

قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن



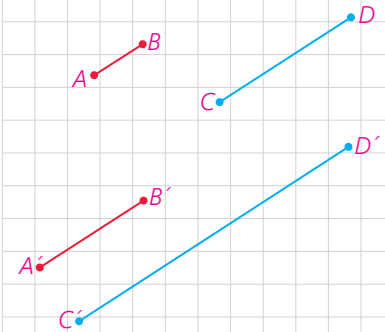
■ قضیه تالس و تشابه شکل‌های هندسی، کاربردهای زیادی در محاسبه طول‌ها و فاصله‌های غیر قابل دسترس دارد. محاسبه ارتفاع بلندی‌ها به کمک سایه آنها نمونه‌ای از این کاربردهاست.

نسبت و تناسب در هندسه

با نسبت و تناسب آشنایی دارید و ویژگی اصلی آن، یعنی برابری حاصل ضرب طرفین و وسطین را می‌شناسید؛ یعنی می‌دانید که اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (ب، د $\neq 0$) آنگاه $ad=bc$ و برعکس؛ از تساوی $xy=zt$ با شرط $t, y \neq 0$ تناسب $\frac{x}{t} = \frac{z}{y}$ نتیجه می‌شود. نسبت اندازه‌های دو پاره‌خط در هندسه هم به همین صورت تعریف می‌شود به شرطی که هر دو با یک واحد اندازه‌گیری بیان شده باشند؛ مثلاً اگر AB پاره‌خطی به طول 2cm و CD پاره‌خطی به طول 5cm باشد، $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{5}$. حال فرض کنید $A'B' = 4\text{cm}$ و $C'D' = 10\text{cm}$ ، در این صورت:

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

و بنابراین یک تناسب به صورت $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ درست می‌شود. بدیهی است که اگر نسبت AB به CD ، $\frac{2}{5}$ باشد، نسبت CD به AB ، $\frac{5}{2}$ است.



فعالیت ۱

مثلث ABC و ارتفاع‌های BD و CE از آن را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را یک بار با در نظر گرفتن قاعده AC و ارتفاع BD و بار دیگر با در نظر گرفتن قاعده AB بنویسید.

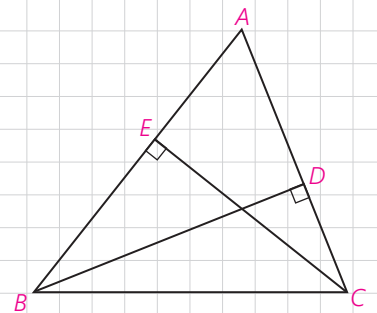
$$\text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} AC \times \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}}$$

— عبارت‌های سمت راست، هر دو مساوی یک چیزند.

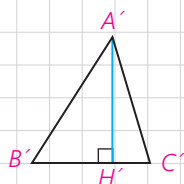
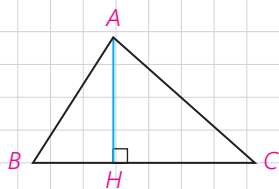
بنابراین: $\underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}} = AC \times \underline{\hspace{2cm}}$ آیا می‌توانید از آنجا یک تناسب بنویسید؟

پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. آیا همه به یک جواب رسیده‌اید؟ تفاوت پاسخ‌ها چه چیزی را نشان می‌دهد؟



با توجه به فعالیت صفحه قبل، جای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.

در هر مثلث، نسبت اندازه های هر دو ضلع، با عکس نسبت _____ وارد بر آنها برابر است.



۲ فعالیت

در شکل مقابل ارتفاع های $A'H'$ و AH در دو مثلث $A'B'C'$ و ABC هم اندازه اند ($AH = A'H'$)

با پر کردن جاهای خالی و انجام عملیات ریاضی، نتیجه زیر را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times \dots \times \dots$$

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \times \dots \times \dots$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} \times \dots \times \dots}{\frac{1}{2} \times \dots \times \dots} = \dots$$

۱ نتیجه

هرگاه اندازه ارتفاع های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت های آنها برابر با نسبت اندازه قاعده هایی است که این ارتفاع ها بر آنها وارد شده است.

کاردکلاس

در شکل مقابل مثلث های ABC ، ACD ، ADE ، AEF را که در رأس A مشترک اند، در نظر بگیرید. ارتفاع متناظر با رأس A ، در همه این مثلث ها کدام پاره خط است؟

با توجه به نتیجه فعالیت (۲) جاهای خالی را پر کنید :

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \dots$$

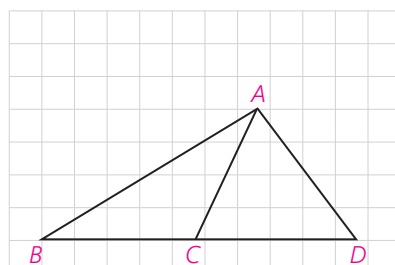
$$\frac{S_{ACD}}{S_{AEF}} = \dots$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABF}} = \dots$$

نتیجه ۲

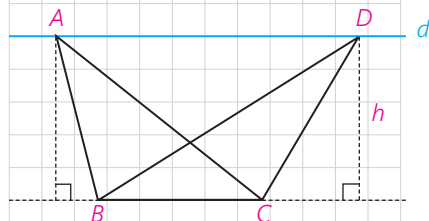
اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعده مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازه قاعده‌های آنهاست. مثلاً در شکل روبه‌رو:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ACD} = \frac{BC}{CD}$$



کاردرکلاس

در شکل روبه‌رو خط d با BC موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعده BC در مثلث‌های ABC و DBC با هم برابر است؟ اگر طول این ارتفاع‌ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم، مساحت این مثلث‌ها چقدر است؟



نتیجه ۳

اگر دو مثلث، قاعده مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعده آنها، روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند. مثلاً در شکل بالا مثلث‌های ABC ، DBC هم‌مساحت‌اند.

ویژگی‌های تناسب

به کمک اعمال و روش‌های جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت. مهم‌ترین این ویژگی‌ها به شرح زیر است (اثبات درستی این ویژگی‌ها را در مجله ریاضی انتهای فصل می‌توانید ببینید)

۱	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$	$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Leftrightarrow 3 \times 10 = 5 \times 6$	b و $d \neq 0$	(طرفین وسطین کردن)
۲	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$	a و b و c و $d \neq 0$	(معکوس کردن طرفین تناسب)
۳	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{9}{3} = \frac{6}{2}$	a و b و c و $d \neq 0$	(تعویض جای طرفین یا وسطین)
۴	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$	b و $d \neq 0$	(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)
۵	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$	$\frac{30}{21} = \frac{20}{14} \Rightarrow \frac{9}{21} = \frac{6}{14}$	b و $d \neq 0$	(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)
۶	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{4}{6} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{12}{18} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6}$	b و $d \neq 0$	

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{2+4+6+8}{3+6+9+12} = \frac{20}{30}$$

b_1 و b_2 و ... و $b_n \neq 0$

(تعمیم ویژگی ۶)

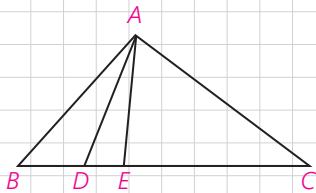
تعریف واسطه (میانگین) هندسی: اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد؛ یعنی $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ با طرفین وسطین کردن تناسب، نتیجه می‌شود: $b^2 = ac$. در این صورت b را واسطه هندسی a و c می‌نامیم. مثلاً اگر دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۹ واحد داشته باشیم، پاره‌خطی که ۶ واحد طول دارد، واسطه هندسی بین آنهاست (چرا؟)



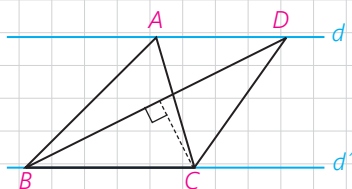
تمرین

۱- اگر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{3}{5}$ حاصل $x+y+z$ را به دست آورید.

۲- طول پاره‌خطی را به دست آورید که واسطه هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است.



۳- در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به دست آورید.



۴- در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، 8cm^2 است. اگر $BD = 6\text{cm}$ باشد، فاصله نقطه C از BD را به دست آورید.

قضیه تالس

در شکل مقابل خط DE موازی ضلع BC رسم شده است. مثلث‌های DAE و DEC در رأس D مشترک‌اند. قاعده‌های مقابل به این رأس کدام‌اند؟ با توجه به نتیجه ۲ از درس اول، تناسب‌های زیر را کامل کنید:

$$\frac{S_{DAE}}{S_{DEC}} = \frac{\dots}{\dots}, \frac{S_{ADE}}{S_{DBE}} = \frac{\dots}{\dots}$$

مثلث‌های DBE و DEC هم‌مساحت‌اند (چرا؟) با توجه به این موضوع از تساوی‌های بالا تناسب زیر را نتیجه‌گیری کنید:

$$\frac{AE}{\dots} = \frac{\dots}{DB}$$

بنابراین قضیه زیر را اثبات کردیم:

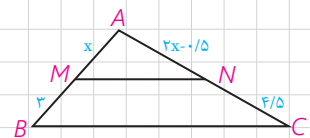
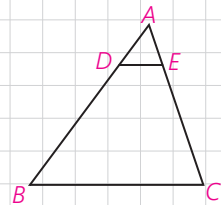
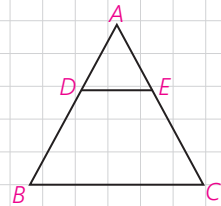
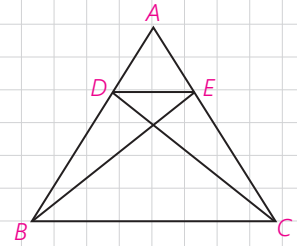
قضیه تالس: هرگاه در یک مثلث، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط جدا می‌کند که اندازه‌های آنها تشکیل یک تناسب را می‌دهند. به طور خلاصه هرگاه مانند شکل روبه‌رو داشته باشیم $DE \parallel BC$ ، آنگاه:

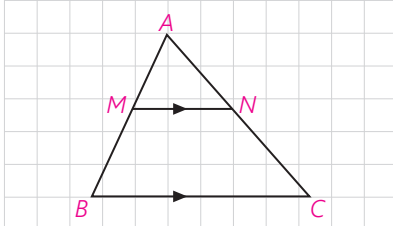
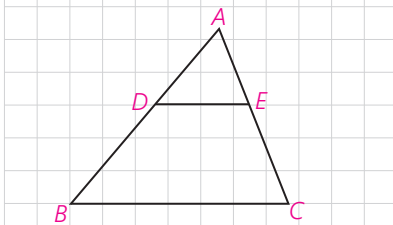
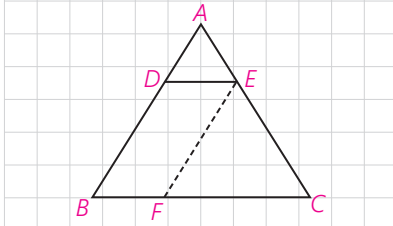
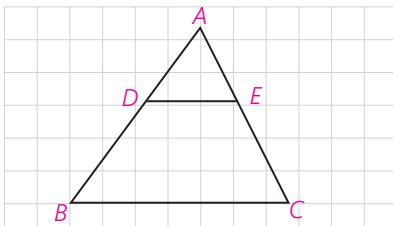
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

کاردرکلاس

۱- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ و $AD=1$ و $DB=3$ و $AE=8$. به کمک قضیه تالس طول AC را به دست آورید.

۲- در شکل مقابل $MN \parallel BC$ ؛ به کمک قضیه تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به دست آورید.





۳- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ؛ تناسب قضیه تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطه $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ و با تفضیل نسبت در صورت از این تناسب، رابطه $\frac{DB}{AB} = \frac{CE}{AC}$ را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها صورت‌های دیگر قضیه تالس هستند.

۱ فعالیت

در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ، از نقطه E، پاره خط EF را موازی AB رسم کرده‌ایم. چهارضلعی DEFB چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟ با توجه به این موضوع داریم:

$DE = \dots$, $DB = \dots$

در مثلث ABC و با در نظر گرفتن $DE \parallel BC$ ، قضیه تالس را بنویسید.

$$\frac{AD}{\dots} = \frac{\dots}{AC} \quad (1)$$

در مثلث CAB با توجه به $EF \parallel AB$ ، قضیه تالس را بنویسید.

$$\frac{BF}{BC} = \frac{\dots}{\dots} \quad (2)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) و جای‌گذاری DE به جای BF خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

تعمیم قضیه تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم آن موازی باشد، مثلثی پدید می‌آید که اندازه ضلع‌های آن با اندازه ضلع‌های مثلث اصلی متناسب‌اند؛ مثلاً در شکل روبه‌رو داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

کاردرکلاس

در شکل مقابل، با فرض $MN \parallel BC$ ، طبق قضیه تالس داریم: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ حال عکس قضیه تالس را به زبان ریاضی بنویسید.

_____ \Rightarrow _____

عکس قضیه تالس: اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آنها، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناظراً متناسب جدا کند، آن‌گاه با ضلع سوم مثلث موازی است.

اثبات با برهان خلف است. در شکل می‌دانیم:

فرض کنیم بر خلاف حکم $MN \parallel BC$ ، پس از نقطه M پاره‌خط MN' را موازی BC رسم می‌کنیم. حال با توجه به قضیه تالس داریم:

$$MN' \parallel BC \Rightarrow \frac{AN'}{AC} = \frac{\dots}{\dots}$$

از مقایسه این تناسب، با فرض مسئله نتیجه می‌شود $\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$ و در نتیجه: $AN' = AN$ و بنابراین N بر N' منطبق است و MN همان MN' است که موازی BC است.

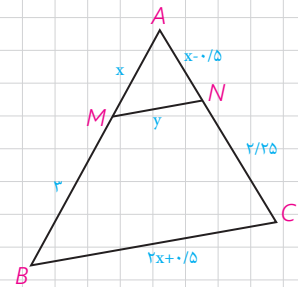
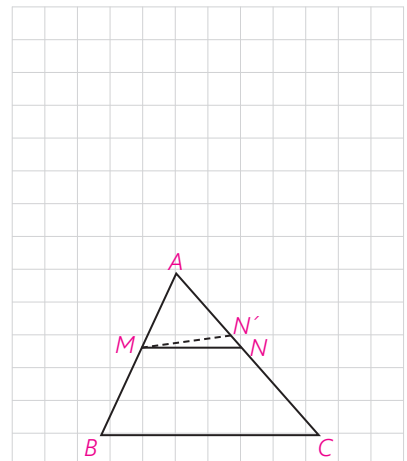
مثال: در شکل مقابل $MN \parallel BC$ است، مقادیر x و y را به دست آورید.

حل: با توجه به قضیه تالس و تعمیم آن داریم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{x-0.5}{2/25} \Rightarrow$$

$$2/25x = 3x - 1/5 \Rightarrow 0.08x = 1/5 \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{y}{4/5} \Rightarrow y = 1/8$$



تمرین

۱- در شکل مقابل پاره‌خط MN موازی با BC رسم شده است. درستی و نادرستی هر عبارت را مشخص کنید:

الف) $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{MN}{BC}$

ب) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

پ) $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

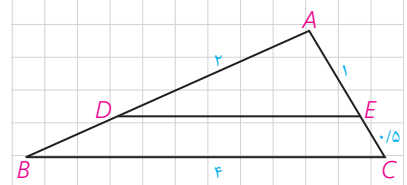
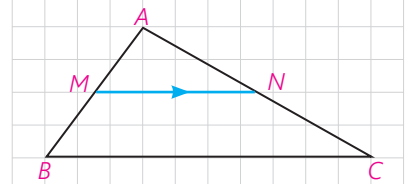
ت) $\frac{AM}{BM} = \frac{MN}{BC}$

ث) $\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{CA} = \frac{MN}{BC}$

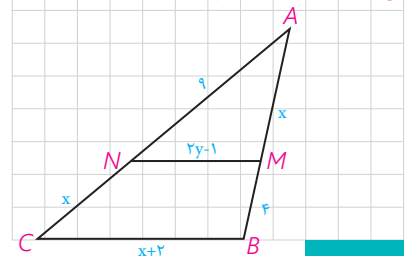
ج) $\frac{MB}{MA} = \frac{NC}{NA}$

چ) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

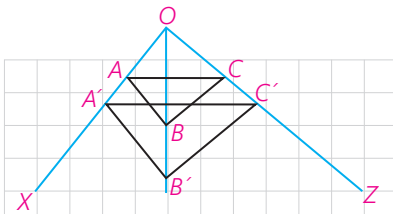
ح) $\frac{MB}{AB} = \frac{MN}{BC}$



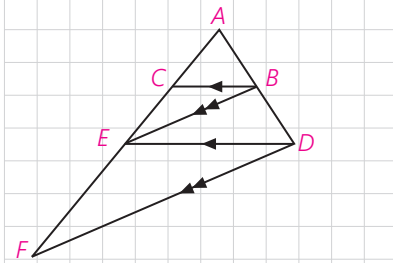
۲- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ؛ با توجه به اندازه پاره‌خط‌ها، طول‌های DE و AB را به دست آورید.



۳- در شکل مقابل $MN \parallel BC$ ؛ مقادیر x و y را به دست آورید.



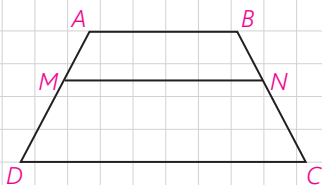
۴- در شکل مقابل می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیه تالس و عکس آن ثابت کنید: $AC \parallel A'C'$



۵- در شکل مقابل می‌دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$ ، به کمک قضیه تالس در مثلث‌های ADE و ADF و مقایسه تناسب‌ها با یکدیگر، ثابت کنید: $AE^2 = AC \cdot AF$ (به عبارت دیگر AE واسطه هندسی بین AC و AF است)



۶- یکی از کاربردهای قضیه تالس از زمان‌های دور تاکنون، محاسبه فاصله‌های غیرقابل دسترس بوده است؛ به عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند در زمانی معین، طول سایه درخت را روی زمین اندازه می‌گیریم؛ سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایه آن روی امتداد سایه درخت قرار گیرد و نوک سایه شاخص نیز بر نوک سایه درخت منطبق شود؛ به طور مثال اگر طول سایه درخت 6° متر، طول سایه شاخص 3° متر و طول شاخص 1° متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟

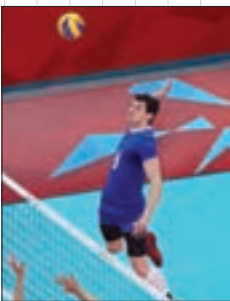


۷- در دوزنقه مقابل $MN \parallel AB \parallel CD$ ، ثابت کنید:

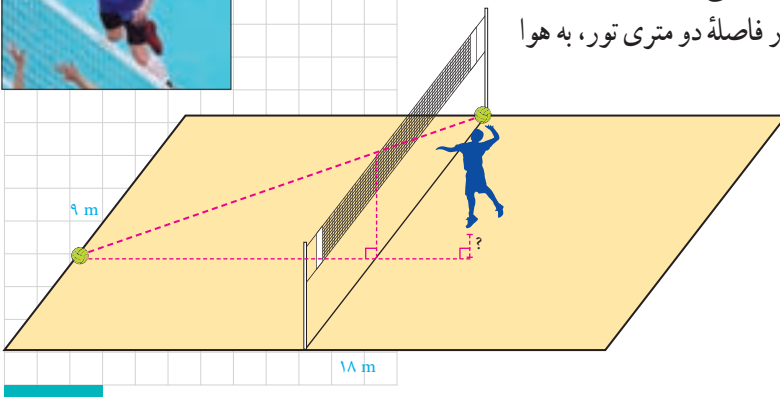
$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

(قضیه تالس در دوزنقه)

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)



۸- ابعاد یک زمین استاندارد والیبال 9° متر در 18° متر است که توسط خط میانی به دو مربع 9×9 تفکیک می‌شود و تور والیبال مردان با ارتفاع $2/43^\circ$ متر روی خط وسط نصب شده است. یک بازیکن با قد 18° سانتی‌متر و در فاصله دو متری تور، به هوا



می‌پرد و تویی را که در ارتفاع 3° سانتی‌متری بالای سرش است با ضربه آبشار مماس بر تور وسط روانه زمین حریف می‌کند و توپ روی خط انتهای زمین حریف می‌نشیند. این بازیکن برای ضربه زدن چقدر به هوا پریده است؟

تشابه مثلث‌ها

در سال گذشته با مفهوم تشابه و چندضلعی‌های متشابه آشنا شدید. در اینجا می‌خواهیم درباره تشابه مثلث‌ها، بیشتر بدانیم. با توجه به تعریف تشابه چندضلعی‌ها، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند؛ اگر و فقط اگر زوایای آنها هم‌اندازه و اندازه‌های اضلاع آنها متناسب باشند:

$$\angle A = \angle A'$$

$$\angle B = \angle B', \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Leftrightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

$$\angle C = \angle C'$$

نسبت اندازه‌های اضلاع نظیر هم در دو مثلث را نسبت تشابه می‌گوییم. مثلاً اگر $\frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2}$ باشد و اندازه اضلاع مثلث $A'B'C'$ نظیر به نظیر نصف اضلاع مثلث ABC باشند، گوییم مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{1}{2}$ ، متشابه است.

سؤال: مثلث ABC با چه نسبت تشابه‌ی، با مثلث $A'B'C'$ متشابه است؟

قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

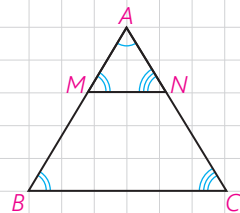
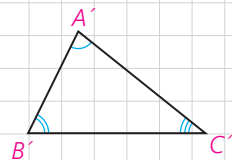
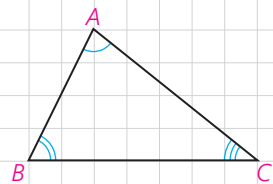
$$MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$$

۱- زاویه‌های $\angle M$ و $\angle N$ به ترتیب با زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ برابرند. چرا؟

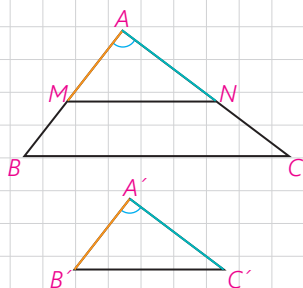
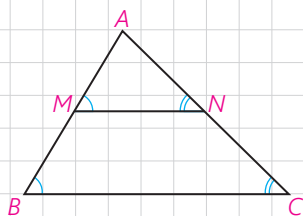
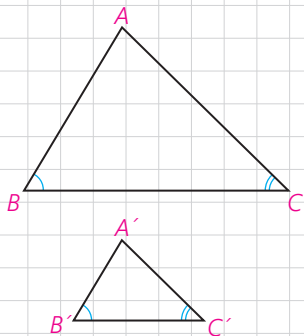
۲- با توجه به تعمیم قضیه تالس تناسب زیر را کامل کنید:

$$\frac{AM}{\dots} = \frac{\dots}{AC} = \frac{MN}{\dots}$$

۳- از (۱) و (۲) در مورد مثلث‌های AMN و ABC چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟



حال با توجه به قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها، می‌توانیم سه قضیه اصلی را که حالت‌های مختلف تشابه مثلث‌ها را بیان می‌کند (مانند حالت‌های هم‌نهستی مثلث‌ها) اثبات کنیم. راهبرد کلی ما برای اثبات این سه قضیه، این است که روی اضلاع AB و AC از مثلث بزرگ‌تر، AM و AN را هم‌اندازه دو ضلع نظیر $A'B'$ و $A'C'$ جدا، و ثابت کنیم MN موازی BC است.



قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C')$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه با $A'B'$ و $A'C'$ جدا می‌کنیم.

$$1- \angle B = \angle B' \text{ و } \angle A + \angle B + \angle C = \angle A' + \angle B' + \angle C' = 180^\circ$$

$$\text{و } \angle C = \angle C' \text{ بنابراین } \angle A = \angle A'$$

$$2- \angle A = \angle A' \Rightarrow \Delta AMN \cong \Delta A'B'C' \text{ (ض.ض.)}$$

$$\Rightarrow MN = B'C' \text{ و } \angle M = \angle B' \text{ و } \angle N = \angle C'$$

$$3- \angle M = \angle B' \text{ و } \angle B = \angle B' \Rightarrow \angle M = \angle B \Rightarrow MN \parallel BC$$

$$4- \text{طبق قضیه اساسی تشابه، } \Delta AMN \sim \Delta ABC \text{ و در نتیجه: } \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

قضیه ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها، هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\angle A = \angle A', \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC ، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه با $A'B'$ و $A'C'$ جدا می‌کنیم.

۱- مثلث‌های AMN و $A'B'C'$ به چه حالتی هم‌نهست‌اند؟ اجزای برابر آنها را مشخص کنید.

۲- در فرض مسئله به جای $A'B'$ و $A'C'$ ، پاره‌خط‌های هم‌اندازه با آنها را قرار دهید. حال بگویید چرا $MN \parallel BC$ ؟

۳- با توجه به قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها و نتیجه قسمت (۱) درستی حکم را ثابت کنید.

قضیه ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات: روی AB و AC ، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه $A'B'$ و $A'C'$ جدا کنید.

۱- در فرض به جای $A'B'$ و $A'C'$ مساوی‌های آنها را جایگزین کنید و سپس بگویید چرا $MN \parallel BC$ ؟

۲- از قضیه اساسی تشابه، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

۳- تعمیم قضیه تالس را در مثلث ABC بنویسید. از مقایسه این تناسب‌ها با تناسب‌های فرض، نتیجه بگیرید:

$$MN = B'C'$$

۴- مثلث‌های AMN و $A'B'C'$ به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ از اینجا درستی حکم را ثابت کنید.

مثال: مطابق شکل روبه‌رو، یک تیر (دکل) انتقال برق به ارتفاع ۲۱ متر در اثر وزش باد خم شده است و در موقعیت جدید، نوک آن از زمین ۱۸ متر فاصله دارد. می‌خواهیم با قرار دادن یک تیر فلزی به طول ۱۵ متر، عمود بر آن، آن را به‌طور موقت سرپا نگه داریم. پای این تیر فلزی را باید در چه فاصله‌ای از پای تیر انتقال برق محکم کنیم؟

حل: اگر تیر برق را با یک پاره‌خط و تیر فلزی نگه‌دارنده را نیز با پاره‌خطی دیگر مشخص کنیم، شکل روبه‌رو را دوباره رسم می‌کنیم.
حال در دو مثلث ABC و BDE داریم:

$$\Rightarrow \angle B = \angle B, \angle C = \angle E = 90^\circ$$

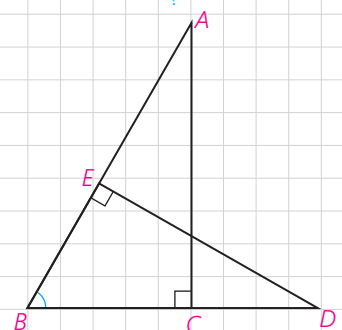
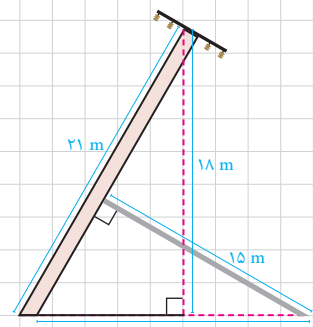
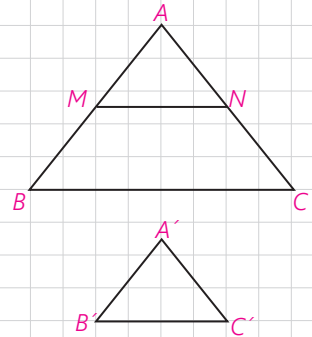
$$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta BDE$$

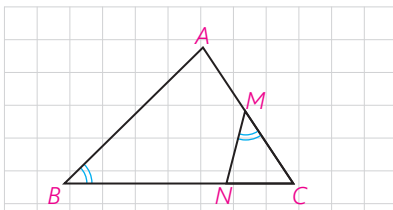
(در نوشتن نسبت تشابه، توجه کنید که اضلاع روبه‌رو به زوایای مساوی در دو مثلث را در یک نسبت بر هم تقسیم کنید.)

$$\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{15}{18} = \frac{BD}{21} \Rightarrow BD = \frac{21 \times 15}{18} = 17.5 \text{ m}$$

یعنی باید پای تیر فلزی را در فاصله ۱۷/۵ متری از پای دکل برق محکم کرد.

با استفاده از این سه قضیه (به خصوص قضیه ۱) می‌توانیم تشابه مثلث‌های متشابه را اثبات کنیم و از آن طریق مسئله‌های زیادی را حل کنیم.





مثال: در مثلث ABC، از نقطه M وسط AC، زاویه NMC را مساوی زاویه B جدا کرده ایم. اگر $NC=2$ و $NB=4$ ، طول AC را به دست آورید.

حل: با کمی دقت مشاهده می کنید که مثلث های MNC و ABC دو زاویه هم اندازه دارند و در نتیجه متشابه اند.

$$\angle M = \angle B, \angle C = \angle C \Rightarrow \triangle MNC \sim \triangle ABC$$

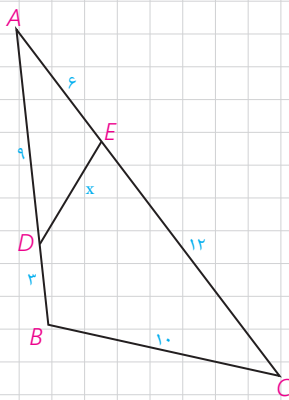
از آنجا با نوشتن نسبت تشابه داریم:

$$\frac{MC}{BC} = \frac{MN}{AB} = \frac{NC}{AC}$$

و به جای MC، $\frac{AC}{2}$ را قرار می دهیم:

$$\frac{AC}{2BC} = \frac{NC}{AC} \Rightarrow AC^2 = 2NC \cdot BC = 2NC(NC + NB) \Rightarrow AC^2 =$$

$$2 \times 2(2 + 4) = 24 \Rightarrow AC = 2\sqrt{6}$$



مثال: در شکل مقابل اندازه هر پاره خط روی آن نوشته شده است. اندازه x را به دست آورید.

حل: به کمک عددهای داده شده، بدیهی است که:

بنابراین $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ و با توجه به زاویه مشترک مثلث های A و ... متشابه اند. نسبت تشابه را بنویسید و x را به دست آورید.

سؤال: در شکل، روی AC، AD' را هم اندازه AD و روی AB، AE' را هم اندازه AE جدا کنید. چرا $D'E' \parallel BC$ ؟

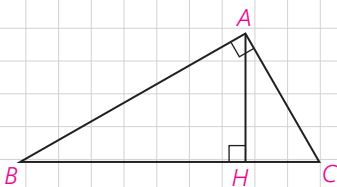
اثبات قضیه فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم الزویه

فعالیت ۱

۱- در مثلث قائم الزویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می کنیم. آیا می توانید دو زاویه هم اندازه را در دو مثلث ABC و ABH نام ببرید؟ $\hat{H} = \dots = 90^\circ$ و $\hat{B} = \dots$ به همین ترتیب دو زاویه هم اندازه از دو مثلث ABC و ACH را نام ببرید. بنابراین می توانیم بگوییم:

$$\triangle ABH \sim \triangle ABC, \triangle ACH \sim \triangle ABC$$

چرا مثلث های ABH و ACH، خودشان با هم متشابه اند؟



نتیجه

در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه تفکیک می‌کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

۲- نسبت تشابه دو مثلث ABC و ABH را بنویسید :

$$\frac{AH}{\dots} = \frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{AB} \Rightarrow AB^2 = \dots \times \dots$$

۳- نسبت تشابه دو مثلث ABC و ACH را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AC واسطه هندسی BC و CH است.

۴- نسبت تشابه دو مثلث ABH و ACH را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AH واسطه هندسی بین BH و CH است.

۵- از روابط ۲ و ۳ داریم :

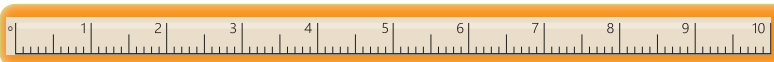
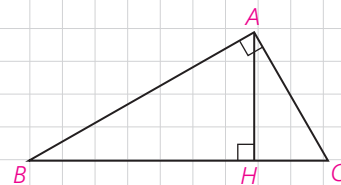
(قضیه فیثاغورس)

$$AB^2 + AC^2 = BC \times \dots + BC \times \dots = BC(\dots + \dots) = BC \cdot BC = BC^2$$

نتیجه

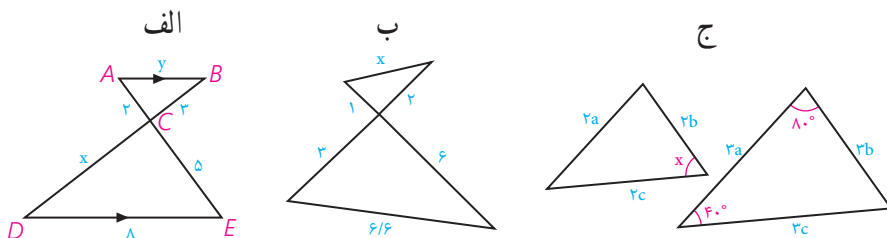
در مثلث قائم‌الزاویه ABC روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را روابط طولی می‌نامیم؛ زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند:

- | | |
|--------------------------------|-------------------------|
| ۱) $AB^2 = BC \cdot BH$ | ۲) $AC^2 = BC \cdot CH$ |
| ۳) $AB^2 + AC^2 = BC^2$ | ۴) $AH^2 = BH \cdot CH$ |
| ۵) $AH \cdot BC = AB \cdot AC$ | |

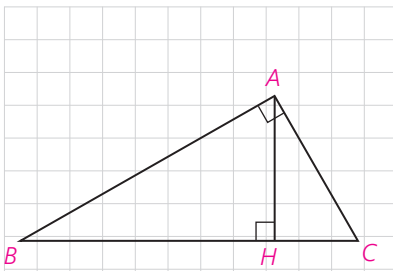


تمرین

۱- در هر یک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x, y را مشخص کنید :



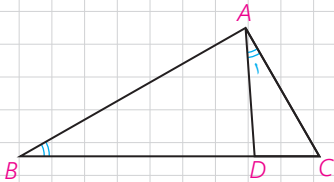
۲- در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A}=90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم کرده ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم الزاویه در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.



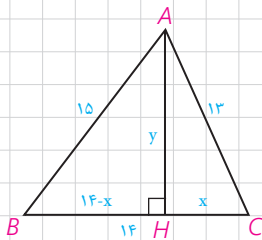
۱) $BH=9$, $CH=4$, $AH=?$, $AB=?$, $AC=?$

۲) $AB=8$, $AC=6$, $BH=?$, $CH=?$

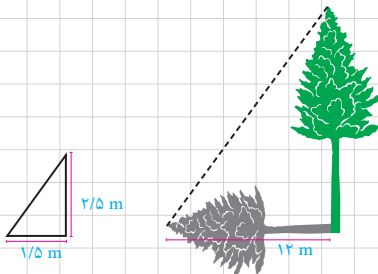
۳- در شکل روبه‌رو $\angle A_1 = \angle B$ و $AC=4$ و $BD=6$ ، طول BC را به دست آورید.



۴- در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH ، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.

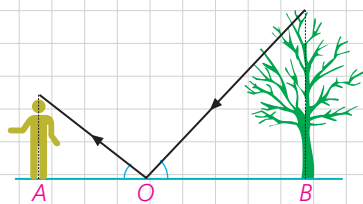


۵- در حیاط یک دبیرستان، دو درخت بلند وجود دارد. معلم هندسه از دانش‌آموزان خواست که برای تعیین ارتفاع این دو درخت روشی را ارائه کنند. در اینجا روش‌های دو دانش‌آموز را می‌بینید. با توجه به اطلاعات داده شده ارتفاع هر درخت را تعیین کنید.



الف) روش ترانه: ترانه یک چوب $2/5$ متری را به صورت عمودی روی زمین در جایی محکم کرد. طول سایه چوب در آن زمان $1/5$ متر بود. هم‌زمان طول سایه درخت 12 متر بود. با توجه به شکل ارتفاع این درخت چند متر است؟

ب) روش شهرزاد: شهرزاد آینه‌ای کوچک را که در مقیاس بزرگ می‌توان یک نقطه در نظر گرفت، (نقطه O در شکل) روی زمین و در مسیر خط راستی که از پای درخت تا پای خودش کشیده است، قرار داد؛ سپس روی این خط آنقدر به جلو و عقب حرکت کرد تا بتواند، تصویر نوک درخت را در آینه ببیند. با توجه به آنچه از خواص آینه‌ها و انعکاس نور می‌دانید، بگویید چگونه می‌توان با داشتن طول‌های AO و BO روی زمین و اندازه قد شهرزاد (فاصله چشم او تا زمین)، ارتفاع درخت را به دست آورد. اگر قد شهرزاد 160 سانتی‌متر و فاصله پای او از آینه $2/5$ متر و فاصله آینه از پای درخت 20 متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟



۶- با قضیه فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می‌گوید اگر زاویه A از مثلثی مانند ABC ، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید.

ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

(۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازه طول‌های اضلاع آن برقرار است.

(۲) پاره‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به گونه‌ای در نظر بگیرید که

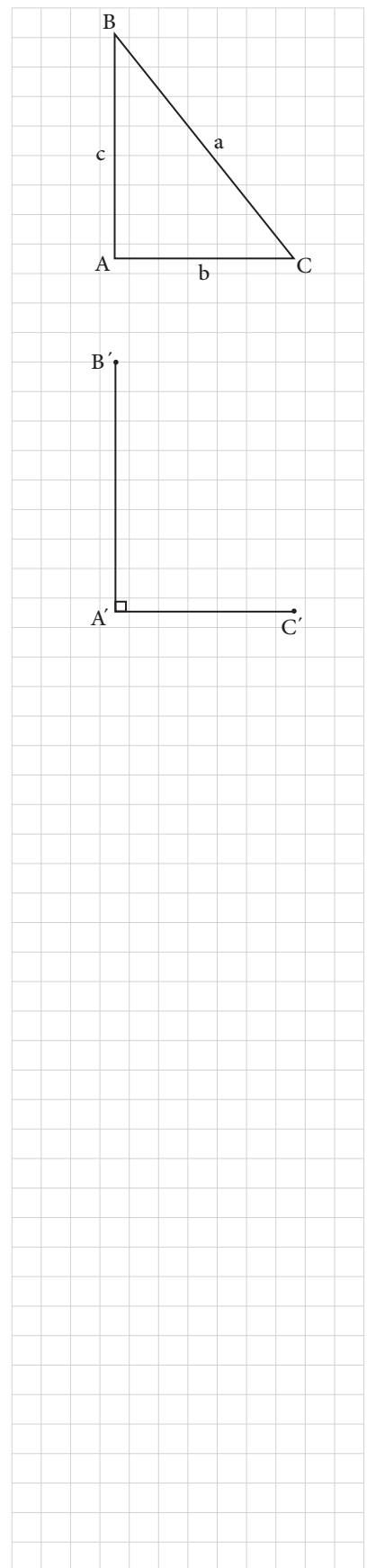
$$A'B' = AB \text{ و } A'C' = AC \text{ و } \hat{A}' = 90^\circ$$

(۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ ، اندازه پاره خط $B'C'$ را

$$\text{به دست آورید و ثابت کنید } B'C' = BC.$$

(۴) توضیح دهید چرا $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ، و نتیجه بگیرید $\hat{A}' = 90^\circ$.

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بیان نمایید.



کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها

■ نسبت اجزای فرعی، محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه

قضیه: هرگاه دو مثلث، متشابه باشند، آنگاه نسبت اندازه‌های هر دو جزء متناظر (ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها) مساوی نسبت تشابه و نسبت مساحت‌های آنها مساوی توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

به عنوان مثال اگر مثلث‌های $A'B'C'$ و ABC متشابه باشند و نسبت تشابه آنها k باشد $(\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k)$ آنگاه:

(الف) نسبت اندازه‌های ارتفاع‌های متناظر آنها k است:

$$\frac{A'H'}{AH} = k$$

(ب) نسبت اندازه‌های میانه‌های متناظر آنها k است:

$$\frac{C'N'}{CN} = k$$

(ج) نسبت اندازه‌های نیمسازهای متناظر آنها مساوی k است:

$$\frac{B'D'}{BD} = k$$

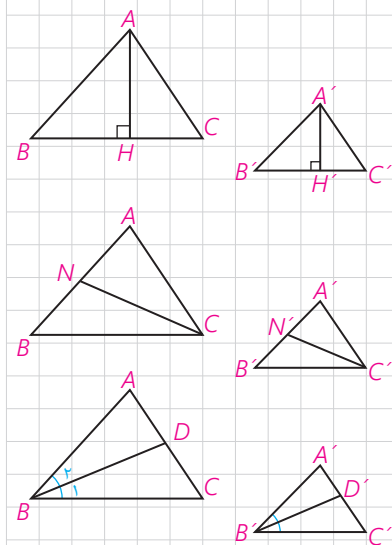
در مورد محیط‌های دو مثلث نیز داریم:

$$\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = \frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC} = k$$

و در مورد مساحت‌ها داریم:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = k^2$$

اثبات: اگر درستی حکم را برای یکی از ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) ثابت کنیم، درستی آن قابل تعمیم به سایر ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) است. (چرا؟)



الف) ارتفاعها

فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' , \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$
حکم	$\frac{A'H'}{AH} = k$

چرا $\angle B = \angle B'$ بنابراین $\Delta ABH \sim \Delta A'B'H'$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه گیری کنید.

ب) میانها

فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' , \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$
حکم	$\frac{A'M'}{AM} = k$

چرا $\angle B = \angle B'$ ؟

$$\frac{B'M'}{BM} = \frac{\frac{1}{2} \dots}{\frac{1}{2} \dots} = \dots = k \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'M'}{BM}$$

بنابراین $\Delta A'B'M' \sim \Delta ABM$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه بگیرید.

ج) نیمسازها

فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' , \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$
حکم	$\frac{B'D'}{BD} = k$

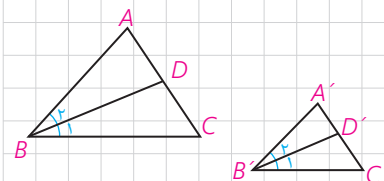
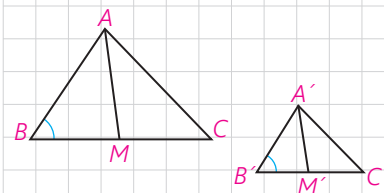
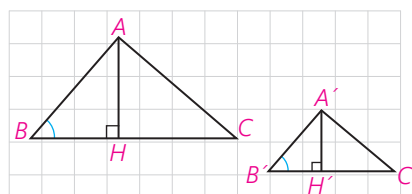
چرا $\angle A = \angle A'$ ، چرا $\angle B_p = \angle B'_p$ ؟
بنابراین $\Delta A'B'D' \sim \Delta ABD$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نشان دهید.

د) محیطها

به سادگی و به کمک ویژگی تناسبها می توان نوشت :

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k \Rightarrow$$

$$\frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC} = k \Rightarrow \frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = k$$



هـ) مساحت‌ها

دیدیم که نسبت ارتفاع‌های نظیر، مساوی نسبت تشابه است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{A'H'}{AH} = \frac{B'C'}{BC} = k \quad \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A'H'B'C'}{\frac{1}{2}AH \cdot BC} = \frac{A'H'}{AH} \times \frac{B'C'}{BC} = k \cdot k = k^2$$

کاردکلاس

چهارضلعی‌های متشابه $A'B'C'D'$ و $ABCD$ مفروض‌اند.

۱- اگر نسبت تشابه دو چهارضلعی، k باشد، ثابت کنید نسبت محیط‌های آنها مساوی k است.

۲- قطرهای AC و $A'C'$ را رسم کنید. نشان دهید:

$$\Delta ACD \sim \Delta A'C'D' \quad , \quad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

نسبت تشابه‌ها چیست؟

۳- جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}} = \dots, \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dots \Rightarrow \frac{S_{A'C'D'} + S_{A'B'C'}}{S_{ACD} + S_{ABC}} = \dots \Rightarrow \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

بنابراین نسبت مساحت‌های دو چهارضلعی، مساوی مربع نسبت تشابه آنهاست. به همین ترتیب می‌توانیم نسبت محیط‌ها و مساحت‌های هر دو n ضلعی متشابه را به صورت زیر ثابت کنیم:

هرگاه دو چند ضلعی با نسبت تشابه k متشابه باشند، نسبت محیط‌های آنها، مساوی k و نسبت مساحت‌های آنها k^2 است.

مثال: محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع سه برابر محیط مثلث متساوی‌الاضلاع دیگر است. مساحت مثلث بزرگ‌تر، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

حل: می‌دانیم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع همواره با هم متشابه‌اند (چرا؟) بنابراین نسبت محیط‌های آنها، نسبت تشابه آنهاست، یعنی $k=3$ بنابراین: $\frac{S}{S'} = k^2 = 9$ یعنی مساحت مثلث بزرگ‌تر، ۹ برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است.

هر دو n ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه‌اند.

کاردرکلاس

۱- اندازه محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب 1° و 18 واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ تر 15 واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچک تر، چند واحد سطح است؟

۲- نسبت مساحت‌های دو پنج ضلعی متشابه، $\frac{4}{9}$ است. اگر محیط یکی از آنها 12 واحد باشد، محیط پنج ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟)

۳- اندازه‌های اضلاع یک هفت ضلعی را سه برابر می‌کنیم؛ بدون اینکه اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر دهیم. مساحت هفت ضلعی چند برابر می‌شود؟

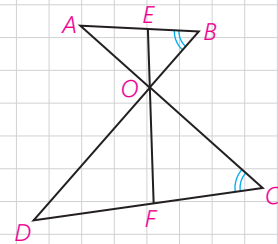
فعالیت

در شکل روبه‌رو $EF = 10 \text{ cm}$ نیمساز دو زاویه متقابل به رأس O است و $\angle B = \angle C$.

الف) چرا مثلث‌های OAB و OCD متشابه‌اند؟

ب) اگر $\frac{OB}{OC} = \frac{2}{3}$ ، نسبت $\frac{OE}{OF}$ چقدر است؟

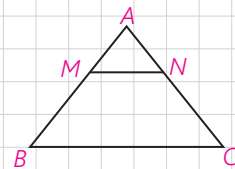
ج) طول‌های OE و OF را به دست آورید.



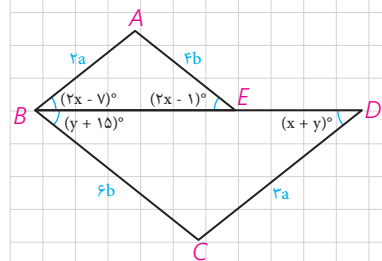
تمرین

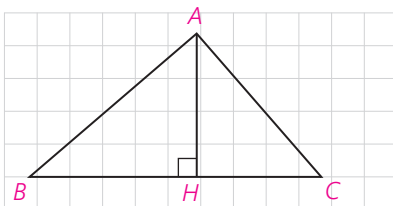
۱- طول‌های اضلاع یک مثلث 1° و 12 و 15 سانتی متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، 10 سانتی متر است. محیط مثلث دوم را به دست آورید.

۲- در شکل روبه‌رو $BC \parallel MN$ است و مساحت ذوزنقه $MNCB$ هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به دست آورید.



۳- در شکل روبه‌رو می‌دانیم $BE = 2DE$ است. اولاً x و y را به دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.





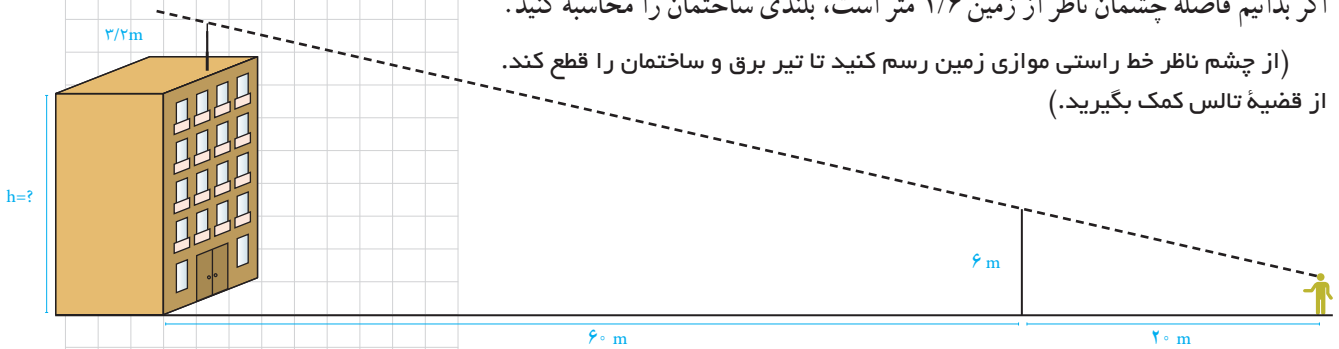
۴- در مثلث قائم الزاویه ABC ($\angle A = 90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانید که $\Delta ABH \sim \Delta ABC \sim \Delta ACH$ است. با توجه به این موضوع،

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2, \quad \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

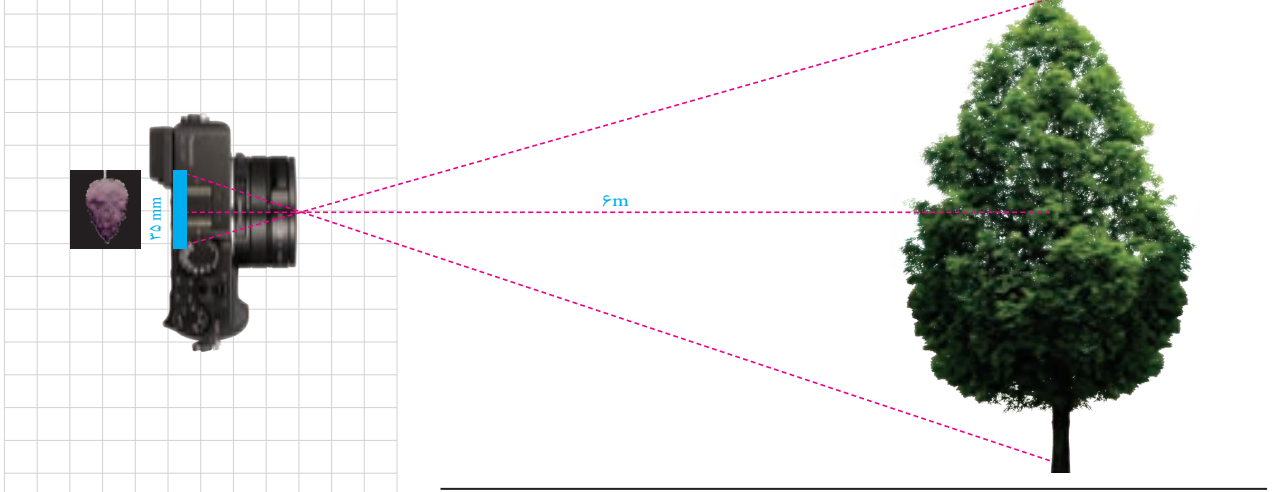
الف) ثابت کنید:

ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا و ادامه کار، درستی قضیه فیثاغورس را نتیجه‌گیری کنید.

۵- مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع $3/2$ متر نصب شده است. در فاصله 60 متری ساختمان، یک تیر برق 6 متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصله 20 متری تیر می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بیند. اگر بدانیم فاصله چشم ناظر از زمین $1/6$ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید. (از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند. از قضیه تالس کمک بگیرید.)

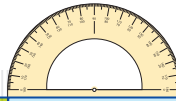


۶- در دوربین‌های قدیمی، موقع عکس‌برداری، روی یک حلقه فیلم تعداد محدودی (مثلاً سی و شش عدد) تصویر منفی^۱ ثبت، و سپس این فیلم ظاهر می‌شود و عکس‌ها از روی آن چاپ می‌شوند. اگر فرض کنیم عرض یکی از این فیلم‌ها، 35mm و فاصله آن درون دوربین تا عدسی^۱، $4/2\text{cm}$ و فاصله عدسی تا درختی که از آن عکس می‌گیرد، 6m باشد، اندازه واقعی درختی که از آن عکس گرفته می‌شود، چند متر است؟



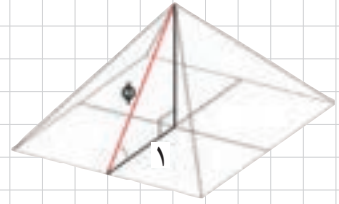
۱- واژه «تصویر منفی» با تصویب فرهنگستان به جای واژه «نگاتیو» به کار رفته است.

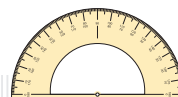
۲- واژه «عدسی» با تصویب فرهنگستان به جای واژه «لنز» به کار رفته است.



خواندنی

اعداد فیثاغورسی به سه عددی می‌گویند که مجموع مربع‌های دو تا از آنها برابر با مربع سوم باشد؛ به عبارتی اعداد a ، b و c را فیثاغورسی گویند، هرگاه $a^2 = b^2 + c^2$. اعداد فیثاغورسی اندازه‌های ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه (راست گوشه) را تشکیل می‌دهند. بررسی‌ها نشان داده است که در برخی نقاط جهان در ساخت بناها پیش از شناخت قضیه فیثاغورس از ویژگی اعداد فیثاغورسی استفاده می‌شده است.





اثبات ویژگی های تناسب

۱ طرفین - وسطین کردن؛ طرفین تساوی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را در عدد غیر صفر bd ضرب کنید :

$$\frac{a}{b} \times bd = \frac{c}{d} \times bd \Rightarrow ad = bc$$

۲ ویژگی های (۲) و (۳) با طرفین - وسطین کردن، به سادگی نتیجه می شوند :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow da = cb \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow bc = ad \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

۳ ویژگی های ۵ و ۴ به صورت زیر با اضافه یا کم کردن عدد ۱ به دو طرف تناسب نتیجه می شوند :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

ویژگی های تفذیل نسبت در صورت و مخرج را خودتان اثبات کنید.

۴ اثبات ویژگی ۶ :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk, c = dk \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

به همین ترتیب می توان تعمیم این ویژگی را هم اثبات کرد.