	۸	۱۰

الف) نمودار پراکنش این داده‌ها را رسم کنید. (طول هر نقطه نمرهٔ ریاضی و عرض هر نقطه نمرهٔ زبان یک دانش‌آموز است.)

ب) آیا بین نمرهٔ ریاضی و نمرهٔ زبان دانش‌آموزان رابطه‌ای مشاهده می‌کنید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

پ) خط بهترین برازش را رسم کنید و به کمک معادلهٔ آن و یا نمودار، نمرهٔ زبان دانش‌آموزی را که در آزمون ریاضی ۱۵ گرفته است، پیش‌بینی کنید.

ت) نقطه‌های نشان‌دهندهٔ نمرهٔ ریاضی و زبان کدام دو دانش‌آموز با نمرات بقیهٔ دانش‌آموزان هماهنگی ندارد؟

ث) این دو داده را از داده‌هایتان حذف کنید و خط بهترین برازش را رسم کنید و این‌بار نمرهٔ زبان دانش‌آموزی را که در آزمون ریاضی ۱۵ گرفته است، پیش‌بینی کنید.

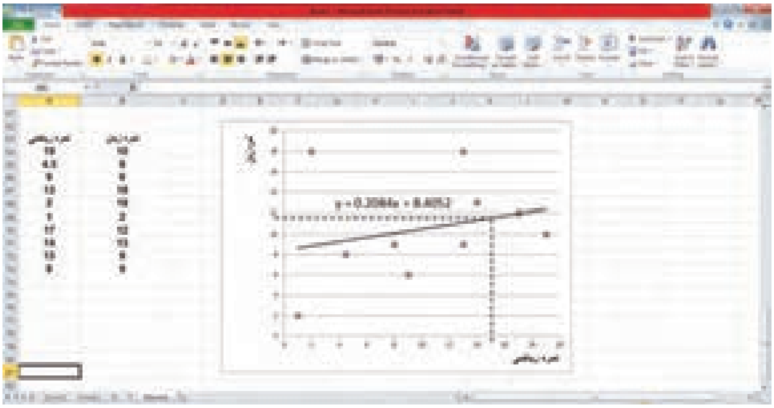
ج) آیا تفاوتی بین دو پیش‌بینی شما وجود دارد؟ دلیل خود را توضیح دهید.

هدف: پیدا کردن خط بهترین برازش و پیش‌بینی از روی آن. تشخیص نقاطی که وضعیت غیر معمول دارند. مقایسه وضعیت‌های مختلف

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، پرورش تفکر بصری، مهارت کار با ابزار، استدلال کرد، بازنمایی‌های چندگانه، پیوند و استدلال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات، مهارت پیش‌بینی و مقایسه

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش در زیر رسم شده است:



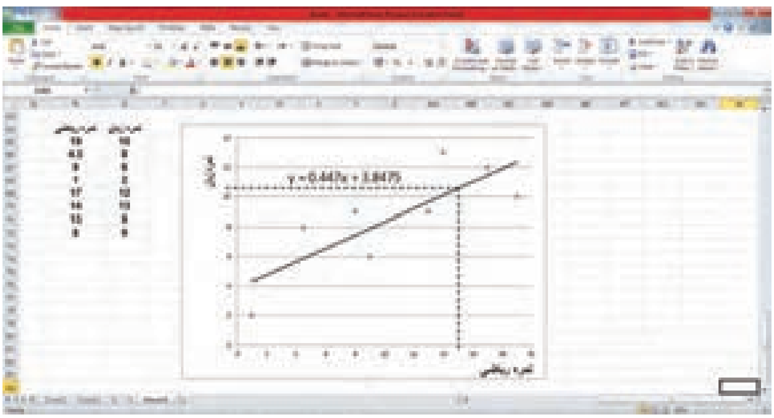
ب) بله ـ تقریباً اگر نمره ریاضی دانش‌آموز بالا برود، نمره زبان هم بالا می‌رود.
پ) خط بهترین برازش در قسمت (الف) رسم شده است که با توجه به شکل اگر دانش‌آموزی نمره ریاضی ۱۵ بگیرد نمره زبان او تقریباً ۱۱/۶ می‌شود. همچنین با استفاده از معادله خط می‌توان این مقدار را به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$y = ۰/۲۰۸۴(۱۵) + ۸/۴۰۵۲ \quad \rightarrow \quad y \approx ۱۱/۵$$

ت) با توجه به شکل قسمت (الف) بین نمرات زیر با بقیه هماهنگی دیده نمی‌شود.

نمره ریاضی	۱۳	۲
نمره زبان	۱۸	۱۸

ث) با حذف دو داده، نمودار پراکنش و خط بهترین برازش به‌صورت زیر است:



با توجه به شکل بالا اگر دانش‌آموزی نمره ریاضی ۱۵ بگیرد نمره زبان او تقریباً ۱۰/۶ می‌شود. با استفاده از معادله خط می‌توان این مقدار را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$y = 0/447(15) + 3/8475 \quad \rightarrow \quad y \approx 10/5$$

ج) بله ـ زیرا با حذف داده‌های پرت درک بهتری از داده‌ها به‌دست می‌آید و همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود خط برازش به صورت بهتری بین داده‌ها قرار می‌گیرد یعنی نیمی از داده‌ها بالای خط و نیم دیگر پایین خط قرار می‌گیرند.

۴ جدول مقابل داده‌های مربوط به اندازهٔ کفش و قد ۱۲ مرد را نشان می‌دهد.

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را به کمک excel رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار، اندازهٔ کفش مردی را که قد او ۱۸۰ سانتی‌متر است پیش‌بینی کنید.

پ) باستان‌شناسان رد پایی به اندازهٔ ۵۸ سانتی‌متر پیدا کرده‌اند. پیش‌بینی می‌کنید طول قد این انسان چقدر بوده است؟

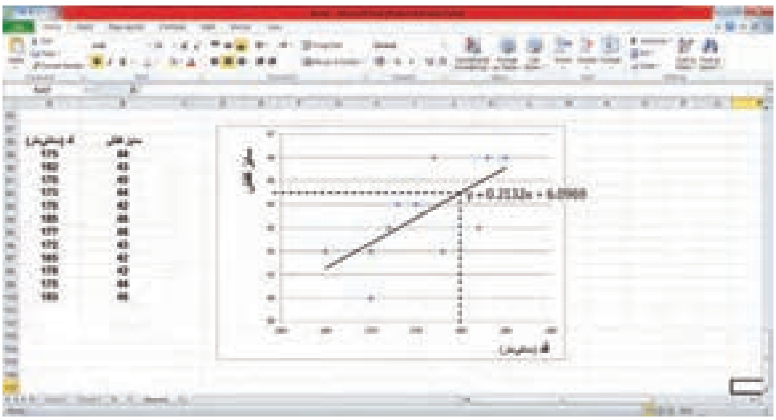
سایز کفش	قد (سانتی‌متر)
۴۴	۱۷۵
۴۳	۱۸۲
۴۰	۱۷۰
۴۴	۱۷۳
۴۲	۱۷۰
۴۵	۱۸۵
۴۶	۱۷۷
۴۴	۱۷۳
۴۳	۱۶۵
۴۴	۱۷۸
۴۴	۱۷۵
۴۶	۱۸۳

مهارت‌ها و فرایندها:

بازنمایی‌های چندگانه، پرورش تفکر بصری، پیوند و استدلال ریاضی با خارج ریاضی، مهارت کار با ابزار، مهارت پیش‌بینی

هدف: پیدا کردن خط بهترین برازش و پیش‌بینی با استفاده از آن

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش در زیر رسم شده است:



ب) با توجه به نمودار سایز کفش مردی که قد او ۱۸۰ سانتی‌متر است تقریباً برابر ۴۴/۵ می‌باشد.

پ) با توجه به معادله خط ، طول قد فردی با رد پای ۵۸ به صورت زیر است:

$$y = ۰/۲۱۳۲x + ۶/۰۹۶۹ \xrightarrow{y=۵۸} x = \frac{۵۸ - ۶/۰۹۶۹}{۰/۲۱۳۲} \rightarrow x \approx ۲۴۳/۴$$

با توجه به معادله خط بهترین برازش، قد او تقریباً ۲۴۳ سانتی‌متر است.

---

۲ دانش‌آموزی برای توصیف داده‌هایش، نمودار پراکنش را رسم کرد. او برای رسم نمودن خط بهترین برازش، اولین نقطه و آخرین نقطه را به هم وصل کرد. آیا او خط بهترین برازش را درست رسم کرده است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

مهارت‌ها و فرایندها:

استدلال کردن،ارتباطات

هدف: به‌کارگیری استدلال

خیر ـ زیرا خط بهترین برازش باید تا حد ممکن کمترین فاصله را تا نقاط رسم شده در نمودار برازش داشته باشد. فقط درصورتی می‌تواند درست باشد که همهٔ نقاط برازش روی یک خط باشند.

بخش دوم: برون‌یابی و درون‌یابی

اهداف بخش

- آشنایی با فرایند برون‌یابی
- آشنایی با فرایند درون‌یابی
- پیش‌بینی مقادیر به کمک درون‌یابی و برون‌یابی
- تشخیص منطقی بودن پیش‌بینی‌ها به کمک برون‌یابی

پیش نیازهای بخش

- مهارت کار با نمودار تابع‌های خطی

واژه‌های کلیدی: درون‌یابی، برون‌یابی

نگاه کلی به بخش

در این بخش دو فرایند درون‌یابی و برون‌یابی برای پیش‌بینی مقادیر مورد بررسی قرار می‌گیرند. هنرجویان باید به این درک برسند که به مقادیر پیش‌بینی شده که به کمک درون‌یابی (در بازه‌ای که داده در اختیار داریم) به‌دست می‌آیند می‌توان اعتماد کرد ولی هرچه از ابتدا و انتهای این بازه دور شویم، مقادیری که به کمک برون‌یابی به‌دست می‌آیند ممکن است قابل اعتماد نباشند و حتی غیر منطقی باشند.

ورود به مطلب

برای ورود به مطلب موقعیتی در عرصه اقتصاد و بانکداری طرح می‌شود. سؤال طرح‌شده این است که پس از مدل‌سازی خطی، تا چه اندازه می‌توان به پیش‌بینی‌های انجام شده اعتماد کرد. می‌توانید از وضعیت‌های مشابه مانند رابطه قد با سن صحبت کنید که نشان می‌دهد اگر با برون‌یابیِ بخواهیم قد یک فرد را در ۹۰ سالگی پیش‌بینی کنیم، مقدار پیش‌بینی شده کاملاً غیر واقعی خواهد بود.

فعالیت آموزشی

هدف این فعالیت آشنایی با فرایند درون‌یابی و برون‌یابی است. در ارتباط با معناداری پیش‌بینی‌های به دست آمده به کمک خط بهترین برازش در کلاس گفت‌وگو کنید.

فعالیت ۳

برخی تحقیقات در حوزهٔ بانکداری نشان می‌دهند بین نرخ سود بانکی و میزان سرمایه‌ای که بانک جذب می‌کند همبستگی وجود دارد. یکی از بانک‌ها میزان سرمایهٔ خود را در زمان‌های مختلف که سود بانکی مختلفی پرداخت می‌کرده است، بررسی و در جدول زیر ثبت کرده است.

سرمایه (میلیون تومان)	نرخ سود بانکی (درصد)
۲۵	۱۰
۲۶	۸
۲۱	۹
۱۵	۱۲
۱۷	۱۱
۱۸	۱۱
۲۲	۱۰
۲۶	۹
۳۱	۷
۳۶	۶
۳۹	۶
۴۰	۵

- به کمک excel خط بهترین برازش را برای این اطلاعات رسم کنید.
- اگر نرخ سود ۱۰/۵ درصد تعیین شود، مقدار سرمایهٔ جذب شده را پیش‌بینی کنید.
- اگر نرخ سود به ۱۴ درصد افزایش یابد، مقدار سرمایهٔ جذب شده را پیش‌بینی کنید.
- اگر نرخ سود به ۱۹ درصد افزایش یابد، مقدار سرمایهٔ جذب شده را پیش‌بینی کنید.
- در کدام حالت پیش‌بینی شما به واقعیت نزدیک‌تر خواهد بود؟ توضیح دهید.

اهداف موضوعی:

۱ درک مفهوم درون‌یابی و برون‌یابی با استفاده از خط بهترین برازش

۲ آشنایی با محدودیت‌های استفاده از خط بهترین برازش برای برون‌یابی.

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ پیوندها و اتصال‌ها،

۲ استفاده از نرم‌افزار،

۳ مقایسه کردن،

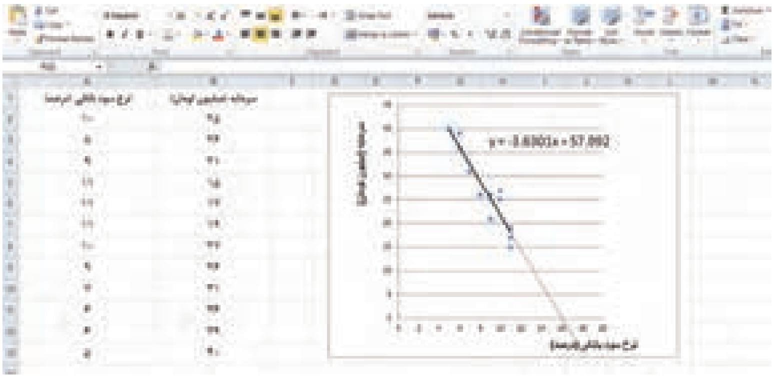
۴ ارزیابی،

۵ بازنمایی‌ها،

۶ ارتباطات.

حل فعالیت:

۱ نمودار پراکنش و خط بهترین برازش در زیر رسم شده است:



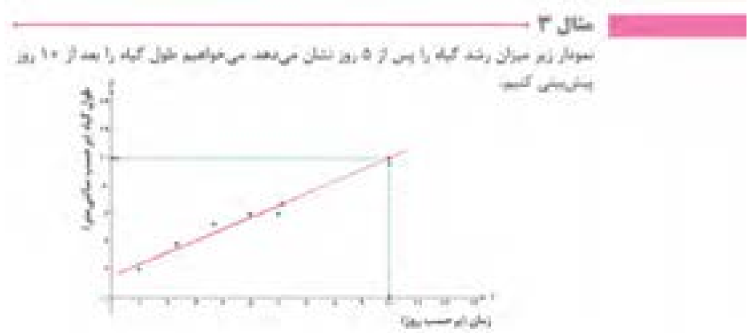
۲ با استفاده از نمودار اگر نرخ سود ۱۰/۵ درصد باشد مقدار سرمایه تقریباً برابر ۲۰ میلیون تومان خواهد شد.

۳ با استفاده از نمودار و در صورت ادامه دادن خط بهترین برازش، اگر نرخ سود ۱۲درصد باشد مقدار سرمایه تقریباً برابر ۱۴/۵ میلیون تومان خواهد شد.

۴ در صورت ادامه دادن خط بهترین برازش، اگر نرخ سود به ۱۸درصد برسد خط زیر محور xها می‌رود و مقدار سرمایه عددی منفی می‌شود یعنی حدود ۷- خواهد شد و این غیر واقعی و بی‌معنی خواهد بود.

۵ در قسمت (۲) پیش‌بینی به واقعیت نزدیک‌تر است. زیرا نرخ سودهایی که در جدول داده شده حداقل ۵ و حداکثر ۱۱ است و نرخ سود ۱۰/۵ در بین این دو عدد قرار دارد.

در این فعالیت هنرجو درک می‌کند که اگر درصد سود داده شده بین اعداد ۵ تا ۱۱ (کمترین و بیشترین سود در جدول) قرار داشته باشد، پیش‌بینی به واقعیت نزدیک‌تر است این حالت را **درون‌یابی** می‌نامند. اگر درصد سود داده شده بین اعداد ۵ تا ۱۱ (کمترین و بیشترین سود در جدول) قرار نداشته باشد، پیش‌بینی ممکن است از واقعیت دور شود که این حالت را **برون‌یابی** می‌نامند.



با توجه به اینکه بعد از مدتی، معمولاً رشد طولی متوقف می‌شود و یا میزان افزایش طول در واحد زمان کاهش می‌یابد، پیش‌بینی طول گیاه با استفاده از این نمودار بعد از ۱۰ روز (برون‌یابی)، ممکن است دقیق نباشد.

هدف: پیش‌بینی در حالت برون‌یابی و استدلال برای معنادار بودن یا معنادار نبودن وضعیت پیش‌بینی شده

این مثال بیان کنندهٔ پیش‌بینی از روی نمودار برای وضعیت بیرون از ناحیه مشخص شده (برون‌یابی) است.

اهداف:

۱ تقویت مهارت یافتن خط بهترین برازش،

۲ تقویت مهارت پیش‌بینی وضعیت‌ها به کمک درون‌یابی و برون‌یابی،

۳ پیوندها و اتصال‌ها،

۴ استفاده از نرم‌افزار،

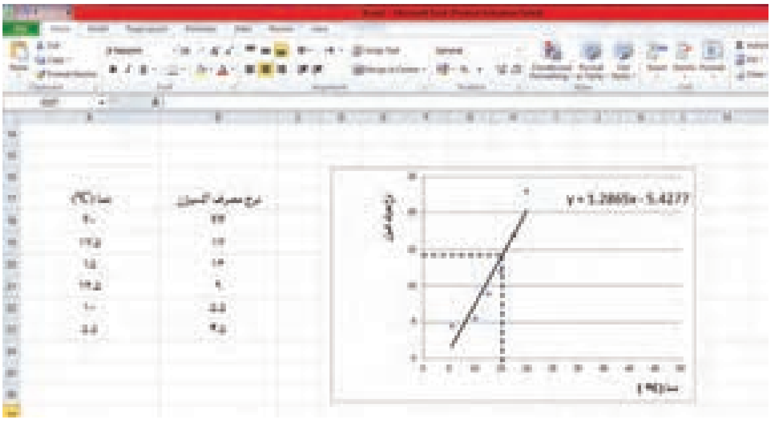
۵ مقایسه کردن،

۶ ارزیابی،

۷ بازنمایی‌ها،

۸ ارتباطات.

۱ نمودار پراکنش و خط بهترین برازش در زیر رسم شده است:



۲ به کمک نمودار اگر نرخ مصرف اکسیژن $Mmol / Kg / Min$ ۱۴ باشد، دما تقریباً $۱۵^{\circ C}$ خواهد شد. این وضعیت درون‌یابی است، زیرا نرخ مصرف اکسیژن ۱۴ بین دو عدد ۴/۵ و ۲۳ قرار دارد.

۳ معادله خط بهترین برازش به صورت $y = ۱/۲۸۶۵x - ۵/۴۲۷۷$ است که در آن x دما و y میزان مصرف اکسیژن می‌باشد.

$x = ۰^{\circ C} \quad \rightarrow \quad y \approx -۵/۴$

$x = ۱۷^{\circ C} \quad \rightarrow \quad y \approx ۱۶/۴$

$x = ۵۰^{\circ C} \quad \rightarrow \quad y \approx ۵۸/۹$

$x = ۱۵۰^{\circ C} \quad \rightarrow \quad y \approx ۱۸۷/۵$

۴ پیش‌بینی مقدار اکسیژن در دمای $17^{\circ C}$ از درون‌یابی است زیرا حداقل دمای جدول داده شده $5/5^{\circ C}$ و حداکثر $20^{\circ C}$ است. دماهای $0^{\circ C}$ و $50^{\circ C}$ و $150^{\circ C}$ برون‌یابی است، زیرا بین دو مقدار دمای $5/5^{\circ C}$ و $20^{\circ C}$ قرار ندارند.

۵ پیش‌بینی در دمای $0^{\circ C}$ معنی ندارد زیرا مصرف اکسیژن نمی‌تواند منفی باشد.
پیش‌بینی در دمای $150^{\circ C}$ غیر واقعی بوده و معنادار نیست زیرا در این دما خرچنگ نمی‌تواند داخل آب باشد و می‌سوزد.
پیش‌بینی در دمای $50^{\circ C}$ برون‌یابی است که معنادار بوده و در واقعیت می‌تواند اتفاق بیفتد.
پیش‌بینی در دمای $17^{\circ C}$ درون‌یابی است و در واقعیت می‌تواند اتفاق بیفتد.


مهرناز می‌خواهد آزمایشی انجام دهد که به کمک آن، تأثیر نور را بر سرعت غذاسازی توسط گیاه از طریق فتوسنتز بررسی کند.
مهرناز لامپ را در ۱۰۰ متری گیاه قرار داد و تعداد حباب‌هایی را که توسط گیاه در یک دقیقه تولید شد شمرد. سپس لامپ را نزدیک‌تر کرده و در هر حالت، تعداد حباب‌های ایجاد شده توسط گیاه در دقیقه را شمرد و نتایج را در جدول زیر ثبت کرد.

تعداد حباب‌ها در دقیقه	فاصلهٔ لامپ از گیاه بر حسب متر
۱۰	۱۰۰
۲۰	۸۰
۲۸	۷۰
۳۲	۶۰
۳۶	۴۰
۳۷	۳۰

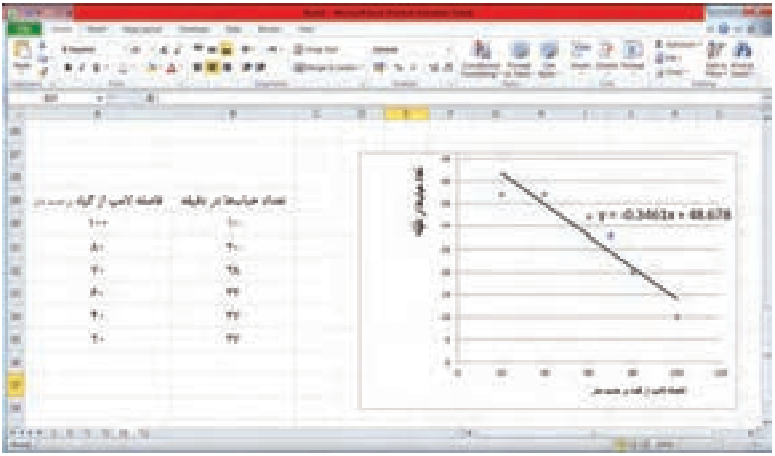
الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را برای این داده‌ها رسم کنید.
ب) با استفاده از نمودار، جملهٔ زیر را کامل کنید.
هر چه فاصلهٔ لامپ از گیاه ...... باشد، سرعت فتوسنتز ...... است.
پ) اگر لامپ در ۱۰ سانتی‌متری گیاه قرار داشته باشد، تعداد حباب‌ها در دقیقه را پیش‌بینی کنید.
ت) اگر لامپ را در ۲ سانتی‌متری گیاه قرار دهیم، برای پیدا کردن تعداد حباب‌هایی که گیاه تولید می‌کند از برون‌یابی استفاده می‌کنیم یا درون‌یابی؟ فکر می‌کنید در این وضعیت این پیش‌بینی چقدر درست باشد؟

مهارت‌ها و فرایندها:

استدلال کردن، مهارت کار با ابزار، حل مسئله، پرورش تفکر بصری، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات، مهارت پیش‌بینی، بازنمایی‌های چندگانه

هدف: درون‌یابی و برون‌یابی در موقعیت طبیعی رشد گیاه و استدلال جهت معنادار بودن یا نبودن پیش‌بینی

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش در صفحه بعد رسم شده است:



ب) هر چه فاصله لامپ از گیاه **بیشتر** باشد، سرعت فتوسنتز **کمتر** است.

پ) معادله خط بهترین برازش به‌صورت $y= -۰/۳۴۶۱x + ۴۸/۶۷۸$ است که در آن x فاصله لامپ از گیاه برحسب متر و y تعداد حباب‌ها در دقیقه است. می‌توان تعداد حباب‌ها را در فاصله ۱۰ سانتی‌متری یا ۰/۱ متری حساب کرد:

$$y= -۰/۳۴۶۱(۰/۱) + ۴۸/۶۷۸ \qquad \rightarrow \qquad y \approx ۴۸/۶۴$$

ت) ۲ سانتی‌متر برابر ۰/۰۲ متر است و برون‌یابی است زیرا فاصله لامپ از گیاه در جدول برحسب سانتی‌متر از ۲۰ تا ۱۰۰ است.

(۱۰۰≥ فاصله لامپ برحسب سانتی‌متر ≥۲۰)

$$y= -۰/۳۴۶۱(۰/۰۲) + ۴۸/۶۷۸ \qquad \rightarrow \qquad y \approx ۴۸/۶۷$$

پیش‌بینی این وضعیت تقریباً مشابه قسمت قبل است یعنی وقتی لامپ به گیاه خیلی نزدیک می‌شود تغییر در تعداد حباب‌ها ایجاد نمی‌شود و پیش‌بینی واقعی به نظر نمی‌رسد و درست نیست.

ایمان برای شرکت در مسابقات دو ۱۰۰ متر، تمرین می‌کند. جدول زیر، زمان به پایان رساندن مسیر را بر حسب ثانیه در پایان هر هفته تمرین نشان می‌دهد.

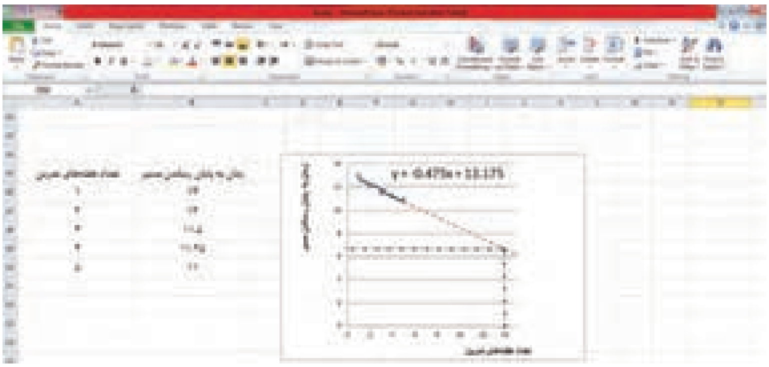
زمان به پایان رساندن مسیر	تعداد هفته‌های تمرین
۱۳	۱
۱۲	۲
۱۱/۵	۳
۱۱/۲۵	۴
۱۱	۵

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را برای این داده‌ها رسم کنید.
ب) به کمک نمودار یا معادلهٔ خط بهترین برازش، زمان به پایان رساندن مسیر توسط ایمان پس از ۱۴ هفته را پیش‌بینی کنید.
پ) آیا پیش‌بینی شما درست است؟ برای پاسخ به این سوال رکورد جهانی دو ۱۰۰ متر مردان را از اینترنت پیدا کنید.
ت) برای این پیش‌بینی از درون‌یابی استفاده کردید یا برون‌یابی؟ آیا پاسخ به‌دست آمده معنادار است؟ توضیح دهید چرا؟

مهارت‌ها و فرایندها:
حل مسئله، استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات، مهارت پیش‌بینی، مهارت جست‌وجو در منابع اضافه، پرورش تفکر بصری

هدف: برون‌یابی در موقعیت ورزشی و مقایسه با وضعیت واقعی موجود جهت معناداری پیش‌بینی

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش در زیر رسم شده است:



ب) معادله خط بهترین برازش به‌صورت زیر است:

$$y = -۰/۴۷۵x + ۱۳/۱۷۵ \xrightarrow{x=۱۴} y \approx ۶/۵۲$$

یعنی پس از ۱۴ هفته زمان به پایان رساندن مسیر برابر ۶/۵۲ ثانیه خواهد شد که از

روی نمودار هم می‌توان آن را که به‌صورت خط چین مشخص شده، مشاهده کرد.

پ) رکورد جهانی دو ۱۰۰ متر برابر ۹/۵۸ ثانیه است و پیش‌بینی غیر واقعی بوده و درست نیست.

ت) برای این پیش‌بینی از برون‌یابی استفاده شده است. خیر. زیرا از دامنهٔ داده‌های جمع‌آوری‌شده در برون‌یابی خیلی دور شده‌ایم و هیچ انسانی نمی‌تواند با این سرعت بدود.

۲ جدول زیر تعداد کشورهای شرکت‌کننده در المپیک تابستانی را از سال ۱۹۴۸ تا سال ۲۰۰۰ نشان می‌دهد.

سال	تعداد کشورها	سال	تعداد کشورها
۱۹۴۸	۵۹	۱۹۷۶	۹۲
۱۹۵۲	۶۹	۱۹۸۰	۸۰
۱۹۵۶	۷۲	۱۹۸۴	۱۴۰
۱۹۶۰	۸۳	۱۹۸۸	۱۶۰
۱۹۶۴	۹۳	۱۹۹۲	۱۶۹
۱۹۶۸	۱۱۲	۱۹۹۶	۱۹۷
۱۹۷۲	۱۲۱	۲۰۰۰	۱۹۹

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش را برای این داده‌ها رسم کنید.

ب) به کمک معادلهٔ خط بهترین برازش، تعداد کشورهای شرکت‌کننده در المپیک ۲۰۰۴ و المپیک ۲۰۱۶ را پیش‌بینی کنید.

پ) با مراجعه به اینترنت، تعداد کشورهای شرکت‌کننده در سال ۲۰۰۴ و سال ۲۰۱۶ را پیدا کنید. این تعداد را با پیش‌بینی‌های خودتان مقایسه کنید. در صورت وجود اختلاف، توضیح دهید چرا این اختلاف وجود دارد.

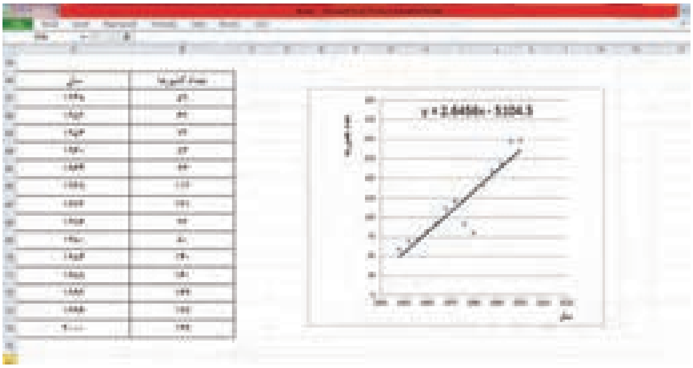
ت) به کمک معادله یا نمودار، تعداد کشورهای شرکت‌کننده در سال ۲۰۲۸ را پیش‌بینی کنید. آیا این پیش‌بینی معنادار است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، مهارت جست‌وجو در منابع اضافه، استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات، مهارت پیش‌بینی

هدف: برون‌یابی در موقعیت ورزشی و مقایسه با وضعیت واقعی موجود جهت معناداری پیش‌بینی

الف) نمودار پراکنش و خط بهترین برازش در زیر رسم شده است:



ب) معادله خط بهترین برازش به صورت زیر است: (x سال و y تعداد شرکت‌کنندگان)

y=۲/۶۴۵۶x - ۵۱۰۴/۵

$$x = ۲۰۰۴ \quad \rightarrow \quad y \approx ۱۹۷$$

$$x = ۲۰۱۶ \quad \rightarrow \quad y \approx ۲۲۹$$

پ) با مراجعه به اینترنت می‌بینیم در سال ۲۰۰۴ تعداد ۲۰۱ کشور و در سال ۲۰۱۶ تعداد ۲۰۷ کشور شرکت کرده‌اند که با پیش‌بینی‌ها یکی نیستند. علت این اختلاف این است که سال‌های ۲۰۰۴ و ۲۰۱۶ در محدوده سال‌هایی که در جدول آمده، یعنی از سال ۱۹۴۸ تا ۲۰۰۰ نیستند و برون‌یابی می‌باشند و در برون‌یابی ممکن است پیش‌بینی درست نباشد.

ت) $y = ۲/۶۴۵۶x - ۵۱۰۴/۵ \xrightarrow{x=۲۰۲۸} y \approx ۲۶۰$

که این پیش‌بینی معنادار نیست زیرا از دامنه داده‌های جمع‌آوری‌شده دور شده‌ایم.

بخش سوم: میانه

اهداف بخش

- آشنایی با میانه به عنوان یکی از شاخص‌های مرکزی برای تحلیل داده‌های یک نمونه
- استفاده از میانه برای تحلیل داده‌ها
- درک موارد استفاده از میانه در مقایسه با میانگین

پیش نیازهای بخش

آشنایی با میانگین

واژه‌های کلیدی: میانه

نگاه کلی به بخش

در این بخش با درک این موضوع که میانگین همیشه شاخص خوبی برای توصیف نمونه نیست، لزوم معرفی شاخص جدیدی به نام میانه مطرح می‌شود. با بیان وضعیتی در زندگی روزانه، نمونه‌ای از تصمیم‌گیری براساس شاخص‌های مرکزی معرفی می‌شود. میانه «**مقدار یا عددی**» است که تعداد داده‌های قبل و بعد از آن با هم برابر است. نکته اول در تأکید بر واژه «مقدار» به جای «داده» این است که میانه ممکن است در بین داده‌ها نباشد (وقتی تعداد داده‌ها زوج است) به همین دلیل از مقدار صحبت می‌کنیم. برخی اوقات شنیده می‌شود که میانه داده‌ای است که نصف داده‌ها از آن بیشتر و نصف داده‌ها از آن کمتر است و این جمله اشتباه است زیرا در صورت تکرار داده‌ها، ممکن است کمتر از نیمی‌از داده‌ها از میانه کمتر یا بیشتر باشد. یا گاهی از جملات مطلقی مانند اینکه میانه داده‌ها را نصف می‌کند یعنی ٪۵۰ داده‌ها قبل و بعد آن قرار دارد صحبت می‌شود که این درصدها تقریبی است نه مطلق. برای مثال اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، تعداد $\frac{n-1}{2}$ قبل و بعد از میانه قرار دارند که تقریباً ٪۵۰ داده‌ها است. بنابراین، اگر بخواهیم با زبان درصد از داده‌ها صحبت کنیم بهتر است از «تقریباً» استفاده کنیم. پس از تدریس این مفهوم در زمان مناسب، از هنرجویان بخواهید با مثال اشکال دو عبارت بالا را نشان دهند.

نکته‌ای که در کار با میانه باید به آن توجه کرد این است که میانه صرفاً به برابری تعداد داده‌ها بعد و قبل از آن توجه دارد و به بزرگی و کوچکی داده‌ها کاری ندارد.

یعنی در حالت کلی نسبت به اندازه داده‌ها حساسیت ندارد (برعکس میانگین که با تغییر هر داده، مقدار آن تغییر می‌کند).
می‌توانید از هنرجویان بخواهید که مثال‌هایی ارائه کنند که با تغییر اندازه داده‌ها، میانه تغییر نکند.
از میانه و تعمیم‌های آن مانند چارک‌ها، دهک‌ها، و صدک‌ها می‌توان در مسائل اقتصادی استفاده کرد. برای مثال برای آنکه بدانند چه درصدی از افراد جامعه از یک دهم درآمد ملی بهره می‌برند از دهک‌ها استفاده می‌کنند، یا برای شناخت اینکه نمره نصف هنرجویان از چه نمره‌ای کمتر است از میانه استفاده می‌شود.

ورود به مطلب

برای ورود به مطلب موقعیتی طرح شده است که هنرجو را در شرایطی قرار می‌دهد که متوجه شود با دانستن میانگین به عنوان یک شاخص برای تحلیل وضعیت نمی‌تواند به خوبی تصمیم‌گیری کند. مشابه چنین وضعیتی را می‌توان با طرح سؤال‌هایی در کلاس ایجاد کرد، مانند: قضاوت شما درباره عملکرد کلاسی که نیمی از هنرجویان آن نمره بالاتر از ۱۷ گرفته‌اند چیست؟ آیا اگر توزیع نمرات هنرجویانی را نیز که نمره آنها کمتر از ۱۷ است، بدانیم، می‌توانیم قضاوت بهتری داشته باشیم؟ اگر نیمی از هنرجویان نمره کمتر از ۱۰ گرفته باشند و نمره شما ۱۱ باشد، در مورد عملکرد شما چه می‌توان گفت؟

فعالیت آموزشی

هدف این فعالیت آشنایی با مواردی است که میانگین توصیف خوبی برای تصمیم‌گیری ارائه نمی‌کند و در نتیجه لزوم معرفی شاخص میانه طرح می‌شود.

اهداف موضوعی:
درک نقش میانه در توصیف وضعیت داده‌ها و لزوم استفاده از آن،
مهارت‌ها و فرایندها:

۱ حل مسئله،

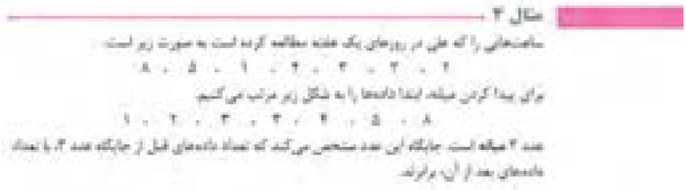
۲ پیوندها و اتصال‌ها،

۳ مقایسه کردن.

حل فعالیت ۴

۱ ‏ ۵/۸ ، ۳/۲ ، ۱/۸ ، ۱/۷ ، ۱/۳ ، ۱/۲ ، ۱/۱ ، ۱ ، ۰/۹

۲ عدد ۱/۳ میلیون تومان جواب است زیرا چهار عدد قبل از آن و چهار عدد بعد از آن قرار دارند. یعنی تقریباً ٪۵۰ حقوق‌ها بزرگ‌تر یا مساوی با ۱/۳ میلیون تومان است. در این مسئله عدد میانه درک بهتری از حقوق کارکنان نسبت به عدد میانگین به ما می‌دهد.



هدف: یادگیری میانه

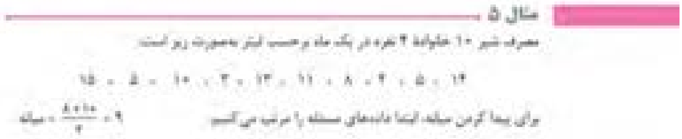
در این مثال هنرجو عدد تکراری ۳ را مشاهده می‌کند که باید دو بار نوشته شود و سپس میانه به‌دست می‌آید.

در گفت‌وگو بین دبیر و دانش‌آموزان، دبیر می‌خواهد حقوق طاها (۱/۵) را به لیست حقوق کارکنان اضافه کنند و چون تعداد داده‌ها زوج می‌شود چالشی در پیدا کردن عدد میانه به‌وجود می‌آید.

اگر دانش‌آموزان لیست حقوق کارکنان را با اضافه کردن حقوق طاها (۱/۵) دوباره بنویسند به‌صورت زیر خواهد شد:

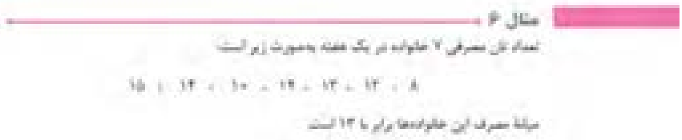
۵/۸ ، ۳/۲ ، ۱/۸ ، ۱/۷ ، ۱/۵ ، ۱/۳ ، ۱/۲ ، ۱/۱ ، ۱ ، ۰/۹

دانش‌آموزان مشاهده می‌کنند پس از مرتب کردن، با دو قسمت‌کردن داده‌ها هیچ عددی در وسط باقی نمی‌ماند بنابراین دنبال میانه می‌گردند. آنها ممکن است هر عددی مانند ۱/۳۵، ۱/۳۸ و غیره را که بین ۱/۳ و ۱/۵ هستند به عنوان میانه بیان کنند اما باید بدانند که به‌صورت قراردادی میانگین دو داده ۱/۳ و ۱/۵ را میانه می‌گیرند که برابر ۱/۴ است.



هدف: یادگیری میانه با مثال‌های متفاوت

در این مثال هنرجو یاد می‌گیرد زمانی که داده‌ها تعدادشان زوج شود مفهوم میانه تغییر نمی‌کند بلکه با تعیین قرارداد، یک عدد به عنوان میانه محاسبه می‌شود.

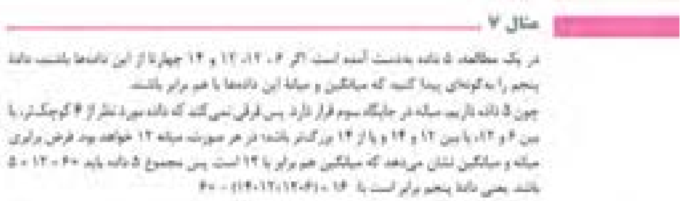

مثال ۶

میانهٔ مصرف این خانواده‌ها برابر ۱۳ است زیرا:

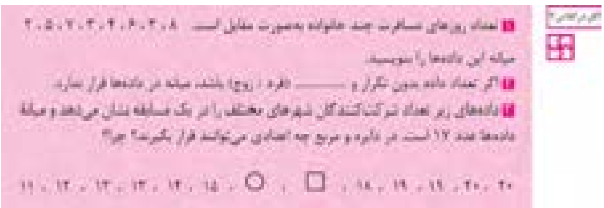
۸ ، ۱۰ ، ۱۳ ، ۱۳ ، ۱۴ ، ۱۴ ، ۱۵

هدف: یادگیری میانه با مثال‌های متفاوت

در این مثال پس از مرتب‌کردن داده‌ها مشخص می‌شود که میانه ۱۳ است. میانه ۱۳ به این معنی است که مصرف نان تقریباً ۵۰ درصد خانواده‌ها بیشتر از ۱۳ عدد در هفته است.


مثال ۷

هدف: سازماندهی تفکرات ریاضی درباره میانه و میانگین و استدلال کردن



اهداف موضوعی:

۱ تقویت مهارت یافتن میانه،

۲ پیوندها و اتصال‌ها،

۳ حل مسئله،

۴ استدلال کردن،

۵ تفکر واگرا

هدف: تمرین و استدلال

۱ داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم :

۲ ۳ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸

$$\text{میانه} = \frac{۴+۵}{۲} = ۴/۵$$

چون تعداد داده‌ها زوج است پس از مرتب کردن داده‌ها میانگین دو داده وسط برابر میانه است

۲ اگر تعداد داده‌ها بدون تکرار و **زوج** باشد، عدد میانه در داده‌ها قرار ندارد.

۳ چون عددها مرتب هستند و تعداد داده‌ها فرد است پس عدد میانه در داده‌ها قرار دارد و در جای هفتم یعنی در دایره قرار می‌گیرد. چون تعداد شرکت‌کنندگان عدد طبیعی است پس در مربع می‌تواند عدد ۱۷ یا ۱۸ قرار داشته باشد.

۱۱ ، ۱۲ ، ۱۳ ،۱۳ ، ۱۴ ، ۱۵ ، ۱۷ ، □ ، ۱۸ ، ۱۹ ، ۱۹ ، ۲۰ ، ۲۰


۱ مثالی بزنید که میانه در بین داده‌ها نباشد و مثالی بزنید که میانه در بین داده‌ها باشد.

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله

هدف: سازماندهی تفکرات و ارائه مثال

هر تعداد فرد داده می‌تواند پاسخ درست باشد به‌طور مثال ۱۲ ، ۱۰ ، ۹ ، ۴ ، ۳ که میانه برابر ۹ است و در بین داده‌ها قرار دارد.

هر تعداد زوج داده می‌تواند پاسخ درست باشد به طور مثال ۲۰ ، ۲۰ ، ۱۸ ، ۱۵

که میانه برابر $۱۹ = \frac{۱۸+۲۰}{۲}$ است و در بین داده‌ها قرار ندارد.

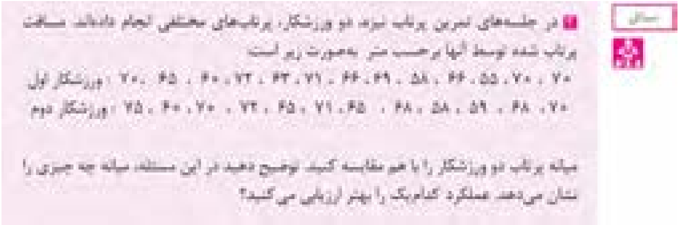
۲ اگر همه داده‌ها ۲ برابر شوند، میانه چه تغییری می‌کند؟

مهارت‌ها و فرایندها:

مهارت مقایسه و الگویابی

هدف: مقایسه و استدلال و الگویابی

می‌توان تعدادی داده مثال زد مانند: ۱۴ ، ۱۰ ، ۹ ، ۷ ، ۵ که میانه برابر ۹ است.
اکنون داده‌ها را ۲ برابر می‌کنیم: ۲۸ ، ۲۰ ، ۱۸ ، ۱۴ ، ۱۰ که میانه برابر ۱۸ است.
حالا با مقایسه می‌توان فهمید که میانه هم ۲ برابر می‌شود. برای تعداد زوج نیز می‌توان مثال آورد.
به صورت کلی اگر a , b , c سه عدد مرتب شده باشند b میانه خواهد شد که با ۲ برابر شدن به صورت $۲a$.$۲b$.$۲c$ خواهد شد که میانه برابر $۲b$ می‌شود. برای تعداد زوج نیز این نتیجه حاصل خواهد شد.


سؤال

در جلسه‌های تمرین پرتاب نیزه دو ورزشکار، پرتاب‌های مختلفی انجام دادند. مسافت پرتاب شده توسط آنها برحسب متر به‌صورت زیر است:

۷۰ ، ۷۰ ، ۵۵ ، ۶۶ ، ۵۸ ، ۶۹ ، ۶۶ ، ۷۱ ، ۶۳ ، ۷۲ ، ۶۰ ، ۶۵ ، ۷۰ : ورزشکار اول

۷۰ ، ۶۸ ، ۵۹ ، ۵۸ ، ۶۸ ، ۶۵ ، ۷۱ ، ۶۵ ، ۷۲ ، ۷۰ ، ۶۰ ، ۷۵ : ورزشکار دوم

میانه پرتاب دو ورزشکار را با هم مقایسه کنید. توضیح دهید در این مسئله، میانه چه چیزی را نشان می‌دهد. عملکرد کدام‌یک را بهتر ارزیابی می‌کنید؟

مهارت‌ها و فرایندها: مهارت مقایسه و ارزیابی کردن، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات

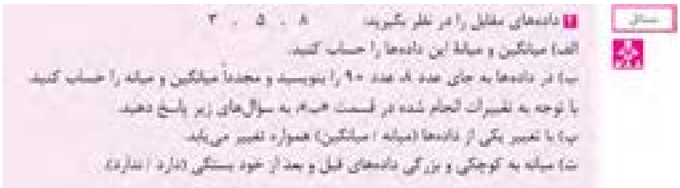
هدف: به‌کارگیری میانه، مقایسه و استدلال

۷۲ ، ۷۱ ، ۷۰ ، ۷۰ ، ۷۰ ، ۶۹ ، ۶۶ ، ۶۶ ، ۶۵ ، ۶۳ ، ۶۰ ، ۵۸ ، ۵۵ : ورزشکار اول

۷۵ ، ۷۲ ، ۷۱ ، ۷۰ ، ۷۰ ، ۶۸ ، ۶۸ ، ۶۵ ، ۶۵ ، ۶۰ ، ۵۹ ، ۵۸ : ورزشکار دوم

میانه تعداد پرتاب‌های ورزشکار اول برابر ۶۶ و میانه تعداد پرتاب‌های ورزشکار دوم برابر ۶۸ است.

میانه نشان می‌دهد که تقریباً ٪۵۰ پرتاب‌ها بیشتر از میانه و تقریباً ٪۵۰ پرتاب‌ها کمتر از میانه هستند. دامنه تغییرات پرتاب‌های هر دو ورزشکار برابر است پس در ارزیابی کمکی نمی‌کند. میانگین پرتاب‌های ورزشکار اول تقریباً ۶۵/۷ و میانگین پرتاب‌های ورزشکار دوم تقریباً ۶۶/۷ است. میانه، میانگین و بالاترین پرتاب ورزشکار دوم از ورزشکار اول بیشتر است که عملکرد بهتر ورزشکار دوم را نشان می دهد.


سؤال

دادههای مقابل را در نظر بگیرید. ۸ ، ۵ ، ۳

الف) میانگین و میانه این داده‌ها را حساب کنید.

ب) در داده‌ها به جای عدد ۸، عدد ۹۰ را بنویسید و مجدداً میانگین و میانه را حساب کنید.

با توجه به تغییرات انجام شده در قسمت «ب»، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

پ) با تغییر یکی از داده‌ها (میانه / میانگین) همواره تغییر می‌یابد.

ت) میانه به کوچکی و بزرگی داده‌های قبل و بعد از خود بستگی (دارد / ندارد).

مهارت‌ها و فرایندها: حل مسئله، تعمیم دادن

هدف: مقایسه و استدلال

الف) میانگین برابر ۵/۳ و میانه برابر ۵ است.

ب) داده‌ها به صورت مقابل خواهند شد: ۹۰ ، ۵ ، ۳

میانگین برابر ۳۲/۶ و میانه برابر ۵ است.

با مقایسه دو قسمت بالا می‌توان نتیجه گرفت:

پ) با تغییر یکی از داده‌ها **میانگین** همواره تغییر می یابد.

ت) میانه به کوچکی و بزرگی داده‌های قبل و بعد از خود بستگی **ندارد**.

سؤال

۱ میانه نمرات دانش‌آموزان یک کلاس ۳۵ نفری، برابر ۱۷ است. میانه چه اطلاعاتی درباره نمره‌های کلاس به شما می‌دهد؟

مهارت‌ها و فرایندها: ارتباطات

هدف: ارتباط کلامی

میانه ۱۷ مشخص کننده آن است که تعداد داده‌های بعد از میانه و قبل از میانه با یکدیگر برابرند اما در مورد بیشترین و کمترین نمره و سایر نمره‌ها هیچ اطلاعاتی به ما نمی‌دهد.

سؤال

۲ میانهٔ نمرات ریاضی در دو کلاس، ۱۷ و ۱۲ است. وضعیت نمرات دو کلاس را توصیف کنید.

مهارت‌ها و فرایندها: ارتباطات

هدف: استدلال و ارتباط کلامی

می‌توان گفت دانش‌آموزان کلاس با میانه ۱۷، وضعیت بهتری دارند زیرا حداقل نیمی از کلاس نمره ۱۷ یا بیشتر گرفته‌اند. اما در کلاس دیگر حداقل نیمی از کلاس نمره ۱۲ یا بیشتر گرفته‌اند، هرچند در مورد نمره‌های زیر ۱۷ نمی‌توان نظری ارائه کرد و ممکن است نمره‌های بیشتر از ۱۲ هم خیلی خوب نباشند.

سؤال

۳ میانگین ۵ داده برابر با ۱۷ و میانهٔ آنها ۱۴ است. ۵ عدد مثال بزنید که این شرایط را داشته باشند. این مسئله چند جواب می‌تواند داشته باشد؟

مهارت‌ها و فرایندها:

استدلال کردن، پرورش تفکر واگرا

هدف: به‌کارگیری میانه، میانگین و استدلال

چون میانگین ۵ داده برابر ۱۷ است پس مجموع داده‌ها برابر $۸۵ = ۱۷ \times ۵$ است. میانه در جایگاه سوم باید قرار داشته باشد و عدد ۱۴ است. با این شرایط چهار داده دیگر را باید بنویسیم.

$\boxed{\quad}$ و $\boxed{\quad}$ و $\boxed{۱۴}$ و $\boxed{\quad}$ و $\boxed{\quad}$

می‌توان پنج عدد ۴۵ ، ۱۵ ، ۱۴ ، ۹ ، ۲ یا پنج عدد ۵۰ ، ۱۷ ، ۱۴ ، ۲ ، ۲ و غیره را در نظر گرفت. بنابراین مسئله جواب‌های زیادی دارد.

بخش چهارم: نمودار جعبه‌ای

اهداف بخش

- آشنایی با چارک‌ها
- آشنایی با نمودار جعبه‌ای
- کسب مهارت رسم نمودار جعبه‌ای
- تحلیل نمودار جعبه‌ای
- تفسیر و توصیف وضعیت‌ها به کمک نمودار جعبه‌ای

پیش نیازهای بخش

- آشنایی با دامنه تغییرات

واژه‌های کلیدی: چارک اول، چارک سوم، نمودار جعبه‌ای

نگاه کلی به بخش

در این بخش پس از معرفی چارک‌های اول و سوم، با مقایسه شاخص‌های عددی سعی می‌شود تعبیری هندسی از این شاخص‌ها معرفی شود. نمودار جعبه‌ای شاخص‌های عددی و هندسی را ترکیب می‌کند. بهتر است مثال‌هایی زده شود که کمترین مقدار، بیشترین مقدار و چارک‌های برابر دارند ولی توزیع آنها یکسان نیست. از هنرجویان بخواهید نمودار جعبه‌ای را با نمودارهای دیگر مقایسه کنند. این مقایسه باعث می‌شود درک بهتری از موارد استفاده، نقاط قوت و ضعف نمودار پیدا کنند.

مقایسه نمودارهای جعبه‌ای مختلف، برای مثال عملکرد دو کلاس، برای تحلیل داده‌ها مورد تأکید است.

در معرفی چارک‌ها نیز، ملاحظاتی که در ارتباط با میانه مطرح شد باید در نظر گرفته شوند. به این نکته باید توجه داشت که چارک دوم در واقع همان میانه است. چون میانه واژه رسمی برای توصیف این مقدار است، معمولاً از نام چارک دوم استفاده نمی‌شود و از آن با میانه نام برده می‌شود.

ورود به مطلب

برای ورود به مطلب موقعیتی طرح شده است که در آن عملکرد دو کلاس با هم مقایسه می‌شوند. در این مقایسه نقش نمودارها و ارائه هندسی در بیان سریع

اطلاعات مشخص می‌شود.

فعالیت آموزشی

هدف این فعالیت آشنایی با چگونگی رسم نمودار جعبه‌ای و توصیف وضعیت به کمک تفسیر نمودار جعبه‌ای است.


نمره‌های مرتب شدهٔ درس ریاضی کلاس «کوشش» به صورت زیر است.

۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۰، ۱۲، ۱۲، ۱۵، ۱۵، ۱۷، ۱۷، ۱۷، ۱۷، ۱۹، ۱۹، ۲۰، ۲۰

۱ میانهٔ نمره‌ها را با نقطه‌ای به نام M روی خط‌چین زیر مشخص کنید.

۲ برای اعداد قبل از میانه، دوباره میانه را پیدا کنید و آن را روی خط‌چین با نقطهٔ C مشخص کنید. همچنین برای اعداد بعد از میانه، دوباره میانه را پیدا کنید و آن را روی خط‌چین با نقطهٔ D مشخص کنید.

۳ کمترین نمره را با نقطهٔ A و بیشترین نمره را با نقطهٔ B روی خط‌چین مشخص کنید.

۴ مستطیلی رسم کنید که نقاط C و D روی عرض‌های این مستطیل (جعبه) قرار گیرند. پاره‌خطی از A به C و پاره‌خطی از B به D وصل کنید. درصد تعداد نمرات دانش‌آموزان در هر بازه را پیدا کرده و در جدول زیر را کامل کنید.

بازه نمرات	قبل از C	بین C و D	قبل از D	بعد از D
درصد تعداد نمرات هنرجویان				

اهداف موضوعی:

۱ آشنایی با نمودار جعبه‌ای،

۲ توصیف وضعیت داده‌ها با استفاده از نمودار جعبه‌ای،

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ حل مسئله،

۲ پیوندها و اتصال‌ها،

۳ مقایسه کردن،

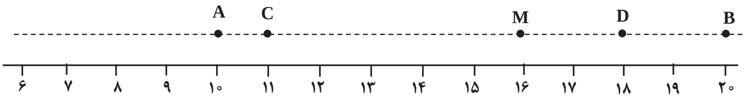
۴ بازنمایی‌ها.

پاسخ‌های (۱، ۲ و ۳)

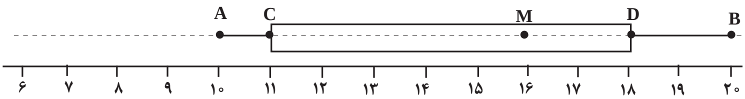
۱۰ ، ۱۰ ، ۱۰ ، ۱۰ ، ۱۲ ، ۱۲ ، ۱۵ ، ۱۵ ، ۱۷ ، ۱۷ ، ۱۷ ، ۱۷ ، ۱۹ ، ۱۹ ، ۲۰، ۲۰

C=۱۱ M=۱۶ D=۱۸

که روی شکل آن‌ها را مشخص می‌کنیم.



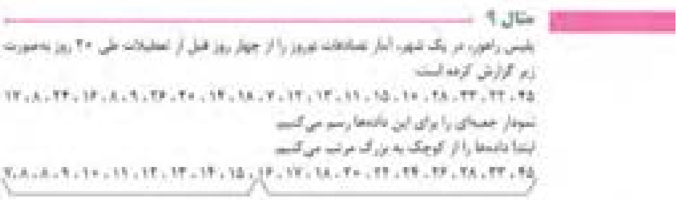
۴) نمودار به صورت زیر کامل شده است:



بازه نمرات	قبل از C	بین C و D	قبل از D	بعد از D
درصد تعداد نمرات دانش‌آموزان	۲۵	۵۰	۷۵	۲۵


مثال ۸
نمودار جعبه‌ای زیر را در نظر بگیرید.

هدف: تحلیل نمودار جعبه‌ای و پراکندگی بین چارک‌ها
میانه و چارک اول و چارک سوم داده‌ها را به چهار قسمت تقریباً مساوی از نظر تعداد مشخص می‌کند که از روی نمودار بلندتر بودن طول هرقسمت مشخص کننده پراکندگی بیشتر در آن قسمت است.


مثال ۹
نمودار جعبه‌ای را برای این داده‌ها رسم می‌کنیم.
ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

هدف: به‌کارگیری ریاضیات در تحلیل وضعیت تصادفات رانندگی

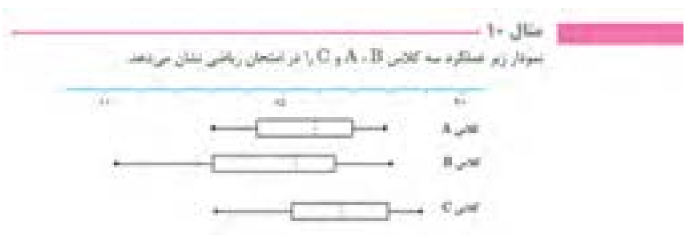
در این مثال برای هنرجو دامنه تغییرات یادآوری شده‌است تا فاصله تغییرات داده‌ها مشخص گردد سپس به رسم نمودار با نام‌گذاری که بعد از فعالیت ۵ داده شده پرداختیم. توصیف نمودار جعبه‌ای در آخر توضیح داده شده‌است. بلندتر بودن خط سمت راست جعبه نسبت به خط سمت چپ جعبه نشان دهنده پراکندگی بیشتر تعداد تصادفات در آن قسمت است.

جایگاه میانه را می‌توان به صورت زیر حساب کرد:

$$\frac{\text{تعداد داده‌ها}}{۲} < \text{جایگاه میانه برای داده‌ها با تعداد زوج} < \frac{\text{تعداد داده‌ها}}{۲} + ۱$$

$$\text{جایگاه میانه برای داده‌ها با تعداد فرد} = \frac{\text{تعداد داده‌ها} + ۱}{۲}$$

در مثال بالا تعداد داده‌ها ۲۰ است پس جایگاه میانه بین داده‌های دهم و یازدهم است. $\frac{۲۰}{۲} < \text{جایگاه میانه} < \frac{۲۰}{۲} + ۱$ اگر تعداد داده‌ها ۱۵ تا باشد جایگاه میانه برابر با هشت است زیرا $\frac{۱۵+۱}{۲} = ۸$ یعنی میانه هشتمین داده است.



هدف: مقایسه نمودارهای جعبه‌ای با یکدیگر در یک موضوع

در این مثال مقایسه نمودارهای جعبه‌ای نمره‌های ریاضی سه کلاس انجام شده است.

۱ میزان بارندگی (بر حسب میلی‌متر) در یک شهر طی ۱۵ روز به‌صورت زیر گزارش شده است.

۲، ۰، ۵، ۱، ۹، ۰، ۱۲، ۱۵، ۲۵، ۵، ۰، ۸، ۲، ۳، ۱۶

الف) چارک اول، میانه و چارک سوم چه اعدادی هستند؟

ب) تقریباً چند درصد داده‌ها بین Q_1 و Q_3 قرار دارند؟

پ) نمودار جعبه‌ای داده‌ها را رسم و آن را تفسیر کنید.

اهداف:

۱ تقویت مهارت محاسبه چارک‌ها،

۲ تقویت مهارت رسم نمودار جعبه‌ای،

۳ تقویت مهارت تفسیر وضعیت داده‌ها با استفاده از نمودار جعبه‌ای،

۴ حل مسئله،

۵ بازنمایی‌ها،

۶ پیوندها و اتصال‌ها،

۷ استدلال کردن،

۸ مقایسه کردن،

۹ ارتباطات،

۱۰ تفکر بصری.

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

۰ ، ۰ ، ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۵ ، ۸ ، ۹ ، ۱۲ ، ۱۵ ، ۱۶ ، ۲۵

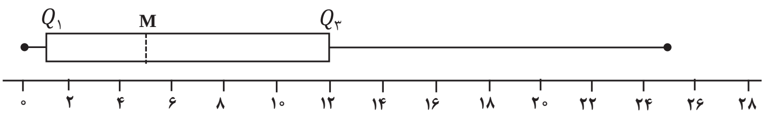
الف)

$Q_1 = ۱$ = چارک اول

$M = ۵$ = میانه

$Q_3 = ۱۲$ = چارک سوم

ب) تقریباً ٪۵۰ داده‌ها بین Q_1 و Q_3 یعنی داخل جعبه قرار دارند.



پ) با توجه به نمودار، پراکندگی در میزان بارندگی بعد از میانه بیشتر مشاهده می‌شود. دنباله سمت راست نسبت به دنباله سمت چپ بلندتر است، یعنی پراکندگی بارش‌ها در این قسمت بیشتر است. ۵۰ درصد روزها بارش بیشتر از


یک شرکت بیمه می‌خواهد بررسی‌هایی را برای پرداخت هزینه‌های بستری بیماران دچار حملهٔ قلبی انجام دهد. بعد از آنکه مدت بستری شدن (بر حسب روز) تعدادی بیمار پس از حملهٔ قلبی در یک بیمارستان مشخص شد نمودار جعبه‌ای آن را به‌صورت زیر رسم کرده‌اند.

الف) میانهٔ داده‌ها چند است؟

ب) چارک اول چند است؟ چند درصد داده‌ها قبل از آن و چند درصد بعد از آن قرار دارند؟

پ) مقدار $Q_۳$ چند است؟ این عدد نشان‌دهندهٔ چیست؟

ت) چند درصد داده‌ها درون جعبه قرار دارند؟

ث) بلندتر بودن دنبالهٔ سمت راست جعبه نشان‌دهندهٔ چیست؟

۵ میلی‌متر و ۲۵ درصد روزها بارش بیشتر از ۱۲ میلی‌متر داریم.

هدف: بازنمایی و ارتباط کلامی

الف) میانه برابر ۸ است.

ب) چارک اول یا $Q_۱$ برابر ۶ است. ٪۲۵ داده‌ها قبل از آن و ٪۷۵ داده‌ها بعد از آن قرار دارند.

پ) $Q_۳ = ۱۲$ و این عدد چارک سوم است که نشان می‌دهد ٪۲۵ داده‌ها بعد از آن و ٪۷۵ داده‌ها قبل از آن قرار دارند.

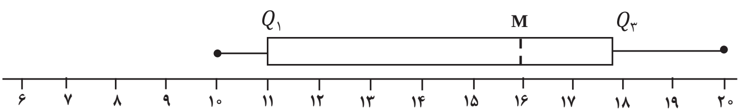
ت) تقریباً پنجاه درصد

ث) پراکندگی بیشتر داده‌ها

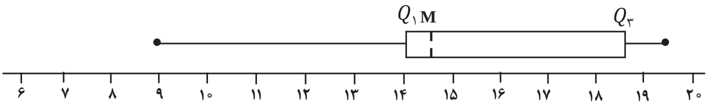

نمودار جعبه‌ای فهرست نمرات کلاس‌های تلاش و کوشش (در ابتدای این بخش) را رسم کنید. سپس با مقایسهٔ این نمودارها به نظر شما کدام کلاس عملکرد بهتری دارد؟ چرا؟

هدف: بازنمایی و استدلال

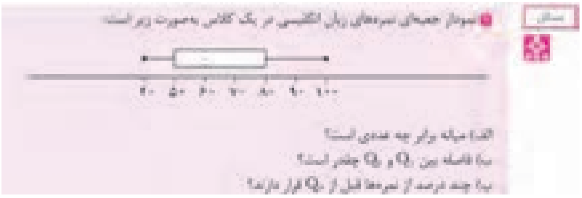
نمودار جعبه‌ای کلاس کوشش:



نمودار جعبه‌ای کلاس تلاش:



با توجه به نمودارها کلاس تلاش عملکرد بهتری دارد چون ۷۵ درصد دانش‌آموزانش از ۱۴ بیشتر گرفته‌اند و ۲۵ درصد بالای کلاس هم از ۲۵ درصد بالای کلاس کوشش بهتر عمل کرده است، کلاس تلاش، عملکرد بهتری دارد.


نمودار جعبه‌ای نمره‌های زبان انگلیسی در یک کلاس به‌صورت زیر است:

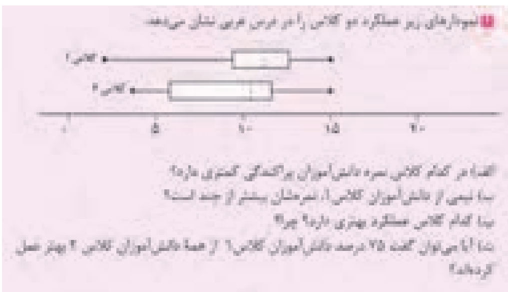
الف) میانه برابر چه عددی است؟
ب) فاصله بین Q_1 و Q_3 چقدر است؟
پ) چند درصد از نمره‌ها قبل از Q_3 قرار دارند؟

مهارت‌ها و فرایندها: حل مسئله، پرورش تفکر بصری
هدف: بازنمایی

الف) ۶۰

ب) $Q_3 - Q_1 = ۸۰ - ۵۰ = ۳۰$

پ) تقریباً ٪۷۵ داده‌ها قبل از چارک سوم یعنی $Q_3 = ۸۰$ قرار دارند.


نمودارهای زیر عملکرد دو کلاس را در درس عربی نشان می‌دهد.

الف) در کدام کلاس نمرهٔ دانش‌آموزان پراکندگی کمتری دارد؟
ب) نیمی از دانش‌آموزان کلاس ۱، نمره‌شان بیشتر از چند است؟
پ) کدام کلاس عملکرد بهتری دارد؟ چرا؟
ت) آیا می‌توان گفت ۷۵ درصد دانش‌آموزان کلاس ۱ از همهٔ دانش‌آموزان کلاس ۲ بهتر عمل کرده‌اند؟

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، استدلال کردن، پرورش تفکر بصری، ارتباطات

هدف: مقایسه نمودارهای جعبه‌ای و استدلال

الف) با توجه به نمودار جعبه‌ای کلاس ۱ پراکندگی کمتری دارد.

ب) تقریباً ۱۱

پ) کلاس ۱. زیرا ٪۵۰ از داده‌های کلاس ۱ که بعد از میانه قرار دارند (نسبت به کلاس ۲) به هم نزدیک‌تر هستند (که بیشتر از میانه کلاس ۲ هم هستند).
ت) خیر

سؤال

در یک تیم والیبال، کوتاه‌ترین قد ۱۶۸ و بلندترین قد ۲۰۳ سانتی‌متر و میانه برابر ۱۸۴ سانتی‌متر است. اگر فاصله بین Q_1 و Q_3 برابر ۱۱ باشد آیا می‌توان نمودار جعبه‌ای قد افراد این تیم را رسم کرد؟

مهارت‌ها و فرایندها:
استدلال کردن، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی
هدف : استدلال
با اطلاعات مسئله نمی‌توان نمودار جعبه‌ای را کامل رسم کرد فقط می‌توانیم مکان کوتاه‌ترین و بلندترین قد و میانه را مشخص کنیم. با داشتن فاصله بین Q_3 و Q_1 فقط طول جعبه مشخص می‌شود و محل Q_1 و Q_3 مشخص نمی‌شود.

سؤال

غلظت قند خون ۱۲ نفر (برحسب $mM\ dm^{-3}$)، ۳۰ دقیقه پس از مصرف غذا اندازه‌گیری شده است. نتایج به‌دست آمده به شرح زیر است.

۳/۷	۵/۱	۴/۶	۳/۹	۳/۸	۴/۲
۳/۹	۴/۰	۵/۲	۴/۷	۴/۰	۳/۸

الف) میانه و چارک‌های اول و سوم را پیدا کنید.

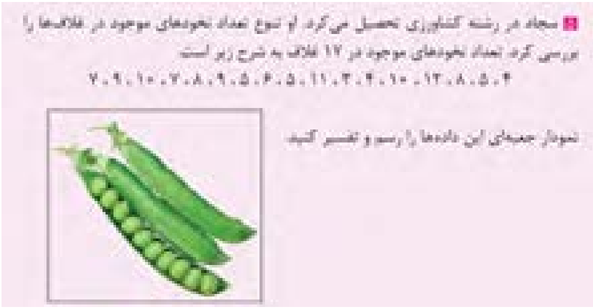
مهارت‌ها و فرایندها:
پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات

هدف: مقایسه و استدلال
ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

۳/۷ ، ۳/۸ ، ۳/۸ ، ۳/۹ ، ۳/۹ ، ۴ ، ۴ ، ۴/۲ ، ۴/۶ ، ۴/۷ ، ۵/۱ ، ۵/۲

الف) Q_3 =۴/۶۵ و Q_1 =۳/۸۵ و M=۴

ب) چون عدد ۴/۱ از میانه (M=۴) بیشتر است، مشخص می‌کند که در بین افراد قند خون بالایی داریم و باید مراقب قند خون خود برای حفظ سلامتی باشیم.


سجاد در رشته کشاورزی تحصیل می‌کرد. او تنوع تعداد نخودهای موجود در غلاف‌ها را بررسی کرد. تعداد نخودهای موجود در ۱۷ غلاف به شرح زیر است.

۴، ۵، ۸، ۱۲، ۱۰، ۴، ۳، ۱۱، ۵، ۶، ۵، ۹، ۸، ۷، ۱۰، ۹، ۷

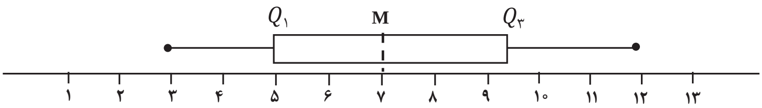
نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را رسم و تفسیر کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:
بازنمایی‌های چندگانه، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارتباطات

هدف: بازنمایی و استدلال
ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

۱۲ ، ۱۱ ، ۱۰ ، ۱۰ ، ۹ ، ۹ ، ۸ ، ۸ ، ۷ ، ۷ ، ۶ ، ۵ ، ۵ ، ۵ ، ۴ ، ۴ ، ۳

Q_3 =۹/۵ و Q_1 =۵ و M =۷



تقریباً نیمی از غلاف‌ها بیشتر یا مساوی ۷ دانه در خودشان دارند و ٪۷۵ غلاف‌ها بیشتر یا مساوی ۵ دانه دارند و هیچ غلافی خالی نیست بنابراین غلاف‌ها کیفیت خوبی داشته‌اند.