۳

فصل سوم

چند ضلعی ها

پل طبیعت / تهران

همه هنرمندان و معماران با هر سبک و در هر رشته به دنبال آن هستند که دیدگاه‌های خود را از زندگی و جهان اطراف درآنچه خلق می‌کنند و می‌سازند به نوعی به نمایش بگذارند. هندسه و به‌ویژه چندضلعی‌ها یکی از ابزارهای مهمی هستند که به کمک آنها می‌توان این آثار را پدید آورد.

درس اول

چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آنها

با پاره‌خط قبلاً آشنا شده‌اید. مطابق شکل زیر در پاره‌خط AB، نقطه‌های A و B را دو سر پاره‌خط یا نقاط انتهایی پاره‌خط می‌نامند.

به شکل‌های روبه‌رو توجه کنید. هر شکل از تعدادی پاره‌خط تشکیل شده است؛ اما نقاط مشترک پاره‌خط‌ها در همهٔ شکل‌ها با هم یکسان نیستند.

در شکل (۳) دو پاره‌خط AE و FC یکدیگر را در نقطه‌ای به‌جز نقاط انتهایی‌شان قطع کرده‌اند. در شکل (۴) پاره‌خط DE فقط در یک انتها بعضی پاره‌خط‌ها را قطع کرده و در انتهای دیگر هیچ پاره‌خطی را قطع نکرده است. اما در شکل‌های (۱) و (۲) هر پاره‌خط فقط دو پاره‌خط دیگر را آن هم در نقاط انتهایی قطع کرده است. چنین شکل‌های بسته‌ای را که از اجتماع پاره‌خط‌های متوالی هم تشکیل شده‌است، **چند ضلعی** می‌نامند.

در تمام این فصل شکل‌ها در صفحه درنظر گرفته می‌شوند.

تعریف: nضلعی شکلی است شامل n $(n \geq ۳)$ پاره‌خط متوالی که:

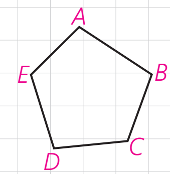
۱) هر پاره‌خط، دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.

۲) هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند.

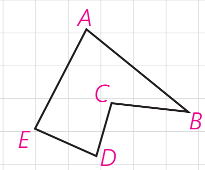
هر یک از این پاره‌خط‌ها یک ضلعِ چند ضلعی است.

هر دو ضلع چندضلعی را که در یک انتها مشترک‌اند، دو ضلع مجاور و نقطهٔ مشترک آن دو را رأس می‌نامند. هر دو زاویهٔ چندضلعی را که هر دو در یک ضلعِ چندضلعی مشترک‌اند، دو زاویهٔ مجاور به آن ضلع در چندضلعی می‌نامند. مانند $\angle A$ و $\angle B$ در شکل‌های (۱) و (۲)

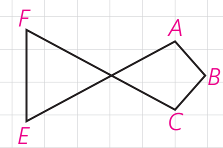
کدام یک از شکل‌های مقابل چند ضلعی است و تعداد ضلع‌ها و رأس‌های آن چند تاست؟ برخی ضلع‌های مجاور هم و غیر مجاور هم را مشخص کنید.



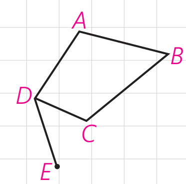
(۱)



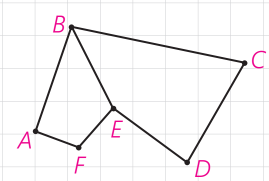
(۲)

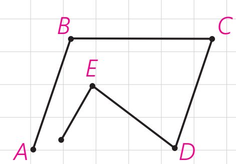


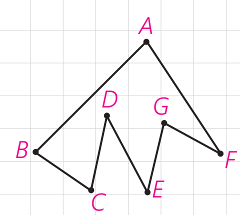
(۳)



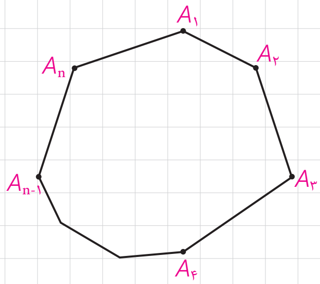
(۴)







قطر در چندضلعی‌ها



در هر n ضلعی، هر پاره‌خط را که دو انتهای آن، دو رأس غیرمجاور باشند، قطر می‌نامند.

یک چهار ضلعی چند قطر دارد؟

n ضلعی $A_1A_2\dots A_n$ را درنظر می‌گیریم. از رأس A_1، .... قطر می‌توان رسم کرد.
با توجه به اینکه n رأس داریم، آیا می‌توان گفت تعداد قطرها در n ضلعی $n(n-3)$ است؟

با این فرمول، مستطیل چند قطر دارد؟

آیا جواب به‌دست آمده درست است؟

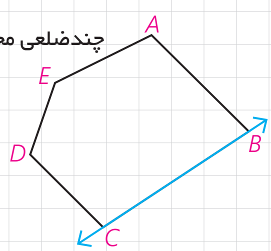
با چه تغییری در این فرمول به فرمول درست محاسبهٔ قطرها می‌رسیم؟ چرا این تغییر لازم است؟

در هر n ضلعی تعداد قطرها $\frac{n(n-3)}{\dots\dots}$ است.

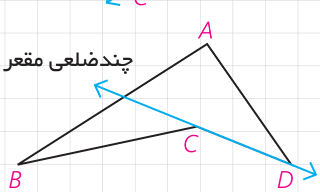
کار در کلاس

n نقطه که هیچ سه‌تای آنها روی یک خط واقع نیستند، مفروض‌اند. با توجه به استدلالی که در محاسبهٔ تعداد قطرهای nضلعی به‌کار برده‌اید، نشان دهید از هر نقطه به نقاط دیگر .... پاره‌خط رسم می‌شود. بنابراین، این n نقطه را با .... پاره‌خط می‌توان به هم متصل کرد. چه رابطه‌ای بین این تعداد پاره‌خط و مجموع تعداد قطرها و ضلع‌ها در n ضلعی وجود دارد؟

چندضلعی محدب



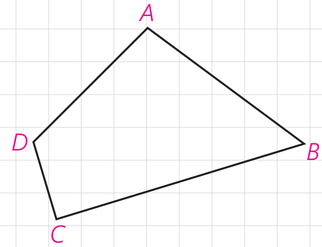
چندضلعی مقعر



تعریف: n ضلعی را محدب گوییم؛ هرگاه با درنظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن، بقیهٔ نقاط چندضلعی در یک طرف آن خط واقع شوند.

هر «چندضلعی» را که محدب نباشد، مقعر می‌نامند.

چهارضلعی‌های مهم و ویژگی‌هایی از آنها



در چهار ضلعی ABCD در شکل، دو ضلع AB و CD، همچنین دو ضلع AD و BC را ضلع‌های مقابل می‌نامند. در چهارضلعی هر دو ضلع غیرمجاور را دو ضلع مقابل می‌نامند.

ابتدا تعریف چهارضلعی‌های مهم را بیان می‌کنیم.

تعریف‌ها:

۱ــ متوازی‌الاضلاع چهارضلعی‌ای است که، هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند.

۲ــ مستطیل چهارضلعی‌ای است که، همهٔ زاویه‌های آن قائمه باشند.

۳ــ لوزی چهارضلعی‌ای است که، هر چهار ضلع آن هم‌اندازه باشند.

۴ــ مربع چهارضلعی‌ای است که هر چهار ضلع آن هم‌اندازه و حداقل یک زاویهٔ آن قائمه باشد.

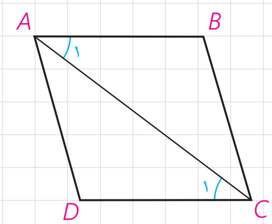
کار در کلاس

با توجه به تعریف‌های بالا درستی هریک از عبارت‌های زیر را توجیه کنید :

الف) مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

ب) اگر در متوازی‌الاضلاع یک زاویه قائمه باشد، مستطیل است؛ چرا؟

پ) لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.



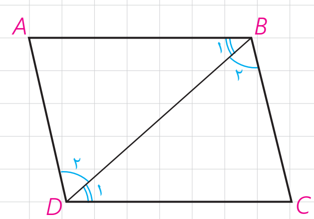
در لوزی ABCD قطر AC را رسم می‌کنیم. دو مثلث ABC و ADC به حالت ______ هم‌نهشت‌اند. بنابراین دو زاویهٔ ______ و ______ هم‌اندازه‌اند. در نتیجه دو ضلع AB و CD موازی‌اند. به همین ترتیب دو ضلع مقابل BC و AD نیز موازی‌اند. یعنی لوزی متوازی‌الاضلاع است.

بنابراین، لوزی متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن هم‌اندازه باشند.

ت) مربع یک متوازی‌الاضلاع است.

ویژگی‌هایی از متوازی‌الاضلاع

فعالیت ۱



متوازی‌الاضلاع ABCD را درنظر بگیرید و قطر BD را رسم کنید. از موازی بودن ضلع‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

دو مثلث ABD و CDB به حالت ______ هم‌نهشت‌اند.

در نتیجه، ______ = AD و ______ = AB.

بنابراین قضیهٔ زیر ثابت شده است؛

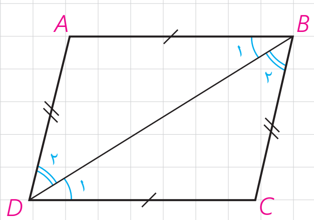
قضیهٔ ۱: در هر متوازی‌الاضلاع هر دو ضلع مقابل هم اندازه‌اند.

کاردرکلاس

در فعالیت (۱) مشاهده کردیم که وقتی در هر متوازی‌الاضلاع $ABCD$ یک قطر مثلاً قطر BD را رسم می‌کنیم. دو مثلث هم‌نهشت ABD و CDB پدید می‌آیند. حال پرسش این است، اگر در یک چهارضلعی $ABCD$ قطر BD را رسم کنیم و ΔABD و ΔCDB هم‌نهشت باشند، آیا چهارضلعی $ABCD$ همواره متوازی‌الاضلاع است؟

اگر چنین است، آن را ثابت کنید و اگر نادرست است، مثال نقض بیاورید.

عکس قضیهٔ ۱: اگر در یک چهارضلعی، ضلع های مقابل دوبه‌دو هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

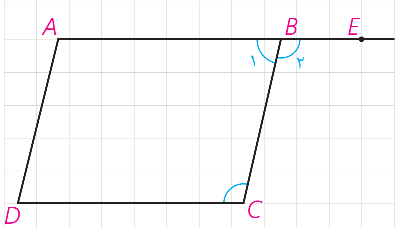


در چهارضلعی $ABCD$ قطر BD را رسم می‌کنیم. به حالت ______، $\Delta ABD \cong \Delta CDB$. از هم‌نهشتی این دو مثلث نتیجه می‌گیریم، اندازهٔ $\angle B_1$ برابر اندازهٔ ______ است.

بنابراین ضلع AB موازی ضلع ______ است. از چه قضیه‌ای آن را نتیجه گرفته‌اید؟

موازی بودن دو ضلع دیگر یعنی ضلع‌های AD و BC را چگونه نتیجه می‌گیرید؟
بنابراین چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

فعالیت ۲



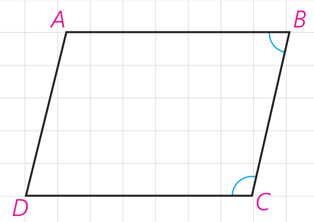
چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

با توجه به شکل، $\angle B_2 = \angle C$ است؛ چرا؟ $\angle B_1$ و $\angle B_2$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ بنابراین $\angle B_1$ و $\angle C$ ______ می‌باشند.

بنابراین قضیهٔ زیر ثابت شده است؛

قضیهٔ ۲: در متوازی‌الاضلاع هر دو زاویهٔ مجاور مکمل‌اند.

عکس قضیهٔ ۲: هر چهارضلعی که هر دو زاویهٔ مجاور آن مکمل باشند، متوازی‌الاضلاع است.

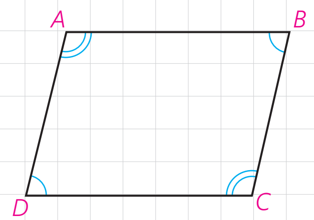


در چهارضلعی ABCD، دو زاویهٔ $\angle B$ و $\angle C$ با هم مکمل‌اند. در این صورت ضلع AB موازی ضلع ______ است.
به همین ترتیب دو زاویهٔ $\angle B$ و $\angle A$ نیز مکمل‌اند. در نتیجه، ضلع AD موازی ضلع ______ است؛ بنابراین چهارضلعی ABCD ______ است.

قضیهٔ ۳: در هر متوازی‌الاضلاع، هر دو زاویهٔ مقابل هم‌اندازه‌اند.

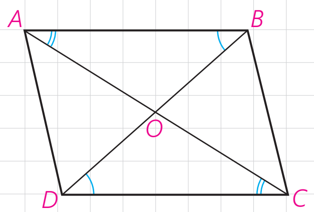
با توجه به قضیهٔ قبل آن را ثابت کنید.
می‌توانید از فعالیت (۱) نیز استفاده کنید.

عکس قضیهٔ ۳: اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویهٔ مقابل هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



فرض کنیم در چهارضلعی ABCD هر دو زاویهٔ مقابل هم‌اندازه باشند. یعنی $\angle B$ و $\angle D$ و همچنین $\angle C$ و $\angle A$ هم‌اندازه‌اند. می‌دانیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰° است. چگونه به کمک آن ثابت می‌کنید هر دو زاویهٔ مجاور مثلاً $\angle B$ و $\angle C$ مکمل‌اند؟
بنابراین به کمک عکس قضیهٔ ۲ ثابت کرده‌اید چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

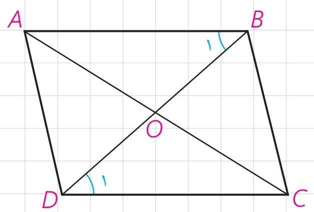
فعالیت ۳



در متوازی‌الاضلاع ABCD، دو قطر AC و BD را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن دو را O می‌نامیم. $\Delta AOB \cong \Delta COD$. چرا؟
بنابراین، ______ = OB و ______ = OA. در نتیجه؛

قضیهٔ ۴: در هر متوازی‌الاضلاع قطرها ______ .

فعالیت ۴



فرض کنید در یک چهارضلعی دو قطر منصف یکدیگر باشند. چگونه نشان می‌دهید این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است؟

نقطهٔ تقاطع دو قطر را O می‌نامیم. $\Delta AOB \cong \Delta OCD$. چرا؟

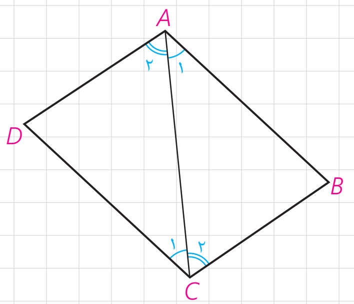
اندازهٔ $\angle B_1$ برابر اندازهٔ .... است. در نتیجه، ضلع AB موازی ضلع .... است. دو مثلث دیگر را درنظر بگیرید و به طور مشابه نشان دهید دو ضلع دیگر نیز موازی‌اند.

بنابراین؛

عکس قضیهٔ ۴: هر چهار ضلعی که قطرهای آن منصف یکدیگر باشند، متوازی‌الاضلاع است.

فعالیت ۵

فرض کنید در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل موازی و هم‌اندازه باشند. مثلاً در چهارضلعی ABCD، ضلع‌های AB و CD هم‌اندازه و موازی‌اند. قطر AC را رسم می‌کنیم.



اندازهٔ $\angle A_1$ با اندازهٔ ______ برابر است.

بنابراین، بنابر حالت هم‌نهشتی ______ ، $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.

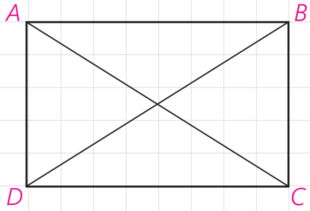
در نتیجه اندازهٔ $\angle A_2$ برابر اندازهٔ زاویهٔ ______ است که از آن نتیجه می‌گیرید ضلع AD موازی ضلع ______ است. بنابراین، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

یعنی؛

هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن هم‌اندازه و موازی باشند، متوازی‌الاضلاع است.

ویژگی‌هایی از مستطیل و لوزی

کدام ویژگی از مستطیل است که در هر متوازی‌الاضلاعی که مستطیل نباشد، برقرار نیست؟ در مورد مربع چطور؟



در مستطیل ABCD، دو قطر را رسم می‌کنیم. از هم‌نهشتی کدام دو مثلث می‌توان نتیجه گرفت AC=BD ؟ این هم‌نهشتی را نشان دهید.

بنابراین در هر مستطیل قطرها ______ .

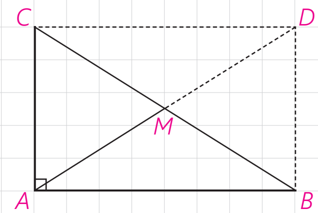
اگر دو قطر یک چهارضلعی هم‌اندازه باشند، آیا می‌توان نتیجه گرفت آن چهارضلعی مستطیل است؟

اگر این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، چطور؟ آن را با دلیل بیان کنید.

فعالیت ۶

ویژگی مهمی در مثلث قائم‌الزاویه

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را که در آن $\angle A$ قائمه است و AM میانهٔ وارد بر وتر است درنظر می‌گیریم.



روی نیم‌خط AM نقطه D را چنان در نظر می‌گیریم که $AM = MD$.

چرا چهارضلعی ABDC متوازی‌الاضلاع است؟

چرا این چهارضلعی مستطیل است؟

در مورد قطرها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

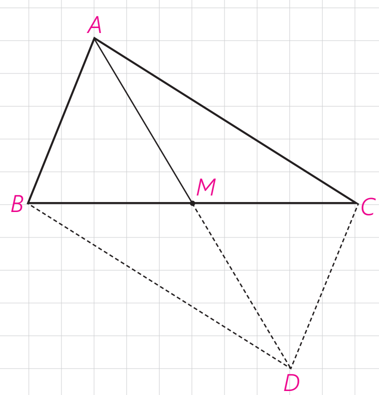
اندازهٔ AM چه رابطه‌ای با اندازهٔ BC دارد؟ آن را بیان کنید.

در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر ______ اندازهٔ وتر است.

می‌توانیم عکس این ویژگی را نیز ثابت کنیم.

اگر در مثلثی اندازهٔ میانهٔ وارد بر یک ضلع، نصف اندازهٔ آن ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

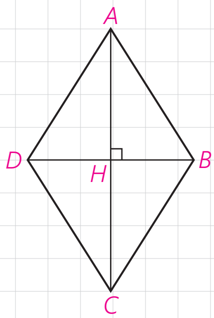
در مثلث ABC، AM میانه وارد بر ضلع BC است و $AM = \frac{BC}{۲}$. روی نیم‌خط AM نقطهٔ D را چنان در نظر می‌گیریم که $MD = AM$.



آیا می‌توانید نتیجه بگیرید $AD = BC$ و قطرهای AD و BC منصف یکدیگرند؟ چگونه نتیجه می‌گیرید $\angle A$ قائمه است؟

ویژگی‌هایی که فقط در لوزی برقرارند

آیا می‌توانید یک ویژگی از لوزی را بیان کنید که در هر متوازی‌الاضلاع یا هر مستطیل، که لوزی نیست، برقرار نباشد؟



قطرهای لوزی ABCD رارسم می‌کنیم. چون لوزی متوازی‌الاضلاع است، قطرها منصف یکدیگرند. ΔABD چه نوع مثلثی است؟

نقطهٔ تلاقی دو قطر را H می‌نامیم، در مثلث ABD ، AH چه پاره‌خطی است؟

چرا پاره‌خط AH بر قطر BD عمود است و روی نیمساز $\angle A$ است؟

بنابراین؛

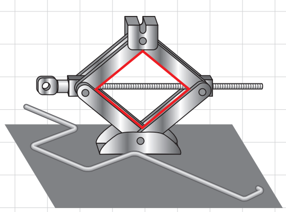
> در هر لوزی قطرها ______ یکدیگرند و قطرها روی ______ زاویه‌ها می‌باشند.

کاردرکلاس

۱ــ نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است.

۲ــ نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که در آن لااقل یک قطر روی نیمساز یک زاویهٔ آن باشد، لوزی است.

اکنون با توجه به ویژگی‌های مستطیل و لوزی نشان دهید در چه صورت مستطیل یا لوزی، مربع است.



در شکل یک جک اتومبیل را می‌بینید. چهار بازوی آن یک لوزی تشکیل می‌دهند. آیا حالتی از جک وجود دارد که به شکل مربع درآید؟

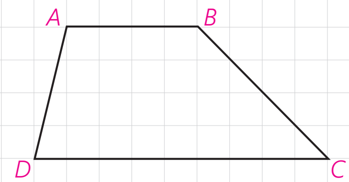
اگر دو بازوی بالا با هم و دو بازوی پایین نیز باهم اندازه‌های مساوی داشته باشند، اما شکل جک لوزی نباشد، هنگام بستهشدن جک وقتی بخواهیم دو بازوی بالا روی دو بازوی پایین قرار گیرند چه مشکلی ایجاد می‌شود؟

ذوزنقه

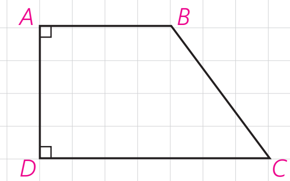
ذوزنقه چهارضلعی‌ای است که با چهارضلعی‌هایی که قبلاً بررسی کردیم، کمی متفاوت است.

> **تعریف:** ذوزنقه چهارضلعی‌ای است که فقط دو ضلع آن موازی باشند.

هر یک از دو ضلع AB و CD را که موازی‌اند، **قاعده** و هر یک از دو ضلع غیرموازی را **ساق** می‌نامند. از موازی بودن قاعده‌های AB و CD و قاطع‌های BC و AD در مورد زاویه‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



زاویه‌های $\angle A$ و $\angle D$ ـــــــــــــــ هستند. همچنین زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ ـــــــــــــــ هستند.

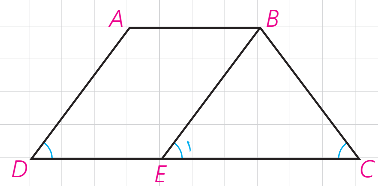


اگر در یک ذوزنقه اندازه‌های دو ساق برابر باشند، آن را ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌نامند.

هرگاه در یک ذوزنقه یک ساق بر یکی از قاعده‌ها عمود باشد، مسلماً برقاعدهٔ دیگر نیز عمود است؛ چرا؟

در این صورت ذوزنقه را قائم‌الزاویه می‌نامند.

فعالیت ۷



ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD را که در آن AD = BC است، درنظر می‌گیریم.
از رأس B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعدهٔ DC را در E قطع کند. در این صورت چهارضلعی ABED ـــــــــــــــ است.

چرا دو زاویهٔ $\angle D$ و $\angle E_1$ هم اندازه‌اند؟

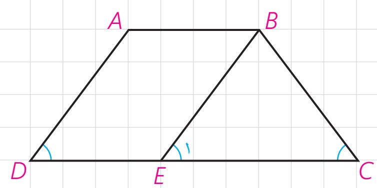
BC = BE چرا؟

بنابراین اندازهٔ $\angle E_1$ برابر اندازهٔ ـــــــــــــــ است.

اکنون $\angle C$ و $\angle D$ هم‌اندازه‌اند. چرا؟ بنابراین :

در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم‌اندازه‌اند.

آیا عکس این ویژگی نیز درست است؟



فرض کنید در ذوزنقه ABCD، دو زاویهٔ $\angle C$ و $\angle D$ هم‌اندازه‌اند. از B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعده CD را در E قطع کند. از اینکه $\angle D$ و $\angle E_1$ نیز هم‌اندازه‌اند، پس دو زاویهٔ ـــــــــــــــ هم‌اندازه‌اند و در نتیجه BC = BE.
چون ABED متوازی‌الاضلاع است، پس AD = BE. در نتیجه، AD = BC است؛ بنابراین :

اگر در یک ذوزنقه دو زاویهٔ مجاور به یک قاعده هم‌اندازه باشند، ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

به کمک ویژگی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، ویژگی زیر به سادگی ثابت می‌شود. آن را ثابت کنید.

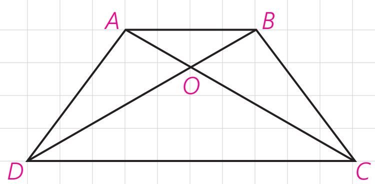
در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطرها اندازه‌های مساوی دارند و بر عکس.

فعالیت ۸

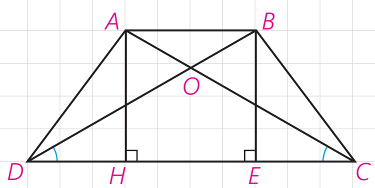
در ذوزنقهٔ ABCD :

$AD = BC$. از هم‌نهشتی کدام دو مثلث نتیجه می‌گیرید $AC = BD$ است؟

اما اثبات عکس آن نیاز به تفکر بیشتر دارد. فرض کنیم $DB = AC$. آیا می‌توانید در شکل مقابل دو مثلث هم‌نهشت پیدا کنید که از آن $AD = BC$ یا مساوی بودن اندازه‌های دو زاویهٔ مجاور به قاعده نتیجه شود؟



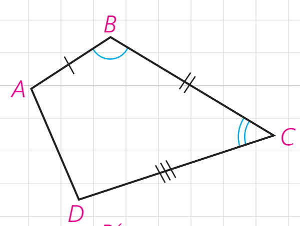
با کمی دقت مشاهده می‌کنید چنین دو مثلثی ظاهراً وجود ندارند؛ اما یک ویژگی در مسئله هست که از آن هنوز استفاده نکرده‌ایم. دو قاعدهٔ ذوزنقه موازی‌اند یا رأس‌های A و B از قاعدهٔ CD به یک فاصله‌اند. با رسم دو ارتفاع AH و BE و هم‌نهشتی دو مثلث ΔAHC و ΔBED تساوی اندازه‌های دو زاویه را نتیجه بگیرید. به کمک آنها هم‌نهشتی دو مثلث ΔADC و ΔBCD نتیجه می‌شود و به حل مسئله منجر خواهد شد.

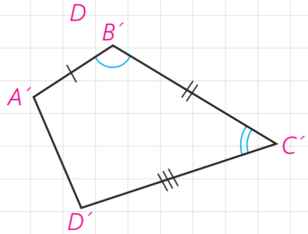


تمرین

۱ـ در کدام n ضلعی تعداد قطرها و ضلع‌ها برابر است؟

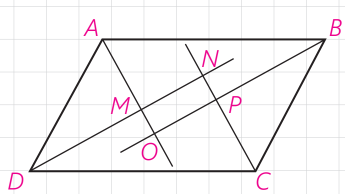
۲ـ در دو چهارضلعی مقابل $AB = A'B'$ و $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ است. چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟





اگر $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ و $\angle D = \angle D'$، در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

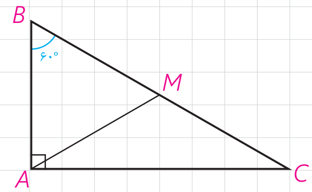
۳ـ از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی MNPQ پدید آمده است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است.



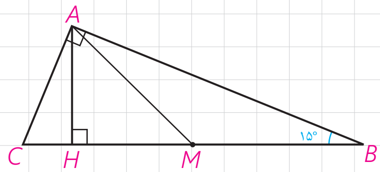
۴ــ مثلث قائم‌الزاویهٔ $\triangle ABC$ را که در آن $\angle A$ قائمه و اندازهٔ $\angle C$ برابر ۳۰° است، در نظر می‌گیریم. میانهٔ وارد بر وتر را رسم کنید. مثلث‌های AMC و AMB چگونه مثلث‌هایی هستند؟ نشان دهید $AB = \frac{BC}{۲}$ یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر اندازهٔ یک زاویه ۳۰° باشد، اندازهٔ ضلع مقابل آن نصف اندازهٔ وتر است.

سپس با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث نشان دهید، $AC = \frac{\sqrt{۳}}{۲}BC$.
یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه ۶۰° باشد، اندازهٔ ضلع مقابل آن $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ اندازهٔ وتر است.

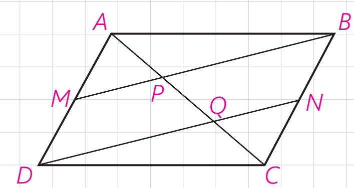
اکنون مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازهٔ یک زاویهٔ آن ۴۵° باشد و نشان دهید که اندازهٔ هر ضلع زاویهٔ قائمه در آن $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ اندازهٔ وتر است.



۵ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ، اندازهٔ زاویهٔ B برابر ۱۵° است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ اندازهٔ وتر است.



۶ــ در متوازی‌الاضلاع ABCD ، M و N به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خط‌های MB و DN موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$.



۷ــ ثابت کنید اگر وسط‌های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.

این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشته‌باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟

چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟

درس دوم

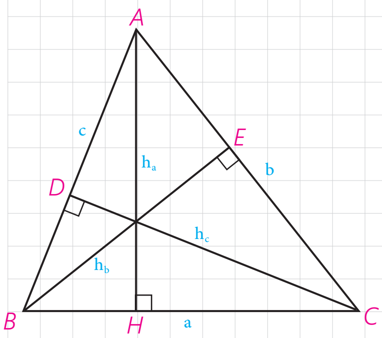
مساحت و کاربردهای آن

یادآوری

در سال‌های قبل با مساحت چهارضلعی‌های مهم آشنا شده‌اید.

۱ــ اگر اندازهٔ یک ضلع مربع a باشد، $S = a^{۲}$ مساحت آن است.

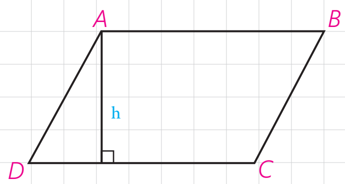
۲ــ اگر اندازهٔ یک ضلع مثلث a و اندازهٔ ارتفاع نظیر آن ضلع h_a باشد، آنگاه $S = \frac{۱}{۲}ah_a$



بنابراین در هر مثلث ABC اگر اندازهٔ ضلع‌های BC، AC و AB را به ترتیب به a، b و c و اندازه‌های ارتفاع‌های نظیر آنها را به ترتیب به h_a، h_b و h_c نشان دهیم آن‌گاه،

$$\boxed{۲S = ah_a = bh_b = ch_c}$$

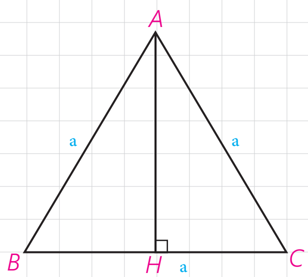
۳ــ اگر اندازهٔ یک ضلع متوازی‌الاضلاع a و اندازهٔ ارتفاع نظیر آن h باشد، $S = ah$.



۴ــ اگر اندازه‌های دو قطر لوزی m و n باشند، $S = \frac{۱}{۲}mn$.

۵ــ اگر اندازه‌های دو قاعدهٔ یک ذوزنقه a و b و اندازهٔ ارتفاع آن h باشد. $S = \frac{(a+b)h}{۲}$.

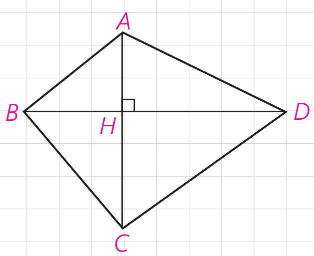
کاردرکلاس



فرض کنیم اندازهٔ هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر a باشد، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ارتفاع AH میانه نیز است؛ چرا؟

به کمک قضیهٔ فیثاغورس نشان دهید $AH = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و $S = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$.

فعالیت



در چهارضلعی ABCD دو قطر AC و DB برهم عمودند.

$S_{ADB} =$ ....

$S_{DBC} =$ ....

با جمع این دو مساحت داریم،

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}BD(...+...) = \frac{۱}{۲}BD...$$

بنابراین؛

در هر چهارضلعی که دو قطر آن برهم عمود باشند، مساحت برابر است با، ________ .

کاربردهایی از مساحت

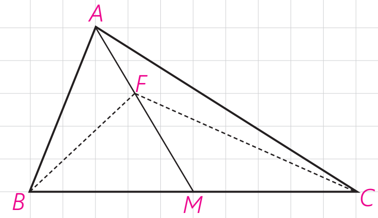
قبلاً با کاربرد مساحت در اثبات قضیهٔ تالس آشنا شدید. بعضی رابطه‌ها و ویژگی‌هایی را که با آن آشنا شده‌اید یادآوری می‌کنیم.

ویژگی ۱. در دو مثلث اگر اندازهٔ قاعده‌ها برابر باشند، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازهٔ ارتفاع‌های متناظر این قاعده‌هاست.

$$\frac{S}{S'} = \frac{h}{h'}$$

ویژگی ۲. در دو مثلث که اندازهٔ دو ارتفاع برابر باشد، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازه‌های قاعده‌های متناظر این دو ارتفاع است.

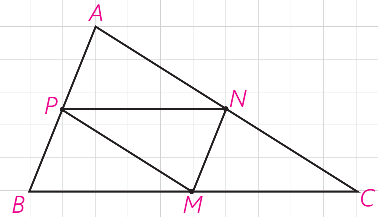
کاردرکلاس



نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

اگر F هر نقطه‌ای روی میانهٔ AM به‌جز نقطهٔ M باشد آیا، $S_{FBM} = S_{FMC}$ است؟ چرا؟

فعالیت



M و N و P وسط‌های سه ضلع مثلث ABC مطابق شکل‌اند.

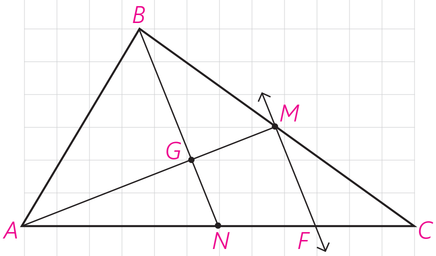
پاره‌خط PN موازی ضلع ________ است و پاره‌خط PM موازی ضلع ________ است؛ چرا؟

بنابراین چهارضلعی PNCM ________ است، در نتیجه، $\Delta MNP \cong \Delta NMC$؛ چرا؟

به همین ترتیب برای بقیهٔ مثلث‌ها نیز می‌توان نشان داد که دو به دو هم‌نهشت‌اند.

$$\Delta APN \cong \Delta MNP \cong \Delta BPM$$

اگر وسط‌های سه ضلع هر مثلث را به هم متصل کنیم، چهار مثلث هم‌نهشت و در نتیجه با مساحت‌های برابر پدید می‌آید.



فعالیت

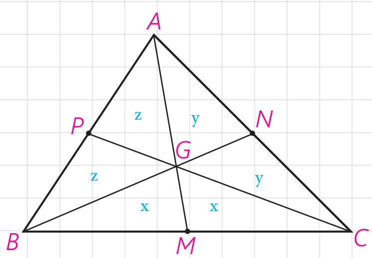
در این فعالیت ویژگی مهمی از سه میانهٔ مثلث را ثابت می‌کنید.

دو میانهٔ AM و BN از ΔABC را رسم می‌کنیم. یکدیگر را در نقطهٔ G درون مثلث قطع می‌کنند. از M وسط ضلع BC خطی را موازی میانهٔ BN رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در F قطع کند. چرا F وسط NC است؟ N وسط ضلع AC است؛ بنابراین، $AF = ۳NF$. چرا؟ در نتیجه، $AM = ۳GM$. چرا؟

بنابراین، $GM = \frac{۱}{۳}$..... و $AG = \frac{۲}{۳}$..... و G بین A و M است؛ در نتیجه G تنها نقطه‌ای روی نیم‌خط AM است که $AG = \frac{۲}{۳}AM$. مشابه آن ثابت می‌شود $BG = \frac{۲}{۳}BN$. پس برای هر دو میانهٔ دلخواه نقطهٔ G با این ویژگی به‌دست می‌آید در نتیجه هر سه میانه در G همرس‌اند.

به روش دیگر، می‌توانید از M به N وصل کنید و از تشابه دو مثلث GMN و GAB استفاده کنید؛ چون $AB=۲MN$ پس $AG=۲GM$ و $BG=۲GN$. اکنون می‌توانید مانند روش قبلی ادامه دهید.

سه میانهٔ هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث همرس‌اند؛ به طوری که فاصلهٔ این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{۱}{۳}$ اندازهٔ میانه نظیر این ضلع است، و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{۲}{۳}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر آن رأس است.



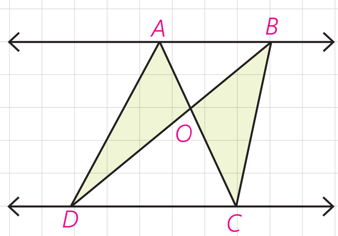
با رسم سه میانهٔ مثلث نشان دهید، سه میانهٔ مثلث آن را به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند. بنابر فعالیت قبلی $S_{BGM} = S_{MGC} = x$. چرا؟

به همین ترتیب برای بقیه برقرار است.

اکنون میانهٔ AM را درنظر بگیرید، $2z + x =$ ______ در نتیجه $y =$ ______ .

میانهٔ BN را درنظر بگیرید $2z + y =$ ______ در نتیجه، $z =$ ______ . پس، ______

ویژگی ۳. فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند؛ به‌طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند. می‌دانیم: $S_{ADC} = S_{BDC}$. چگونه از آن نتیجه می‌گیرید، $S_{OAD} = S_{OBC}$ ؟



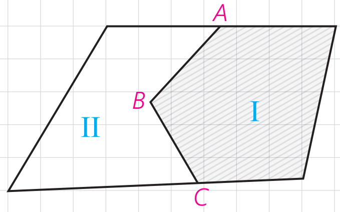
این ویژگی که در هر ذوزنقه نیز برقرار است، در حل مسائل کاربرد خوبی دارد.

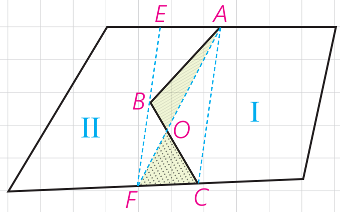
یک مسئله

در شکل دو مزرعهٔ I و II متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک ABC بین دو زمین خود را به یک پاره‌خط مستقیم تبدیل کنند به‌طوری که مساحت‌های زمین‌های آنها تغییر نکند. چگونه شما می‌توانید این کار را برای آنها انجام دهید؟

فکر اصلی این عمل براساس مسئلهٔ قبلی است.

از A به C متصل، و از B موازی خط AC رسم کنید تا دو مرز دیگر را در E و F قطع کند. اکنون نشان دهید این مرز مشترک جدید می‌تواند مرز AF باشد؛ چرا؟ البته می‌تواند مرز EC نیز باشد.



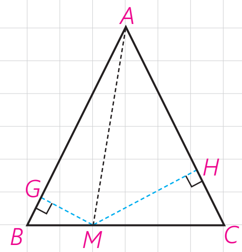


فعالیت

در مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB = AC$ است؛ نقطهٔ دلخواه M را روی ضلع BC بین B و C درنظر بگیرید. از M دو عمود MH و MG را به ترتیب بر دو ساق AC و AB رسم کنید. S_{AMC} و S_{AMB} را بنویسید.

مساحت مثلث ΔABC را نیز وقتی پاره‌خط AB یا AC قاعده باشند، بنویسید.

چه رابطه‌ای بین این مساحت‌ها وجود دارد؟ آن را بنویسید. از این رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



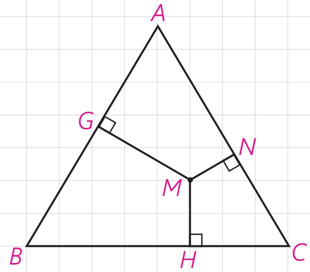
در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB=AC$ است، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده BC از .... برابر .... است.

به همین ترتیب نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC، قدرمطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه روی امتدادهای قاعدهٔ BC از خط‌های شامل دو ساق برابر اندازهٔ ارتفاع وارد بر ساق است.

فعالیت

نقطهٔ دلخواه M را درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به اندازهٔ a درنظر بگیرید. سپس از M سه عمود بر سه ضلع رسم کنید. از M به سه رأس مثلث ABC متصل کنید. مساحت‌های سه مثلث MBC ، MAC و MAB را محاسبه کنید. این مساحت‌ها با مساحت ΔABC چه رابطه‌ای دارند؟ آن را بنویسید. از آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

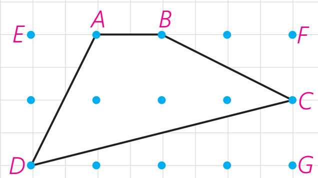
$MH + MN + MG =$ ....



مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر ....

اگر در یک مثلث متساوی‌الاضلاع فاصله‌های نقطهٔ M درون مثلث از سه ضلع، برابر ۲، ۴ و ۶ باشند. اندازهٔ ضلع مثلث را محاسبه کنید.

نقاط شبکه‌ای و مساحت



مطابق شکل نقطه‌ها روی خط‌های افقی و عمودی واقع‌اند؛ به‌طوری که فاصلهٔ هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی (عمودی) برابر واحد است. چنین نقاطی را نقاط شبکه‌ای و چندضلعی‌هایی مانند ABCD را که تمام رأس‌های آنها روی نقاط شبکه‌ای واقع‌اند، چندضلعی‌های شبکه‌ای می‌نامند.

نقاط شبکه‌ای روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را نقاط مرزی و نقاط شبکه‌ای درون چندضلعی‌ها را نقاط درونی شبکه‌ای برای چندضلعی شبکه‌ای می‌نامند.

به‌طور مثال در شکل بالا چهارضلعی ABCD یک چهارضلعی شبکه‌ای است که دارای ۴ نقطهٔ مرزی و ۳ نقطه درونی شبکه‌ای است.

در این چهارضلعی، شبکه‌ای با به کاربردن مساحت مثلث‌های قائم‌الزاویه و مستطیل نشان دهید مساحت چهارضلعی ABCD برابر ۴ واحد سطح است.
می‌توان نقاط شبکه‌ای را در دستگاه مختصات عمود بر هم $x'x$ و $y'y$ نیز به صورت زوج مرتب‌های (x, y) که x و y هر دو اعداد صحیح‌اند، نشان داد. x و y مختص‌های هر نقطه‌اند.

در چندضلعی‌های شبکه‌ای، تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای را با b و تعداد نقاط درونی شبکه‌ای را با i نشان می‌دهند. اکنون می‌خواهیم به‌طور شهودی رابطه‌ای بین مساحت چندضلعی شبکه‌ای و نقاط مرزی و درونی شبکه‌ای نظیر آن را پیدا کنیم.

فعالیت

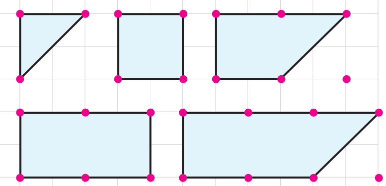
۱ــ یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطهٔ مرزی می‌تواند داشته باشد؟ چرا؟

۲ــ یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطهٔ درونی می‌تواند داشته باشد؟

۳ــ در تمام چندضلعی‌های شبکه‌ای زیر تعداد نقطه‌های درونی شبکه‌ای صفر است، یعنی $i = ۰$ و تعداد نقاط مرزی، .... ، $b = ۳، ۴، ۵$.

جدول زیر را با محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای کامل کنید.

i = ۰ ، b = ۳،۴،۵ ، ....

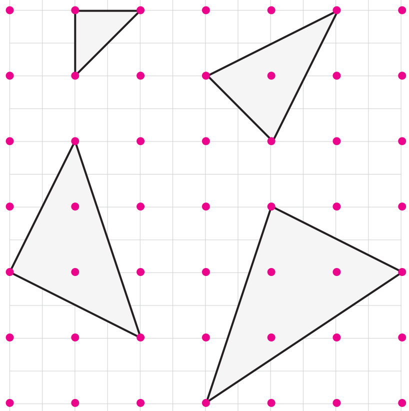


تعداد نقاط مرزی b	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مساحت	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$			

بین مساحت و تعداد نقاط مرزی چه رابطه‌ای وجود دارد؟

$$S=\frac{b}{....}-......+۰$$

۴ـ اکنون نقاط مرزی را ثابت نگه دارید و نقاط درونی را تغییر دهید. فرض کنید تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای ۳ = b باشند. با توجه به شکل‌ها جدول زیر را کامل کنید. (نتیجه‌گیری $S=\frac{b}{۲}-۱+۰$ را که در قسمت (۳) پیدا کرده‌اید درنظر داشته باشید.)



تعداد نقاط درونی i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$\frac{b}{۲}-۱$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	
S	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$				

با تکمیل جدول بالا و مقایسهٔ اعداد هر ستون تشخیص دهید که مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای با تعداد نقاط مرزی و درونی چه ارتباطی دارد. از این جدول نتیجه بگیرید b و i با چه ضریب‌هایی ظاهر می‌شوند.

$$\boxed{S=\frac{b}{....}-.......+.......}$$

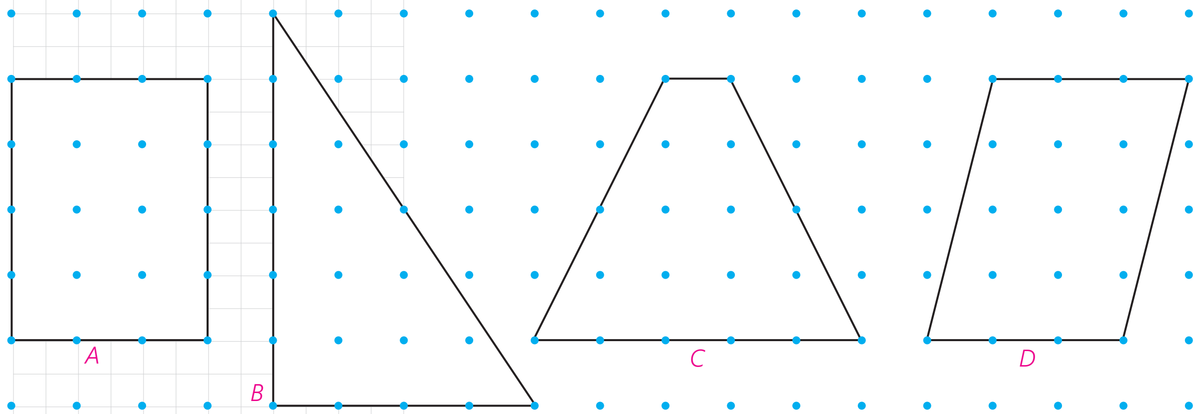
توجه داشته باشید که این فرمول را به‌طور شهودی پیدا کرده‌ایم. اثبات دقیق این فرمول در حالت کلی نیاز به مقدمات بیشتری دارد.

این فرمول به فرمول پیک معروف است که جرج الکساندر پیک (۱۹۴۳ــ ۱۸۵۹) آن را کشف کرد و از سال ۱۹۷۰ به‌طور گسترده‌ای در کتاب‌های هندسهٔ مقدماتی به‌کار برده شده است.

به کمک این فرمول می‌توانیم مساحت شکل‌های نامنظم هندسی را نیز به‌طور تقریبی پیدا کنیم.

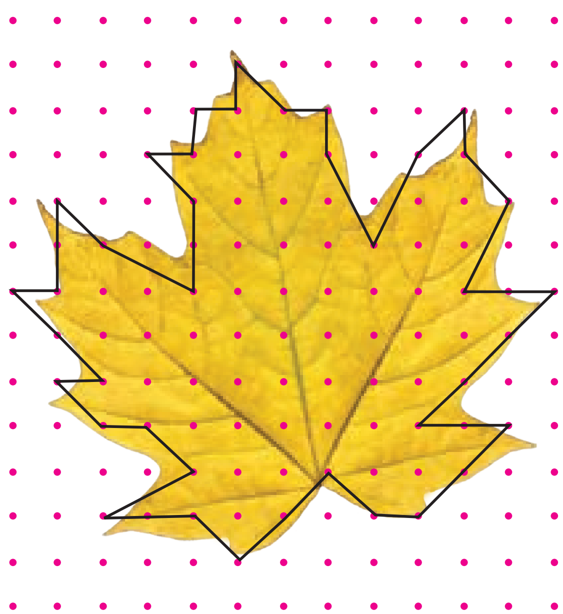
کار در کلاس

۱ــ چندضلعی‌های A، B، C و D را در شکل‌های زیر درنظر بگیرید. ابتدا به روش‌های هندسی که از قبل می‌دانید، مساحت آنها را محاسبه کنید؛ سپس با تعیین تعداد نقاط مرزی و درونی، جدول زیر را تکمیل و فرمول پیک را در آنها تحقیق کنید.



چند ضلعی	A	B	C	D
تعداد نقاط مرزی b				
تعداد نقاط درونی i				
مساحت				

کار در کلاس

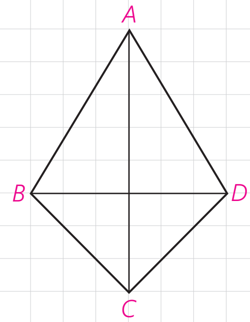


اگر فاصلهٔ نقطه‌های شبکه‌ای یک سانتی‌متر باشد، یک برگ درخت را روی یک صفحهٔ شطرنجی قرار دهید و با رسم آن مساحت آن را به‌طور تقریبی محاسبه کنید.

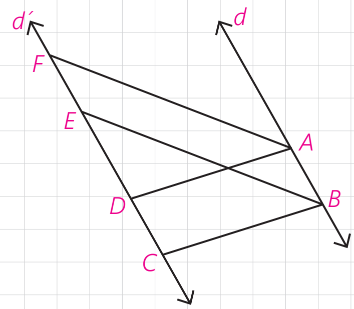
واضح است که با کوچک‌تر کردن واحد می‌توانیم مساحت را با تقریب بهتری محاسبه کنیم.

تمرین

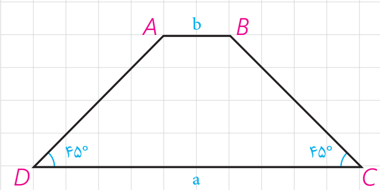
۱ــ در یک لوزی اندازهٔ هر ضلع $۲\sqrt{۱۰}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{۱}{۳}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.



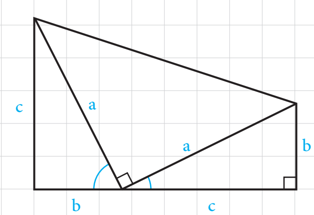
۲ــ در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل AB = AD و BC = CD است. آیا قطرهای این چهارضلعی برهم عمودانـد؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.



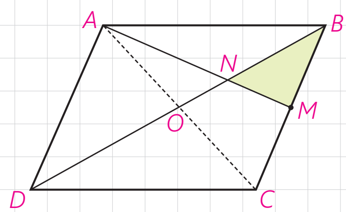
۳ــ در شکل دو خط d و d′ موازی‌اند و ABCD و ABEF هردو متوازی‌الاضلاع‌اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری برحسب S چقدر است؟



۴ــ در ذوزنقهٔ شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویهٔ مجاور به یک قاعده ۴۵° است. مساحت ذوزنقه را برحسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.

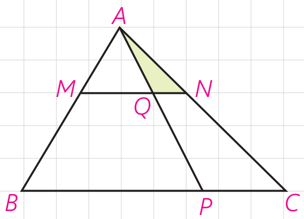


۵ــ مساحت ذوزنقهٔ مقابل را به‌دو طریق به‌دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟



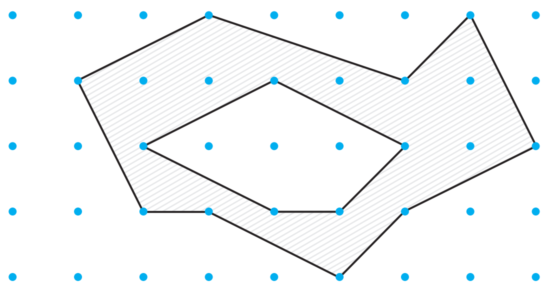
۶ــ در متوازی‌الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM قطر BD را در N قطع کرده‌است. نشان دهید :

$S_{BMN} = \frac{۱}{۱۲} S_{ABCD}$.



۷ــ در مثلث ABC، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}$. همچنین $\frac{PC}{PB}=\frac{1}{3}$ است. S_{AQN} و S_{MQPB} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

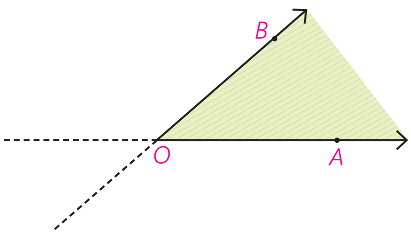
۸ــ با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید. (راهنمایی : مساحت چند ضلعی داخلی را از مساحت چند ضلعی بیرونی کم کنید.)



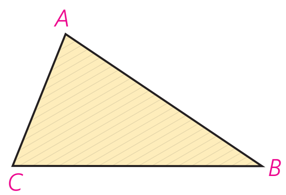
۹ــ یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحداند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

۱۰ــ مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه‌ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی‌های نظیر آن را نیز رسم کنید.

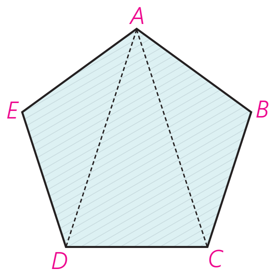
مساحت یکی از مفاهیم اساسی هندسه است.



وقتی با یک زاویهٔ هندسی $\angle AOB$ روبه‌رو هستیم که اجتماع دو نیم‌خط OA و OB است، قسمت سایه زده مطابق شکل را درون زاویهٔ $\angle AOB$ می‌نامند. به‌طور دقیق‌تر اشتراک طرفی از خط OA را که شامل B است با طرفی از خط OB که شامل A است، درون زاویهٔ $\angle AOB$ می‌نامند.



به همین ترتیب اشتراک درون زاویه‌های مثلث را درون مثلث می‌نامند. درون مثلث و روی مثلث را ناحیهٔ مثلثی می‌نامند.



سرانجام ناحیهٔ چندضلعی شکلی است که بتوان آن را به‌صورت اجتماع تعداد متناهی ناحیه‌های مثلثی تبدیل کرد به‌طوری که اگر دو ناحیهٔ مثلثی اشتراک داشته باشند، این اشتراک روی ضلعی از هردو یا رأسی از هردو باشد. به هر ناحیهٔ چندضلعی عددی حقیقی و مثبت نظیر می‌کنیم که مساحت آن نامیده می‌شود.

فرض کنیم A هر ناحیهٔ چندضلعی باشد. عددی حقیقی و مثبت به A نظیر می‌کنیم که آن را مساحت A می‌نامیم و با $S(A)$ نشان می‌دهیم که شرایط زیر در آن برقرار است:

۱ $S(A) > 0$

۲ اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، مساحت‌های آنها برابرند.

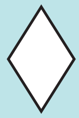
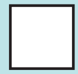
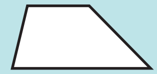
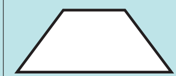
۳ اگر اشتراک دو ناحیهٔ چندضلعی فقط روی ضلع‌ها یا رأس‌ها باشد یا اصلاً اشتراک نداشته باشد، مساحت اجتماع آنها برابر مجموع مساحت‌های آنهاست.

۴ مساحت مستطیل با ضلع‌های به اندازه‌های a و b برابر $S = ab$ است.

برای سادگی به جای مساحت ناحیهٔ چندضلعی، همان مساحت چندضلعی را به‌کار می‌بریم.

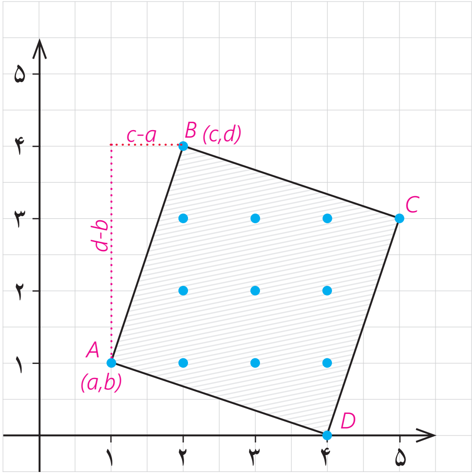
ویژگی‌های چهارضلعی‌های مهم در یک نگاه

جدول زیر را تکمیل کنید.

چهارضلعی / ویژگی	متوازی‌الاضلاع	مستطیل	لوزی	مربع	ذوزنقه	ذوزنقه متساوی‌الساقین
						
مساوی بودن اندازهٔ ضلع‌ها	هردو ضلع مقابل					
موازی بودن ضلع‌ها	هردو ضلع مقابل					
عمود بودن ضلع‌ها	به‌شرطی که مستطیل یا مربع باشد					کلاً وجود ندارد
زاویه‌های با اندازه‌های برابر						
زاویه‌های مکمل						
وضعیت قطرها نسبت به هم						اندازه‌های مساوی دارند

دربارهٔ چندضلعی‌های شبکه‌ای بیشتر بدانیم

نقطهٔ شبکه‌ای در دستگاه محورها، نقطه‌ای به مختصات $(x،y)$ است که x و y اعدادی صحیح‌اند. بنابر فرمول پیک مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای $S=\frac{b}{۲}+i-۱$ همواره عددی گویا و مثبت است. بنابراین اگر b زوج باشد، S عددی صحیح است.



در هر مربع شبکه‌ای مساحت صحیح و مثبت است، زیرا اگر $(a،b)$ و $(c،d)$ دو رأس مجاور مربع باشند، $S=(a-c)^۲+(b-d)^۲$ (چرا؟). که a، b، c و d صحیح‌اند. حال اگر مثلث متساوی‌الاضلاعی شبکه‌ای داشته باشیم، بنابر فرمول پیک مساحت آن عددی گویا و مثبت است. از طرف دیگر اگر m اندازهٔ هر ضلع آن باشد، $S=\frac{m^۲\sqrt{۳}}{۴}$ مساحت آن است.

اما، $m^۲=(a-c)^۲+(b-d)^۲$ ، که صحیح و مثبت است در نتیجه $\frac{m^۲\sqrt{۳}}{۴}$ عددی گنگ یا اصم است که متناقض با آن چیزی است که از فرمول پیک به دست می‌آید؛ بنابراین

> هیچ مثلث متساوی‌الاضلاعی وجود ندارد که مختصات تمام رأس‌های آن اعداد صحیح باشند.

در شکل زیر نقشهٔ ایران را مشاهده می‌کنید. می‌توانید با انتخاب واحدهای مناسب مساحت آن را به طور تقریبی پیدا کنید.