۱۹. به‌کمک تمرین قبل $\begin{bmatrix} \sqrt{۳} & -۱ \\ ۱ & \sqrt{۳} \end{bmatrix}^{۶۰۰}$ را محاسبه کنید.

۲.۴ دترمینان‌ها

در سال دوم دیده‌ایم که می‌توانیم به یک ماتریس ۲×۲ مانند $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یک عدد وابسته کنیم که به آن دترمینان ماتریس A می‌گفتند و با $|A|$ یا $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ نمایش می‌دادند و به‌صورت

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\,,$$

تعریف می‌شد. اکنون در این بخش می‌خواهیم مفهوم دترمینان را برای ماتریس ۳×۳ تعریف کنیم. در زیر تعاریفی می‌آوریم و به کمک آنها این مفهوم را شرح می‌دهیم.

تعریف. فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ ماتریسی دلخواه باشد. در این‌صورت ij ــ امین **کهاد** ماتریس A را که با M_{ij} نمایش می‌دهیم ماتریسی ۲×۲ تعریف می‌کنیم که از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس A به‌دست می‌آید.

مثال ۱. برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۵ \\ ۶ & ۳ & -۴ \end{bmatrix}$، داریم $M_{۱۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۶ & ۳ \end{bmatrix}$ و $M_{۳۲}=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$.

تعریف. فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ ماتریسی دلخواه باشد. در این صورت ij ــ امین **همسازهٔ** ماتریس A را که با A_{ij} نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A_{ij}=(-۱)^{i+j}\left|M_{ij}\right|,$$

که در آن $|M_{ij}|$ دترمینان ماتریس ۲×۲ ی M_{ij} است.

مثال ۲. برای ماتریس مثال قبل، داریم:

$$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -6\,,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10\,.$$

قضیهٔ ۱. فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ ماتریسی دلخواه باشد. در این صورت اعداد

۱) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$،

۲) $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$،

۳) $a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$،

۴) $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$،

۵) $a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$،

۶) $a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$،

همگی با هم مساوی هستند.

اثبات. برابری دو عدد ظاهرشده در ۱ و ۲ را برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

بررسی می‌کنیم.

$$\text{عدد ظاهر شده در ۱} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\
&\quad a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{21}\left[-(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})\right] + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + \\
&\quad a_{23}\left[-(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})\right] \\
&= a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\
&\quad a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\
&= \text{.عدد ظاهر شده در ۲}
\end{aligned}
$$

درستی این که تمامی اعداد ظاهر شده در قضیه با هم برابرند، محاسباتی مشابه محاسبات بالا دارد. ■

تعریف. فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ماتریسی دلخواه باشد. **دترمینان** A را که با $|A|$ یا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ نمایش می‌دهیم، یکی از ۶ عدد مساویِ معرفی‌شده در قضیهٔ ۱ تعریف می‌کنیم.

تذکر. اگر $|A|$ را از عدد معرفی شده در ۱ محاسبه کنیم، می‌گوییم $|A|$ را با بسط‌دادن نسبت به سطر اوّل حساب کرده‌ایم. اگر مثلاً از عدد معرفی شده در ۶ محاسبه کنیم می‌گوییم $|A|$ را با بسط‌دادن نسبت به ستون سوم حساب کرده‌ایم و الی آخر.

مثال ۳. ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۴ \\ ۴ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ را درنظر می‌گیریم. $|A|$ را با بسط‌دادن نسبت به‌سطر

دوم پیدا می‌کنیم :

$$\begin{aligned}|A| &= ۴A_{۲۱}+۲A_{۲۲}+۳A_{۲۳}\\ &= ۴(-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix}۵ & ۲\\ ۲ & ۴\end{vmatrix}+۲(-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix}۳ & ۲\\ -۱ & ۴\end{vmatrix}+۳(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix}۳ & ۵\\ -۱ & ۲\end{vmatrix}\\ &= -۴(۱۶)+۲(۱۴)-۳(۱۱)=-۶۹\,.\end{aligned}$$

اگر $|A|$ را با بسط‌دادن نسبت به ستون سوم محاسبه می‌کردیم نیز، نتیجهٔ بالا به‌دست می‌آمد :

$$\begin{aligned}|A| &= ۲A_{۱۳}+۳A_{۲۳}+۴A_{۳۳}\\ &= ۲(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix}۴ & ۲\\ -۱ & ۲\end{vmatrix}+۳(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix}۳ & ۵\\ -۱ & ۲\end{vmatrix}+۴(-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix}۳ & ۵\\ ۴ & ۲\end{vmatrix}\\ &= ۲(۱۰)-۳(۱۱)+۴(-۱۴)=-۶۹\,.\end{aligned}$$

مثال ۴. می‌خواهیم $\begin{vmatrix}۰ & ۰ & ۱\\ ۵ & -۲ & ۶\\ ۱ & ۱ & ۲\end{vmatrix}$ را محاسبه کنیم. در اینجا به‌خاطر وجود دو صفر در سطر اوّل، به‌صرفه است که مقدار دترمینان را با بسط نسبت به سطر اوّل محاسبه کنیم :

$$\begin{vmatrix}۰ & ۰ & ۱\\ ۵ & -۲ & ۶\\ ۱ & ۱ & ۲\end{vmatrix}=۰\begin{vmatrix}-۲ & ۶\\ ۱ & ۲\end{vmatrix}-۰\begin{vmatrix}۵ & ۶\\ ۱ & ۲\end{vmatrix}+۱\begin{vmatrix}۵ & -۲\\ ۱ & ۱\end{vmatrix}=۷\,.$$

مثال ۵. می‌خواهیم $\begin{vmatrix}a & b & c\\ ۰ & d & e\\ ۰ & ۰ & f\end{vmatrix}$ را محاسبه کنیم. در اینجا نیز به‌خاطر وجود دو صفر در ستون اوّل، به‌صرفه است که مقدار دترمینان را با بسط نسبت به ستون اوّل محاسبه کنیم :

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ ۰ & d & e\\ ۰ & ۰ & f\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}d & e\\ ۰ & f\end{vmatrix}-۰\begin{vmatrix}b & c\\ ۰ & f\end{vmatrix}+۰\begin{vmatrix}b & c\\ d & e\end{vmatrix}=adf\,.$$

تذکر. از مثال قبل درمی‌یابیم که برای ماتریس‌های ۳×۳ که بالا مثلثی هستند، دترمینان برابر

است با حاصلضرب درآیه‌های روی قطر اصلی آن ماتریس. دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ که پایین مثلثی و یا قطری هستند نیز چنین می‌باشد.

قضیهٔ ۲. فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times ۳}$ دو ماتریس دلخواه باشند. در این‌صورت $|AB|=|A||B|$.

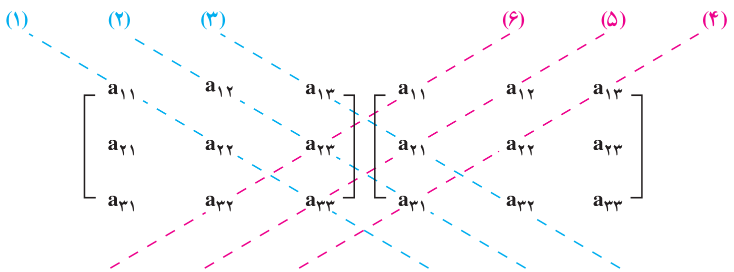
اثبات. بررسی درستی این قضیه به کمک محاسبه، سر راست ولی طاقت‌فرسا می‌باشد که آن‌را به‌صورت یک تمرین رها می‌کنیم. ■

نتیجه. فرض کنیم $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ ماتریسی دلخواه باشد و n یک عدد طبیعی. در این‌صورت $|A^n|=|A|^n$.

اثبات. بنابر قضیهٔ ۲، $|A^۲|=|AA|=|A||A|=|A|^۲$، $|A^۳|=|A^۲A|=|A^۲||A|=|A|^۲|A|=|A|^۳$ و لذا به کمک استقرا به سادگی به‌دست می‌آید $|A^n|=|A|^n$. ■

دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳

در زیر روشی را جهت محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ که منسوب به ساروس است ارائه می‌کنیم. ماتریس $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$ را درنظر می‌گیریم. این ماتریس را ۲ بار کنار هم می‌نویسیم:



به خطوط ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ و درآیه‌های روی آنها توجه کنید. درآیه‌های روی خط ۱ را درهم ضرب می‌کنیم. این کار را برای درآیه‌های روی خط ۲ و خط ۳ نیز انجام می‌دهیم و سپس سه عدد به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم. گیریم حاصلجمع این سه عدد p باشد. اکنون همین عمل را برای خطوط ۴، ۵ و ۶ تکرار می‌کنیم. اگر q عددی باشد که در این مرحله به‌وجود می‌آید، آنگاه به راحتی دیده می‌شود که $p-q$ با ۶ عدد مساویِ معرفی شده در قضیهٔ ۱ برابر است و لذا $|A|=p-q$.
این روش محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ به روش ساروس معروف است. آنچه در بالا گفتیم را در فرمول زیر خلاصه می‌کنیم :

$$|A|=\big(\overbrace{\underbrace{a_{۱۱}a_{۲۲}a_{۳۳}}_{\text{حاصلضرب درآیه‌های روی خط ۱}}+\underbrace{a_{۱۲}a_{۲۳}a_{۳۱}}_{\text{حاصلضرب درآیه‌های روی خط ۲}}+\underbrace{a_{۱۳}a_{۲۱}a_{۳۲}}_{\text{حاصلضرب درآیه‌های روی خط ۳}}}^{p}\big)-\big(\overbrace{\underbrace{a_{۱۳}a_{۲۲}a_{۳۱}}_{\text{حاصلضرب درآیه‌های روی خط ۴}}+\underbrace{a_{۱۲}a_{۲۱}a_{۳۳}}_{\text{حاصلضرب درآیه‌های روی خط ۵}}+\underbrace{a_{۱۱}a_{۲۳}a_{۳۲}}_{\text{حاصلضرب درآیه‌های روی خط ۶}}}^{q}\big).$$

مثال ۶. ماتریس معرفی شده در مثال ۳ را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم به روش ساروس مقدار دترمینان آن را محاسبه کنیم :

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$|A|=(۲۴-۱۵+۱۶)-(-۴+۸۰+۱۸)=۲۵-۹۴=-۶۹\ .$$

ویژگی‌های دترمینان ماتریس‌های ۳×۳

در زیر بعضی از ویژگی‌های مهم دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ را بیان خواهیم کرد. کلّیهٔ این ویژگی‌ها را در مورد سطرها مطرح و سپس ثابت می‌کنیم. این ویژگی‌ها در مورد ستون‌ها نیز برقرار است و اثبات در حالت ستونی مشابه اثبات در حالت سطری است.

ویژگی ۱ دترمینان. اگر کلّیهٔ درآیه‌های یک سطر (ستون) ماتریسی ۳×۳ مانند $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$ را در عدد حقیقی λ ضرب کنیم و یک ماتریس جدید به‌دست آوریم،

آنگاه دترمینان ماتریس جدید، λ برابر دترمینان ماتریس A است.

برای بررسی درستی ویژگی ۱، گیریم B ماتریس 3×3 جدید به‌دست آمده از ضرب یک سطر ماتریس A (مثلاً سطر iام آن) در عدد ثابت λ باشد. با بسط دترمینان B نسبت به سطر iام به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}|B| &= \lambda a_{i1}B_{i1} + \lambda a_{i2}B_{i2} + \lambda a_{i3}B_{i3}\\ &= \lambda(a_{i1}B_{i1} + a_{i2}B_{i2} + a_{i3}B_{i3}).\end{aligned}$$

امّا چون سطرهای A و B، بجز احتمالاً سطر iام، یکسان هستند، لذا به‌وضوح $A_{i1}=B_{i1}$، $A_{i2}=B_{i2}$ و $A_{i3}=B_{i3}$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}|B| &= \lambda(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3})\\ &= \lambda|A|,\end{aligned}$$

که درستی این ویژگی را نتیجه می‌دهد.

مثال ۷. بنابر ویژگی ۱ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{vmatrix}2 & 5 & 3\\ 4 & 8 & 10\\ 6 & 1 & 7\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}2 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 6 & 1 & 7\end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix}1 & 5 & 3\\ 1 & 4 & 5\\ 3 & 1 & 7\end{vmatrix}.$$

نتیجه. برای ماتریس 3×3 مانند $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ و عدد ثابت λ، $|\lambda A| = \lambda^3|A|$.

اثبات. کافی است سه بار از ویژگی ۱ استفاده کنیم:

$$|\lambda A| = \begin{vmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23}\\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33}\end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23}\\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33}\end{vmatrix} = \lambda^2\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33}\end{vmatrix}$$

$$= \lambda^{3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^{3}|A|. \quad \blacksquare$$

ویژگی ۲ دترمینان. اگر کلّیهٔ درآیه‌های یک سطر (ستون) ماتریسی 3×3 مانند $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ برابر صفر باشند، آنگاه $|A| = 0$.

برای بررسی درستی ویژگی ۲، گیریم کلّیهٔ درآیه‌های یک سطر ماتریس A (مثلاً سطر iام آن) برابر صفر باشد. با بسط دترمینان A نسبت به سطر iام به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \\ &= 0A_{i1} + 0A_{i2} + 0A_{i3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

مثال ۸. بنابر ویژگی ۲ می‌توانیم بنویسیم $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$ = $\begin{vmatrix} 88 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

ویژگی ۳ دترمینان. اگر در ماتریسی 3×3 مانند $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ جای دو سطر (دو ستون) را عوض کنیم تا ماتریس جدیدی به‌دست آوریم، آنگاه دترمینان ماتریس جدید، قرینهٔ دترمینان ماتریس A است.

برای بررسی درستی ویژگی ۳، ابتدا فرض می‌کنیم جای دو سطر متوالی مثلاً سطر اوّل و دوم را عوض کرده‌ایم :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

حال دترمینان A را با بسط نسبت به سطر اوّل و دترمینان B را با بسط نسبت به سطر دوم پیدا می کنیم

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

$$|B| = a_{11}B_{21} + a_{12}B_{22} + a_{13}B_{23}.$$

ولی برای $j=1,2,3$ داریم $A_{1j} = (-1)^{1+j}|M_{1j}|$ که در آن M_{1j} ماتریس حاصل از حذف سطر اوّل و ستون jام ماتریس A است و $B_{2j} = (-1)^{2+j}|\overline{M_{2j}}|$ که در آن $\overline{M_{2j}}$ ماتریس حاصل از حذف سطر دوم و ستون jام ماتریس B است. امّا توجه می‌کنیم که $\overline{M_{2j}} = M_{1j}$ و لذا

$$B_{2j} = (-1)^{2+j}|\overline{M_{2j}}| = -(-1)^{1+j}|M_{1j}| = -A_{1j}.$$

پس

$$\begin{aligned}|B| &= a_{11}(-A_{11}) + a_{12}(-A_{12}) + a_{13}(-A_{13}) \\ &= -(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) \\ &= -|A|.\end{aligned}$$

تعویض سطر دوم و سوم نیز وضعیتی مشابه دارد. ولی اگر بخواهیم سطر اوّل و سوم را جابه‌جا کنیم ابتدا سطر اوّل و دوم را جابه‌جا کرده، سپس سطر دوم و سوم و بالاخره سطر اوّل و دوم را جابه‌جا می کنیم که مجدداً مقدار دترمینان در $(-1)(-1)(-1) = -1$ ضرب می‌شود و لذا در هر حال دترمینان ماتریس جدید، قرینهٔ دترمینان ماتریس A است.

مثال ۹. بنابر ویژگی ۳ داریم $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ & ۷ \\ -۱ & ۱ & ۳ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -۱ & ۱ & ۳ \\ ۵ & ۶ & ۷ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۷ & ۶ & ۵ \\ ۳ & ۱ & -۱ \end{vmatrix}$.

ویژگی ۴ دترمینان. اگر ماتریسی 3×3 مانند $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ دارای دو سطر (دو ستون) یکسان باشد، آنگاه $|A| = 0$.

برای بررسی درستی ویژگی ۴، گیریم سطر i_1ام و i_2ام ماتریس A یکسان باشند. اگر جای سطر i_1ام و سطر i_2ام را با هم تعویض کنیم، آنگاه به خاطر یکسان بودن این دو سطر ماتریس حاصل همان A است. پس بنابر ویژگی ۳، $|A| = -|A|$، $2|A| = 0$، یا $|A| = 0$.

مثال ۱۰. بنابر ویژگی ۴ داریم $\begin{vmatrix} ۷ & ۱ & ۷ \\ ۸ & ۳ & ۸ \\ ۹ & ۴ & ۹ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۵ \\ ۶ & ۷ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۵ \end{vmatrix} = ۰$.

ویژگی ۵ دترمینان. اگر در ماتریسی ۳×۳ مانند $A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$، یک سطر (ستون) مضربی از یک سطر (ستون) دیگر باشد، آنگاه $|A| = ۰$.

برای بررسی درستی ویژگی ۵، گیریم سطر $i_۱$ام ماتریس A، λ برابر سطر $i_۲$ام آن باشد. بنابر ویژگی ۱ می‌توانیم بنویسیم $|A| = \lambda|B|$ که در آن B ماتریسی است که سطر $i_۱$ام و سطر $i_۲$ام آن یکسان است. امّا ویژگی ۴ نتیجه می‌دهد که $|B| = ۰$ و لذا $|A| = \lambda \times ۰ = ۰$.

مثال ۱۱. بنابر ویژگی۵ داریم $\begin{vmatrix} ۷ & ۱۴ & ۱ \\ ۷ & ۱۴ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۷ \\ ۶ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۱۴ \end{vmatrix} = ۰$.

ویژگی ۶ دترمینان. فرض کنیم A یک ماتریس ۳×۳ بوده که سطر iام آن به‌صورت

$$b_{i۱}+c_{i۱} \qquad b_{i۲}+c_{i۲} \qquad b_{i۳}+c_{i۳}$$

باشد. اگر B و C را ماتریس‌های ۳×۳ بگیریم که سطرهای آن، بجز احتمالاً سطر iام، با سطرهای A یکی است و سطر iام B

$$b_{i۱} \qquad b_{i۲} \qquad b_{i۳}$$

و سطر iام C

$$c_{i۱} \qquad c_{i۲} \qquad c_{i۳}$$

است، آنگاه

$$|A| = |B| + |C|.$$

برای بررسی درستی ویژگی ۶، $|A|$ را با بسط دادن نسبت به سطر iام محاسبه می‌کنیم :

$$\begin{aligned}|A| &= (b_{i1}+c_{i1})A_{i1}+(b_{i2}+c_{i2})A_{i2}+(b_{i3}+c_{i3})A_{i3}\\ &= (b_{i1}A_{i1}+b_{i2}A_{i2}+b_{i3}A_{i3})+(c_{i1}A_{i1}+c_{i2}A_{i2}+c_{i3}A_{i3}).\end{aligned}$$

امّا چون سطرهای A، B و C، بجز احتمالاً سطر iام، همگی یکسان هستند، لذا به‌وضوح $A_{i1}=B_{i1}=C_{i1}$ ، $A_{i2}=B_{i2}=C_{i2}$ و $A_{i3}=B_{i3}=C_{i3}$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}|A| &= (b_{i1}B_{i1}+b_{i2}B_{i2}+b_{i3}B_{i3})+(c_{i1}C_{i1}+c_{i2}C_{i2}+c_{i3}C_{i3})\\ &= |B|+|C|.\end{aligned}$$

تذکر. مشابه ویژگی ۶ برای ستون‌ها نیز بر قرار است.

مثال ۱۲. بنابر ویژگی ۶ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 6\\ 5 & 3 & 3\\ 4 & 2 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 8 & 2 & 6\\ 4+1 & 1+2 & 2+1\\ 4 & 2 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 8 & 2 & 6\\ 4 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 8 & 2 & 6\\ 1 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 6\end{vmatrix},$$

همچنین

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 6\\ 5 & 3 & 3\\ 4 & 2 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 8 & 2 & 5+1\\ 5 & 3 & 1+2\\ 4 & 2 & 4+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 8 & 2 & 5\\ 5 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1\\ 5 & 3 & 2\\ 4 & 2 & 2\end{vmatrix}.$$

ویژگی ۷ دترمینان. اگر در ماتریسی ۳×۳ مانند $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ حاصلضرب درآیه‌های یک سطر (ستون) در یک عدد ثابت را به سطر (ستون) دیگر بیافزاییم تا ماتریس جدید حاصل شود، آنگاه دترمینان ماتریس جدید برابر است با دترمینان ماتریس A.

برای بررسی درستی ویژگی ۷، گیریم سطر i_1ام ماتریس A

$$a_{i_1 1} \quad a_{i_1 2} \quad a_{i_1 3}$$

و سطر i_2ام آن

$$a_{i_2 1} \quad a_{i_2 2} \quad a_{i_2 3}$$

باشد. ماتریس B یک ماتریس ۳×۳ است که تمام سطرهایش، بجز احتمالاً سطر i_2ام آن، با سطرهای A یکسان است و سطر i_2ام آن به‌صورت زیر است :

$$a_{i_2 1}+\lambda a_{i_1 1} \quad a_{i_2 2}+\lambda a_{i_1 2} \quad a_{i_2 3}+\lambda a_{i_1 3}$$

اگر ثابت کنیم $|B|=|A|$، درواقع ویژگی ۷ را ثابت کرده‌ایم.

اکنون C و D را ماتریس‌هایی ۳×۳ می‌گیریم که تمام سطرهایشان، بجز احتمالاً سطر i_2ام، با سطرهای B و در نتیجه با سطرهای A یکسان است. سطر i_2ام C را

$$a_{i_2 1} \quad a_{i_2 2} \quad a_{i_2 3}$$

می‌گیریم و سطر i_2ام D را

$$\lambda a_{i_1 1} \quad \lambda a_{i_1 2} \quad \lambda a_{i_1 3}$$

فرض می‌کنیم. بنابر ویژگی ۶ می‌توانیم بنویسیم $|B|=|C|+|D|$.

امّا دقت می‌کنیم که تمام سطرهای C با A یکی است، حتی سطر i_2ام آن. لذا C همان A است، پس $|C|=|A|$. ازطرفی سطر i_2ام D، λ برابر سطر i_1ام آن است. پس بنابر ویژگی ۵، $|D|=0$ و لذا $|B|=|A|+0=|A|$.

مثال ۱۳. بنابر ویژگی ۷ داریم

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۵ \\ ۳ & ۴ & ۶ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱+۶ & ۲+۸ & ۵+۱۲ \\ ۳ & ۴ & ۶ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲+۲ & ۵ \\ ۳ & ۴+۶ & ۶ \\ ۱ & ۱+۲ & ۰ \end{vmatrix}.$$

مثال ۱۴. در مثال‌های ۳ و ۶ به دو روش دترمینان $\begin{vmatrix} ۲ & ۵ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۴ \\ ۴ & ۲ & -۱ \end{vmatrix}$ را محاسبه کردیم : روش بسط‌دادن و روش ساروس. اکنون می‌خواهیم به کمک ویژگی ۷ مقدار این دترمینان را محاسبه کنیم.

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۵ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۴ \\ ۴ & ۲ & -۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۲ & ۵ & ۳ \\ ۳-\frac{۴}{۳}(۲) & ۲-\frac{۴}{۳}(۵) & ۴-\frac{۴}{۳}(۳) \\ ۴ & ۲ & -۱ \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۰ & -\frac{۱۴}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۰ & -\frac{۱۴}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ -۱+\frac{۱}{۳}(۳) & ۲+\frac{۱}{۳}(۵) & ۴+\frac{۱}{۳}(۲) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۰ & -\frac{۱۴}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & \frac{۱۱}{۳} & \frac{۱۴}{۳} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ۳ & ۵-\frac{۱۱}{۱۴}(۲) & ۲ \\ ۰ & -\frac{۱۴}{۳}-\frac{۱۱}{۱۴}(\frac{۱}{۳}) & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & \frac{۱۱}{۳}-\frac{۱۱}{۱۴}(\frac{۱۴}{۳}) & \frac{۱۴}{۳} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ۳ & \frac{۴۸}{۱۴} & ۲ \\ ۰ & \frac{-۲۰۷}{۴۲} & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۰ & \frac{۱۴}{۳} \end{vmatrix}$$

$$=۳(\frac{-۲۰۷}{۴۲})(\frac{۱۴}{۳})=-۶۹\,.$$

ویژگی ۸ دترمینان. برای هر ماتریس ۳ × ۳ مانند $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$ ، $|A^t|=|A|$.

برای بررسی درستی ویژگی ۸ توجه می‌کنیم که اگر $A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}$ ، آنگاه

$A^t=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۲۱} & a_{۳۱}\\ a_{۱۲} & a_{۲۲} & a_{۳۲}\\ a_{۱۳} & a_{۲۳} & a_{۳۳}\end{bmatrix}$ و لذا از بسط دترمینان A^t نسبت به سطر اوّل به‌دست می‌آوریم

$$\left|A^t\right|=a_{۱۱}(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix}a_{۲۲} & a_{۳۲}\\ a_{۲۳} & a_{۳۳}\end{vmatrix}+a_{۲۱}(-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix}a_{۱۲} & a_{۳۲}\\ a_{۱۳} & a_{۳۳}\end{vmatrix}+a_{۳۱}(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix}a_{۱۲} & a_{۲۲}\\ a_{۱۳} & a_{۲۳}\end{vmatrix}$$

$$=a_{۱۱}(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix}a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{vmatrix}+a_{۲۱}(-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix}a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{vmatrix}+a_{۳۱}(-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix}a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۲} & a_{۲۳}\end{vmatrix}$$

$$=|A|.$$

مثال ۱۵. بنابر ویژگی ۸ داریم $\begin{vmatrix}۷ & ۲ & ۴\\ ۱ & ۲ & ۱\\ ۰ & ۲ & ۵\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۷ & ۱ & ۰\\ ۲ & ۲ & ۲\\ ۴ & ۱ & ۵\end{vmatrix}$.

تمرین

۱. فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱ & ۵ & ۷\\ ۲ & -۱ & ۳\\ ۴ & ۵ & -۲\end{bmatrix}$. مقدار $|A|$ را با بسط دادن نسبت به هریک از سطرها و ستون‌ها پیدا کنید. همچنین $|A|$ را به کمک روش ساروس محاسبه کنید.

۲. به کمک بسط‌دادن یا روش ساروس مقدار دترمینان‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\begin{vmatrix}-۱ & ۱ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۴\\ ۱ & ۵ & ۶\end{vmatrix}$ ،

ب) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ ،

ج) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

۳. قضیهٔ ۲ را ثابت کنید.

۴. بدون بسط دادن و روش ساروس و تنها به کمک ویژگی‌های دترمینان، مقدار هریک از دترمینان‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ ، ب) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ ،

ج) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ ، د) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ ،

هـ) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ ، و) $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$.

۵. به کمک ویژگی‌های دترمینان‌ها ثابت کنید

الف) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$ ،

ب) $\begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = 1+x+y+z$ ،

ج) $\begin{vmatrix} 1 & 2x & 4x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2x & yz \\ 1 & y & 2xz \\ 1 & z & 2xy \end{vmatrix}$ ،

د) $\begin{vmatrix} 1 & 1+x & x^2(y+z) \\ 1 & 1+y & y^2(x+z) \\ 1 & 1+z & z^2(x+y) \end{vmatrix} = 0$ ،

هـ) $\begin{vmatrix} yz & xy & xz \\ xy & xz & yz \\ xz & yz & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & x^2 & x^2 \\ y^2 & xz & y^2 \\ z^2 & z^2 & xy \end{vmatrix}$ ،

و) $2(x+y+z)^3 = \begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & 2x+y+z & y \\ z & x & x+2y+z \end{vmatrix}$.

۶. با درنظر گرفتن $A = \begin{bmatrix} y & z & 0 \\ x & 0 & z \\ 0 & x & y \end{bmatrix}$ و محاسبهٔ AA^t ، مقدار دترمینان زیر را محاسبه کنید

$$\begin{vmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{vmatrix}.$$

۷. فرض کنید بتوان یک ماتریس 3×3 مانند A را به‌صورت حاصلضرب یک ماتریس 3×2 در یک ماتریس 2×3 نوشت. ثابت کنید $|A|=0$.

۸. فرض کنید λ و μ دو عدد حقیقی باشند. به کمک ویژگی‌های دترمینان‌ها، مقدار دترمینان ماتریس $A=[\lambda i+\mu j]_{3\times3}$ را محاسبه کنید.

۹. فرض کنید $a=(a_1,a_2,a_3)$ ، $b=(b_1,b_2,b_3)$ و $c=(c_1,c_2,c_3)$ بردارهایی از $\mathbb{R}^3$

باشند. ثابت کنید $a.(b\times c)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ و به کمک ویژگی‌های دترمینان‌ها نتیجه بگیرید که

$a.(b\times c)=b.(c\times a)=c.(a\times b)$. با توجه به این تمرین چه ارتباطی بین هندسه، هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی در جلد کتاب مشاهده می‌کنید.

۱۰. اگر $A=(a_1,a_2)$ ، $B=(b_1,b_2)$ و $C=(c_1,c_2)$ رؤوس یک مثلث از صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ باشند، ثابت کنید مساحت مثلث ABC برابر است با قدرمطلق مقدار زیر

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

۱۱. نشان دهید $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix}=0$ معادلهٔ خطی است که از نقاط (a,b) و (c,d) در $\mathbb{R}^2$ می‌گذرد.

۱۲. فرض کنید A و B دو ماتریس 3×3 باشند که A متقارن است. ثابت کنید $|A+B|=|A+B^t|$.

۱۳. فرض کنید A یک ماتریس پاد متقارن 3×3 باشد. ثابت کنید $|A|=0$.

۱۴. مربع واحد، مربعی است با رؤوس به مختصات $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. شکل هندسی F را مربع واحد در نظر می‌گیریم. اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ که دترمینانی مخالف صفر دارد، روی F اثر کند چه شکلی در صفحه پدید می‌آورد؟ مساحت شکل جدید را محاسبه کنید.