

ابوریحان بیرونی



ابوریحان محمد بن احمد بیرونی
در سال ۳۶۲ قمری / ۳۵۲ شمسی / ۹۷۳ میلادی در
بیرون خوارزم متولد شد.
در سال ۴۴۲ قمری / ۴۲۹ شمسی / ۱۰۵۰ میلادی
در خوارزم درگذشت.
ریاضیدان، منجم و دانشمند و یکی از مفاخر بی نظیر
دنیای علم بود.

ابوریحان بیرونی

کارهای ریاضی او عبارتند از:

۱. تعریف مفاهیم اولیه ریاضی برای دانش آموزان نجوم در کتاب التفهیم
 ۲. بررسی عمیق روی مسأله‌ی تثلیث زاویه
 ۳. محاسبه‌ی تقریبی وتر یک درجه و طول قوس بدون استفاده از قاعده‌ی انتگرال‌گیری
 ۴. محاسبه‌ی مجموع سری 2^k .
 ۵. دستور محاسبه‌ی طول قوس
 ۶. محاسبه‌ی تقریبی ضلع نه‌ضلعی منتظم به وسیله‌ی معادله‌ی درجه‌ی سه
- $$1. 3x. x^3$$

منابع

۱. بیرونی‌نامه، ابوالقاسم قربانی
۲. اطلس ریاضی صفحه‌ی ۵۷۹
۳. دائرةالمعارف فارسی جلد ۱ صفحه‌ی ۳۰
۴. دانشنامه‌ی جهان اسلام جلد ۵ صفحه‌ی ۱۶۳
۵. زندگی‌نامه‌ی ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی ابوالقاسم قربانی صفحه‌ی ۱۷۶
۶. زندگی‌نامه‌ی علمی دانشوران بنیاد دانشنامه‌ی بزرگ فارسی جلد ۱ صفحه‌ی ۲۷۹
۷. لغت‌نامه‌ی دهخدا تحت نام ابوریحان بیرونی

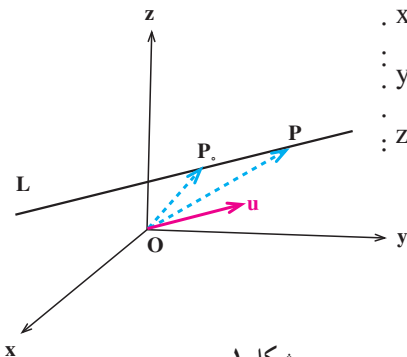
۲

معادلات خط و صفحه

۱.۲ خط در فضا

یک خط مانند L با نقطه معلومی چون $P_0(x_0, y_0, z_0)$ روی L و بردار ناصفر $u(p, q, r)$ موازی با L به طور منحصر به فرد مشخص می شود. اکنون می خواهیم معادله خط L را پیدا کنیم. برای این منظور فرض کنیم $P(x, y, z)$ نقطه دلخواهی باشد. در این صورت P روی خط L است اگر و فقط اگر بردارهای u و $\vec{P_0P}$ با هم موازی باشند (به شکل ۱ نگاه کنید) و این معادل است با این که عدد حقیقی t موجود باشد با این ویژگی که $\vec{P_0P} = t u$. اما $\vec{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ و در نتیجه $\vec{P_0P} = t u$ معادل است با این که $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(p, q, r)$. بنابراین نقطه $P(x, y, z)$ روی خط L است اگر و فقط اگر عدد حقیقی t موجود باشد که $x - x_0 = pt$ ، $y - y_0 = qt$ و $z - z_0 = rt$. در نتیجه معادله خط L که از نقطه معلومی چون $P_0(x_0, y_0, z_0)$ می گذرد و با بردار $u(p, q, r)$ موازی است عبارت است از:

$$\begin{cases} x - x_0 = pt \\ y - y_0 = qt \\ z - z_0 = rt \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$



شکل ۱

این شکل از معادلات خط به معادلات پارامتری خط موسوم اند، و در آن t پارامتر نامیده می‌شود. در واقع به ازای هر t ، یک نقطه از خط L به دست می‌آید و برعکس هر نقطه از خط L ، به ازای t ای در معادلات (۱) صدق می‌کند و لذا وقتی t در \mathbb{R} تغییر می‌کند تمام نقاط خط L به وجود می‌آید.

مثال ۱. معادلات پارامتری خطی که از نقطه $P_0 = (2, -4, 1)$ می‌گذرد و موازی با بردار

$$u = \left(3, \frac{1}{4}, -1\right)$$

است با توجه به آنچه در بالا ذکر کردیم به صورت زیر است

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 + \frac{1}{4}t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

اکنون می‌خواهیم شکل دیگری از معادله خط را پیدا کنیم. با توجه به معادلات پارامتری خط L که از نقطه $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد و موازی با بردار $u = (p, q, r)$ است و در (۱) به آن اشاره شد و با فرض این که p, q, r هر سه مخالف صفر باشند به دست می‌آوریم $\frac{y - y_0}{q} = t, \frac{x - x_0}{p} = t$

$$\text{و } \frac{z - z_0}{r} = t. \text{ لذا از حذف پارامتر } t \text{ به معادلات زیر می‌رسیم}$$

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}. \quad (2)$$

این معادلات را معادلات متقارن خط L می‌نامیم.

مثال ۲. معادلات متقارن خط L را که از دو نقطه $P_1 = (4, -6, 5)$ و $P_2 = (2, -3, 0)$

می‌گذرد پیدا می‌کنیم. برای این منظور توجه می‌کنیم که این خط موازی با بردار $P_2P_1 = (-2, 3, -5)$ می‌باشد و لذا می‌توانیم فرض کنیم $u = (-2, 3, -5)$. اکنون با توجه به این که $P_1 = (4, -6, 5)$ نقطه‌ای از این خط است، معادلات متقارن خط L به صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{x - 4}{-2} = \frac{y + 6}{3} = \frac{z - 5}{-5}.$$

تذکر. توجه می‌کنیم که در محاسبه معادلات متقارن یک خط فرض کردیم که p ، q و r هر سه مخالف صفر هستند. اکنون اگر یکی از p ، q یا r صفر باشد، مثلاً $p = 0$ ، معادلات پارامتری خط به صورت

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + qt, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = z_0 + rt \end{cases}$$

تبدیل خواهد شد و لذا معادلات متقارن خط در این حالت به صورت زیر است

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

در حالات دیگر نیز در مورد صفر شدن یکی یا دو تا از p ، q یا r از روی معادلات پارامتری می‌توان معادلات متقارن را به دست آورد.

مثال ۳. می‌خواهیم معادلات متقارن خطی را که از نقطه $P_1 = (-2, -2, 1)$ می‌گذرد و موازی با بردار $u = (0, 2, -3)$ است به دست آوریم. با توجه به آنچه در بالا اشاره کردیم این معادلات به صورت زیر است

$$x = -2, \quad \frac{y + 2}{2} = \frac{z - 1}{-3}$$

مثال ۴. می‌خواهیم معادلات متقارن خطی را که از دو نقطه $P_1 = (2, 3, -1)$ و $P_2 = (2, 3, 4)$

می‌گذرد به دست آوریم. برای این منظور توجه می‌کنیم که این خط موازی با بردار $u = P_2 P_1 = (0, 0, 5)$ می‌باشد و چون از نقطه P_1 نیز می‌گذرد، لذا معادلات متقارن آن به صورت زیر خواهد بود

$$x = 2, \quad y = 3.$$

فاصله یک نقطه از یک خط

می‌خواهیم فاصله نقطه مفروض P را که خارج خط L قرار دارد از آن پیدا کنیم. قضیه زیر برای این منظور کارساز است.

قضیه ۱. فرض کنیم L خطی باشد که با بردار غیر صفر u موازی است و P را نقطه‌ای

می‌گیریم که خارج (یا روی) L قرار دارد. در این صورت فاصله P از L ، یعنی D ، برابر است با

$$D = \frac{|\mathbf{u} \times \vec{P_0P}|}{|\mathbf{u}|},$$

که در آن P_0 نقطه دلخواهی روی L است.

انبات. فرض کنیم θ زاویه بین بردارهای \mathbf{u} و $\vec{P_0P}$ باشد، پس $0 \leq \theta \leq \pi$.

اگر $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، آنگاه با توجه به شکل ۲ داریم $\sin \theta = \frac{D}{|\vec{P_0P}|}$ و لذا $D = |\vec{P_0P}| \sin \theta$.

توجه می‌کنیم که اگر $\theta = 0$ یا $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، مجدداً تساوی اخیر برقرار است.

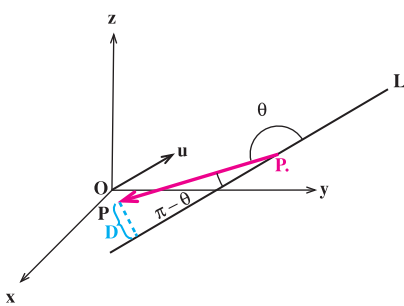
اکنون فرض می‌کنیم $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ و با توجه به شکل ۳ به دست می‌آوریم $\sin(\pi - \theta) = \frac{D}{|\vec{P_0P}|}$

و در نتیجه $D = |\vec{P_0P}| \sin(\pi - \theta)$. چون $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ ، لذا در این حالت نیز به دست می‌آوریم

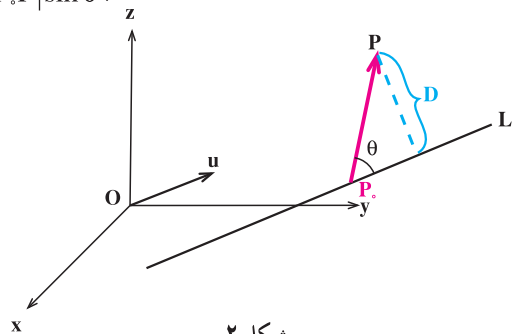
$D = |\vec{P_0P}| \sin \theta$. اگر $\theta = \pi$ ، نیز تساوی اخیر برقرار است.

پس در هر حال داریم

$$D = |\vec{P_0P}| \sin \theta.$$



شکل ۳



شکل ۲

اما با توجه به این که $|\mathbf{u} \times \vec{P_0P}| = |\mathbf{u}| |\vec{P_0P}| \sin \theta$ ، به دست می‌آوریم $|\mathbf{u} \times \vec{P_0P}| = |\mathbf{u}| D$ و لذا

$$\blacksquare. D = \frac{|\mathbf{u} \times \vec{P_0P}|}{|\mathbf{u}|}$$

مثال ۵. می‌خواهیم فاصله نقطه $P = (۵, -۶, ۲)$ را از خط L که با معادلات پارامتری زیر داده شده است پیدا کنیم

$$\begin{cases} x = ۱ \\ y = -۱ + ۴t \\ z = ۲ - ۳t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

برای این منظور نقطه $P_0 = (۱, -۱, ۲)$ را روی L در نظر می‌گیریم. بردار $u = (۰, ۴, -۳)$ موازی خط L است و در نتیجه

$$\begin{aligned} D &= \frac{|u \times \vec{P_0 P}|}{|u|} = \frac{|(۰, ۴, -۳) \times (۴, -۵, ۰)|}{|(۰, ۴, -۳)|} = \frac{|(-۱۵, -۱۲, -۱۶)|}{|(۰, ۴, -۳)|} \\ &= \frac{\sqrt{(-۱۵)^2 + (-۱۲)^2 + (-۱۶)^2}}{\sqrt{۰^2 + ۴^2 + (-۳)^2}} = \frac{\sqrt{۶۲۵}}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۲۵}{۵} = ۵. \end{aligned}$$

وضعیت نسبی دو خط در فضا

به‌طور کلی دو خط متمایز در فضا یکی از سه وضعیت نسبی موازی، متقاطع یا متناظر را دارند. گیریم L_1 و L_2 دو خط متمایز باشند که به ترتیب با بردارهای $u_1 = (p_1, q_1, r_1)$ و $u_2 = (p_2, q_2, r_2)$ موازی‌اند.

حالت اول: L_1 و L_2 موازی هستند.

L_1 و L_2 موازی‌اند اگر و فقط اگر u_2 و u_1 موازی باشند. یعنی معادلاً $\lambda \in \mathbb{R}$ موجود باشد که $u_1 = \lambda u_2$ ، یا $(p_1, q_1, r_1) = \lambda (p_2, q_2, r_2)$. پس L_1 و L_2 موازی‌اند اگر و فقط اگر $p_1 = \lambda p_2$ ، $q_1 = \lambda q_2$ و $r_1 = \lambda r_2$.

مثال ۶. می‌خواهیم وضعیت نسبی دو خط L_1 و L_2 را که با معادلات

$$L_2: \frac{x}{۱} = \frac{y}{-۲} = \frac{z}{-۱} \quad \text{و} \quad L_1: \frac{x-۱}{-۲} = \frac{y+۱}{۱} = \frac{z-۱}{۲}$$

با $u_1 = (-۲, ۱, ۲)$ و $u_2 = (۱, -\frac{۱}{۲}, -۱)$ موازی‌اند و داریم $-۲ = -۲(۱)$ ، $۱ = -۲(-\frac{۱}{۲})$ و

$-۱ = -۲(-\frac{۱}{۲})$ ، پس L_1 و L_2 موازی خواهند بود.

حالت دوم: L_1 و L_2 متقاطع هستند.

L_1 و L_2 متقاطع اند اگر یک نقطه مشترک داشته باشند که در این صورت این نقطه مشترک منحصر به فرد است (چرا؟).

مثال ۷. نشان می‌دهیم دو خط L_1 و L_2 به معادلات $L_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-1}$ و

$L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}$ (که موازی نمی‌باشند (چرا؟)) متقاطع اند و نقطه تقاطع آنها را پیدا می‌کنیم.

برای این منظور نقطه‌ای پیدا می‌کنیم که مختصات آن در معادلات هر دو خط صدق کند. معادلات پارامتری خط L_1 به صورت زیر است

$$L_1: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

اکنون می‌خواهیم ببینیم به ازای چه t ای نقطه‌ای از این خط روی خط L_2 قرار دارد. اگر یکی از نقاط خط L_1 روی خط L_2 قرار بگیرد، باید مختصات آن نقطه از L_2 در معادلات L_2 صدق کند.

پس باید معادلات $\frac{(2+2t)-1}{1} = \frac{-2+t}{-2} = \frac{2-t}{2}$ را حل کنیم. از این معادلات جواب $t = 0$ به دست

می‌آید (چرا؟). پس L_1 و L_2 متقاطع هستند و به ازای $t = 0$ نقطه تقاطع L_1 و L_2 یعنی $P = (2, -2, 2)$ به دست می‌آید.

حالت سوم: L_1 و L_2 متنافر هستند.

اگر L_1 و L_2 نه موازی باشند و نه متقاطع، آنگاه L_1 و L_2 را متنافر می‌نامیم.

مثال ۸. وضعیت نسبی دو خط L_1 و L_2 به معادلات $L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$ و

$L_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ را بررسی می‌کنیم. L_1 موازی بردار $u_1 = (2, -1, 1)$ و L_2 موازی بردار

$u_2 = (1, 2, 3)$ است. چون u_1 و u_2 موازی نمی‌باشند، پس L_1 و L_2 نیز موازی نمی‌باشند. وجود نقطه مشترک را روی L_1 و L_2 تحقیق می‌کنیم. معادلات پارامتری L_2 به صورت زیر است

$$L_2: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

این مقادیر را در معادلات L_1 جایگزین می‌کنیم

$$\frac{t \cdot 1}{2} = \frac{2t}{-1} = \frac{3t \cdot 2}{1}$$

این معادلات جواب ندارند زیرا $\frac{t \cdot 1}{2} = \frac{2t}{-1}$ به ازای $t = \frac{-1}{5}$ برقرار است و

پس L_1 و L_2 متقاطع نیز نمی‌باشند، یعنی L_1 و L_2 متناظرند. به ازای $t = \frac{-2}{5}$ $\frac{2t}{-1} = \frac{3t \cdot 2}{1}$



۱. در هر یک از حالات زیر معادلات پارامتری و متقارن خطوطی را که یک نقطه از آنها داده شده است و امتداد آنها نیز موازی بردار مفروض u است پیدا کنید.

(الف) $u = (3, -1, 5)$ ، $(-2, 1, 0)$

(ب) $u = (11, -13, -15)$ ، $(-1, 13, 20)$

(ج) $u = (-1, 1, 0)$ ، $(7, -1, 2)$

(د) $u = (1, -1, 0)$ ، $(-3, 6, 2)$

۲. معادلات پارامتری خط گذرا از نقطه $(3, -1, 2)$ و موازی خط زیر را پیدا کنید.

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = z$$

۳. معادلات پارامتری خط گذرا از نقاط $(-2, 5, 7)$ و $(-1, 1, 0)$ را پیدا کنید.

۴. نشان دهید خط گذرا از نقاط $(0, 0, 5)$ و $(1, -1, 4)$ عمود بر خط زیر است.

$$\frac{x}{7} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-9}{3}$$

۵. a و b را طوری تعیین کنید تا نقطه $(a, b, 1)$ روی خط

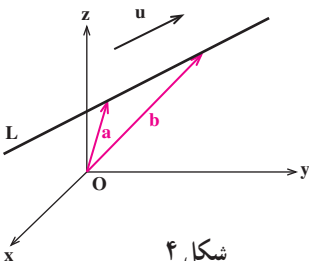
گذرا از نقطه $(2, 5, 7)$ و $(0, 3, 2)$ قرار گیرد.

۶. u را برداری می‌گیریم که موازی خط مفروض L است.

نشان دهید اگر a و b بردارهایی باشند که از مبدأ مختصات شروع

شوند و انتهای آنها روی L قرار گیرد، آنگاه

$$u \cdot a = u \cdot b$$



۷. فاصلهٔ مبدأ مختصات را از خط گذرا از نقطهٔ $(3, -3, -3)$ و موازی بردار $(4, -2, -4)$ پیدا کنید.

۸. فاصلهٔ دو خط موازی زیر را پیدا کنید.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2} \quad \text{و} \quad \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}.$$

۹. فاصلهٔ نقطهٔ $(5, 0, -4)$ را از خط زیر پیدا کنید.

$$x-1 = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{2}.$$

۱۰. فاصلهٔ نقطهٔ $(2, 1, 0)$ را از خط زیر پیدا کنید.

$$x = -2, \quad y = 1 = z.$$

۱۱. وضعیت نسبی خطوط ذکر شده در تمرین ۱ را به ترتیب زیر تعیین کنید.

(الف و ب)، (ب و ج)، (ج و د)

۲.۲ صفحه در فضا

یک صفحه مانند n با نقطهٔ معلومی چون $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ در $n = (a, b, c)$ بردار ناصفر عمود بر n به طور منحصر به فرد مشخص می‌شود. اکنون می‌خواهیم معادلهٔ صفحهٔ n را پیدا کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم $P = (x, y, z)$ نقطه‌ای دلخواه باشد. در این صورت P روی صفحهٔ n است اگر و فقط اگر بردارهای n و P_0P بر هم عمود باشند (به شکل ۱ نگاه کنید) و این معادل است با این که ضرب داخلی $n \cdot P_0P$ برابر صفر باشد. اما $n \cdot P_0P = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot n$ و در نتیجه

$$n \cdot P_0P = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$$

بنابراین نقطهٔ $P = (x, y, z)$ روی صفحهٔ n است

اگر و فقط اگر

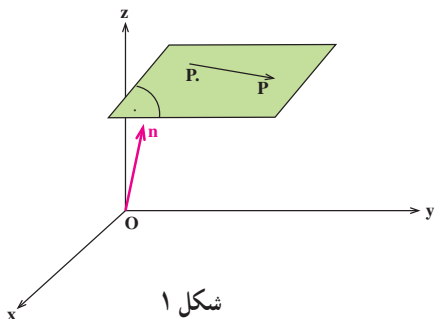
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

در نتیجه معادلهٔ صفحهٔ n که از نقطهٔ معلومی چون

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد و بردار ناصفر

$n = (a, b, c)$ عمود است عبارت است از

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$



شکل ۱

اگر معادله بالا را بسط دهیم و به جای $ax \cdot by \cdot cz$ که عددی ثابت است، d قرار دهیم می‌توانیم معادله صفحه را به صورت زیر نیز بنویسیم

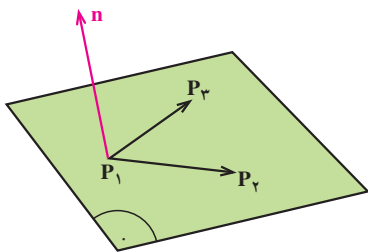
$$ax \cdot by \cdot cz = d.$$

مثال ۱. معادله صفحه گذرا از نقطه $P_0 = (-2, 4, 5)$ و عمود بر بردار $n = (7, 0, -6)$ با توجه به آنچه در بالا گفتیم عبارت است از $0 = (z - 5)(-6) \cdot (y - 4) \cdot (x - 2) \cdot 7$ ، یا

$$-44 = 7x - 6z.$$

مثال ۲. معادله صفحه گذرا از نقطه $P_0 = (\frac{1}{4}, 0, 3)$ و عمود بر خط L با معادلات $\frac{x}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{5}$ را پیدا می‌کنیم. توجه می‌کنیم که خط L با بردار $(4, -1, 5)$ موازی است و لذا صفحه مطلوب بر بردار $n = (4, -1, 5)$ عمود خواهد بود. در نتیجه معادله آن عبارت است از $0 = 5(z - 3) \cdot (-1)(y - 0) \cdot 4(x - \frac{1}{4})$ ، یا $5z - 17 = 4x - y$.

مثال ۳. معادله صفحه گذرا از سه نقطه $P_1 = (1, 0, 2)$ ، $P_2 = (-1, 3, 4)$ و $P_3 = (3, 5, 7)$ را پیدا می‌کنیم. توجه می‌کنیم که این صفحه شامل دو بردار P_1P_2 و P_1P_3 است (به شکل ۲ نگاه کنید). لذا برداری که بر این دو بردار عمود باشد بر این صفحه نیز عمود است و می‌تواند نقش n را بازی کند. اما برداری که بر این دو بردار عمود است را می‌توانیم ضرب خارجی این دو بردار در نظر بگیریم:



شکل ۲

$n = P_1P_2 \times P_1P_3$ چون $P_1P_2 = (-2, 3, 2)$ و $P_1P_3 = (2, 5, 5)$ در نتیجه $n = (5, 14, -16)$ یعنی این که معادله صفحه مطلوب عبارت است از $0 = 5(x - 1) \cdot 14(y - 0) - 16(z - 2)$ یا

$$-27 = 5x \cdot 14y - 16z.$$

فاصله یک نقطه از یک صفحه

می‌خواهیم فاصله نقطه مفروض P را که خارج صفحه است. قرار دارد از آن پیدا کنیم.

قضیه زیر برای این منظور کارساز است.

قضیه ۱. فرض کنیم Γ صفحه‌ای باشد که بردار n عمود است و P را نقطه‌ای می‌گیریم که خارج (یا روی) Γ قرار دارد. در این صورت فاصله P از Γ ، یعنی D ، برابر است با

$$D = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{P}_0 P|}{|n|},$$

که در آن P_0 نقطه دلخواهی روی Γ است.

اثبات. فرض کنیم θ زاویه بین بردار n و بردار $\vec{P}_0 P$ باشد، پس $0 \leq \theta \leq \pi$.

اگر $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ ، آنگاه با توجه به شکل ۳ داریم $\cos \theta = \frac{D}{|\vec{P}_0 P|}$ و لذا $D = |\vec{P}_0 P| \cos \theta$.

توجه می‌کنیم که اگر $\theta = 0$ یا $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، مجدداً تساوی اخیر برقرار است.

اکنون فرض می‌کنیم $\frac{\pi}{4} < \theta < \pi$ و با توجه به شکل ۴ به دست می‌آوریم $\cos(\pi - \theta) = \frac{D}{|\vec{P}_0 P|}$

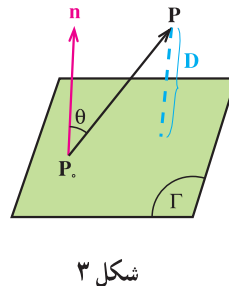
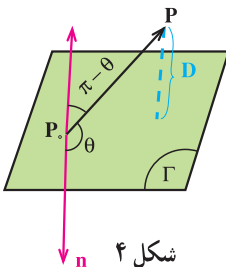
و در نتیجه $D = |\vec{P}_0 P| \cos(\pi - \theta)$. چون $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ ، لذا در این حالت به دست

می‌آوریم $D = |\vec{P}_0 P| (-\cos \theta)$. اگر $\theta = \pi$ ، نیز تساوی اخیر برقرار است.

پس برای $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ داریم $D = |\vec{P}_0 P| \cos \theta$ و برای $\frac{\pi}{4} < \theta \leq \pi$ داریم

$$D = |\vec{P}_0 P| (-\cos \theta)$$

$$D = |\vec{P}_0 P| |\cos \theta|.$$



اما با توجه به این که $|n.P.P| = |n| |P.P| \cos$ به دست می آوریم $|n.P.P| = |n|D$ و لذا

$$\blacksquare. D = \frac{|n.P.P|}{|n|}$$

مثال ۴. می خواهیم فاصله نقطه $P = (0, 2, 1)$ را از صفحه \cdot به معادله $2 - \sqrt{2}z = 0$ x y $\sqrt{2}z$ به دست آوریم. برای این منظور نقطه $P_0 = (\sqrt{2}, -2, 0)$ را روی \cdot در نظر می گیریم. بردار $n = (1, 1, \sqrt{2})$ بر صفحه \cdot عمود است و در نتیجه

$$D = \frac{|n.P.P|}{|n|} = \frac{|(1, 1, \sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}, 4, 1)|}{|(1, 1, \sqrt{2})|} = \frac{4}{2} = 2.$$

وضعیت نسبی دو صفحه در فضا

دو صفحه متمایز \cdot_1 به معادله $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ و \cdot_2 به معادله $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ را در نظر می گیریم. توجه می کنیم که $n_1 = (a_1, b_1, c_1)$ و $n_2 = (a_2, b_2, c_2)$ بردار \cdot_1 و \cdot_2 عمود است. \cdot_1 و \cdot_2 یا با هم موازی هستند و یا موازی نیستند که در این حالت \cdot_1 و \cdot_2 را متقاطع می نامیم.

حالت اول: \cdot_1 و \cdot_2 موازی هستند.

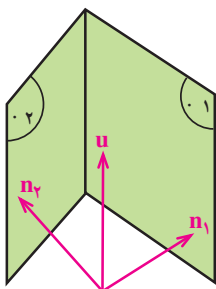
دو صفحه \cdot_1 و \cdot_2 موازی اند اگر و فقط اگر n_1 و n_2 موازی باشند. یعنی معادلاً $r \in \mathbb{R}$ موجود باشد که $n_1 = rn_2$ ، یا $(a_1, b_1, c_1) = r(a_2, b_2, c_2)$ پس \cdot_1 و \cdot_2 موازی اند اگر و فقط اگر $a_1 = ra_2$ ، $b_1 = rb_2$ و $c_1 = rc_2$.

مثال ۵. دو صفحه به معادلات $3z = 8$ $4y$ $2x$ و $1 = 6z$ $8y$ $4x$ موازی اند.

حالت دوم: \cdot_1 و \cdot_2 متقاطع هستند.

اگر \cdot_1 و \cdot_2 در یک نقطه متقاطع باشند، در این صورت فصل مشترک \cdot_1 و \cdot_2 یک خط خواهد بود. واضح است که این خط با برداری که بر n_1 و n_2 عمود است موازی می باشد و لذا می توانیم فرض کنیم با ضرب خارجی $n_2 \cdot n_1 = u$ موازی است. حال با داشتن یک نقطه که روی

این خط باشد، معادله آن به راحتی قابل محاسبه است (به شکل ۵ نگاه کنید).



شکل ۵

مثال ۶. فصل مشترک دو صفحه ۱ به معادله $z = 1 - 2y - 3x$ و ۲ به معادله $۴y - 6z = 2$ را به دست می آوریم. این فصل مشترک خطی است که با بردار $n_1 = (3, -2, 1)$ و $n_2 = (5, 4, -6)$ در نتیجه $u = (8, 23, 22)$ حال کافی است نقطه ای روی این خط پیدا کنیم. چون نقطه $(-1, -1, 0)$ روی هر دو صفحه قرار دارد، پس روی خط فصل مشترک است و لذا معادلات خط فصل مشترک دو صفحه به صورت

$$\frac{x}{8} = \frac{y + 1}{23} = \frac{z}{22} \text{ می باشد.}$$

وضعیت نسبی یک خط و یک صفحه در فضا

$$x = x_0 + pt$$

خط L به معادلات \mathbb{R} ، t ، $y = y_0 + qt$ و صفحه $ax + by + cz = d$ را

$$z = z_0 + rt$$

در نظر می گیریم. توجه می کنیم که L با بردار (p, q, r) موازی است و (a, b, c) عمود L و (a, b, c) موازی هستند که معادلاً در این حالت بردار عمود بر صفحه بر خط L نیز باید عمود باشد و این معادل است با این که $(a, b, c) \cdot (p, q, r) = 0$ یا $ap + bq + cr = 0$ ؛ و یا با هم موازی نیستند که در این صورت متقاطع اند.

مثال ۷. وضعیت نسبی خط L به معادلات $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ و صفحه $x - y - z = 2$ به معادله

$2x - y - z = 2$ را تعیین می کنیم. خط L با بردار $(1, 2, -1)$ موازی است و صفحه $2x - y - z = 2$ عمود. چون $(2, 1, -1) \cdot (1, 2, -1) = 5 \neq 0$ ، لذا L و $2x - y - z = 2$ موازی نمی باشند. اکنون نقطه

تقاطع L و \cdot را پیدا می‌کنیم. معادلات پارامتری خط L به صورت زیر است

$$\begin{aligned}x &= 1 + t \\y &= 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\z &= -t\end{aligned}$$

اکنون می‌خواهیم ببینیم به ازای چه t ای نقطه‌ای از این خط روی صفحه قرار می‌گیرد. برای این منظور باید معادله $t = 2 - 2t$ را حل کنیم. اما این معادله به صورت $5t = 0$ ساده می‌شود که تنها جواب آن $t = 0$ است. یعنی به ازای $t = 0$ ، نقطه $(1, 0, 0)$ از صفحه روی خط L واقع می‌شود و این یعنی L و \cdot متقاطع‌اند.



۱. در هر یک از حالات زیر معادله صفحه گذرا از نقطه P_0 و عمود بر بردار n را پیدا کنید.

الف) $n = (-4, 15, \frac{-1}{4})$ ، $P_0 = (-1, 2, 4)$

ب) $n = (2, 3, -4)$ ، $P_0 = (2, 0, -2)$

ج) $n = (2, 0, -3)$ ، $P_0 = (9, 17, -17)$

د) $n = (0, 1, 0)$ ، $P_0 = (2, 3, -5)$

۲. معادله صفحه گذرا از سه نقطه $(2, -1, 4)$ ، $(5, 3, 5)$ و $(2, 4, 3)$ را پیدا کنید.

۳. معادله صفحه گذرا از نقطه $(1, -1, 2)$ و خط $1 = \frac{z-5}{4}$ ، $2 = y$ ، $3 = x$ را پیدا کنید.

۴. معادله صفحه گذرا از دو خط زیر را پیدا کنید.

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{4}, \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{4}$$

۵. معادله فصل مشترک صفحه‌های $x - z = 1$ و $4z = 2 - 3y + 2x$ را پیدا کنید.

۶. معادله صفحه گذرا از نقطه $(-9, 12, 14)$ و عمود بر دو صفحه تمرین ۵ را پیدا کنید.

۷. فاصله نقطه $(3, -1, 4)$ را از صفحه $2z = 5 - y + 2x$ پیدا کنید.

۸. فاصله مبدأ مختصات را از صفحه $ax + by + cz = d$ پیدا کنید.

۹. آیا چهار نقطه $(2, 3, 2)$ ، $(1, -1, -3)$ ، $(1, 0, -1)$ و $(5, 9, 5)$ همگی روی یک صفحه

قرار دارند؟

۱۰. خط $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-5}{4}$ و صفحه $z=0$ و صفحه $2(x-1) + 2(y-3) - z = 0$. مفروض

است. دو نقطه روی L به فاصله ۳ از π پیدا کنید.

۱۱. کدامیک از صفحه‌های زیر بر هم منطبق‌اند، یا با هم موازی‌اند، یا بر هم عمودند.

(الف) $2y - 3z = 2$ ، x ،

(ب) $15x - 9y - z = 2$

(ج) $4 = 0$ ، $6z$ ، $4y$ ، $-2x$ ،

(د) $0 = 1 - \frac{1}{3}z - 3y - 5x$.

۱۲. در هر یک از موارد زیر وضعیت نسبی خط و صفحه داده شده را بررسی کنید.

(الف) $12 = 5z$ ، $8 = \frac{x-3}{8} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-3}{-1}$ ، $x - 3y$ ،

(ب) $2 = 4y - 6z$ ، $8 = \frac{x}{8} = \frac{y-1}{23} = \frac{z-1}{22}$ ، $5x$ ،

(ج) $5 = 2z$ ، $2y$ ، $x - 2y$ ، $5 = \frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z}{7}$.

۱۳. معادله صفحه گذرا از نقطه $(-1, 2, 3)$ را در هر یک از حالات زیر پیدا کنید.

(الف) با صفحه xy موازی باشد،

(ب) بر محور x ها عمود باشد،

(ج) بر محور z ها عمود باشد.

۱۴. معادله صفحه گذرا از نقطه $(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ و عمود بر خط زیر را پیدا کنید.

$$x = 2t + 3$$

$$y = 6t + 6, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$z = 9t$$

۱۵. معادله خط گذرا از نقطه $(2, -1, 0)$ و عمود بر صفحه $4z = 5 - 3y - 2x$ را پیدا کنید.

۱۶. خط L با معادلات $-z = \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3}$ و صفحه $3x - 2y - 4z = -1$ با معادله

مفروض است.

الف) نقطه P ، نقطه تقاطع L و \cdot را پیدا کنید،
 ب) معادله صفحه عمود بر L در نقطه P را پیدا کنید،
 ج) معادله خط گذرا از P و عمود بر \cdot را نیز پیدا کنید.
 ۱۷. معادله صفحه عمود منصف پاره خط واصل بین دو نقطه $(3, 1, 0)$ و $(5, -1, 3)$ را پیدا کنید.

۱۸. نقاط فصل مشترک دو به دوی هر دسته از صفحه‌های زیر را پیدا کنید. آیا هر دسته از صفحه‌های زیر یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند؟

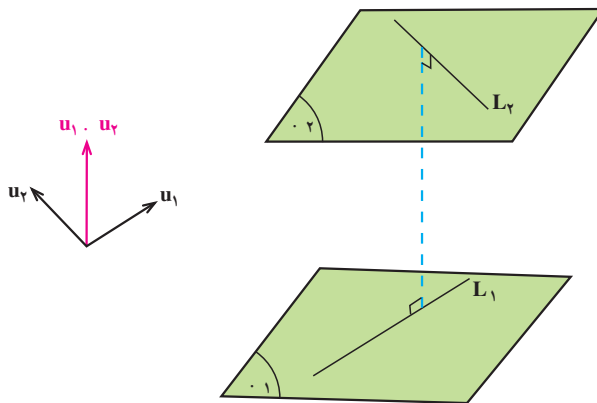
الف) $x \cdot z = 3$ ، $y \cdot z = 2$ ، $x \cdot y = 1$ ،

ب) $x - y - z = 0$ ، $-x \cdot 2y - z = 3$ ، $x \cdot y - z = 2$

۱۹. برای دو خط متناظر L_1 با معادلات $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ و L_2 با معادلات $\frac{x}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$

کوتاهترین فاصله بین دو خط (طول عمود مشترک) را پیدا کنید.

(راهنمایی: طول مورد نظر، طول پاره خطی است که محصور بین دو خط داده شده است و بر هر دو عمود است (به شکل ۶ نگاه کنید). راستای این عمود مشترک در راستای $u_1 \cdot u_2$ قرار دارد که u_1 و u_2 به ترتیب دو بردار موازی با L_1 و L_2 هستند. حال صفحه‌های ۱ و ۲ که راستای عمود بر هر دوی آنها $u_1 \cdot u_2$ است را در نظر می‌گیریم. فاصله این دو صفحه، فاصله مطلوب است.)



شکل ۶

خواجه نصیرالدین طوسی



خواجه نصیر طوسی

ابوجعفر محمد بن حسن معروف به
خواجه نصیر طوسی

در سال ۵۹۷ قمری / ۵۷۹ شمسی /
۱۱۹۰ میلادی در طوس متولد شد.

در سال ۶۷۲ قمری / ۶۵۲ شمسی /
۱۲۷۳ میلادی در کاظمین درگذشت.

منجم، سیاستمدار و ریاضیدان
کارهای ریاضی او عبارتند از:

۱. نگارش کتاب کشف القناع در اسرار شکل القناع درباره‌ی مثلثات مسطح و کروی و تعیین شکل قطاع کروی و مقاطع مخروطی
۲. نگارش کتاب جامع الحساب درباره‌ی نظریه‌ی اعداد و تلفیق حساب و هندسه

منابع

۱. تاریخ علم جرج سارتن، جلد ۱ صفحات ۴۱۷ تا ۴۲۵
۲. اطلس ریاضی صفحه‌ی ۵۸۲
۳. زندگینامه‌ی ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی ابوالقاسم قربانی، صفحه‌ی ۴۸۶
۴. زندگینامه‌ی علمی دانشوران جلد ۳ صفحات ۵۰۸ تا ۵۱۴
۵. لغت‌نامه‌ی دهخدا تحت نام نصیرالدین طوسی