

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

حساب دیفرانسیل و انتگرال

دوره پیش دانشگاهی

رشته علوم ریاضی

وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی



نام کتاب :	حساب دیفرانسیل و انتگرال دورهٔ پیش دانشگاهی - ۲۹۵/۱
پدیدآورنده :	سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
مدیریت برنامه ریزی درسی و تألیف :	دفتر تألیف کتاب های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه ریزی و تألیف :	بهمن اصلاح بذیر، علی ایرانمنش، امین باشی زاده، ناهید بریری، محمدحسن بیژن زاده، محسن جمالی، سیداصغر جوادی، طیبه حمزه بیگی، مینو رحیمی، حسین رودسری، احمد شاهورانی، سیدجعفر شهاب زاده، وحید عالمیان، سمیه السادات میرمعینی و محمد کاظم نائینی (اعضای شورای برنامه ریزی) - محمدحسن بیژن زاده، وحید عالمیان و غلامعلی فرسادی (اعضای گروه تألیف)
مدیریت آماده سازی هنری :	اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده سازی :	لیدا نیکروش (مدیر امور فنی و چاپ) - مریم کیوان (طراح جلد) - شهرزاد قنبری (صفحه آرا) - فاطمه رئیسیان فیروز آباد، زهرا ایمانی نصر، سیف الله بیگ محمد دلپوند، معصومه صابری، سپیده ملک ایزدی، ناهید خیام باشی، حمید ثابت کلاچاهی (امور آماده سازی)
نشانی سازمان :	تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی) تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
ناشر :	شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹
چاپخانه :	شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ :	چاپ ششم ۱۳۹۶
	برای دریافت فایل pdf کتاب های درسی به پایگاه کتاب های درسی به نشانی www.chap.sch.ir و برای خرید کتاب های درسی به سامانه فروش و توزیع مواد آموزشی به نشانی www.irtextbook.ir یا www.irtextbook.com مراجعه نمایید.

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکسبرداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.



جوان‌ها و کودکان ما در سرتاسر کشور، در هر مرکزی که اشتغال به تحصیل دارند باید توجه داشته باشند تحصیل همراه تهذیب و همراه تعهد و همراه اخلاق فاضله انسانی است که می‌تواند ما را به حیات انسانی برساند و می‌تواند ما را از وابستگی‌ها نجات بدهد.

امام خمینی (رحمة الله علیه)

پیشگفتار

فصل ۰ - یادآوری مفاهیم پایه

- ۱-۰ اعداد حقیقی و خط حقیقی
- ۲-۰ اصل‌های جمعی
- ۳-۰ ضرب اعداد حقیقی
- ۴-۰ بسط اعشاری اعداد گویا
- ۵-۰ تقریب اعداد گنگ
- ۶-۰ ترتیب و نامساوی‌ها
- ۷-۰ بازه‌های اعداد
- ۸-۰ قدر مطلق

مسائل

فصل ۱- دنباله‌ها

- ۱-۱ مقدمه
- ۲-۱ دنباله‌های عددی
- ۳-۱ نمودار دنباله‌ها
- ۴-۱ انواع دنباله‌ها

مسائل

- ۵-۱ همگرایی دنباله‌ها

مسائل

- ۶-۱ دنباله‌های واگرا به $\pm\infty$
- ۷-۱ اصل موضوع تمامیت
- ۸-۱ یک دنباله مهم
- ۹-۱ جبر دنباله‌ها

مسائل

فصل ۲ - حد و پیوستگی

- ۱-۲ مقدمه
- ۲-۲ خط‌های مماس و حد
- ۳-۲ مفهوم حد - فرایند حد
- ۴-۲ حد بی‌نهایت
- ۵-۲ حد در بی‌نهایت
- ۶-۲ مفهوم ریاضی حد
- ۷-۲ قضیه فشردگی
- ۸-۲ حدهای یک‌طرفه
- ۹-۲ محاسبه یک حد مهم

- ۱
- ۱
- ۳
- ۵
- ۷
- ۸
- ۱۲
- ۱۲
- ۱۵
- ۱۶
- ۱۸
- ۱۸
- ۱۹
- ۲۳
- ۲۳
- ۲۵
- ۲۷
- ۳۷
- ۳۸
- ۴۱
- ۴۵
- ۴۸
- ۵۰
- ۵۱
- ۵۱
- ۵۲
- ۵۳
- ۶۰
- ۶۵
- ۶۹
- ۷۵
- ۷۸
- ۸۲

۸۷	۱۰-۲- پیوستگی تابع
۹۲	۱۱-۲- مفهوم پیوستگی تابع f در یک نقطه بر اساس همگرایی دنباله‌ها
۹۵	۱۲-۲- پیوستگی توابع مثلثاتی
۱۰۰	۱۳-۲- ویژگی‌های مهم تابع‌های پیوسته
۱۰۲	۱۴-۲- پیوستگی تابع وارون یک تابع پیوسته
۱۰۴	۱۵-۲- حدهای نامتناهی (حد بی‌نهایت)
۱۰۷	۱۶-۲- حد توابع کسری و مجانب قائم
۱۱۰	۱۷-۲- حد در بی‌نهایت و مجانب افقی
۱۱۵	۱۸-۲- حد بی‌نهایت در بی‌نهایت و مجانب مایل

مسائل

فصل ۳- مشتق و کاربرد آن

۱۲۰	۱-۳- آهنگ تغییر و خط مماس
۱۲۱	۲-۳- مشتق تابع
۱۲۴	۳-۳- آهنگ تغییر
۱۲۶	۴-۳- تابع مشتق
۱۳۱	۵-۳- نتایج اولیه مشتق‌پذیری
۱۳۶	۶-۳- مشتق توابع مثلثاتی
۱۴۰	۷-۳- مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر
۱۴۵	۸-۳- قاعده زنجیری
۱۵۱	۹-۳- مشتق‌گیری ضمنی
۱۵۴	۱۰-۳- مشتق تابع وارون
۱۵۷	۱۱-۳- مشتق توابع نمایی و لگاریتمی طبیعی
۱۵۹	۱۲-۳- مقدارهای اکسترمم سراسری و مسائل بهینه‌سازی
۱۶۵	۱۳-۳- مشتق دوم و تقریر نمودار تابع
۱۸۰	۱۴-۳- ماکسیمم و مینیمم موضعی (نسبی)
۱۸۴	۱۵-۳- آهنگ‌های تغییر وابسته
۱۹۲	۱۶-۳- رسم نمودار توابع

مسائل

فصل ۴- انتگرال

۲۱۰	۱-۴- مسأله مساحت
۲۱۱	۲-۴- مساحت به عنوان حد مجموع
۲۱۹	۳-۴- انتگرال معین
۲۲۷	۴-۴- ویژگی‌های انتگرال معین
۲۳۹	۵-۴- قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال
۲۴۱	

مسائل

مراجع

۲۴۸
۲۵۱

مسلان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را در باره مطالب

این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۴۸۷۴/۱۵۸۷۵ - گروه درسی مربوط و یا پیام نگار (Email)

talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفترتالیف کتاب های درسی ابتدایی و متوسطه نظری

پیشگفتار

واژه ریاضیات که معادل کلمه لاتین (Mathematics) است. در زبان یونانی به مجموعه‌ای از دانستنی‌های عمومی اطلاق می‌شد که کسب آن برای همه افراد تحصیل کرده لازم و ضروری تلقی شده است. افلاطون فیلسوف مشهور یونانی را باور بر این بود که مطالعه ریاضیات عالی‌ترین زمینه را برای تعلیم ذهن فراهم می‌آورد. کاوش‌های باستان‌شناسی نشانگر آن است که حتی در تمدن‌های اولیه انسان‌ها با شمارش و مقدماتی از علم حساب آشنایی داشته و از آن بهره برده‌اند. امروزه با پیشرفت تمدن صنعتی هر شهروند می‌بایست با مقدماتی از ریاضیات مشتمل بر علم حساب و هندسه مقدماتی آشنایی داشته باشد.

در سطحی پیشرفته‌تر دانش‌آموزان و دانشجویان می‌بایست با مباحث دیگری از ریاضیات آشنا شده تا درک بهتری از سایر دروس خود داشته باشند. در این میان، درس حساب دیفرانسیل و انتگرال جایگاه ویژه‌ای دارد. حساب و هندسه ابزارهای مفیدی برای توصیف روابط بین کمیت‌های ایستا و استاتیک می‌باشند؛ لکن درگیر مفاهیمی که بتواند به توصیف تغییرات کمیت‌ها کمک کند نمی‌باشند. حساب دیفرانسیل و انتگرال، در واقع اعمالی هستند که برای سنجش راه‌های مرتبط با تغییرات کمیت‌ها ابداع شده‌اند. حساب دیفرانسیل و انتگرال که تحت نام حسابان نیز از آن یاد می‌شود، ابزارهای لازم را برای مطالعه و بررسی حرکت‌ها به‌صورت کمی فراهم می‌کنند. از منظر تاریخی نیز، کشف حسابان به دنبال مطالعه رصد حرکت سیاره‌ها توسط فیزیکدانان و منجمان اتفاق افتاده است.

کیپلر^۱ ریاضیدان آلمانی پژوهش‌ها و مطالعاتی را درخصوص یافته‌های فیزیکدان دانمارکی به نام تیخوبراهه^۲ در قرن هفدهم میلادی انجام داد به دنبال این مطالعات، نیوتن و لایبنیتز همزمان توانستند با کشف حساب دیفرانسیل و انتگرال به تبیین حرکت سیارات نایل شوند. در واقع بخش اعظمی از ریاضیات به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم در نتیجه مطالعه حرکت اجسام و اجرام سماوی رشد و توسعه یافته است. حرکت جزء ذاتی اشیاء به‌شمار می‌رود.

حسابان مشتمل بر دو عمل می‌باشد که یکی دیفرانسیل‌گیری (مشتق‌گیری) و دیگری

انتگرال گیری نامیده می‌شوند. همانند جمع و تفریق که مغلوب یکدیگرند. کاری که مشتق گیری می‌کند انتگرال گیری برمی‌گرداند. مشتق گیری و انتگرال گیری برحسب عمل جدیدتری به نام حد تعریف می‌شوند. این در حالی است که واضعان این علم، یعنی اسحاق نیوتن^۱ و گائفرید لایبنیتز^۲ هیچ یک از آنان، از مفهوم حد در صورت بندی مشتق و انتگرال استفاده نکرده‌اند. در واقع مفهوم حد، بعد از کشف و ابداع حسابان معرفی و توسعه یافته است. این مفهوم به دنبال نابسامانی‌هایی که در برخی موارد در مسیر استفاده و توسعه حسابان پدید آمد توسط ریاضیدان آلمانی به نام کارل ویراشتراس صورت بندی و تعریف گردید. وقتی ویراشتراس مفاهیم حسابان را بر پایه مفهوم حد تعریف کرد همه بی‌دقتی‌ها و به هم ریختگی حسابان رخت برست.

حساب دیفرانسیل و انتگرال تا آنجا مورد نیاز دانش‌آموزان و دانشجویان است که در فهرست دروس دانشگاهی از آن به عنوان ریاضی عمومی و یا ریاضیات پایه یاد می‌کنند: ریاضیاتی که نه تنها در رشته‌های علوم محض نظیر فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی مطالعه می‌شود بلکه تقریباً در همه حیطه‌های علمی دیگر نظیر آمار، رایانه، اقتصاد و امور مالی، کشاورزی و مهندسی پزشکی و همه رشته‌های علوم انسانی به عنوان یک درس پایه و اساسی تحصیل می‌گردد.

در کتاب حاضر مفاهیم حد، مشتق و انتگرال هسته اصلی و شالوده محتوایی این درس را تشکیل می‌دهند. محتوای درس براساس برنامه و محتوای مصوب شورای برنامه‌ریزی ریاضی دوره متوسطه تدوین گردیده است.

می‌دانیم به لحاظ روش‌شناسی و اصول تدریس فعال یادگیری بر آموزش ارجحیت دارد. بنابراین ارائه مطالب و مباحث درس به شیوه حل مسأله و با رویکرد فعالیت محور ساماندهی شده‌اند. آموزش به صورت ضعیف و ناکارآمد آن فرایندی است که به شکل یک طرفه و تحمیلی از سوی معلم به دانش‌آموزان انتقال می‌یابد. در حالی که یادگیری فعالیت محور فرایندی است که در بستر اموری هدایت شده با مشارکت دانش‌آموزان اتفاق می‌افتد و طی آن آنها ضمن کار و فعالیت کلاسی به درک بهتر مفاهیم نایل شده و بانحوه شکل‌گیری و صورت‌بندی موضوع علمی نایل می‌شوند. از همه همکاران و دبیران محترم ریاضی انتظار می‌رود تا سعی وافر نموده تا کلاس درس آنان به کلاسی فعال تبدیل گردد و از این طریق استعدادهای خدادادی دانش‌آموزان رشد و تعالی یافته و در نتیجه درک درستی از ریاضیات پیدا کرده و بتوانند از آن در سایر موارد علمی و کاربردی استفاده بهتری داشته باشند.

تهران - شهریور ۱۳۹۰

مؤلفین

فصل صفر

یادآوری مفاهیم پایه

جبر اعداد حقیقی

در این فصل به مرور مهم‌ترین مطالبی می‌پردازیم که در مباحث حساب دیفرانسیل و انتگرال بدان محتاج هستیم، این مطالب مشتمل بر مسووری مجدد بر خواص اعداد حقیقی است که دانش‌آموزان از دوره دبستان به بعد با آن آشنا شده‌اند، چنانچه شما در مطالعه حسابان و دروس پیش از آن به اندازه کافی با این مباحث آشنا شده باشید، می‌توانید آنها را به سرعت مرور کنید، با این حال باید یادآوری کنیم که تسلط بر این مفاهیم، به‌ویژه خواص ترتیبی اعداد لازمه و پیش‌شرط درک بهتر و مؤثر مفاهیم و مباحث این درس می‌باشد.

در واقع درک علمی این درس، که خود مقدمه دروس عالی‌تر ریاضیات نظیر آنالیز ریاضی است، بر دو مؤلفه مهم استوار است، یکی تسلط بر خواص نابرابری‌ها و دیگری آشنا شدن با شیوه‌های این درس که مبتنی بر روش‌های تجزیه و تحلیل و ترکیب منطق‌وار داده و نتایج آنها است.

۱-۰- اعداد حقیقی و خط حقیقی

می‌دانیم که حسابان بر خواص دستگاه اعداد حقیقی استوار است. منظورمان از دستگاه اعداد حقیقی، مجموعه اعداد حقیقی، اعمال جمع و ضرب این مجموعه و خواص جبری آن است. اعداد حقیقی اعدادی هستند که بتوان آنها را به صورت اعشاری بیان کرد. برای نمونه هر یک از اعداد ذیل یک عدد حقیقی است.

$$5 = 5/000000 \dots, \quad \frac{-3}{4} = -0/75000000 \dots$$

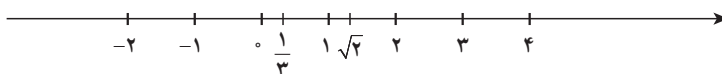
$$\frac{1}{3} = 0/33333 \dots, \quad \sqrt{2} = 1/4142 \dots, \quad \pi = 3/14159 \dots$$

در هر حالت، منظور از سه نقطه «...» آن است که دنباله ارقام همیشه ادامه دارد. البته وقتی دنباله ارقام تکراری و از جایی به بعد همیشه برابر صفر باشند از نوشتن آنها صرف نظر می‌گردد.

$$5 = 5, \quad \frac{3}{4} = 0.75$$

اما برای سه عدد بعدی چنین نیست. تفاوت اساسی در باب این اعداد وجود دارد، برای سه‌تای اولی الگوی تکرار ارقام بدیهی و روشن است و دنباله ارقام بر ما معلوم می‌باشد، لیکن برای $\sqrt{2}$ و π هیچ الگوی شناخته شده‌ای برای روند تکرار ارقام وجود ندارد. سه عدد نخست را گویا و دوتای آخر یعنی $\sqrt{2}$ و π را گنگ یا اصم می‌نامیم. بنابراین اعداد حقیقی به دو دسته بزرگ یعنی اعداد گویا و اعداد گنگ تقسیم می‌شوند. نکته جالب‌تر آن است که هر دو دسته به گونه‌ای بسیار فشرده و در کنار هم باهم به نوعی تنیده شده‌اند.

به زبان هندسی، اعداد حقیقی را می‌توانیم به صورت نقاط یک خط مستقیم نشان دهیم. چنین خط مستقیمی را خط حقیقی یا محور حقیقی می‌نامیم. هر عدد حقیقی، چه گویا و چه گنگ، متناظر نقطه‌ای بر این خط است و برعکس هر نقطه این خط نظیر یک و تنها یک عدد حقیقی است. (شکل زیر)



خواص اعداد حقیقی را می‌توان در سه رده دسته‌بندی کرد، (۱) خواص جبری (۲) خواص ترتیب، (۳) خواص مربوط به پیوستاری اعداد حقیقی.

شما در طول تحصیلات خود، حتی از دوره ابتدایی با خواص جبری اعداد حقیقی آشنایی دارید. اما باید گفت که این آشنایی شما بیشتر جنبه تجربی داشته تا صورت ریاضی! چرا؟ برای نمونه، شما می‌دانید که مثلاً جمع اعداد خاصیت جابه‌جایی دارد.

$$2 + 3 = 3 + 2$$

$$-1 + 4 = 4 + (-1) = 4 - 1$$

$$2 + (\sqrt{3} + \frac{1}{4}) = (2 + \sqrt{3}) + \frac{1}{4} \quad \text{و یا آنکه}$$

اما برقراری این گونه تساوی‌ها از راه تجربه حاصل شده است. در واقع تساوی‌های موردی مانند تساوی‌های فوق نیاز به برهان و استدلال نداشته است. اما وقتی این گونه خواص اعداد را بخواهیم در قالب یک کلیت و به شکل یک حکم کلی ریاضی بیان کنیم دیگر با تجربه درستی آنها بر ما معلوم نخواهد شد. چرا؟

بهرتر است صورت کلی چنین تساوی‌هایی را بیان داریم. به ناچار محتاج استفاده از حروف خواهیم شد.

$$a + b = b + a \text{ همواره}$$

یا آنکه بگوییم

$$a + b = b + a, \text{ برای هر دو عدد } a \text{ و } b$$

به زبان عادی منظورمان این است که برای هر دو عدد حقیقی a و b ، حاصل جمع a با b با حاصل جمع b با a برابر است. به عبارت «برای هر دو عدد حقیقی a و b » توجه کنید. اگر ما برای یکصد زوج از اعداد حقیقی با یک میلیون زوج از اعداد a و b ، حاصل دوطرف را حساب کرده و متوجه درستی تساوی‌ها شویم، درستی حکم کلی را محقق نساخته‌ایم. دلیل آن نامتناهی بودن و یا به اصطلاح عامیانه بی‌پایان بودن مجموعه اعداد حقیقی است. یکصد سال، یک میلیون سال و یا چند میلیارد سال که وقت صرف کنیم و تجربه کنیم ادعایمان محقق نمی‌شود زیرا مجموعه اعداد حقیقی بی‌پایان و نامتناهی است. زیاد ناراحت نباشید! ظاهراً راه حل ساده‌ای وجود دارد و آن وضع تئوری‌وار مجموعه اعداد حقیقی به صورت سامان‌یافته می‌باشد که آن را دستگاه اعداد حقیقی می‌نامیم. این راه حل ساده از این قرار است که وقتی برای درستی یک حکم بتوانیم دلیلی مستدل و منطقی اقامه کنیم و یا آنکه به عللی اصولاً نخواهیم دلیلی بیاوریم، آن حکم را تحت عنوان اصل موضوع (اصل) مطرح می‌کنیم. بنابراین اصل موضوع حکم یا گزاره‌ای است که آن را بدون دلیل و برهان می‌پذیریم. البته شواهد تجربی برای بسیاری از موارد الهام‌بخش ریاضیدانان و واضح‌کننده تئوری‌ها در انتخاب اصل‌های آن تئوری است. خلاصه کلام آنکه شما تاکنون با خواص جبری اعداد حقیقی به صورت تجربی آشنا شده‌اید، چنین خواصی مدعی‌اند که اعداد حقیقی را می‌توان باهم جمع کرد و حاصل عددی حقیقی خواهد بود. اعداد حقیقی را می‌توان باهم ضرب کرد و حاصل عددی حقیقی است. همچنین قواعد معمول حساب، از جمله دو قاعده فوق‌الاشاره، برقرارند. اینک برخی از این احکام را در قالب اصل موضوع (اصل) بیان می‌داریم.

مجموعه اعداد حقیقی را در مابقی این کتاب به R نشان می‌دهیم.

۲-۰- اصل‌های جمعی

(ج ۱) در R یک عمل دوتایی وجود دارد که آن را جمع می‌نامیم. این عمل که در واقع یک تابع است با نماد $+$ نشان داده می‌شود. مقدار این تابع را به ازای زوج مرتب (a, b) به $a + b$ نشان می‌دهیم که در آن a, b و $a + b$ اعداد حقیقی‌اند. لذا حاصل عمل جمع بر هر زوج از اعداد حقیقی خود یک

عدد حقیقی است.

$$(ج ۲) \text{ برای هر دو عدد حقیقی } x \text{ و } y \text{ داریم } x + y = y + x$$

این اصل را خاصیت جابه‌جایی جمع می‌نامیم.

$$(ج ۳) \text{ برای هر سه عدد حقیقی } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ داریم: } (x + y) + z = x + (y + z)$$

این اصل را خاصیت شرکت‌پذیری R می‌نامیم.

(ج ۴) وجود عضو همانی جمع، R شامل عددی است به نام \circ (صفر)، به طوری که به ازای هر

$$\text{عدد حقیقی } x, x + \circ = x$$

(ج ۵) وجود عضو قرینه، به ازای هر عدد حقیقی x ، عضوی از R مانند y وجود دارد به طوری

$$\text{که } x + y = \circ$$

با استفاده از این پنج اصل، می‌توانیم خواص دیگری از مجموعه اعداد حقیقی را به دست آوریم، اکنون در واقع ما با یک دستگاه جبری سروکار داریم، یعنی مجموعه اعداد حقیقی R به انضمام یک عمل دو تایی که در اصل‌های فوق صدق می‌کند. اینک به عنوان نمونه برخی نتایج منطقی را در باب R اثبات می‌کنیم.

❖ **مثال:** ثابت کنید عضو صفر از R منحصر به فرد است.

✍ **حل:** فرض کنیم O_1 و O_2 هر دو نقش صفر یعنی عضو همانی جمع R را داشته باشند در این صورت

$$O_1 = O_1 + O_2 \quad (\text{با توجه به همانی بودن } O_2)$$

$$= O_2 + O_1 \quad (\text{با توجه به خاصیت جابه‌جایی})$$

$$= O_2 \quad (\text{با توجه به همانی بودن } O_1)$$

شما نیز می‌توانید برخی از خواص اعداد حقیقی را ثابت کنید.

❖ **مثال:** ثابت کنید عضو قرینه هر عدد حقیقی منحصر به فرد است.

❖ **برهان:** فرض کنیم y_1 و y_2 هر دو قرینه عدد حقیقی x باشند. در این صورت

$$y_2 = y_2 + \circ \quad (\text{با توجه به ج ۴})$$

$$= y_2 + (x + y_1) \quad (\text{با توجه به ج ۵})$$

$$= (y_2 + x) + y_1 \quad (\text{با توجه به ج ۳})$$

$$= \circ + y_1 \quad (\text{با توجه به ج ۵})$$

$$= y_1 \quad (\text{با توجه به ج ۲ و ج ۳})$$

معمولاً قرینه عدد حقیقی x را با نماد $-x$ و همچنین حاصل جمع $x + (-y)$ را به شکل ساده $x - y$ می‌نویسیم و آن را تفاضل x و y می‌نامیم.

به عنوان مثال دیگری از خواص اعداد حقیقی به مثال زیر توجه می‌کنیم.

❖ **مثال:** برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید . $-(x + y) = -x - y$

✍ **حل:** منظور از $-(x + y)$ قرینه $x + y$ است. پس باید نشان دهیم که :

$$(x + y) + (-x - y) = 0$$

داریم :

$$x + y + (-x - y) = (y + x) + (-x - y) \quad (\text{جاب‌جایی جمع})$$

$$= y + [(x - x) - y] \quad (\text{شرکت‌پذیری})$$

$$= y + (0 - y)$$

$$= y + (-y)$$

$$= 0$$



۱- ثابت کنید برای هر عدد حقیقی x ، $-(-x) = x$

۲- برای هر سه عدد حقیقی x, y, z اگر $x + z = y + z$ آنگاه $x = y$ (قانون حذف)

۳-۰ ضرب اعداد حقیقی

از تجربیاتمان می‌دانیم که ضرب دو عدد حقیقی، عددی حقیقی است. این ویژگی را به عنوان یک اصل می‌پذیریم، به علاوه برخی از ویژگی‌های دیگر اعداد حقیقی را در رابطه با عمل ضرب نیز به

عنوان اصل می‌پذیریم از آن جمله برای هر دو عدد حقیقی x و y ، $xy = yx$

برای هر سه عدد حقیقی x و y و z ، $x(yz) = (xy)z$

عددی به نام یک (با نماد ۱) وجود دارد به قسمی که $1 \neq 0$ و برای هر عدد حقیقی x ، برای هر عدد حقیقی غیرصفر مانند x ، عددی حقیقی مانند y وجود دارد به قسمی که y را وارون x می‌نامیم.

$$xy = 1$$

در رابطه با عمل جمع، خاصیت زیر، به عنوان خاصیت توزیع‌پذیری ضرب روی جمع برقرار

است

$$(*) \quad x(y + z) = xy + xz$$

البته منظورمان حکم کلی است و گرنه در باب اعداد خاص، بارها درستی (*) را تجربه کرده ایم. به طور کلی وقتی حکمی مانند (*) بر حسب حروف بیان می شود منظور حکم کلی است. در واقع (*) صورت ساده تر حکم زیر است.

برای هر سه عدد حقیقی x و y و z ، $x(y+z) = xy + xz$ ،

اکنون، با داشتن این احکام می توانیم برخی دیگر از ویژگی های ضرب R را ثابت کنیم.

❖ **مثال:** وارون هر عدد حقیقی (غیرصفر) منحصر به فرد است.

✍ **حل:** فرض کنیم y_1 و y_2 هر دو وارون x باشند، پس

$$xy_1 = 1 \quad , \quad xy_2 = 1$$

می نویسیم :

$$y_1 = y_1 \times 1 = y_1 (xy_2) = (y_1x)y_2 = (xy_1)y_2 = 1y_2 = y_2$$

بنابراین حق داریم وارون x را با نماد x^{-1} نشان دهیم، گاهی وارون x را با $\frac{1}{x}$ نیز نشان

می دهیم.

❖ **مثال:** وارون وارون x برابر x است، به زبان نمادی

$$(x^{-1})^{-1} = x$$

✍ **حل:** باید نشان دهیم $(x^{-1})x = 1$ تا طبق تعریف، x نقش وارون x^{-1} را داشته باشد، اما این تساوی خود طبق تعریف وارون برقرار است.

قرارداد: حاصل ضرب $x \cdot \frac{1}{y}$ را به شکل ساده تر $\frac{x}{y}$ می نویسیم، در واقع حاصل تقسیم

x بر y می باشد.

تذکر مهم: باید توجه داشت که عدد 0 وارون ندارد، بنابراین نوشتن عبارتهایی نظیر $\frac{1}{0}$ ، $\frac{2}{0}$ ، یا $\frac{x}{0}$ و کلاً کسرهایی با مخرج صفر بی معنی بوده و از آن باید مؤکداً احتراز گردد. تفسیرهای غلطی که در خصوص این گونه عبارتها از قبیل اینکه $\frac{1}{0} = \infty$ می شود ناشی از عدم توجه کسانی است که با فرایند مفهوم سازی و صورت بندی تئوری ریاضی آشنایی کافی ندارند.

البته در بخش های بعد خواهید دید که مثلاً $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ (به معنی حدی)، اما باید گفت که این

تساوی تنها به مفهوم حدی برقرار است تا آنکه در حدگیری $\frac{1}{x}$ را با $\frac{1}{0}$ جایگزین کرده و از این غلط

فاحش استفاده کنیم و آن را برابر ∞ قلمداد نماییم!

- ۱- ثابت کنید برای هر سه عدد حقیقی x, y و z ، $x(y-z) = xy - xz$ ،
 ۲- ثابت کنید هرگاه $xy = 0$ آنگاه $x = 0$ یا $y = 0$ و عکس این حکم برقرار است.

۳- برای هر دو عدد حقیقی x و y

الف) $x(-y) = (-x)y = -(xy)$

ب) $(-x)(-y) = xy$

۴- بسط اعشاری اعداد گویا

بسط اعشاری یک عدد گویا، یک عدد اعشاری پایان پذیر نظیر

$$\frac{3}{2} = 1.5, \quad \frac{3}{4} = 0.75$$

و یا یک بسط اعشاری پایان ناپذیر متناوب ساده یا مرکب است نظیر

$$\frac{2}{3} = 0.666\dots = 0.\overline{6} \text{ بسط اعشاری متناوب ساده}$$

$$\frac{5}{6} = 0.8333\dots = 0.\overline{83} \text{ بسط اعشاری متناوب مرکب}$$

در بسط اعشاری متناوب ساده و یا مرکب، دسته ارقامی که مرتب تکرار می شوند را دوره گردش عدد نامند. و بالای ارقامی که دوره گردش اند خط کشیده شده است و تعدادی رقم که بین دوره گردش و ممیز قرار دارند ارقام غیرگردش نامیده می شوند.

$$\frac{7}{13} = 0.\overline{538461}, \quad \frac{1}{56} = 0.0017857142$$

❖ نتیجه: اگر یک بسط اعشاری متناوب (ساده یا مرکب) داشته باشید، می توانید از فرمول زیر، کسر یا عدد گویای مساوی آن را به دست آورید.

فرض کنید $a_1 a_2 \dots a_m$ ارقام غیرگردش و $b_1 b_2 \dots b_n$ ارقام دوره گردش عدد باشند، در این

$$\frac{0.a_1 a_2 \dots a_m \overline{b_1 b_2 \dots b_n}}{0.a_1 a_2 \dots a_m} = \frac{a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n - a_1 a_2 \dots a_m}{\underbrace{99\dots 9}_{n \text{ تا ه}} \underbrace{0\dots 0}_{m \text{ تا صفر}}}$$

صورت (۱)

مثال های زیر، نحوه استفاده از فرمول (۱) را نشان می دهند.

$$0.\overline{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad 0.\overline{01785} = \frac{1785-1}{99900} = \frac{446}{24975}$$

هر عدد حقیقی که بسط اعشاری آن، پایان ناپذیر ولی متناوب نباشد، گنگ یا اصم نامیده می‌شود. بنابراین اعداد گنگ، اعدادی هستند که بسط اعشاری آنها بی‌پایان است ولی متناوب نیستند مانند:

$$\sqrt{2} = 1/414213562\dots$$

$$\pi = 3/141592653\dots$$

$$e = 2/7182818284\dots$$

❖ **قضیه ۱:** اگر a عددی گویا و غیرصفر باشد و b عددی گنگ، اعداد $a \pm b$ و ab و $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ گنگ هستند.

همان‌طور که می‌دانید در مجموعه اعداد گویا، هر دو عدد گویا را باهم جمع یا تفریق و یا درهم ضرب کنیم حاصل عددی است گویا (اصطلاحاً گوییم مجموعه اعداد گویا، نسبت به عمل جمع و ضرب و تفریق بسته است) و اما مجموعه اعداد گنگ نسبت به هیچ‌یک از اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم بسته نیست زیرا:

$$\sqrt{2} \text{ عددی گنگ است و بنابر قضیه ۱، اعداد } \sqrt{2} - 3 \text{ و } \sqrt{2} + 3 \text{ و } \sqrt{2} - \sqrt{2} \text{ و } 3\sqrt{2} = \sqrt{18}$$

گنگ هستند ولی

$$(3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 6 \in \mathbb{Q}$$

$$(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 7 \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = 3 \in \mathbb{Q}$$

ابوریحان بیرونی

اصم گر بود زیرا جواب ندهد، جوینده را آلا به تقرب مثل $\sqrt{10}$ که برای آن هرگز نتوان عددی یافت که اگر آن را در خود زنی 10 بود.

۵-۰ - تقریب اعداد گنگ

می‌دانیم که بسط اعشاری هر عدد گنگ به صورت کسری اعشاری با ارقام نامتناهی و بی‌پایان است که در آن این ارقام طبق هیچ ضابطه و نظم معینی رخ می‌دهند. به لحاظ تاریخی $\sqrt{2}$ و π (عدد ارشمیدس) مشهورترین اعداد گنگ‌اند. $\sqrt{2}$ در رابطه با محاسبه طول قطر یک مربع به ضلع واحد

پدیدار گشت و π توسط ارشمیدس به عنوان ثابت دایره کشف گردید. همه دواير موجود در عالم، چه کوچک و چه بزرگ، درگیر عدد π هستند، بدین معنی که نسبت محیط هر دایره بر طول قطر آن عددی است که به π نشان داده می‌شود. قرار دادن حرف π برای چنین عددی خود مبین این واقعیت است که این عدد گویا نیست. در طول تاریخ ریاضی محاسبه جزء اعشاری π ، یعنی شناخت ارقام اعشاری آن، یکی از جذاب‌ترین فعالیت‌های ریاضی به‌شمار رفته است، علت این امر را می‌توانیم در چند جهت مطرح کنیم. مثلاً استفاده از π در محاسبه مساحت و محیط دایره.

داشتن تقریبات بهتر π برای استفاده در محاسبات دقیق‌تر نجومی است، به هر حال ارقام اعشاری π بی‌هیچ نظمی ادامه دارد و بشر طالب آن است که تا آنجا که برایش مقدور است، این ارقام را شناسایی کند.

در ریاضیات عالی به‌صورتی تئوریک ثابت می‌شود که π گنگ است.

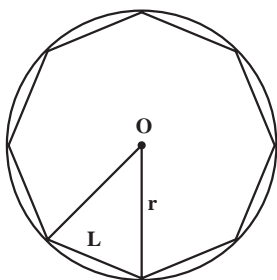
محاسبات ارقام اعشاری π طی چندین قرن گذشته مؤید این نتیجه مهم است و لذا می‌توان ادعا کرد که قدرت تئوری پردازي ریاضی مبتنی بر پیش‌بینی پدیده‌های ریاضی با تجربیات پیچیده محاسباتی سازگاری تام و تمام دارد و این یکی از زیبایی‌های علوم ریاضی است. ذیلاً به اختصار محاسبه و تولید ارقام اعشاری π را به لحاظ تاریخی جهت آشنایی مرور می‌کنیم: ارشمیدس، که در قرن سوم قبل از میلاد می‌زیسته، نشان داد که:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

وی این امر را با استفاده از ۹۶ ضلعی‌های منتظم ثابت کرد که درون دایره به شعاع واحد محاط می‌شدند.

سپس پتولمی^۱ در قرن سوم بعد از میلاد، با استفاده از ۳۶۰ ضلعی منتظم مقدار ۳/۱۴۱۶۶۶... را برای π به دست آورد که تا سه رقم اعشار صحیح می‌باشد در سال ۲۶۳ بعد از میلاد لیوهوی^۲ با استفاده از ۹۶ ضلعی منتظم و یک ۱۹۲ ضلعی منتظم و محاسبه میانگین مقادیر به دست آمده عدد ۳/۱۴۱۸۶۴ را برای π به دست آورد که خطای این تقریب کمتر از ۰/۰۱ می‌باشد.

غیاث‌الدین جمشید کاشانی



کاشانی ریاضیدان مسلمان ایرانی، به‌جای محاسبه π به محاسبه 2π پرداخته است. روش کاشانی درج چندضلعی‌های منظم و محاسبه تقریبی محیط آنها و سپس استخراج نسبت این محیط به شعاع دایره مربوطه بوده است برای مثال هرگاه یک هشت‌ضلعی منظم را درون دایره به شعاع r محاط کنیم و طول ضلع این هشت‌ضلعی را L بنامیم، نسبت مربوطه برابر $\frac{8L}{r} \approx 2\pi$ خواهد بود.

کاشانی ارقام 2π را تا ۱۶ رقم دقیقاً محاسبه کرده است و این محاسبه بسیار بسیار دقیقتر از محاسبه ارقام π بوده است که قبل از او به‌دست آمده است. دقت محاسبات کاشانی به‌گونه‌ای است که تا ۲۰۰ سال بعد از او توسط هیچ‌کس از او پیشی نگرفته بود و فقط لودوف^۱ توانست ۲۰۰ سال بعد از او عدد π را تا ۲۰۰ رقم اعشار محاسبه کند. ماکزیم خطای کاشانی در محاسبه کمتر از $\frac{1}{9}$ است. و این بدان معنی است که کاشانی عدد 2π را تا ۱۶ رقم اعشار بعد از ممیز دقیقاً به دست آورده است که با محاسبات رایانه‌های امروزی تطابق دارد!

کاشانی این مقدار دقت را با محاسبه محیط یک $3 \times 2 \times 10^{18}$ ضلعی منظم به‌دست آورده است و در دوره بعد، که با پیشرفت حسابان پیشرفته (آنالیز ریاضی) اتفاق افتاد محاسبه ارقام اعشاری π با استفاده از فرمول‌های آنالیزی میسر گردید، همچنین لئونارد اویلر فرمول $\pi = 2 \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 8 \tan^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{79}}\right)$ را به‌دست آورد.

روش‌های محاسبه π با استفاده از رایانه از سال ۱۹۶۱ شروع گردید. این روش‌ها مؤثرترین و کارآمدترین روش‌های محاسبه π را با استفاده از تئوری‌های ریاضی و حساب‌گرهای فوق‌مدرن عرضه می‌کنند.

^۱ - Ludolph van culen

در اولین پروژه تحقیقاتی تحت نام پروژه گوتنبرگ اعشار π را تا یک میلیون رقم محاسبه کردند. سپس یاساما کانادا از دانشگاه توکیو توانست تعداد ۱۲۴۱۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ را رقم اعشار از π را با دقت به دست آورد. این محاسبه در سال ۲۰۰۲ توسط یک سوپر رایانه هیتاچی، که ۲ تریلیون عمل را در هر ثانیه انجام می‌داد، صورت پذیرفت. در دسامبر ۲۰۰۹ یک سوپر کامپیوتر ژاپنی به نام T2kopen Supercomputer ادعا کرده است که عدد π را تا ۲۶۰۰ میلیارد رقم اعشار طی ۷۳ ساعت و ۳۶ دقیقه به دست آورده است. باز هم در این ارقام هیچ‌گونه نظم و قاعده‌ای حاکم نیست^۱.

این نکته را باید متذکر شویم که تا هر تعداد از ارقام π که محاسبه شود و بقیه ارقام را نادیده بگیریم در واقع با تقریبی از π به شکل یک عدد گویا دست یافته‌ایم. البته با مقدار واقعی π به شکل همه ارقام اعشاری آن هرگز کار نخواهیم کرد که این امری غیرممکن است. این رویه برای کار عملی با سایر اعداد گنگ نیز مرسوم است. در واقع با تقریبات اعداد گنگ در عمل کار خواهد شد.

کاشانی معتقد بود که مقدار واقعی عدد π را فقط خدا می‌داند. در واقع کاشانی با شهودی الهام‌گونه دریافته بود که π عددی گنگ است. اما اثبات گنگ بودن π قرن‌ها بعد انجام گرفت^۲.



غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضیدان و منجم ایرانی

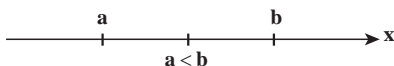
۱- در مدت نگارش این کتاب ارقام اعشاری π با استفاده از سوپر رایانه‌ها تا بیش از ۳۰۰۰ میلیارد رقم توسط محققین ژاپنی محاسبه شده است.

۲- داستان محاسبه ارقام π را صرفاً جهت آشنایی شما آورده‌ام تا متوجه شوید که چگونه محاسبات تکنولوژی پیشرفته با نظریه‌های ریاضی همخوانی دارد و این یکی از قوت‌های بارز نظریه‌پردازی ریاضیات است که در حالی با استفاده از تئوری‌های جبری و آنالیز ثابت می‌کند π گنگ است، محاسبه ارقام آن با استفاده از سوپر رایانه‌ها نیز مؤید این حقیقت ریاضی است.

۶-۰- ترتیب و نامساوی‌ها

یکی از خواص مهم اعداد حقیقی مرتب بودن آنها است.

تعریف ترتیب خط حقیقی: هرگاه a و b اعداد حقیقی باشند، آنگاه a کوچکتر از b است اگر $b - a$ مثبت باشد. این ترتیب را با نامساوی $a < b$ (یا $b > a$) نشان می‌دهیم. علامت $a \leq b$ یعنی a کوچکتر یا مساوی b



عبارت b بزرگتر از a است. هم‌ارز a کوچکتر از b است. خواص زیر اغلب در نامساوی‌ها به کار می‌روند. اگر $<$ را با \leq و $>$ را با \geq عوض کنیم، خواص مشابهی به دست می‌آیند.

خواص نامساوی‌ها

- (۱) هرگاه $a < b$ و $b < c$ ، آنگاه $a < c$.
- (۲) هرگاه $a < b$ و $c < d$ ، آنگاه $a + c < b + d$.
- (۳) هرگاه $a < b$ و c عددی حقیقی باشد، آنگاه $a + c < b + c$.
- (۴) هرگاه $a < b$ و $c > 0$ ، آنگاه $ac < bc$.
- (۵) هرگاه $a < b$ و $c < 0$ ، آنگاه $ac > bc$.
- (۶) (اگر a و b مثبت باشند) $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. [\Leftrightarrow به معنی هم‌ارزی است].
- (۷) (اگر a و b مثبت باشند) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

❖ **تبصره:** توجه کنید که نامساوی‌ها با ضرب در عددی منفی تغییر جهت می‌دهد. مثلاً، هرگاه $x < 5$ ، آنگاه $-3x > -15$. این ویژگی در تقسیم بر عددی منفی نیز صادق است. مثلاً، هرگاه $-3x > 9$ ، آنگاه $x < -3$.

اگر سه عدد حقیقی a ، b ، c چنان باشند که $a < b$ و $b < c$ ، می‌گوییم b بین a و c است و می‌نویسیم $a < b < c$.

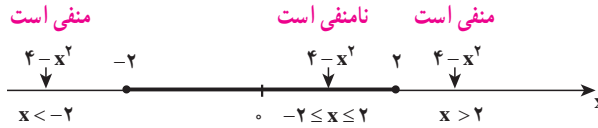
۰-۲- بازدهای اعداد

در حساب دیفرانسیل و انتگرال اغلب تعیین مثبت، صفر یا منفی بودن عبارات اهمیت دارد مثلاً برای معادله $y = \sqrt{4 - x^2}$ که متغیر y را بر حسب متغیر x بیان می‌کند، چون جذر یک عدد منفی در \mathbb{R} بی‌معنی است، باید برای حقیقی بودن y شرط $(4 - x^2) \geq 0$ اعمال شود. این

شرط معادل عبارت زیر است.

$$-2 \leq x \leq 2$$

در نتیجه، مجموعه اعداد نموده شده با x بازه‌ای است با نقاط انتهایی ± 2 بر خط حقیقی (شکل زیر)



نظیر شکل فوق اغلب زیر مجموعه‌های خط حقیقی یعنی مجموعه اعدادی که یک متغیر را نمایش می‌دهند بازه یا اجتماعی از بازه‌ها می‌باشند.

بازه‌ها چند نوع‌اند، که هر یک نمادی خاص خود دارد.

مثلاً، بازه باز $(a, b) = \{x: a < x < b\}$ تمام اعداد حقیقی بزرگتر از a و کوچکتر از b است، که در آن a و b نقاط انتهایی بازه نام دارند و این نقاط انتهایی در بازه باز قرار ندارند.

بازه‌هایی که شامل نقاط انتهایی خود باشند بازه بسته نام داشته و با نماد $[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\}$ نموده

می‌شوند. در جدول (۱) نه بازه اصلی روی خط حقیقی نموده شده‌اند. که چهارتای اول را بازه‌های کراندار و پنج‌تای دیگر را بازه‌های بی‌کران می‌نامند.

جدول (۱)

نمودار روی خط	نماد مجموعه	نماد بازه	نام
	$\{x: a < x < b\}$	(a, b)	بازه باز
	$\{x: a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	بازه بسته
	$\{x: a \leq x < b\}$	$[a, b)$	بازه‌های نیم‌باز
	$\{x: a < x \leq b\}$	$(a, b]$	
	$\{x: x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	بازه‌های نامحدود
	$\{x: x < a\}$	$(-\infty, a)$	
	$\{x: b < x\}$	$(b, +\infty)$	
	$\{x: b \leq x\}$	$[b, +\infty)$	
	$\{x \text{ عددی حقیقی است} : \}$	$(-\infty, +\infty)$	

❖ **تبصره:** علائم $+\infty$ و $-\infty$ نمایش اعدادی حقیقی نبوده و فقط با آنها می‌توان شرایط بی‌کران

را خلاصه‌تر بیان کرد.

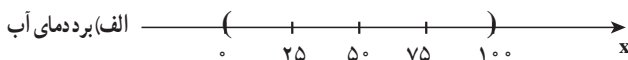
مثلاً بازه $[b, +\infty)$ از راست بی کران است. زیرا شامل همه اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی b است.

❖ **مثال:** با فرض اینکه فشار هوا یک اتمسفر است بازه‌هایی از خط حقیقی را توصیف کنید که نظیر بُرد دمای (به درجهٔ سلسیوس) آب در دو حالت زیر باشند.

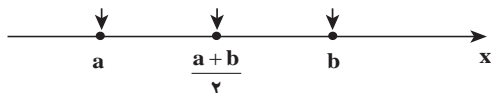
حل: الف) مایع (ب) بخار

الف) چون آب در شرایط مایع دمایی بیش از 0° و کمتر از 100° دارد بازهٔ $\{x: 0 < x < 100\} = (0, 100)$ را مثل شکل زیر قسمت (الف)، خواهیم داشت.

ب) چون آب در شرایط گاز (بخار) دمایی بزرگتر یا مساوی 100° دارد بازهٔ $\{x: 100 \leq x\} = [100, +\infty)$ را مثل شکل زیر قسمت (ب) خواهیم داشت.

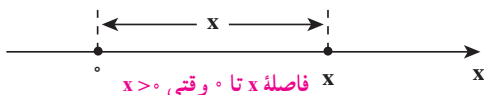


بازه متقارن: فرض کنیم (a, b) یک بازه باشد. معلوم است که عدد $\frac{a+b}{2}$ به این بازه تعلق دارد (چرا؟) این نقطه را نقطه میانی بازه می‌نامیم زیرا فاصله آن تا نقاط انتهایی a و b یکسان است.

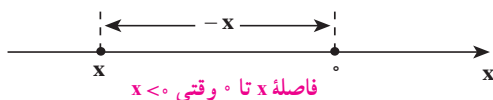


هرگاه $\delta > 0$ ، بازه $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ بازه‌ای با نقطه میانی x_0 و شعاع δ است. چنین بازه‌هایی را بازه متقارن نیز می‌نامیم.

اغلب دانستن اینکه نقطهٔ x از خط حقیقی چقدر تا مبدأ فاصله دارد مهم است. همان‌طور که شکل زیر نشان داده، اولین حدس ممکن است x باشد.



اما اگر $x < 0$ ، فاصله x نیست بلکه $-x$ است (شکل زیر) مثلاً اگر $x = -5$ ، فاصله $-x = -(-5) = 5$ می‌باشد. توضیح اینکه فاصله همیشه عددی نامنفی است.



برای بیان مقدار $\sqrt{x^2}$ می‌توان برحسب حالات، چنین نوشت:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{اگر} \\ \text{اگر} \end{array}$$

علامت دیگر استفاده از $|x|$ است که در تعریف زیر دقیقاً عرضه شده است.

۰ - ۸ - قدر مطلق

هرگاه $x \in \mathbb{R}$ ، قدر مطلق x عبارت است از:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{اگر} \\ \text{اگر} \end{array}$$

❖ **مثال:** با استفاده از دو قسمت تعریف، قدر مطلق -5 را بیابید.

$$|-5| = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

حل: 

قضایای زیر چند خاصیت مفید قدر مطلق را بیان می‌دارند.

قضیه (اعمال با قدر مطلق): هرگاه a و b اعداد حقیقی بوده و n عدد صحیح مثبتی باشد،

آنگاه خواص زیر برقرار می‌باشند.

$$|a^n| = |a|^n \quad (۳) \qquad \frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0 \quad (۲) \qquad |a \cdot b| = |a| |b| \quad (۱)$$

اثبات به عهده دانش‌آموز.

قضیه (نامساوی‌ها و قدر مطلق): هرگاه a و b اعدادی حقیقی بوده و k مثبت باشد، خواص

زیر برقرار می‌باشند.

$$(۱) \quad -|a| \leq a \leq |a|$$

$$(۲) \quad |a| \leq k \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad -k \leq a \leq k$$

$$(۳) \quad |a| \geq k \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad a \geq k \quad \text{یا} \quad a \leq -k$$

$$(۴) \quad \text{نامساوی مثلثی:} \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

خواص ۲ و ۳ در صورت تعویض \leq با $>$ نیز درست‌اند. این احکام را برحسب $<$ بنویسید.

❖ **برهان:** خاصیت‌های ۲ و ۴ را ثابت کرده و اثبات دو خاصیت دیگر را به عنوان تمرین به

عهده دانش‌آموز می‌گذاریم.

برای برهان خاصیت ۲، فرض کنید $|a| \leq k$ ، چون $|a| \leq a \leq |a|$ نتیجه می‌شود

$$-k \leq -|a| \leq a \leq |a| \leq k$$

$$-k \leq a \leq k$$

یعنی

حال فرض کنید $-k \leq a \leq k$ ، اگر $a \geq 0$ ، $|a| = a \leq a$ و اگر $a \leq 0$ ، $|a| = -a \leq a$ از این رو در هر حالت $|a| \leq k$.

اثبات (۴) چون $|a| \leq a \leq |a|$ و $-|a| \leq b \leq |a|$ بنابراین $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$ و بنابر قضیه $|a + b| \leq |a| + |b|$

❖ **مثال:** نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی a و b

$$|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$

$$|a| - |b| \leq |a - b| \quad (۱)$$

حل: طبق نامساوی مثلثی

پس

از طرف دیگر طبق نامساوی مثلثی

$$|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b| \quad (۲)$$

$$|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

و از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود



نامساوی مثلثی را برای سه عدد a_1 ، a_2 و a_3 بیان و اثبات کنید. آیا صورت کلی تری (برای n عدد) از این نامساوی می‌توانید بیان کنید؟

مسائل

۱- نامعادله $\frac{5}{x-1} < -\frac{2}{x}$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را روی خط حقیقی نشان دهید.

۲- جواب نامعادله‌های زیر را به صورت بازه و یا اجتماعی از بازه‌ها پیدا کنید.

الف) $3x + 5 \leq 8$ ب) $5x - 3 \leq 7 - 3x$

ج) $x^2 < 9$ د) $\frac{1}{2-x} < 3$

۳- هریک از نامساوی‌های زیر یک بازه را مشخص می‌سازد. این بازه را بنویسید.

الف) $|x - 2| \leq 2$ ب) $|2x + 5| < 1$ پ) $\left| 2 - \frac{x}{2} \right| < \frac{1}{2}$

ت) $|3x - 7| < 2$ ث) $|5 - 3x| < 3$

۴- جواب‌هایی از نابرابری $|x^2 - 4| < 1$ را به دست آورید که در بازه متقارن $(\frac{1}{10}, 2 + \frac{1}{10})$ قرار داشته باشند.

۵- جواب‌هایی از نابرابری $|x^2 - 9| < \frac{1}{1000}$ را به دست آورید که در بازه متقارن $(2, 4)$ قرار داشته باشند.

۶- ثابت کنید که اگر $a < 1$ و $n \in \mathbb{N}$ آنگاه $a^n < a$.

۷- جواب‌هایی از نابرابری $\sqrt{x^2 - 9} < \frac{1}{100}$ را به دست آورید که در بازه متقارن $(\frac{1}{10}, 3 + \frac{1}{10})$ قرار دارند.

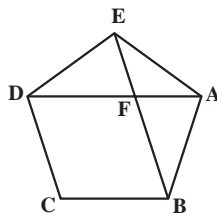
۸- فرض کنیم $a < x < b$ ، ثابت کنید $|x| < \text{Max}\{|a|, |b|\}$ (منظور از Max، ماکسیمم مقدار مجموعه است)

آیا عکس این حکم درست است؟

۹- فرض کنیم برای هر عدد مثبت h ، $a < h \leq a$ ثابت کنید $a = 0$

۱۰- ثابت کنید در هر پنج ضلعی منتظم با طول ضلع a ، نسبت طول قطر به طول ضلع، عددی گنگ است. (قضیه هیپاسوس)

راهنمایی: ابتدا نشان دهید دو مثلث ABE و FEA در شکل زیر متشابه‌اند.



۱۱- ثابت کنید $\sqrt{3}$ عددی گنگ است.

۱۲- ثابت کنید $\log_3 3$ گویا نیست.

۱۳- ثابت کنید:

نامساوی زیر (نامساوی برنولی) به ازای هر عدد طبیعی n و هر عدد حقیقی $x \geq -1$ برقرار است.

$(1+x)^n \geq 1+nx$ (راهنمایی: استقرا)

فصل ۱

دنباله‌ها

۱-۱- مقدمه

وقتی در یک برنامه تلویزیونی به حرکات و تکاپوی انبوهی از ماهی‌ها می‌نگریم، به این فکر وادار می‌شویم که رشد جمعیت ماهی‌ها از چه مدل و رابطه‌ای پیروی می‌کند. آیا می‌توانیم با توجه به شرایط زیست محیطی و تغییرات آن رشد و زوال گونه خاصی از ماهی‌ها را پیش‌بینی کنیم؟ فرض کنیم مدل جمعیتی نوع خاصی از ماهی‌ها از رابطه

$$P_{n+1} = \frac{bP_n}{a + P_n}$$

پیروی کند که در آن P_n جمعیت ماهی‌ها در سال n ام، P_{n+1} جمعیت ماهی‌ها در سال $n+1$ ام و a و b دو عدد ثابت‌اند که به شرایط محیطی ماهی‌ها وابسته‌اند.

با استفاده از این رابطه چنانچه جمعیت ماهی‌ها در سال اول، یعنی P_1 معلوم باشد، جمعیت ماهی‌ها در سال دوم و سال‌های بعد به دست می‌آید. یعنی اعداد

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$$

حاصل می‌شوند که اصطلاحاً آن را دنباله می‌نامیم. مطالعه دنباله‌ها و خواص آنها موضوع این فصل می‌باشد.

مسئله

(الف) به نظر شما براساس مدل داده شده فوق تحت چه شرایطی جمعیت ماهی‌ها افزایش می‌یابد؟

(ب) تحت چه شرایطی جمعیت ماهی‌ها کاهش یافته و جمعیت فنا می‌شود؟

با مطالعه مبحث دنباله‌ها و بررسی خواص آنها به این پرسش‌ها می‌توان پاسخ داد.

۲-۱- دنباله‌های عددی

در سال‌های قبل با اعداد اعشاری و تبدیل کسرها به اعداد اعشاری آشنا شده‌اید. برای مثال برای آن که کسر $\frac{1}{3}$ را به کسر اعشاری تبدیل کنیم کافی است عدد ۱ در صورت کسر را به عدد ۳ مخرج تقسیم کنیم در ابتدا عدد $\frac{0}{3}$ حاصل می‌شود. اگر تقسیم را ادامه دهیم اعداد $\frac{0}{33}$ ، $\frac{0}{333}$ و نظایر این‌ها به دست می‌آیند. چون باقیمانده هرگز صفر نمی‌شود این اعشار همچنان ادامه دارند. آیا $\frac{1}{3}$ با اعداد به دست آمده برابر است؟

هرگاه $\frac{1}{3}$ را برابر $\frac{0}{3}$ اختیار کنیم، مقداری تقریبی برای $\frac{1}{3}$ به دست آورده‌ایم که خطای این تقریب کمتر از $\frac{0}{1}$ است: زیرا

$$\frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{0}{333} \dots$$

و $\frac{0}{1} < \frac{0}{333} \dots$ هرگاه $\frac{1}{3}$ را برابر $\frac{0}{33}$ اختیار کنیم، خطای تقریب از $\frac{0}{1}$ نیز کوچک‌تر است. به همین نحوه هرگاه $\frac{1}{3}$ را برابر $\frac{0}{333}$ بگیریم، خطای تقریب از $\frac{0}{1}$ کوچک‌تر است. در عمل و محاسبات کاربردی خطای تقریب را از پیش معین کرده و متناسب با آن مقدار تقریب $\frac{1}{3}$ را به صورت اعشاری، با اعشار خاتمه یافته، مشخص می‌کنند.

❖ مسئله

ممکن است چنین به نظر رسد که برای آن که خطای تقریب را به صفر برسانیم بهتر است بنویسیم

$$\frac{1}{3} = \frac{0}{33333} \dots$$

اما نوشتن کسر اعشاری با نمایش $\frac{0}{33333000}$ که در آن رقم اعشاری ۳، برای همیشه ادامه دارد، چه معنا و مفهومی می‌تواند داشته باشد؟ برخی برای آنکه ۳ صدم و ۳ هزارم و ... را تکرار نکنند

$$\frac{1}{3} = \frac{0}{\overline{3}} \quad \text{می‌نویسند.}$$

اگر منظورمان از نوشتن سه نقطه «...» به دنبال آخرین ۳ این است که این رقم تا ابد ادامه دارد چگونه می‌توانیم تساوی فوق را تفسیر کنیم؟

در واقع دنباله‌ای از اعداد اعشاری به صورت

$$0/\overline{3}, 0/\overline{33}, 0/\overline{333}, \dots, 0/\overline{333\dots 3}, \dots$$

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3, \dots, a_n, \dots$$

$$a_n = 0/\overline{333\dots 3} \quad \text{۳ بار } n, \dots, a_2 = 0/\overline{33}, a_1 = 0/\overline{3} \quad \text{در دست داریم که در آن}$$

a_1 را جمله اول این دنباله، a_2 را جمله دوم و در حالت کلی، a_n را جمله n ام این دنباله یا جمله عمومی دنباله می‌نامیم.

اکنون شما احمد بفرمایید که یک دنباله را به زبان ریاضی چگونه تعریف می‌کنید؟

احمد: یک دنباله عددی مجموعه‌ای از اعداد است که این اعداد با اعداد طبیعی شماره‌گذاری شده‌اند.

دبیر: بسیار خوب. آیا می‌توانی به زبان دقیق‌تری دنباله را تعریف کنی؟

احمد: آری، هر دنباله عددی، یا به اختصار دنباله، تابعی است با دامنه مجموعه اعداد طبیعی N و هم دامنه مجموعه اعداد حقیقی R .

دبیر: بسیار خوب. شما تعریف دقیق دنباله را ارایه دادید. می‌توانی با علامات ریاضی توضیح بیشتری بدهی؟

$$a: N \rightarrow R \quad (1)$$

احمد: فرض کنیم

یک تابع، یعنی یک دنباله باشد، در این صورت $a(1)$ ، $a(2)$ ، \dots ، $a(n)$ مقادیر تابع a بوده که اعدادی حقیقی‌اند. در موقعیت کاری با دنباله‌ها، به جای $a(1)$ می‌نویسیم a_1 ، به جای $a(2)$ می‌نویسیم a_2 و به طور کلی به جای $a(n)$ می‌نویسیم a_n . لذا نماد تابعی نمایش داده شده در (۱) به صورت ساده‌تر زیر نوشته می‌شود:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

دبیر: اکنون شما حسین دو دنباله دیگر نام ببرید.

حسین: این پرسش ساده‌ای است؛ می‌توانم بنویسم:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \quad (2)$$

دبیر: اکنون این دنباله را در نظر بگیرید:

$$7, -8, 9, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots \quad (3)$$

آیا می‌توانی جمله عمومی این دنباله و یا شکل تابعی آن را بیان کنی؟
 حسین: آری، ۷ اولین جمله این دنباله است، همین ۸- دومین و ۹ سومین و $\frac{5}{6}$
 چهارمین جمله آن است. اگر نام این دنباله را b بنامیم، داریم
 $b_1 = 7, b_2 = -8, b_3 = 9, b_4 = \frac{5}{6}, b_5 = \frac{6}{7}, \dots$
 اما از شماره ۴ به بعد جملات دنباله، که همان مقادیر تابع اند، منظم هستند، پس
 می‌نویسیم

$$b_1 = 7, b_2 = -8, b_3 = 9, b_n = \frac{n+1}{n+2}, n \geq 4 \quad (4)$$

دبیر: فرق این دنباله با دنباله نموده شده در (۲) چیست؟
 حسین: دنباله‌های (۳) و (۲) فقط در سه جمله نخست با هم متفاوت‌اند. از
 شماره ۴ به بعد دو دنباله متحدند.

دبیر: آیا می‌توانیم بگوییم این دو دنباله یکی‌اند؟
 حسین: خیر؛ اما تفاوت در سه جمله تأثیری کلی در اعداد دو دنباله ندارد.
 دبیر: از دنباله‌های آشنای دیگر خاطرتان هست؟ دنباله هندسی را به خاطر دارید؟
 احمد: آری، می‌توانم چند مثال بزنم، برای نمونه یک دنباله هندسی می‌سازم:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

دبیر: درست است. این دنباله یک دنباله هندسی است که قدر نسبت آن $q = \frac{1}{2}$
 است. جملات آن مرتب کوچک و کوچکتر می‌شوند زیرا قدر نسبت آن کوچکتر از
 واحد است.

حسین: منظورتان از کوچکتر شدن چیست؟
 دبیر: منظورمان این است که جملات دنباله به عدد صفر گرایش دارند، اصطلاحاً
 گوییم حد دنباله برابر صفر است.

حسین: اما هر کسر به شکل $\frac{1}{2^{n-1}}$ ولو n خیلی بزرگ باشد، هرگز برابر صفر
 نمی‌شود.

دبیر: آری درست است. منظور از آن که حد دنباله برابر صفر است، این نیست که
 جملات دنباله برابر صفر می‌شوند، بلکه خطای آنها تا صفر به دلخواه کوچک می‌گردد.
 اجازه دهید به این مبحث بعداً بپردازیم. فعلاً به تعاریف و مقدمات دنباله ادامه می‌دهیم.

نماد دنباله : وقتی با یک دنباله مانند

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

سر و کار داریم، آن را با نماد آکولاد یعنی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ و یا مختصراً $\{a_n\}_{n=1}$ و یا حتی مختصتر با $\{a_n\}$ نشان می‌دهیم. برای مثال، دنباله‌هایی را که قبلاً حسین نام برد با $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}$ ، $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}$ نشان می‌دهیم، لذا جمله عمومی دنباله را در درون آکولاد قرار می‌دهیم و $n=1$ نشانگر آن است که شماره جملات از عدد طبیعی ۱ شروع می‌شود.

البته هرگاه دنباله، فاقد ضابطه و قانون مشخص باشد، یعنی جمله عمومی آن را نتوانیم با فرمول ساده و معین مانند $a_n = \frac{1}{n}$ بیان کنیم، چاره‌ای نداریم جز آنکه جملات دنباله را یکی یکی و به دنبال هم نام ببریم و از نماد دنباله نمی‌توانیم استفاده کنیم. از این نوع دنباله‌ها، می‌توانیم به دنباله اعدادی که نمایشگر عدد π است اشاره کنیم (یعنی اعداد آن به عدد π گرایش دارند).

$$3, 3/14, 3/1415, \dots$$

برای این دنباله هیچ قاعده و یا قانونی که بر طبق آن بتوان جملات دنباله را تولید کرد وجود ندارد (چرا؟).

♦♦ نکته ♦♦ : ممکن است با یک توالی متناهی از اعداد سر و کار داشته باشیم. در این صورت این توالی را یک دنباله متناهی می‌نامیم، مانند

$$1, 2, 3, 4, \dots, 20$$

$$-5, 5, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}$$

که اولی دنباله‌ای متناهی با 20 جمله و دومی دنباله‌ای متناهی با 6 جمله می‌باشد. اما وقتی از یک دنباله بدون قید نام برده می‌شود مرادمان یک دنباله نامتناهی است. اکنون به ذکر مثال جالبی از دنباله‌ها می‌پردازیم که نظیر تابع ثابت می‌باشد.

$$C, C, C, \dots, C, \dots \quad \text{مثال} \quad \diamond \quad \text{فرض کنیم } C \in \mathbb{R} \text{ عدد ثابتی باشد. دنباله}$$

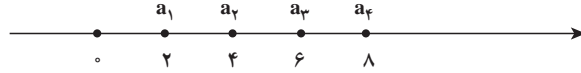
که در آن هر جمله آن برابر C ، یعنی برای هر عدد طبیعی n ، $C_n = C$ ، دنباله ثابت C نامیده می‌شود برای نمونه دنباله

$$\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{2}, \dots$$

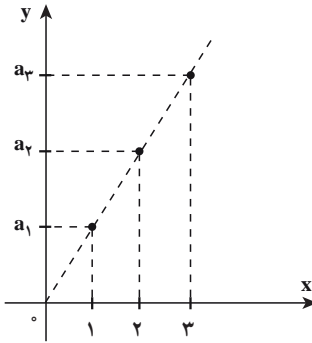
دنباله ثابت $\sqrt{2}$ یعنی $\{\sqrt{2}\}$ می‌باشد.

۳-۱- نمودار دنباله‌ها

یک دنباله را به دو صورت می‌توانیم نمایش دهیم. یک راه آن مشخص کردن جملات دنباله روی خط اعداد حقیقی است. برای نمونه دنباله اعداد زوج، یعنی $\{2n\}_{n=1}$ به صورت نقاطی روی محور اعداد نمایش داده می‌شود (شکل ۱-۱).



شکل ۱-۱- جملات دنباله $a_n = 2n$ ، یعنی اعداد طبیعی زوج با نقاط توپر روی محور اعداد حقیقی مشخص شده است.



راه دوم نمایش دنباله با استفاده از صورت تابعی آن است، همانند یک تابع نقاط دنباله را در صفحه مختصات نشان می‌دهیم. نمودار دنباله $a_n = 2n$ در شکل ۲-۱ نشان داده شده است.

شکل ۲-۱- وقتی با خط به معادله $f(x) = 2x$ مقایسه می‌کنیم، ملاحظه می‌کنیم که نمودار دنباله با ضابطه $a_n = 2n$ به صورت نقاط مجزا و توپر روی این خط قرار دارند.

۴-۱- انواع دنباله‌ها

در درس حسابان با انواع مهمی از توابع آشنا شده‌اید. مفاهیم تابع صعودی، تابع نزولی، تابع کراندار در حسابان از اهمیت اساسی برخوردارند. این مفاهیم را بار دیگر یادآوری می‌نماییم.

فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی باشد، تابع f را بر A صعودی می‌نامیم، در صورتی که همواره از $x_1 < x_2$ نتیجه شود $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، همچنین تابع f را بر A از بالا کراندار نامیم

در صورتی که عدد حقیقی U یافت شود به طوری که برای هر $x \in A$ $f(x) \leq U$

مفاهیم نزولی بودن و از پایین کراندار بودن مشابهاً تعریف می‌شوند تابع f را بر A کراندار می‌نامیم در صورتی که از بالا و از پایین کراندار باشد، یعنی عددی مثبت مانند U یافت شود به طوری که برای

هر $x \in A$ $-U \leq f(x) \leq U$

چون هر دنباله ماهیتاً یک تابع است، همین مفاهیم را می‌توانید در مورد دنباله‌ها تکرار کنید. در اینجا کار ساده‌تر است، زیرا دامنه هر دنباله مجموعه اعداد طبیعی است که به طور مرتب شده، از

کوچک به بزرگ، در نظر گرفته می‌شود:

$$1 < 2 < 3 < 4 < \dots < n < n+1 \dots$$

$$\downarrow a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

پس هرگاه دنباله $\{a_n\}$ بخواهد صعودی باشد، چون $1 < 2$ ، باید $a_1 \leq a_2$. همچنین چون $2 < 3$ باید داشته باشیم $a_2 \leq a_3$ و به طور کلی چون $n < n+1$ ، لازم است که $a_n \leq a_{n+1}$ ، یعنی هرگاه از سمت چپ به جملات دنباله بنگریم، هر جمله باید از جمله بعدی کوچکتر یا مساوی باشد.

برای دنباله نزولی وضعیت برعکس است، دنباله‌ای نزولی است که وقتی از چپ بدان می‌نگریم هر جمله از جمله بعدی بزرگتر یا مساوی است به عبارت دیگر دنباله $\{a_n\}$ صعودی است هرگاه برای هر n ، $a_n \leq a_{n+1}$ و دنباله $\{b_n\}$ نزولی است هرگاه برای هر n ، $b_n \geq b_{n+1}$ ، هر دنباله که یا صعودی و یا نزولی باشد یک دنباله یکنوا نامیده می‌شود.



به دنباله‌های زیر توجه کنید.

الف) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots, 2^{n-1}, \dots$

ب) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$

ج) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$

د) $2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \left(\frac{6}{5}\right)^5, \dots, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \dots$

اکنون مشخص کنید کدام دنباله صعودی و کدامیک نزولی است.

❖ **نکته:** در بحث دنباله، از ویژگی‌های حسابی دنباله چنان است که با افزایش شماره جمله دنباله، مقدار جملات افزایش می‌یابد، یا آن‌که وقتی دنباله‌ای از بالا کراندار است، جملات دنباله از یک عدد ثابتی بزرگتر نخواهند شد.

بررسی و مطالعه رفتار دنباله‌ها و همچنین توابع در واقع پیش‌بینی رفتار آنها است.

به دنباله‌های زیر توجه کنید.

الف) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$

ب) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, (-\frac{1}{2})^n, \dots$

ج) $2, -3, 4, -5, 6, -7, \dots$

ویژگی این دنباله‌ها چنان است که جملات آن یک در میان مثبت و منفی هستند. جملات دنباله (الف) همگی حول دو نقطه ۱ و -۱ گرد آمده‌اند و در واقع برابر ۱ یا -۱ هستند. جملات دنباله (ب) نیز حول یک عدد معین گرد آمده‌اند، در حالی که جملات دنباله (ج) فاقد چنین ویژگی هستند. هیچ‌یک از این سه دنباله نه صعودی اند و نه نزولی، پس یکنوا نیستند.

مسائل

۱- چهار دنباله زیر را در نظر بگیرید :

الف) $\{n+1\}_{n=1}^{\infty}$ ب) $\{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

ج) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ د) $\left\{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

ابتدا تعدادی از جملات هر دنباله را بنویسید. این که چه تعداد از جمله‌های نخست را انتخاب می‌کنید به خودتان بستگی دارد. سپس مشخص کنید که کدامیک صعودی و کدامیک نزولی اند. همچنین تجمع احتمالی جملات هر دنباله را حول یک عدد معین بررسی کنید.

۲- یک دنباله بسازید که کراندار باشد اما صعودی نباشد.

۳- یک دنباله بسازید که هم کراندار و هم نزولی باشد.

۴- نشان دهید که هیچ‌کدام از دو جمله از دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ برابر نیستند.

۵- ده عدد گویا معرفی کنید که بین دو عدد $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{11}$ واقع باشند.

۶- دنباله‌ای از اعداد گویا بسازید که بین دو عدد $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{11}$ واقع باشند.

۷- با بررسی جملات (اولیه) دنباله‌های زیر رفتار آنها را حدس زده و حدس خود را توضیح دهید.

الف) $\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ ب) $\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$ ج) $\{1 + (-1)^n\}$

د) $\left\{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ه) $\left\{\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2^n}\right\}$ ز) $\left\{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$

۸- دنباله $a_n = \frac{n}{n+1}$ را در نظر می‌گیریم: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

اکنون ۵ جمله نخست آن را تعویض می‌کنیم و دنباله جدید را $\{b_n\}$ می‌نامیم؛ بنابراین، برای مثال،

$$b_1=1, b_2=5, b_3=10, b_4=10, b_5=-15$$

و برای $n \geq 6$ ، قرار می‌دهیم $b_n = a_n$. رفتار دو دنباله $\{a_n\}$ ، $\{b_n\}$ را مقایسه کنید. چه نتیجه کلی از این بررسی عایدتان می‌شود؟ آن را بیان کنید.

۹- دنباله $c_n: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

را در نظر می‌گیریم. رابطه بین جملات متوالی این دنباله را پیدا کنید.

$\{c_n\}$ یک نمونه از دنباله‌هایی است که به دنباله‌های فیبوناتچی^۱ معروف‌اند.

۱۰- ثابت کنید هرگاه دنباله $\{a_n\}$ کراندار باشد، عدد مثبتی مانند M هست به قسمی که

$$|a_n| \leq M, n \text{ هر}$$

۱۱- برای چندین جمله اولیه، فاصله جملات دنباله $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$ را تا ۲ حساب کنید. n از

$$\text{چه عددی باید بزرگتر باشد تا نابرابری } \left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right| < 0.0001 \text{ برقرار باشد.}$$

۱- لئوناردو فیبوناتچی یک ریاضیدان ایتالیایی بود که در رابطه با مطالعه زاد و ولد خرگوش‌ها و افزایش جمعیت آنها این گونه دنباله‌ها را شناسایی کرده است. در واقع مدل افزایش جمعیت خرگوش‌ها را صورت‌بندی کرده است.

پرسش‌های مفهومی

پرسش‌های زیر را بررسی کنید، اگر فکر می‌کنید درست‌اند، آنها را توضیح دهید و اگر فکر می‌کنید نادرست‌اند مثالی ارائه دهید.

- (الف) هرگاه n جمله نخست یک دنباله را تغییر دهیم در رفتار آن تغییری حاصل نمی‌شود.
(ب) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی و C عدد ثابتی باشد دنباله $\{ca_n\}$ نیز صعودی است.
(ج) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی و C عدد ثابتی باشد دنباله $\{ca_n\}$ نیز صعودی است.
(د) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای یکنوا و C عدد ثابتی باشد دنباله $\{ca_n\}$ نیز یکنوا است.

۵-۱- همگرایی دنباله‌ها

سرچشمه بسیاری از اندیشه‌های جدید ریاضی در اندیشه‌های کشف شده قبلی یا تجربه‌های گذشته نهفته است. با این حال، در بیشتر موارد چنین سرچشمه‌هایی در لایه‌های زیرین مفاهیم مربوطه پنهان بوده و به آسانی نمی‌توان آنها را ملاحظه کرد. در واقع، دیدن و یافتن آنها نگاهی تیزبین و شجاعت در تفکر می‌خواهد؛ در بعضی موارد نیز ظرافت‌هایی دیده می‌شود ولی در بدو امر به نظر نمی‌رسد که اندیشه جدید ریاضی در ورای آنها وجود داشته باشد.

با چنین نگرشی به بحث‌ها و توصیف‌های مربوط به دنباله‌ها باز می‌گردیم و به کندوکاو سرچشمه‌ها، ظرافت‌ها یا اندیشه‌های نو می‌پردازیم.

برحسب هر ویژگی و یا مفهومی که تعریف کرده‌ایم دنباله‌ها را می‌توانیم به دو دسته تقسیم

کنیم:

دنباله‌های کراندار و دنباله‌های بیکران (کراندار نیستند).

دنباله‌های یکنوا و دنباله‌هایی که یکنوا نیستند.

یک ویژگی دیگر در مجموعه دنباله‌های بررسی شده وجود دارد که کمتر خودنمایی می‌کند.

برخی از دنباله‌ها این ویژگی را دارند که جملات آن به یک عدد مشخص نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند و از روی نمودار نیز شهود می‌شود که به یک نقطه می‌گریند. بنابراین معیار دسته‌بندی جدید را از این دنباله‌هایی که جملات دنباله، به یک عدد معین می‌گریند و دنباله‌هایی که جملات آنها، به یک عدد معین نمی‌گریند. برای مثال از دنباله‌های دسته اول به دنباله‌های زیر توجه می‌کنیم:

$$\left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} \quad \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} \quad \left\{ \frac{1}{n+1} \right\} \quad \left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

و به عنوان نمونه از دنباله‌های دسته دوم، یعنی دنباله‌هایی که با افزایش شماره جمله دنباله، به یک عدد معین نمی‌گرایند، دنباله‌های زیر را نام می‌بریم:

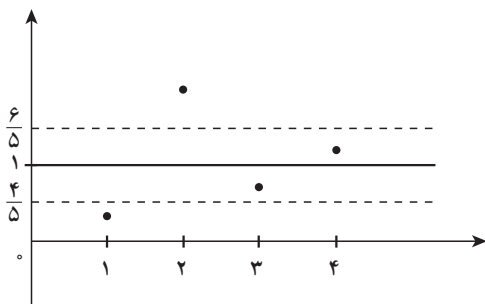
دنباله اعداد زوج $\{2n\}$ ، دنباله اعداد فرد $\{2n-1\}$ ، دنباله $\{(-1)^{n+1}\}$
 ملاحظه می‌کنیم که دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ به صفر میل می‌کند به عبارت دیگر جملات این دنباله با افزایش شماره جمله‌ها، به طرز دلخواهی به عدد صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. همچنین با محاسبه جملات دنباله $\left\{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$ ملاحظه می‌کنیم که وقتی n بزرگ و بزرگتر می‌شود جملات این دنباله به عدد ۱ نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. برای آنکه این مفهوم «نزدیکی جملات دنباله به عدد ۱» را به لحاظ ریاضی واضح و روشن کنیم به نمودار این دنباله بار دیگر دقت می‌کنیم.
 قبل از این، جدولی برای تعیین مقادیر این دنباله تنظیم می‌کنیم.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{17}{16}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{65}{64}$	$\frac{127}{128}$...

می‌دانیم میزان نزدیکی دو عدد با قدر مطلق تفاضل آن دو عدد سنجیده می‌شود. پس هرگاه بخواهیم $|a_n - 1| < \frac{1}{5}$ ، کافی است به جای a_n عبارت $1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ را قرار دهیم:

$$|a_n - 1| = \left| 1 + \left(-\frac{1}{4}\right)^n - 1 \right| = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

حال برای آن که $\left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{1}{5}$ کافی است $2^n > 5$ (۱) پس هرگاه مثلاً $2^3 = 8 \geq 5$ به طور قطع نامساوی (۱) نیز برقرار است؛ در این صورت باید $n \geq 3$.



شکل ۱-۳

در جدول نیز ملاحظه می‌کنیم که از شماره $n = 3$ به بعد اختلاف جملات دنباله تا عدد ۱ از $\frac{1}{5}$ کوچکتر است. به نمودار این دنباله نیز توجه می‌کنیم:

شکل ۱-۳ نقاط معرف جملات دنباله از جایی به بعد در درون نوار به مرکز $y=1$ قرار دارند وقتی نواری به مرکز خط $y=1$ و به شعاع $\frac{1}{5}$ در نظر می‌گیریم مقادیر جملات دنباله از مرتبه ۳ به بعد در

این نوار قرار می گیرند؛ به زبان فنی تر هرگاه $n \geq 3$ ، یعنی $a_n \in (1 - \frac{1}{5}, 1 + \frac{1}{5})$ ، یعنی $a_n \in (\frac{4}{5}, \frac{6}{5})$

$$n = 3, |a_n - 1| = \left| \frac{7}{8} - 1 \right| = \frac{1}{8} < \frac{1}{5}$$

$$n = 4, |a_n - 1| = \left| \frac{17}{16} - 1 \right| = \frac{1}{16} < \frac{1}{5}$$

$$n = 5, |a_n - 1| = \left| \frac{31}{32} - 1 \right| = \frac{1}{32} < \frac{1}{5}$$

$$n = 6, |a_n - 1| = \left| \frac{65}{64} - 1 \right| = \frac{1}{64} < \frac{1}{5}$$

بار دیگر به دنباله $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ برمی گردیم. می دانیم که با بزرگ و بزرگتر شدن n جملات دنباله به عدد صفر می گرایند. اکنون از شما خواسته می شود که با محاسبات ریاضی این معنی را روشن تر سازید. برای نمونه به یک مورد توجه می کنیم:

هرگاه $a_n = \frac{1}{n}$ ، از چه شماره و یا مرتبه ای به بعد اختلاف جملات دنباله تا صفر از $\frac{1}{100}$ کوچکتر است؟

در واقع می خواهیم جواب های نامساوی $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ را پیدا کنیم. این نامساوی معادل نامساوی $n > 100$ می باشد، پس داریم.

برای مثال $n > 100 \Rightarrow |a_n - 0| < \frac{1}{100}$

$$n = 101 \Rightarrow |a_n - 0| = \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$$

$$n = 105 \Rightarrow |a_n - 0| = \frac{1}{105} < \frac{1}{100}$$

$$n = 1000 \Rightarrow |a_n - 0| = \frac{1}{1000} < \frac{1}{100}$$

حال با اختیار کردن $\frac{1}{1000}$ به جای $\frac{1}{100}$ ، مرتبه مربوطه را پیدا کنید.
 سپس با اختیار کردن $\frac{1}{10000000}$ به جای $\frac{1}{100}$ مرتبه مربوطه را پیدا کنید.
 همچنین با اختیار کردن $\frac{1}{1000000000000}$ به جای $\frac{1}{100}$ مرتبه مربوطه را پیدا کنید.

سؤال: آیا این وضعیت برای همه اعداد کوچک نظیر یک صد میلیون، و یک میلیارد برقرار است؟

❖ نکته: برای پاسخگویی به پرسش اخیر به بررسی بیشتر دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ می پردازیم. برخی از مقادیر این دنباله را برای n های بزرگ در جدول زیر درج کرده ایم.

n	۱۰،	۱۰۰،	۱۰۰۰،	۱۰ ^۶ ،	۱۰ ^۸ ،	۱۰ ^۹ ،	...
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{10}$ ،	$\frac{1}{100}$ ،	$\frac{1}{1000}$ ،	$\frac{1}{10^6}$ ،	$\frac{1}{10^8}$ ،	$\frac{1}{10^9}$ ،	...

این جدول برخی مقادیر دنباله $\frac{1}{n}$ را نشان می دهد.
 با توجه به مقادیر دنباله مشاهده می کنیم که هر اندازه n بزرگتر اختیار شود مقدار $\frac{1}{n}$ کوچکتر می شود و نقاط نمایش دهنده مقادیر این دنباله، روی محور اعداد، به نقطه صفر نزدیک و نزدیکتر می شوند.

از طرف دیگر می دانیم که همه مقادیر دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ مثبت هستند و لذا نقاط متناظر این مقادیر روی محور حقیقی سمت راست مبدا، یعنی صفر، قرار دارند. می توان چنین تصور کرد که چون مقادیر این دنباله از صفر کمتر نمی شوند، عدد صفر مانند یک نقطه که مانع عبور نقاط دنباله به سمت چپ خودش است، ایستادگی می کند و نقاط دنباله هرگز به صفر نمی رسند گرچه به دلخواه به آن نزدیک می شوند و گویی نقطه صفر حد نقاط این دنباله است. باید توجه کنیم که شهود بصری، در مواردی، با دقت ریاضی تفاوت دارد؛ در مورد دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ و نمودار هندسی نقاط آن روی محور اعداد به نظر می رسد که نقاط نمایش مقادیر $\frac{1}{n}$ برای n های بزرگ در نزدیک های نقطه صفر به هم می چسبند و گویی طولی پیوسته می سازند! در صورتی که این شهود هندسی کاملاً نادرست است. زیرا هیچ دو نقطه ای از این دنباله بر هم منطبق نیستند تا آن که طولی پیوسته به وجود آید، مهم تر از این می دانیم که در واقع بین هر دو کسر گویای بی شمار عدد حقیقی گویای دیگر وجود دارد.

با توجه به این که فاصله دو نقطه روی محور با قدر مطلق تفاضل آن دو نقطه سنجش می‌شود، از منظر جبری و محاسباتی قدر مطلق تفاضل دو عدد، اختلاف و نزدیکی آن دو عدد را مشخص می‌کند. بنابراین به جاست که مفاهیم مربوط به رفتار دنباله را با استفاده از نماد و مفهوم قدر مطلق صورت بندی کنیم.

در حالت کلی هرگاه عددی را که تصور می‌شود جملات یک دنباله به آن می‌گیرند و یا حول آن تجمع می‌کنند («L») بنامیم، آنگاه به آسانی می‌توانیم عبارت‌هایمان را به زبان ریاضی برگردانیم:

اختلاف جمله nام دنباله $\{a_n\}$ با مقدار حدی L به زبان ریاضی می‌شود $|a_n - L|$ و یا فاصله جمله nام دنباله تا نقطه حدی دنباله می‌شود $|a_n - L|$

در حالت خاص دنباله $a_n = \frac{1}{n}$ ، عبارت قدر مطلق مربوطه به صورت زیر است:

$$|a_n - L| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$$

در انجام فعالیت قبلی ملاحظه کردیم که اگر بخواهیم $\frac{1}{n} < \frac{1}{1,000,000}$ باشد، باید $n > 1,000,000$ ؛ و هرگاه بخواهیم $\frac{1}{n} < \frac{1}{10^9}$ کافی است مقادیر n در نامساوی $n > 10^9$ صدق کنند.

احمد: آیا می‌توان گفت که اختلاف جملات این دنباله از عدد صفر از مقدار $\frac{1}{1,000,000,000,000}$ (یک صد میلیارد) نیز کمتر می‌شود.

دبیر: آری، کافی است که n را از $100,000,000,000$ بزرگتر بگیریم، مثلاً $n = 10^{11} + 1$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{10^{11} + 1} < \frac{1}{10^{11}}$$

در این صورت

احمد: آیا این وضعیت برای همه اعداد کوچک و کوچکتر از یکصد میلیارد نیز صادق است؟

دبیر: آری هر عدد کوچک (مانند $\varepsilon > 0$ اسیلن) که انتخاب کنیم از شماره‌ای به بعد اختلاف جملات مربوطه از صفر کمتر از ε است که در مثال بالا $\varepsilon = \frac{1}{10^{11}}$ اختیار شد.

اما چون نمی‌توانیم این وضعیت را برای همه اعداد کوچک نظیر یک میلیون، یک میلیارد و یا یکصد میلیارد امتحان کنیم به ناچار باید متوسل به ε شویم (بخوانید اسیلن)

ε در واقع نماینده همه اعداد کوچک و مثبت است و چون در عمل دلخواه فرض می‌شود ما را از تجربه‌ها و محاسباتی که پایان ندارد بی‌نیاز می‌سازد.

احمد: این بسیار جالب است، اما شماره جمله‌ها چگونه عددی خواهد شد؟
 دبیر: طبیعی است شماره جملات مربوطه که باید برای آنها نامساوی $\frac{1}{n} < \varepsilon$ برقرار باشد به ε بستگی خواهد داشت. برای نمونه وقتی $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ، $M = 101$ به دست آمد، یعنی هرگاه $n \geq 101$ ، $M = 101$ نماینده شماره مربوطه است.

وقتی $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ ، شماره مربوطه یعنی $M = 1001$ به دست آمد.

وقتی $\varepsilon = \frac{1}{10^{11}}$ شماره مربوطه یعنی $M = 10^{11} + 1$ به دست آمد، زیرا دیدیم از این شماره به بعد، یعنی هرگاه $n > 10^{11}$ مثلاً $n = 10^{11} + 1$ ، $n = 10^{11} + 2$ ، $n = 10^{11} + 3$ ، ...

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{10^{11} + 1} < \frac{1}{10^{11}} = \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{10^{11} + 2} < \frac{1}{10^{11}} = \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{10^{11} + 3} < \frac{1}{10^{11}} = \varepsilon$$

و به طور کلی برای هر n که $n \geq 10^{11} + 1$ ، $\frac{1}{n} < \varepsilon$
 اکنون می‌توانیم تجربه‌مان را در خصوص دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ریاضی وارتر بیان کنیم، برای هر عدد مثبت (ولو بسیار کوچک) ε فاصله a_n ها از صفر از شماره‌ای مانند M به بعد کمتر از ε می‌شود.
 به عبارت دقیق‌تر

برای هر عدد $\varepsilon > 0$ ، عددی طبیعی مانند M هست که هرگاه $n \geq M$ ، $|a_n - 0| < \varepsilon$ و بالاخره به این مفهوم کلیت داده و آن را برای هر دنباله دلخواه $\{a_n\}$ و عدد حقیقی مانند L که تصور می‌کنیم جملات دنباله به آن گرایش دارند، بیان می‌کنیم:

تعریف: گوئیم دنباله $\{a_n\}$ دارای حد L است، هرگاه برای هر عدد $\varepsilon > 0$ ، عددی طبیعی مانند M وجود داشته باشد به طوری که برای هر عدد طبیعی n که $n \geq M$ ، نابرابری $|a_n - L| < \varepsilon$ برقرار باشد.

این جمله را که «دنباله $\{a_n\}$ دارای حدی برابر L است» با نماد ریاضی به شکل $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ نوشته و آن را چنین می خوانیم.

«حد دنباله a_n وقتی n به ∞ میل می کند برابر L است»

یا آن که می گوییم «دنباله $\{a_n\}$ به L همگراست» و در این صورت دنباله $\{a_n\}$ را یک دنباله همگرا می نامیم.

وقتی برای دنباله ای مانند $\{a_n\}$ چنین عددی حقیقی مانند L که در تعریف فوق صدق می کند وجود نداشته باشد دنباله $\{a_n\}$ را یک دنباله واگرا می نامیم.

❖ **مثال:** دنباله $\{(-1)^n\}_{n=1}$ را در نظر می گیریم، جملات این دنباله یک در میان اعداد -1 و 1 را اختیار می کنند. در واقع جملات این دنباله به عنوان نقاط خط حقیقی روی دو نقطه -1 و 1 قرار گرفته و لذا به این دو نقطه گرایش دارند. اما معلوم است که این دنباله همگرا نمی باشد، زیرا مقدار L می بایست یک عدد منحصر به فرد بوده و همه جملات به همین یک عدد گرایش کنند. حال هرگاه $L=1$ اختیار کنیم جملات این دنباله با n های فرد هرگز به L (به مقدار دلخواه) نزدیک نمی شوند. همین وضعیت برای $L=-1$ نیز صادق است، پس یک عدد مشخص L که در تعریف همگرایی صدق کند وجود ندارد.



۱- توضیح دهید که چرا دنباله $a_n = 2n + 1$ همگرا نمی باشد.

۲- دنباله $1, -\frac{1}{2}, 2, -\frac{2}{3}, 3, -\frac{3}{4}, 4, -\frac{4}{5}, 5, -\frac{5}{6}, \dots$ را در نظر بگیرید، ابتدا ضابطه

این دنباله را معلوم کنید، سپس از این دنباله دو دنباله استخراج کنید که یکی همگرا و دیگری واگرا باشد.

❖ **نکته:** مسأله های مربوط به تشخیص همگرایی و یا پیدا کردن حد دنباله ها را می توان چنین طبقه بندی کرد.

الف) مسأله هایی که در آنها از پیش همگرایی دنباله بررسی شده و از شما خواسته می شود تا مطابق تعریف تساوی حدی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad (1)$$

را محقق سازید، برای اثبات (۱) طبق تعریف می‌بایست نشان دهیم که حکم منطقی زیر برقرار و درست است.

(۲) برای هر عدد $\varepsilon > 0$ ، عددی طبیعی مانند M هست به قسمی که برای هر $n \geq M$ ، $|a_n - L| < \varepsilon$ در اثبات (۲)، $\varepsilon > 0$ به عنوان یک عدد حقیقی مثبت معلوم مسأله است.

همچنین در اینجا M به عنوان یک عدد طبیعی (شماره جملات مورد نظر) مجهول مسأله است. M را باید چنان پیدا کنیم که در گزاره شرطی زیر صدق کند:

اگر n عددی طبیعی و $n \geq M$ آنگاه $|a_n - L| < \varepsilon$

معنای این گزاره شرطی آن است که از شماره M به بعد جملات دنباله در نامساوی $|a_n - L| < \varepsilon$ صدق کرده و لذا در اطراف L تجمع می‌کنند.

در مسائل مربوط به اجرای دستورالعمل فوق، چون می‌خواهیم نابرابری $|a_n - L| < \varepsilon$ برقرار باشد و ε بر ما معلوم است. با این نابرابری کار می‌کنیم تا بتوانیم به نحوی M را پیدا کنیم.

ب) دسته دوم مسأله‌های مربوط به حد مسأله‌هایی است که در آن L بر ما معلوم نیست. در واقع در این نوع مسأله‌ها از شما خواسته می‌شود با بررسی جملات دنباله چنانچه فکر می‌کنید دنباله مورد نظر همگراست ابتدا L را حدس بزنید و سپس در صورت واقعیت امر و درست بودن حدس خود، مطابق بند الف تساوی حدی، $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ را ثابت کنید. ضمناً همیشه یادتان باشد که:

تسلط بر خواص نابرابری‌ها و درک درست حکم منطقی (۲)، که همان مفهوم حد است، از ملزومات اساسی حل مسأله‌های مربوط به همگرایی است.

❖ مثال: همگرایی دنباله $\left\{ 3 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\}_{n=1}$ را بررسی کنید.

حل: باید معلوم کنیم که آیا این دنباله همگراست یا وگرا و اگر همگراست به چه عددی همگراست؟

با اندکی کنکاش در مقادیر این دنباله ملاحظه می‌کنیم که جملات دنباله، برای n های به قدر کافی بزرگ، به عدد ۳ گرایش دارند. دلیل این امر آن است که مقادیر $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ برای n های بزرگ، کوچک و کوچکتر شده و مقدار آن به صفر نزدیک می‌شود.

حدس: $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - (\frac{1}{4})^n) = 3$ ، در این جا $L=3$.
برهان: فرض کنیم $\varepsilon > 0$ عدد دلخواهی باشد باید M ی پیدا کنیم که

$$\left| \left(3 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) - 3 \right| < \varepsilon, \quad n \geq M \quad (1)$$

$$\left| \left(3 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) - 3 \right| < \left(\frac{1}{4} \right)^n \quad \text{داریم}$$

در نتیجه باید معلوم کنیم که از چه شماره ای به بعد نابرابری $(\frac{1}{4})^n < \varepsilon$ برقرار می گردد و همین شماره مورد نظر مجهول M را به دست می دهد. این نابرابری معادل نابرابری $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$ است. از طرفین

$$n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{لگاریتم در پایه ۲ می گیریم}$$

چون معلوم نیست که $\log_2 \frac{1}{\varepsilon}$ عددی طبیعی باشد، M را به صورت زیر معرفی می کنیم.

$$M = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$$

و بدین ترتیب مجهول M به دست می آید.

احمد: از کجا معلوم است که این مقدار M در گزاره شرطی (۱) صدق می کند؟

دبیر: می توانیم M را آزمون نماییم، برای این کار فرض کنیم n عددی طبیعی و $n \geq M$ باید

نشان دهیم

$$\left| \left(3 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) - 3 \right| < \varepsilon \quad (2)$$

$$n \geq M = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1, \quad \text{چون } a_n = 3 - \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$$n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{پس } [x] + 1 > x, \quad x, \text{ هر } x$$

$$2^n > 2^{\log_2 \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{در نتیجه:}$$

$$\frac{1}{4^n} < \varepsilon \quad \text{با معکوس کردن جملات، جهت نابرابری تغییر می کند:}$$

$$\left(\frac{1}{4} \right)^n < \varepsilon \quad \text{و یا}$$


$$\left| \left(3 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) - 3 \right| = \left(\frac{1}{4} \right)^n < \varepsilon \quad \text{اما}$$

یعنی برای هر n که $n \geq M$ ، نابرابری (۲) برقرار است.

محسن: نیازی به آزمایش M نیست زیرا برای یافتن M ، همه عملیات برگشت پذیرند.

دبیر: درست است، اگر به برگشت پذیری عملیات و کار با نابرابری‌ها توجه بکنید لزومی به آزمایش M به دست آمده نمی‌باشد.

❖ مثال: آیا دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$ همگراست؟

حل: برخی مقادیر این دنباله را بررسی می‌کنیم. 

$$n = 1, a_1 = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$n = 2, a_2 = \sin \frac{2\pi}{4} = 1$$

$$n = 3, a_3 = \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$n = 4, a_4 = \sin \pi = 0$$

$$n = 5, a_5 = \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

با ادامه محاسبات ملاحظه می‌کنیم که مقادیر این دنباله منحصر به اعداد 1 و 0 و -1 هستند

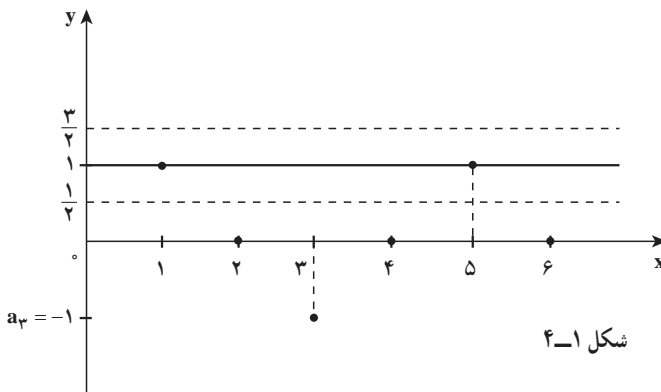
پس این دنباله نمی‌تواند همگرا بوده باشد.

احمد: بسیاری از جملات دنباله برابر 1 بوده و لذا در 1 مجتمع می‌شوند، آیا ممکن نیست که

دنباله همگرا به عدد 1 باشد.

دبیر: خیر. در این مورد ساده‌ترین راه استفاده از نمودار دنباله است و کافی است بازه‌ای مانند

$(\frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4})$ یعنی نواری به مرکز 1 و به شعاع $\frac{1}{4}$ را حول خط $y=1$ در نظر بگیریم (شکل ۴-۱)



شکل ۴-۱

هرقدر M را بزرگ اختیار کنیم، $n \geq M$ را می‌توان به صورت $n = 2k$ در نظر گرفت و لذا
 $a_{2k} = \sin_{k\pi} = 0$ یعنی تعداد زیادی از جملات که با شماره زوج هستند خارج از بازه $(1 - \frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p})$
 قرار می‌گیرند.

احمد: اما تعداد زیادی از جملات دنباله که با شماره فرد هستند برابر ۱ بوده و لذا در بازه
 $(1 - \frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p})$ هستند.

دبیر: درست است. اما اگر بخواهد تساوی حدی $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n\pi}{2} = 1$ اتفاق بیفتد باید نظیر
 $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ که در اینجا $\varepsilon = \frac{1}{p}$ ، طبق تعریف عدد طبیعی M یافت شود که برای هر $n \geq M$ ،
 $a_n \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ (و یا $|a_n - 1| < \varepsilon$)

توجه کنید که این یک حکم کلی است: برای هر n که $n \geq M$ باید نابرابری برقرار باشد. درحالی
 که گفته شد هرقدر که M را اختیار کنیم n هایی هست، $n = 2k$ که $n \geq M$ اما $|a_n - 1| \geq \varepsilon = \frac{1}{p}$ زیرا
 $a_n \notin (1 - \frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{p})$ ، و این با تعریف همگرایی در تناقض است.

مسائل

۱- ابتدا حد دنباله $\left\{ \frac{n-1}{n} \right\}_{n=1}$ را حدس بزنید و سپس حدس خود را به روش ε اثبات کنید.

۲- فرض کنیم $\{a_n\}_{n=1}$ یک دنباله همگرا باشد. همچنین فرض کنیم K عدد صحیح و ثابت
 است به قسمی که $n+k \geq 1$ دنباله $\{b_n\}_{n=1}$ را چنین تعریف می‌کنیم: $b_n = a_{n+k}$ برای مثال هرگاه
 $k=2$ و $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ باشد، دنباله $\{b_n\}$ چنین است:

$$b_1 = a_3, b_2 = a_4, b_3 = a_5, \dots, b_n = a_{n+2}, \dots$$

$$a_3, a_4, a_5, \dots, a_{n+2}, \dots$$

یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L \text{ و آنگاه } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \text{ ثابت کنید هرگاه}$$

۳- کدامیک از دنباله‌های زیر همگراست. آنهایی را که فکر می‌کنید همگرا نیستند، واگرایی
 دنباله را توضیح دهید.

$$\left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\}_{n=1} \quad (\text{الف}) \quad \left\{ 3^n \right\}_{n=1} \quad (\text{ب}) \quad \left\{ \log n \right\}_{n=1} \quad (\text{ج}) \quad \left\{ \log \frac{1}{n} \right\}_{n=1} \quad (\text{د})$$

کسانی که مفهوم حد دنباله و حد توابع را به درستی درک کنند ریاضیات را بهتر درک می‌کنند. (استاد دکتر غلامحسین مصاحب ۱۳۵۸-۱۲۸۹).

۱-۶- دنباله‌های واگرا به $\pm\infty$

دنباله‌های واگرا را به دو دسته می‌توان تقسیم‌بندی کرد:

دنباله‌هایی مانند $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ که برای آنها هیچ عدد حقیقی، و $\pm\infty$ یافت نمی‌شود به طوری که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

دنباله‌های واگرایی مانند $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ گرچه جملات دنباله، برای n های بزرگ، حول یک عدد

حقیقی تجمع ندارند، لیکن دنباله به نوعی خوش‌رفتار است!

ادعای ما از خوش‌رفتاری این دنباله چیست؟

وقتی برای n های بزرگ جملات دنباله را بررسی می‌کنیم (با مقداردهی به n) ملاحظه می‌کنیم

که مقادیر جملات از هر عدد حقیقی که بخواهیم بزرگتر می‌شوند و این یک نوع خوش‌رفتاریست!

مثلاً هرگاه بخواهیم $2n > 10^6$ کافی است $n > 500,000$

هرگاه بخواهیم $2n > 10^8$ کافی است $n > 50,000,000$

معنی این گزاره شرطی آن است که جملات دنباله از شماره $50,000,000$ بعد از عدد

(از پیش تعیین شده) $100,000,000$ بزرگترند، زیرا از $n > 50,000,000$ نتیجه می‌گیریم که

$$2n > 100,000,000$$

به طور کلی فرض کنیم k عدد حقیقی کاملاً دلخواهی باشد برای آنکه $2n > k$ کافی است $n > \frac{k}{2}$

و چون می‌خواهیم n طبیعی باشد (شماره جملات) کافی است که $n \geq \left[\frac{k}{2}\right] + 1$ اختیار کنیم زیرا واضح

$$\text{است که } \left[\frac{k}{2}\right] + 1 > \frac{k}{2}$$

حال می‌توانیم تعریف خاصی از واگرایی ارائه دهیم.

تعریف: گوئیم دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ واگرا به ∞ (یا $+\infty$) است هرگاه گزاره منطقی زیر برقرار

باشد.

برای هر عدد حقیقی مثبت K ، عددی طبیعی مانند M یافت شود به قسمتی که هرگاه

$$a_n > K, n \geq M$$

در این صورت می‌نویسیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

به زبان ساده واگرایی به ∞ دلالت بر آن دارد که جملات دنباله بزرگ و بزرگتر می‌شوند به نحوی که برای هر عدد حقیقی (بزرگ) k ، از شماره‌ای به بعد همه جملات از k بزرگترند.

نکته‌ای که فوراً از واگرایی به ∞ حاصل می‌شود این است که هرگاه تساوی $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ اتفاق بیفتد، جملات دنباله، از جایی به بعد الزاماً مثبت‌اند، نه تنها مثبت‌اند بلکه بزرگ و بزرگتر می‌شوند و به صورتی مجازی می‌توان گفت که در حول و حوش ∞ گرد می‌آیند!

مشابه وضعیت فوق وقتی است، که جملات دنباله، از جایی به بعد منفی‌اند، لیکن از نظر قدرمطلق بزرگ و بزرگتر می‌شوند.

تعریف: گوئیم دنباله $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ واگرا به $-\infty$ است و می‌نویسیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ هرگاه گزاره زیر برقرار باشد.

برای هر عدد حقیقی منفی K ، عدد طبیعی مانند M وجود داشته باشد به طوری که هرگاه $n \geq M$ آنگاه $a_n < K$

پس هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ اتفاق افتد جملات دنباله می‌بایست از جایی به بعد منفی بوده و از نظر قدرمطلق بزرگ و بزرگتر شوند.

پرسش: آیا دنباله‌ای که جملات آن به صورت نوسانی مثبت و منفی می‌شوند می‌تواند واگرا به $+\infty$ یا واگرا به $-\infty$ باشد؟

تمرین در کلاس

ابتدا با حدسیه‌سازی مشخص کنید که کدامیک از دنباله‌ها واگرا به $+\infty$ یا واگرا به $-\infty$ است و سپس حدس خود را ثابت کنید.

$$\left\{ \frac{1}{1.6^n} (n+1) \right\}_{n=1}^{\infty} \quad (۳) \qquad \{ 1000 - n^2 \}_{n=1}^{\infty} \quad (۲) \qquad \{ n^2 \}_{n=1}^{\infty} \quad (۱)$$

برای نمونه و راهنمایی به (۱) می‌پردازیم

وقتی n مقادیر بزرگ اختیار می‌کند، قطعاً n^2 نیز بزرگتر می‌شود، در نتیجه حدس‌مان این است که $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$ (۱)

❖ **برهان (۱):** فرض کنیم $K > 0$ عدد مثبت دلخواهی باشد. باید نشان دهیم از شماره ای

به بعد $n^2 > K$ ، پس شماره ای مانند M است که هرگاه $n \geq M$ ، $n^2 > K$ در اینجا K معلوم مسأله است.

اما نامساوی $n^2 > k$ معادل $n > \sqrt{k}$ می باشد. می توانیم شماره M مجهول را $M = \lceil \sqrt{k} \rceil + 1$

اختیار کنیم. اکنون می توانیم حکم مسأله را آزمون نماییم: فرض کنیم $n \geq \lceil \sqrt{k} \rceil + 1$ پس $n > \sqrt{k}$ در نتیجه $n^2 > K$

$$a_n = n^2 > K$$

و یا

یک بار دیگر حل مسأله را به اختصار مرور می کنیم.

ادعا داشتیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$ ، برای اثبات این ادعا، می بایست ثابت کنیم (*) برای هر

عدد $K > 0$ ، M بی هست که هرگاه $n \geq M$ ، $n^2 > k$ در اثبات (*)، k معلوم و M مجهول است. M باید

چنان پیدا شود که برای هر $n \geq M$ ، $n^2 > k$

با استفاده از خواص نامساوی ها از نامساوی $n^2 > K$ ، که مطلوب ماست، راه افتادیم و به

$$M = \lceil \sqrt{k} \rceil + 1$$

یادتان باشد، که در حل مسأله های مربوط به حد دنباله ها:

استفاده از خواص نابرابری ها و درک صحیح گزاره های شرطی اگر ... آنگاه در

یادگیری حسابان نقش اساسی دارد.

مسائل

۱- ثابت کنید الف) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n} = \infty$

ب) دنباله $\left\{ (-1)^n \frac{n^2 + 1}{n} \right\}$ نه به $+\infty$ و نه به $-\infty$ واگراست.

۲- ثابت کنید هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$

۳- فرض کنیم همواره $a_n > 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$. ثابت کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

۴- فرض کنیم همواره $a_n < 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$. ثابت کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

$$c_n = \frac{3n^2 + 1}{2n^2 + 7}, b_n = \frac{n^2 - 1}{6n^3 + 1}, a_n = \frac{5n^2 - 3n + 11}{2n + 1} \text{ فرض کنیم}$$

دنباله‌هایی از اعداد باشند. ثابت کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{3}{2}$$

۱-۲- اصل موضوع تمامیت

مطالعه حد دنباله‌ها ارتباط تنگاتنگی با ویژگی‌های مجموعه اعداد حقیقی یعنی R دارد. پس از کشف نظریه حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط دانشمندان آلمانی و انگلیسی در قرن هفدهم ناسامانی‌هایی در برخی موارد و نتایج آن بروز کرد. ریاضیدانان چندی در رفع این ناسامانی‌ها تلاش کردند و سرانجام پس از طی بیش از یک قرن و ایراشتراس توانست به رفع آن نایل شود. و ایراشتراس دریافت که صورت‌بندی دقیق و منطقی بحث حساب دیفرانسیل و انتگرال بر شناخت عمیق‌تر دستگاه اعداد حقیقی استوار است. اصل تمامیت یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های R است که دستگاه اعداد گویا، یعنی Q ، فاقد آن است، گرچه Q همه خواص جبری و ترتیبی مربوط به R را داراست. در این بخش قصدمان این نیست تا نقص Q را بررسی کنیم، لیکن به دلیل نیاز به استفاده از اصل تمامیت، این اصل را بیان خواهیم کرد. اصل تمامیت، همانند بیشتر اصول دیگر، گرچه به لحاظ شهودی درکی ساده دارد، اما به لحاظ نظری اثبات آن ناممکن جلوه می‌کند.

ابتدا دو ویژگی در باب زیر مجموعه‌های R بیان می‌کنیم که منبعت از رابطه ترتیبی روی R می‌باشند. در اینجا فرض می‌کنیم A یک زیرمجموعه ناتهی R باشد.

تعریف ۱: عدد حقیقی U را یک کران بالای A نامیم هرگاه برای هر $x \in A$ ، $x \leq U$.

$b \in R$ را کوچکترین کران بالای A می‌نامیم هرگاه a یک کران بالای A بوده و برای هر کران بالای دیگر A مانند U ، $a \leq U$.

مشابهاً می‌توانیم از پایین به مجموعه A نگاه کنیم:

تعریف ۲: عدد حقیقی V را یک کران پایین A نامیم هرگاه برای هر $x \in A$ ، $v \leq x$.

$b \in R$ را بزرگترین کران پایین A نامیم هرگاه b یک کران پایین A بوده و برای هر کران پایین

دیگر A مانند v ، $v \leq b$.

کوچکترین کران بالا را سوپریموم و بزرگترین کران پایین را اینفیموم می‌نامند.
 دقت کنید که تعریف ۲ چگونه از روی تعریف ۱ ساخته شده است!
 برای مثال، فرض کنیم $A = [1, 2]$: در این صورت ۳ یک کران بالای A است.
 $3/5$ نیز یک کران بالای A است.
 $2/5$ چطور؟ A چند کران بالا دارد؟

کوچکترین کران بالای A کدام است؟ آری $a=2$ کوچکترین کران بالای A است.
 مشابهاً به آسانی معلوم است که $b=1$ بزرگترین کران پایین A است. در این مثال هم a و هم b
 به A تعلق دارند، اما ممکن است کوچکترین کران بالا و یا بزرگترین کران پایین یک مجموعه به آن
 مجموعه تعلق نداشته باشند.

هرگاه $B = (1, 2)$ (بازه باز) آنگاه کوچکترین کران بالای B برابر ۲ و بزرگترین کران پایین B نیز
 برابر ۱ است درحالی که هیچ‌یک به B تعلق ندارند. (چرا؟)
 سؤال : آیا همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی R دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین
 هستند؟ نظرتان را در مورد $A = [1, +\infty)$ و $B = (-\infty, 2)$ بیان کنید.

تمرین در کلاس

- الف) در مورد احکام زیر فکر کنید، می‌توانید با مثال‌ها کار کنید. اگر فکر می‌کنید درست‌اند
 آنها را توضیح دهید. و اگر فکر می‌کنید نادرست‌اند، نیز توضیح دهید.
 ۱- هر مجموعه از بالا کراندار دارای کوچکترین کران بالا است.
 ۲- هر مجموعه از پایین کراندار دارای بزرگترین کران پایین است.
 ۳- هرگاه A یک مجموعه کراندار و ناتهی باشد هم کوچکترین کران بالا و هم بزرگترین
 کران پایین دارد.
 ۴- هرگاه $A \subseteq B$ و $U \in B$ یک کران بالای B باشد، U یک کران بالای A نیز می‌باشد.
 ۵- حکمی نظیر ۴ در باب کران‌های پایین بیان کنید.

اکنون اصل موضوع تمامیت را بیان می‌کنیم، باید توجه داشت «اصل موضوع» و یا اختصاراً
 «اصل» در ریاضیات به گزاره‌ای گفته می‌شود که بدون اثبات پذیرفته می‌شود اصل موضوع
 تمامیت در باب اعداد حقیقی.

یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران بالا باشد، دارای کوچکترین کران بالا است.

این اصل معادل است با اصل زیر :

یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران پایین باشد، دارای بزرگترین کران پایین است.

اکنون با استفاده از این اصل به اثبات مهمترین قضیه این فصل می پردازیم

❖ **قضیه ۱:** فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله صعودی و از بالا کراندار باشد در این صورت $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ وجود دارد. به عبارت دیگر هر دنباله صعودی و از بالا کراندار همگراست.

❖ **برهان:** قرار می دهیم $S = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ، یعنی S مجموعه مقادیر عددی جملات دنباله مورد بحث است پس $S \neq \emptyset$ و دارای کران بالایی مانند K است. بنابر اصل موضوع تمامیت S دارای کوچکترین کران بالاست. این کوچکترین کران بالای S را L می نامیم. نشان می دهیم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

برای هر n ، $a_n \leq L$ ، حال فرض کنیم $\varepsilon > 0$ عدد دلخواهی باشد. پس $L - \varepsilon$ یک کران بالای S نیست، زیرا $L - \varepsilon < L$ و L کوچکترین کران بالای S فرض شده است.

چون $L - \varepsilon$ کران بالای S نیست، حداقل یک عضو S مانند a_N وجود دارد. به طوری که $L - \varepsilon < a_N$. حال برای هر $n \geq N$.

$$a_n \geq a_N > L - \varepsilon$$

از طرف دیگر $a_n < L$ در نتیجه برای هر $n \geq N$

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

یعنی برای هر $n \geq N$ ،

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

پس $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ، همچنان که ادعا شده است.

قضیه فوق یک زوج دارد که از تبدیل مفاهیم موجود در قضیه به مفاهیم زوج آن به دست می آید!

آن را بیان می کنیم.

❖ **قضیه ۲:** هر دنباله نزولی و کراندار از پایین همگراست.

❖ **مثال:** ثابت کنید دنباله $\left\{ \sin \frac{\pi}{2n} \right\}_{n=1}$ همگراست.

حل: با توجه به شناختی از رفتار تابع $y = \sin \frac{\pi}{2n}$ به ویژه در بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ داریم، معلوم است که این دنباله یک دنباله نزولی است. به علاوه برای هر n ، $0 < \sin \frac{\pi}{2n}$ پس عدد 0 یک کران پایین این دنباله است. بنابراین بر طبق قضیه ۲، این دنباله همگراست.

تمرین در کلاس

ابتدا نشان دهید که دنباله‌های زیر همگرا هستند

$$\left\{ 1 + \frac{1}{n^2 + 1} \right\} \text{ (الف)} \quad \left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\} \text{ (ب)}$$

سپس حد آنها را حساب کنید.

این بخش را با یک قضیه مهم به پایان می‌رسانیم که در حسابان و آنالیز نقشی کلیدی دارد.

❖ **قضیه:** هر عدد حقیقی حد دنباله‌ای از اعداد گویا است.

❖ **اثبات:** فرض کنیم u عدد حقیقی دلخواهی باشد. دو حالت وجود دارد.

حالت اول: u عددی گویا است. قرار می‌دهیم $u_n = u$ ، (برای هر $n \in \mathbb{N}$)

پس $\{u_n\}$ دنباله‌ای ثابت و متشکل از اعداد گویای U بوده و معلوم است که $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$.

حالت دوم: $0 < u < \infty$ عددی گنگ است، بسط اعشاری u را در نظر می‌گیریم.

$$u = u_0 . u_1 u_2 u_3 \dots u_n \dots$$

که در آن u_0 جزء صحیح u بوده و عددی صحیح است. چون u گنگ است بسط اعشاری u

نامتناهی و البته نامنظم می‌باشد. قرار می‌دهیم.

$$r_1 = U_0 / U_1$$

$$r_2 = U_0 / U_1 U_2$$

⋮

$$r_n = U_0 / U_1 U_2 \dots U_n$$

⋮

لذا هر r_n عددی گویا است زیرا بسط اعشاری مختوم دارد: به علاوه

$$0 < u - r_n = \underbrace{0.0\dots0}_{n \text{ بار صفر}} U_{n+1} U_{n+2} \dots$$

$$1^n |U - r_n| = 1/U_{n+1} \cdots U_{n+k} \cdots < 1 \quad \text{در نتیجه}$$

$$0 < |U - r_n| < \frac{1}{1.0^n} \quad \text{و یا}$$

چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1.0^n} = 0$ ، به ازای عدد دلخواه $\varepsilon > 0$ ، N می‌توانیم پیدا کنیم که برای هر $n \geq N$ ، $\frac{1}{1.0^n} < \varepsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = U \quad \text{یعنی } |U - r_n| < \frac{1}{1.0^n} < \varepsilon, n \geq N$$

یکی از کاربردهای این قضیه، استفاده از آن برای تعریف توان اعداد به نمای گنگ است. فرض کنیم a عددی مثبت و x عددی گنگ باشد. بنابر قضیه فوق دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از اعداد گویا هست

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} \quad \text{که } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{اینک توان } a^x \text{ را چنین تعریف می‌کنیم:}$$

قواعد آشنای توان که برای اعداد گویا برقرار است به توان‌های گنگ نیز منتقل می‌شود.

۱-۸- یک دنباله مهم

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty} : 2, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4, \left(\frac{6}{5}\right)^5, \dots \quad \text{دنباله زیر را در نظر می‌گیریم}$$

این دنباله هم به لحاظ کاربردی و همچنین از جنبه نظری اهمیت فوق‌العاده دارد. چرا؟ ثابت می‌شود این دنباله همگراست و هرگاه حد آن را e بنامیم، یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

عدد حقیقی e به صورتی طبیعی، در بیشتر پدیده‌های خلقت ظاهر می‌شود. دو دسته از مهم‌ترین پدیده‌ها فرایندهای رشد و زوال هستند. در اولی کمیت مورد مطالعه (نسبت به زمان) رشد می‌کند و در پدیده دوم کمیت مورد بحث رو به زوال دارد. برای مثال: وقتی تعداد اندکی باکتری را در محیطی مناسب قرار می‌دهیم، به شدت رشد کرده و پس از زمان اندکی تعداد آنها ۲، ۳ و یا صد برابر می‌شود. در حالی که هرگاه مقداری ماده رادیواکتیو به مانند فلزهای اورانیوم، پلوتونیوم، و یا انستونیوم را داشته باشیم، پس از مدتی مقدار آن کاهش یافته، یعنی بخشی از ماده زوال یافته و به عناصر دیگری مبدل می‌گردد. عدد e در چنین پدیده‌هایی نقشی اساسی دارد، به گونه‌ای که در محاسبات مربوط به رشد و زوال به صورتی طبیعی بروز می‌کند. e در اقتصاد نیز مطرح می‌شود. از این بابت لگاریتمی که پایه آن عدد e باشد لگاریتم طبیعی نامیده می‌شود.

اثبات همگرایی دنباله $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ بر اساس اصل موضوع تمامیت امکان پذیر است ابتدا ثابت می کنیم که این دنباله صعودی است، سپس ثابت می کنیم که این دنباله از بالا کراندار است. مثلاً برای هر عدد طبیعی n ، $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 4$

ابتدا یک قضیه کمکی ثابت می کنیم

❖ **قضیه ۱:** دنباله $\{b_n\}$ با ضابطه $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ صعودی است.

❖ **برهان*:** ثابت می کنیم برای هر n ، $\frac{b_{n+1}}{b_n} > 1$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

داریم

$$= \left(\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n-1}{n}}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

بنابراین نامساوی برنولی: $\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} > 1 + \frac{n+1}{n^2-1}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) > \left(1 + \frac{n+1}{n^2-1}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

بنابراین

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

❖ **قضیه ۲:** دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ صعودی است

❖ **برهان*:** کافی است ثابت کنیم برای هر n ، $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ داریم

* برهان های ستاره دار (مربوط به قضایای ۱ و ۲ و ۳) برای مطالعه آزاد و اختیاری دانش آموزان است.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \quad (\text{بنابر نامساوی برنولی})$$

چون $a_1 = 2$ و دنباله $\{a_n\}$ صعودی است پس برای هر $n \geq 2$ ، $a_n > 2$.

❖ **قضیه ۳:** دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ از بالا کراندار است.

❖ **برهان*:** بنابر قضیه (۲) دنباله $\{b_n\}$ با ضابطه $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ صعودی است. چون $b_4 = \frac{1}{4}$

پس برای هر n ، $b_n > \frac{1}{4}$ ، از اینجا نتیجه می‌گیریم که برای هر n ، $a_n b_n > a_n \times \frac{1}{4}$

$$a_n b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n < 1 \quad \text{اما}$$

$$\text{در نتیجه } a_n \times \frac{1}{4} < 1 \quad \text{یا } a_n < 4$$

❖ **نتیجه:** دنباله $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ صعودی و از بالا کراندار است پس طبق قضیه ۱ همگراست.

و ثابت می‌شود که عدد ۳ نیز یک کران بالای دنباله $\{a_n\}$ است و $2 < e < 3$.



۱- حد دنباله‌های زیر را حدس بزنید.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$$

$$c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$[(a)^\alpha]^\beta = (a)^{\alpha\beta}$$

راهنمایی: از قاعده توان‌های مکرر استفاده کنید:

۲- از ماشین حساب و یا رایانه خود استفاده کرده و عدد e را تا ۱۰ رقم اعشار به دست آورید.

۳- حاصل $(1 + 0/01)^{100}$ را به دست آورید و با عدد e مقایسه کنید.



لئونارد اویلر (Leonard Euler): ریاضیدان مشهور سوئیسی که کارهای زیادی در زمینه‌های مختلف ریاضیات از جمله جبر، آنالیز، توپولوژی و هندسه انجام داده است. اویلر ریاضیدانی بسیار پرکار بوده است با بیش از ۵۷۰ کتاب و مقاله در عالم ریاضیات در زمان حیات خود به رشته تحریر درآورده است. برخی هم او را سودمندترین ریاضیدان همه قرون و اعصار دانسته‌اند.

انتخاب حرف e برای عدد $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ ، که آن را عدد نپیر می‌نامند به افتخار اویلر از حرف اول اویلر (Euler) اقتباس شده است.

۹-۱- جبر دنباله‌ها

دنباله‌های عددی، را می‌توان همانند اعداد با هم جمع یا تفریق کرد و دنباله جدیدی به نام مجموع یا تفاضل (دو دنباله) به دست آورد. همچنین دو دنباله عددی را می‌توان در هم ضرب کرد و دنباله جدیدی به نام دنباله حاصلضرب به دست آورد. در مورد تقسیم نیز تحت شرایطی می‌توان دو دنباله را برهم تقسیم کرد.

تعریف: فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند، در این صورت دنباله‌های $\{a_n + b_n\}$ و $\{a_n - b_n\}$ و $\{a_n b_n\}$ را خواهیم داشت، جمله nام دنباله $\{a_n + b_n\}$ همان حاصل جمع عددی a_n و b_n است.

همگرایی دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به آسانی به همگرایی دنباله‌های به دست آمده منتقل می‌شود.

❖ **قضیه ۱:** فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله همگرا باشند. در این صورت

الف) دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$ ، $\{a_n \cdot b_n\}$ ، $\{c \cdot a_n\}$ (c عددی ثابت) همگرا هستند، به علاوه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

ب) هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ ، دنباله $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ نیز همگراست و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

❖ **قضیه ۲ (قضیه فشردگی):** فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ ،

همچنین فرض کنیم $\{c_n\}$ دنباله‌ای باشد به قسمی که برای هر n ، $a_n \leq c_n \leq b_n$ در این صورت دنباله $\{c_n\}$

نیز همگراست و $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$.

❖ **برهان:** فرض کنیم $\varepsilon > 0$ عدد مفروض دلخواهی باشد. چون $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ از شماره‌ای

$$(۱) \quad |b_n - L| < \varepsilon \quad \text{مانند } N_1 \text{ به بعد}$$

همچنین چون $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ از شماره‌ای مانند N_2 به بعد $|a_n - L| < \varepsilon$ (۲)

حال فرض کنیم $N = \text{Max}\{N_1, N_2\}$ ، و n عدد طبیعی دلخواهی باشد که $n \geq N$ ، پس برای هر

$$n \geq N_1 \text{ و } n \geq N_2, \text{ روابط (۱), (۲) با هم برقرارند و داریم. } b_n < L + \varepsilon$$

$$(چرا؟) \quad L - \varepsilon < a_n$$

اما برای هر n ، $a_n \leq c_n \leq b_n$ ، لذا برای هر n که $n \geq N$

$$L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$$

یعنی $|c_n - L| < \varepsilon$ ، در نتیجه $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$

❖ **مثال:** می‌دانیم $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$ که در آن k عددی طبیعی است در همگرایی دنباله‌های زیر

بحث کنید.

$$\left\{ \frac{\cos n}{n} \right\} \text{ (ب)} \quad \left\{ \frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3} \right\} \text{ (الف)}$$

$$\frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3} = \frac{2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}}$$

🚀 **حل:** (الف) داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{اما}$$

$$= 2 - 0 - 0 = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$$

$$= 5 + 0 - 0 = 5$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3} = \frac{2}{5}$$

در نتیجه

(ب) می‌دانیم همواره $-1 \leq \cos x \leq 1$ در نتیجه برای هر عدد طبیعی n ,

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} = 0$ پس $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} = 0$

- در هر یک از تمرین‌های زیر مشخص کنید که آیا دنباله مورد نظر الف) (از بالا یا پایین) کراندار است.
 ب) جملات دنباله مثبت یا منفی اند.
 ج) صعودی یا نزولی است.
 د) همگرا یا واگراست؛ و اگر واگراست به $+\infty$ و یا واگرا به $-\infty$ و یا هیچ‌یک.

$$\left\{ \frac{5n^2}{n^2+1} \right\} -1 \quad \left\{ \frac{2n}{n^2+1} \right\} -2 \quad \left\{ 4 + \frac{(-1)^n}{n} \right\} -3$$

$$\left\{ \sin \frac{1}{n} \right\} -4 \quad \left\{ \frac{n^2-1}{n} \right\} -5 \quad \left\{ \frac{\sin n}{n} \right\} -6$$

$$\left\{ n \cos \frac{n\pi}{2} \right\} -7 \quad \left\{ n \sin \frac{n\pi}{2} \right\} -8 \quad \left\{ n \cos \frac{(-1)^n}{n} \right\} -9$$

۱۰- ثابت کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$. آیا از این می‌توان نتیجه گرفت که $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ ؟

۱۱- همگرایی، واگرایی و واگرایی به $+\infty$ یا $-\infty$ دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

$$\left\{ \frac{n^2-1}{n} \right\} \text{ الف) } \quad \left\{ (-1)^n \frac{n+1}{n} \right\} \text{ ب) } \quad \left\{ \frac{n}{\sqrt{n+1}} \right\} \text{ ج) }$$

۱۲- اگر دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به ترتیب به اعداد a و b همگرا باشند و همواره

$$a_n \leq b_n, \text{ ثابت کنید: } a \leq b$$

۱۳- فرض کنیم دنباله $\{p_n\}$ همگرا و a و b دو عدد ثابت باشند به قسمی که $p_{n+1} = \frac{bp_n}{a+p_n}$ ،

حد دنباله $\{p_n\}$ را حساب کنید. ($0 < a < b$)

۱۴- دنباله $\{a_n\}$ چنین تعریف شده است:

$$a_1 = 1 \text{ و } a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

الف) ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ همگراست.

ب) حد دنباله $\{a_n\}$ را به دست آورید.

حد و پیوستگی

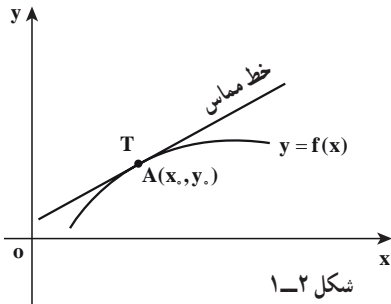
۱-۲- مقدمه

فرایند گذر از ریاضیات مقدماتی به حسابان

رشد و توسعه بخش وسیعی از حسابان ریشه در دو مسأله هندسی دارد :

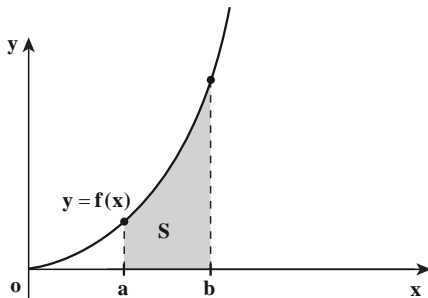
پیدا کردن مساحت‌هایی از ناحیه‌های یک سطح (صفحه) و پیدا کردن خط‌های مماس بر منحنی‌ها. در این بخش نشان می‌دهیم هر دو مسأله به‌طور تنگاتنگی براساس یک مفهوم بنیادی از حسابان که به عنوان «حد» شناخته شده قابل بیان می‌باشند.

مسأله خط مماس و مساحت : حسابان حول دو مسأله بنیادی زیر متمرکز است :



۱- مسأله مماس : تابع f و نقطه (x_0, y_0)

روی نمودار آن داده شده است، معادله خط مماس بر نمودار f در نقطه A را پیدا کنید. (شکل ۱-۲)



۲- مسأله مساحت : تابع f داده شده است.

مساحت ناحیه بین نمودار f و بازه $[a, b]$ و محور x را پیدا کنید. (شکل ۲-۲)

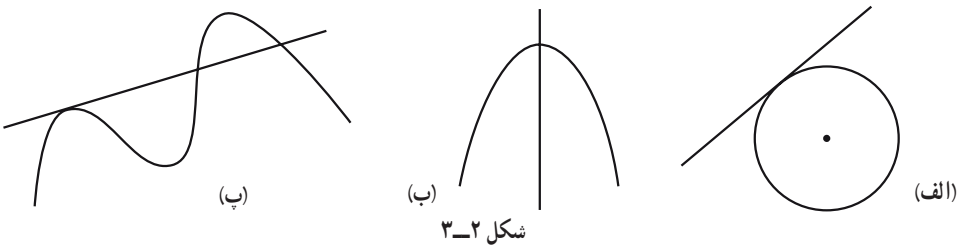
از منظر سنتی و تاریخی آن بخش از حساب که از مسأله مماس برآمده است «حساب دیفرانسیل» نامیده می‌شود و آن بخش از حسابان که از مسأله مساحت برآمده است «حساب انتگرال» نامیده می‌شود. کشف رابطه بین این دو حساب که تحت عنوان قضیه اساسی عرضه می‌گردد باعث شده است که تفکیک میان این دو، دشوار بوده و مطالعه هر دو مسأله تحت عنوان حساب دیفرانسیل و انتگرال انجام گیرد.

برای حل کردن مسأله‌های مماس و مساحت لازم است درک و فهم دقیق‌تری از مفاهیم «خط مماس» و «مساحت» داشته باشیم.

در این فصل به توضیح و تبیین خط مماس و مفهوم حد پرداخته، بررسی و مطالعه مسأله مساحت را به فصل ۴ واگذار می‌کنیم.

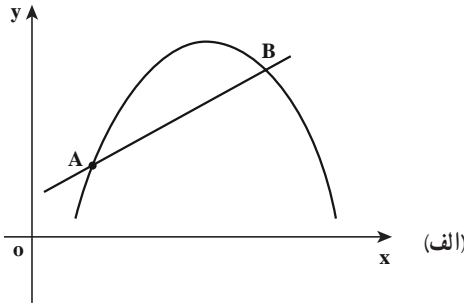
۲-۲- خط‌های مماس و حد

در هندسه مسطحه، یک خط بر دایره مماس است، هرگاه آن خط دایره را دقیقاً در یک نقطه قطع کند (شکل ۲-۳ قسمت الف). این تعریف برای انواع دیگر منحنی‌ها صادق نیست (شکل ۲-۳ قسمت ب). خطی که دقیقاً در یک نقطه منحنی را قطع می‌کند، مماس نیست. در شکل ۲-۳ قسمت (پ) این خط بر منحنی مماس است در حالی که منحنی را بیش از یک بار قطع کرده است.

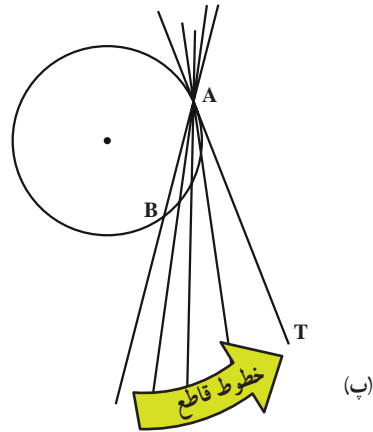
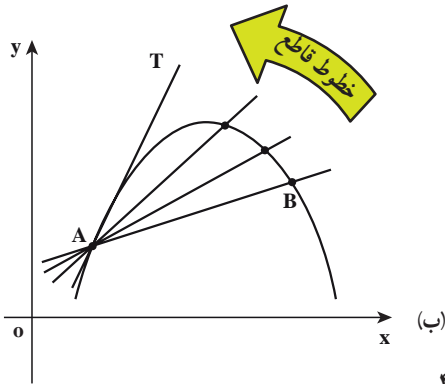


برای اینکه تعریف مفهوم خط مماس را برای منحنی‌هایی غیر از دایره بیان کنیم، باید با روشی دیگر خط‌های مماس را در نظر بگیریم.

نقطه A را روی یک منحنی در صفحه $x-y$ در نظر می‌گیریم. اگر B نقطه دلخواه و متمایز با A روی منحنی باشد، به خطی که از نقطه A و B می‌گذرد، خط قاطع می‌گوییم (شکل صفحه بعد قسمت الف). شهود ما پیشنهاد می‌کند که اگر نقطه B را روی منحنی به سوی A حرکت دهیم، خط قاطع به سوی یک حالت «حدی» دوران می‌کند (شکل ۲-۴ قسمت ب). خط T که این حالت (مکان) حدی را اشغال می‌کند، را به عنوان خط مماس در نقطه A در نظر می‌گیریم.



همان گونه که از شکل ۲-۴ قسمت (پ) معلوم است، این مفهوم جدید از یک خط مماس با مفهوم معمولی که برای دایره به کار می‌رود منطبق و سازگار است.



شکل ۲-۴

۲-۳- مفهوم حد - فرایند حد

مطالعه و بررسی مسأله خط مماس و مسأله مساحت یک ناحیه در صفحه، موجب پیدایش شهودی و تقریبی مفهوم ریاضی جدیدی به نام «حد» شد. تلاش‌های بعدی بر روی دقیق کردن مفهوم حد و رسمیت یافتن آن در ریاضیات متمرکز گردید. سپس مطالعه و بررسی نتایج حاصل از آن و کاربردهای آن در ریاضیات و در علوم دیگر در دستور کار قرار گرفت. خیلی زود مشخص گردید که مفهوم حد فراتر از حل مسأله خط مماس و مسأله مساحت باعث حل مسائل بسیار، پیدایش اندیشه‌های ریاضی بسیار و به‌طور کلی رشد و توسعه وسیع ریاضیات گردید.

یکی از نقش‌آفرینی‌های اساسی مفهوم حد که موجب کاربردهای وسیع و حل مسائل بسیاری در حوزه‌های علمی دیگر شد، بررسی رفتار تابع است. بسیاری از پدیده‌های طبیعی و فیزیکی، بسیاری از مسأله‌های واقعی پس از صورت‌بندی ریاضی به صورت یک تابع درمی‌آید.

بنابراین بررسی رفتار تابع، دربرگیرنده بسیاری از پدیده‌های طبیعی، فیزیکی، اقتصادی، زیستی و ... و حل مسائل واقعی مربوطه می‌باشد. در این بخش به بررسی و مطالعه مفهوم حد به صورت شهودی و تقریبی می‌پردازیم.

برای شروع تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ و دو دنباله $\{(0/1)^n\}$ و $\{-(0/1)^n\}$ را در نظر می‌گیریم، (مقادیر x بر حسب رادیان است).

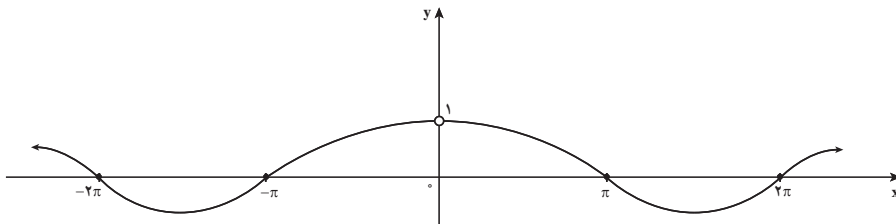
الف) سه جمله اول هر کدام از دنباله‌های بالا را بنویسید و حدس بزنید هر کدام از دو دنباله به چه عددی همگرا هستند؟
ب) جدول زیر را تکمیل کنید.

x از راست به عدد ... نزدیک می‌شود ← x از چپ به عدد ... نزدیک می‌شود

x	-۰/۱	-۰/۰۱	-۰/۰۰۱	۰			۰/۱
$f(x)$	۰/۹۹۸۳	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹۹	?			۰/۹۹۸۳

$f(x)$ به عدد ... نزدیک می‌شود ← $f(x)$ به عدد ... نزدیک می‌شود

در این فعالیت نمودار تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ که در $x=0$ تعریف نشده است به صورت شکل ۵-۲ است:
نتایج به دست آمده از جدول بالا را از روی نمودار تابع f بررسی نمایید.



شکل ۵-۲



تابع $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ را در نظر می‌گیریم.

۱- پنج جمله اول هر کدام از دنباله‌های $\{1 - (0/1)^{n-1}\}$ و $\{1 + (0/1)^{n-1}\}$ را بنویسید و حدس بزنید هر کدام از دو دنباله به چه عددی همگرا هستند؟

۲- جدول زیر را تکمیل کنید.

x از راست به عدد ... نزدیک می‌شود x از چپ به عدد ... نزدیک می‌شود

x	۰	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۲
$f(x)$	۱	۲/۷۱	۲/۹۷۰۱	۲/۹۹۷۰۰۱		?		۳/۰۰۳۰۰۱	۳/۰۳۰۱	۳/۳۱	۷

$f(x)$ به عدد ... نزدیک می‌شود $f(x)$ به عدد ... نزدیک می‌شود

۳- نمودار تابع f را در صفحهٔ مختصات رسم کنید و سپس به کمک نمودار تابع حدس بزنید که اگر x با مقادیر بزرگ‌تر از ۱ به ۱ نزدیک شود و همچنین x را با مقادیر کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک کنیم، $f(x)$ به چه عددی نزدیک خواهد شد؟

در تمرین و فعالیت بالا با تابعی روبه‌رو بودیم که متغیر x (در دامنه تابع) به عددی مانند α نزدیک می‌شد و این سؤال مطرح بود که آیا مقدارهای تابع به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ این مفهوم را حدگیری از تابع در نقطه a می‌نامند (فرایند حد)

از فعالیت بالا نتیجه می‌گیریم، وقتی متغیر x (در دامنه f) بسیار بسیار به صفر نزدیک باشد (با مقادیر بزرگ‌تر از صفر و یا کوچک‌تر از صفر)، مقدارهای $f(x)$ به ۱ نزدیک هستند. میزان نزدیک بودن آنها به ۱، بستگی به میزان نزدیک بودن x به صفر دارد. در حقیقت، به نظر می‌رسد که می‌توانیم مقدارهای $f(x)$ را هر چقدر که بخواهیم به ۱ نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه کافی به صفر نزدیک کرده باشیم و این را چنین می‌گوییم «حد تابع f وقتی که x به صفر میل می‌کند برابر ۱ است» و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

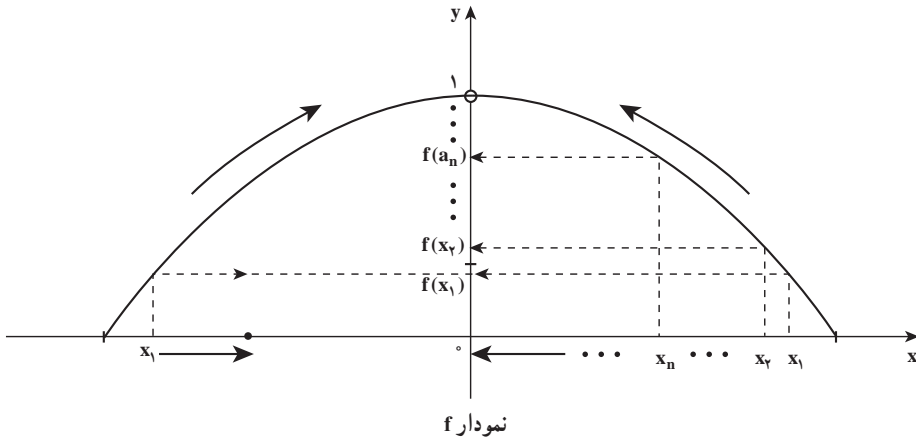
همچنین از تمرین در کلاس نتیجه می‌گیریم، وقتی متغیر x (در دامنه f) بسیار بسیار نزدیک به ۱ باشد (با مقادیر بزرگ‌تر از ۱ و یا کوچک‌تر از ۱)، مقدارهای $f(x)$ به ۳ نزدیک هستند. میزان نزدیک بودن آنها به ۳، بستگی به میزان نزدیک بودن x به ۱ دارد. در حقیقت، به نظر می‌رسد که می‌توانیم مقدارهای $f(x)$ را هر چقدر که بخواهیم به ۳ نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه کافی به ۱ نزدیک کرده باشیم و این را چنین می‌گوییم «حد تابع f وقتی که x به ۱ میل می‌کند برابر ۳ است»

و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

در تمرین و فعالیت صفحات قبل مفهومی بررسی شد که می‌توان برای یک تابع دلخواه f به صورت زیر تشریح کرد.

فرض کنید نمودار تابع دلخواه f در حوالی $x=0$ به شکل ۶-۲ باشد.



شکل ۶-۲

با مشاهده نمودار f اگر مقدارهای x که همان مقدارهای دنباله دلخواه $\{x_n\}$ هستند، همگرا به صفر باشند، دنباله $\{f(x_n)\}$ به ۱ همگراست و نیز اگر متغیر x (عضو دامنه f) با مقدارهای بزرگ‌تر و کوچک‌تر از صفر به صفر میل کند $f(x)$ به ۱ میل می‌کند. در حالت کلی از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم:

فرض می‌کنیم مجموعه D که زیر مجموعه‌ای است از مجموعه اعداد حقیقی، دامنه تابع f باشد. اگر مقدار $f(x)$ میل کند به عدد L ، وقتی که x (عضو D) به a میل کند.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{می‌نویسیم}$$

و می‌خوانیم «حد $f(x)$ وقتی x به a میل می‌کند برابر L است».

تذکر: وقتی می‌گوییم که « x به a میل می‌کند» $x \neq a$ می‌باشد و اختلاف x و a کوچک و کوچک‌تر می‌شود، فرض بر این است که تابع f در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) نقطه a تعریف شده باشد.

ویژگی‌ها و وضعیت مقادیر تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ به ازای چهار جملهٔ اول دنباله‌های $\{(0/1)^n\}$ و $\{-(0/1)^n\}$ را در نزدیکی $x=0$ با تنظیم جدول و رسم نمودار تابع توصیف کنید و سپس $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ را تخمین بزنید. حدودی که وجود ندارند.

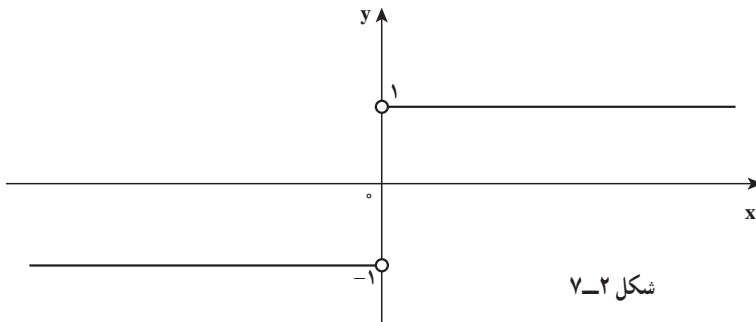
تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ و دنباله‌های $\{(0/1)^{n-1}\}$ و $\{-(0/1)^{n-1}\}$ را در نظر می‌گیریم. الف) پنج جملهٔ اول دنباله‌های داده شده را بنویسید. ب) جدول زیر را برای تابع f تکمیل کنید.

x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود x با مقادیر کوچک‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود

x	-۱	-۰/۱	-۰/۰۱	-۰/۰۰۱	-۰/۰۰۰۱	۰	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۱
$f(x) = \frac{ x }{x}$											

f(x) به عدد ... نزدیک می‌شود f(x) به عدد ... نزدیک می‌شود

پ) نتایج به دست آمده خود را روی نمودار تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ که در (شکل ۲-۷) آمده است توضیح دهید.



شکل ۲-۷

ت) آیا $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ وجود دارد؟

در حالت کلی :

الف) در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه f) با مقادیر بزرگ‌تر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقادیر $f(x)$ به عددی مانند L_1 میل کند گفته می‌شود تابع f در نقطه a حد راست دارد و مقدار این

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$

حد L_1 است و می‌نویسیم :

L_1 را حد راست تابع f در a می‌نامیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

بنابراین از این فعالیت نتیجه می‌گیریم :

ب) در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه f) با مقادیر کوچک‌تر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقادیر $f(x)$ به عددی مانند L_2 نزدیک شود گوئیم تابع f در نقطه a حد چپ دارد و مقدار این

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$$

حد L_2 است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

بنابراین از فعالیت نتیجه می‌گیریم :

تمرین در کلاس

ابتدا نمودار تابع $f(x) = x + [x]$ را در بازه $[0, 2]$ رسم کنید و سپس مقادیر $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

را تخمین بزنید. آیا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ وجود دارد؟

طرح یک مسأله

وجود حدهای $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{\pi}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{\pi}{x}$ را بررسی کنید. اصطلاحاً گوئیم رفتار تابع

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$$

را در مجاورت $x = 0$ بررسی می‌کنیم.

در مورد حد اول دنباله‌هایی در نظر می‌گیریم که با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر میل

می‌کنند.

۱- می‌دانیم دنباله $a_n = \frac{1}{n}$ همگرا به صفر است. مقادیر تابع را در ازای مقادیر این دنباله

محاسبه می‌کنیم. (جدول ۱)

(جدول ۱)

a_n	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$...
$f(a_n)$	$\sin\pi$	$\sin 2\pi$	$\sin 3\pi$	$\sin 4\pi$...

سپس جملات دنباله $\{f(a_n)\}$ همگی برابر صفر بوده و این دنباله به صفر همگرا است.

۲- دنباله $\{b_n\}$ را با جمله عمومی $b_n = \frac{2}{4n+1}$ در نظر می‌گیریم، جملات اولیه دنباله

$\left\{\frac{2}{5}, \frac{2}{9}, \frac{2}{13}, \frac{2}{17}, \dots\right\}$ بوده و می‌دانیم که این دنباله همگرا به صفر است. به ازای این مقادیر

جدول (۲) را تشکیل می‌دهیم:

(جدول ۲)

b_n	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{17}$...
$f(b_n)$	۱	۱	۱	۱	...

پس دنباله $\{f(b_n)\}$ دنباله ثابت ۱ بوده و همگرا به عدد ۱ می‌باشد.

۳- دنباله $\{c_n\}$ را با مقادیر $\left\{\frac{2}{3}, \frac{2}{7}, \frac{2}{11}, \frac{2}{15}, \dots\right\}$ که به صفر همگراست در نظر می‌گیریم.

مشابهاً جدول (۳) را برای مقادیر تابع به ازای این x ها محاسبه می‌کنیم:

(جدول ۳)

c_n	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{15}$...
$f(c_n)$	-۱	-۱	-۱	-۱	...

پس دنباله $\{f(c_n)\}$ به عدد -۱ همگراست.

ملاحظه می‌کنیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n) = -1$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 1$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$ در حالی که

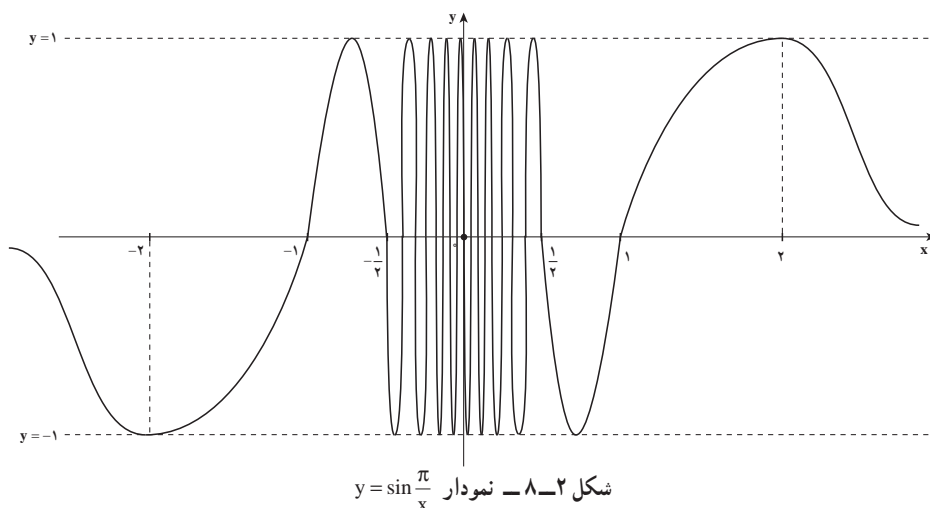
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ یعنی دنباله‌های به دست آمده برای مقادیر تابع به یک عدد ثابت و

مشخص همگرا نیستند در حالی که همه دنباله‌های عدد انتخاب شده به صفر همگرا بودند.

مشابه وضعیت فوق با انتخاب دنباله‌هایی که با مقادیر کوچک‌تر از صفر به صفر همگرایند، وجود یا عدم وجود $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ را بررسی کنید.

برای نمونه می‌توانید دنباله‌های $a_n = \frac{1}{n}$ و $b_n = -\frac{2}{4n+1}$ را به کار بگیرید.

با استفاده از ماشین حساب‌های علمی و یا رایانه ملاحظه می‌کنیم که نمودار تابع f به شکل ۸-۲ می‌باشد.



ملاحظه می‌کنیم که مقادیر تابع در مجاورت $x=0$ بین دو عدد ثابت ۱ و -۱ کم و زیاد می‌شوند، در این صورت گفته می‌شود تابع در مجاورت $x=0$ رفتاری نوسانی دارد و نیز نمودار تابع به صورت موج‌های فشرده‌تری به محور y گرایش دارند.

چون تابع $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ ، تابعی فرد است نمودار f بر بازه $(-\infty, 0)$ قرینه نمودار f بر بازه $(0, +\infty)$ نسبت به مبدأ مختصات است.

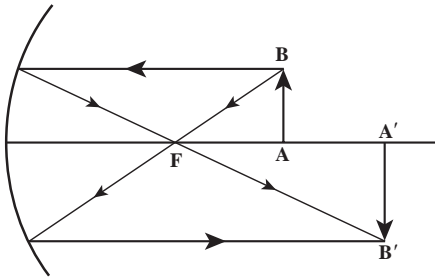
پرسش: براساس اطلاعات به دست آمده در جدول‌های (۱) و (۲) و آیا $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$ وجود دارد؟

۴-۲- حد بی‌نهایت

❖ **مسئله:** تصویری از یک شیء که در مقابل آینه مقعر قرار گرفته روی پرده افتاده است، با این فرض که فاصله شیء از آینه بزرگ‌تر از فاصله کانونی ($p > f$)

۱- رابطه بزرگ‌نمایی آینه مقعر (m) را بر حسب p و f به دست آورید.

۲- وضعیت m را وقتی که p به f نزدیک می‌شود بررسی کنید.



شکل ۹-۲

در این فعالیت اگر f فاصله کانونی و p فاصله جسم تا آینه و q فاصله تصویر تا آینه فرض شود (شکل ۹-۲)، بزرگ‌نمایی در آینه مقعر برابر است با :

$$m = \frac{A'B'}{AB} \text{ یا } m = \frac{q}{p}$$

۱- همان‌طور که در فیزیک یاد گرفته‌اید، داریم :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

در رابطه (۱) به جای q ، mp را قرار می‌دهیم تا رابطه (۲) به دست آید.

$$m = \frac{f}{p-f} \quad (2)$$

۲- در رابطه (۲) فاصله کانونی (f) ثابت است و فاصله شیء تا آینه متغیر است و مقدار

بزرگ‌نمایی (m) مقدار تابعی است بر حسب متغیر p .

اکنون اگر p با مقدارهای بزرگ‌تر از f به f نزدیک و نزدیک‌تر شود، آنگاه m (بزرگ‌نمایی)

بزرگ و بزرگ‌تر خواهد شد.

در حقیقت از نزدیک کردن p

به مقادیر بزرگ‌تر از f به f ، می‌توان

هرچقدر که بخواهیم m را بزرگ

انتخاب کنیم (مقدارهای m بی‌کران

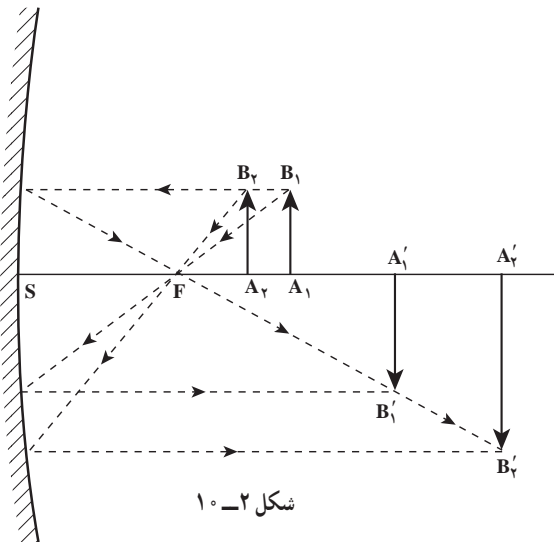
افزایش می‌یابند) و از نمادگذاری

$$\lim_{p \rightarrow f^+} \frac{f}{p-f} = +\infty$$

استفاده می‌کنیم.

پرسش: نمادگذاری بالا را به

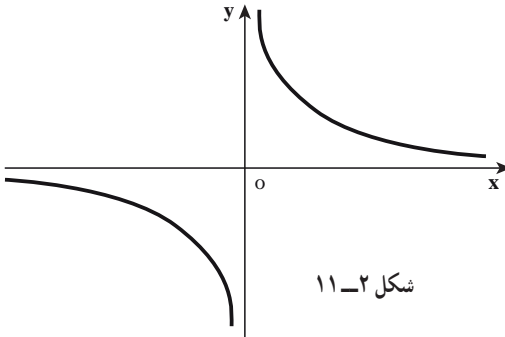
کمک شکل ۱۰-۲ توصیف کنید.



شکل ۱۰-۲

آینه مقعر

$$A_1B_1 = A_2B_2 = \dots = A_nB_n = \dots$$



تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را که دامنه آن $R - \{0\}$ است، در نظر می‌گیریم. نمودار این تابع را در حسابان دیده‌اید (شکل ۱۱-۲).

شکل ۱۱-۲

ملاحظه می‌کنیم که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر (از سمت راست صفر) به صفر نزدیک می‌شود مقادیر تابع به دلخواه بزرگ می‌شوند. به زبان دنباله‌ها هرگاه دنباله‌ای را در نظر بگیریم که به صفر میل کند مانند دنباله $a_n = \frac{1}{n}$ دنباله $f(a_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = n$ به دست می‌آید و می‌دانیم که

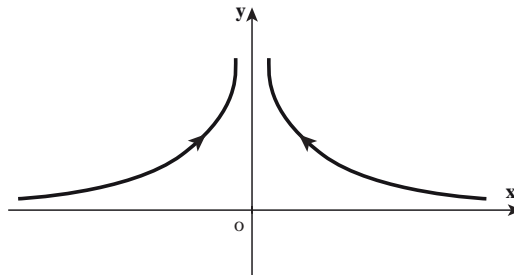
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \infty \quad \text{پس} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

مشابه‌ها از روی نمودار می‌بینیم که وقتی x با مقادیر کوچک‌تر از صفر (از سمت چپ صفر) به صفر نزدیک می‌شود، مقادیر تابع که همگی منفی‌اند، از هر عددی کوچک‌تر می‌شوند. به زبان دنباله‌ها، هرگاه بخواهیم x از سمت چپ به صفر میل کند، باید دنباله‌هایی را در نظر بگیریم که با مقادیر منفی به صفر میل کنند، مانند دنباله $a_n = -\frac{1}{n}$ و یا $b_n = \frac{-1}{n^2}$ ، در این صورت مثلاً $f(a_n) = -n$ به دست آمده و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = -\infty \quad \text{بنابراین:} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

از این بررسی نتیجه می‌گیریم که تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در صفر حد ندارد.

اکنون تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ را در نظر می‌گیریم. نمودار این تابع یک منحنی است بالای محور x که در مجاورت صفر شاخه‌های آن به گونه‌ای مماس‌وار به محور y نزدیک می‌شوند (شکل ۱۲-۲).



شکل ۱۲-۲

برای آنکه رفتار تابع را در مجاورت صفر بررسی کنیم، به عبارت دیگر در خصوص وجود یا عدم وجود حد تابع در صفر مطالعه کنیم، دنباله‌هایی را در نظر می‌گیریم که به صفر میل کنند (مقادیر دنباله عضو دامنه f)، مانند $a_n = \frac{1}{n}$ و $b_n = -\frac{1}{n}$ ، در این صورت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$$

توجه داریم که مقادیر دنباله $\{a_n\}$ از راست و مقادیر دنباله $\{b_n\}$ از چپ به صفر میل می‌کنند.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

بنابراین:

در نتیجه اصطلاحاً می‌گوییم تابع f در نقطه $a=0$ دارای حد نامتناهی و یا حد بی‌کران است.

وقتی $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ، باز هم چنین توصیف می‌کنیم که تابع f در نقطه a دارای حد نامتناهی است.

حالت کلی: وقتی از نماد $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ استفاده می‌کنیم، گوییم f در a دارای حد $+\infty$

است و این بدان معنی است که مقادیر $f(x)$ به دلخواه بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند، به شرط آن که متغیر x (عضو دامنه f) به قدر کافی به a نزدیک شود. به زبان دنباله‌ها این وقتی اتفاق می‌افتد که برای هر دنباله

$$\{a_n\} \text{ با مقادیر عضو دامنه } f \text{ که } a_n \rightarrow a, \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = +\infty.$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty \text{ نشان دهید که}$$

تابع $f(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ و دنباله‌های $\{1 + (0.1)^{n-1}\}$ و $\{1 - (0.1)^{n-1}\}$ را در نظر می‌گیریم:

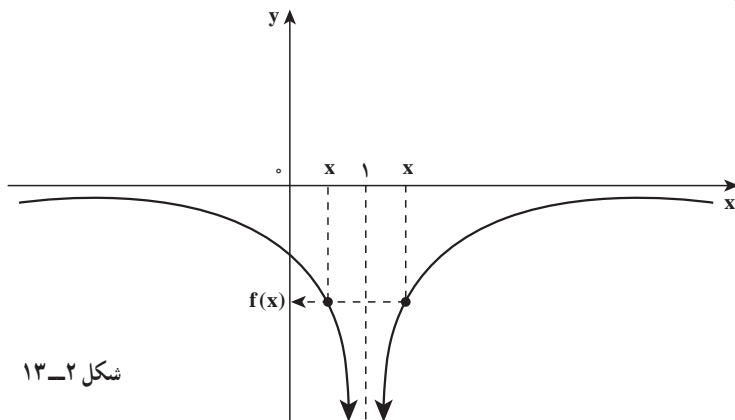
۱- پنج جمله اول دنباله‌های بالا را بنویسید.

۲- جدول زیر را برای تابع f تکمیل کنید.

x	$-1/1$	$-1/0.1$	$-1/0.01$	$-1/0.001 \rightarrow 1 \leftarrow -1/0.001$	$1/0.01$	$1/0.1$	$1/1$
$f(x)$	$\rightarrow ? \leftarrow$						

۳- آیا مقدارهای $f(x)$ وقتی x به 1 نزدیک می‌شود، به عدد خاصی نزدیک

می‌شوند؟ جواب خود را از روی نمودار تابع $f(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ در شکل ۱۳-۲ توضیح دهید.



شکل ۱۳-۲

این فعالیت به ما نشان می‌دهد، وقتی x به ۱ نزدیک می‌شود، $(x-1)^2$ به صفر نزدیک خواهد شد و $\frac{-1}{(x-1)^2}$ بسیار کوچک منفی می‌شود. در حقیقت به نظر می‌رسد که می‌توان با نزدیک کردن x به اندازه کافی به ۱، مقادیر $f(x)$ را به دلخواه با مقادیر منفی کوچک و کوچک‌تر کرد (مقادیر $f(x)$ بی‌کران کاهش می‌یابند).

در نتیجه مقادیر $f(x)$ به هیچ عدد میل نمی‌کند. بنابراین $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2}$ وجود ندارد. برای نشان دادن وضعیتی که در این فعالیت پیش آمده از نمادگذاری $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$ استفاده می‌کنیم.

حالت کلی: وقتی از نماد $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ استفاده می‌کنیم، گوئیم f در a دارای حد $-\infty$ است. و این بدان معنی است که مقادیر $f(x)$ با مقادیر منفی کوچک و کوچک‌تر می‌شوند (مقادیر $f(x)$ بی‌کران با مقادیر منفی کاهش می‌یابند) به شرط آن که متغیر x (عضو دامنه f) به قدر کافی به a نزدیک شود. به زبان دنباله‌ها، این وقتی اتفاق می‌افتد که برای هر دنباله $\{a_n\}$ با مقادیر عضو دامنه f که $a_n \rightarrow a$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = -\infty$.

تمرین در کلاس

نشان دهید که $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$

۲-۵- حد در بی نهایت

تا اینجا رفتار تابع را در حول و حوش عددی حقیقی مانند a مورد مطالعه قرار داده ایم، به عبارت دقیق تر وجود یا عدم وجود حد تابع را در نقطه مشخص a بررسی کرده ایم. در این بخش علاقه مندیم تا رفتار تابع را برای مقادیر بسیار بزرگ x و یا برای مقادیر بسیار کوچک ولی از حیث قدر مطلق بزرگ، مورد مطالعه قرار دهیم. رفتار تابع را برای x های بزرگ و بی کران مثبت، حد در $+\infty$ و رفتار تابع را برای x های بزرگ و با علامت منفی (بی کران منفی) حد در $-\infty$ نامیده می شود. به مثال تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ که نمودار آن نیز در ۲-۱۱ کتاب ملاحظه گردید برمی گردیم. وقتی x مقادیر بزرگ و بزرگ تر را اختیار می کند، یعنی در جهت x های مثبت روی خط حقیقی به اصطلاح تغییر می کند، مقادیر تابع کوچک و کوچک تر شده و از هر عدد مشخصی کوچک تر می شوند. به لحاظ شهودی، همچنان که در شکل نمایان است نمودار این تابع در سمت راست و برای x های بزرگ رفته رفته به محور x نزدیک تر می شود یعنی فاصله نقاط این شاخه نمودار از محور x ، کوچک و کوچک تر می شود.

با ابزار دنباله نیز می توانیم مسأله را بهتر بررسی کنیم، منتهی چون مرادمان حد در $+\infty$ است، باید دنباله ها را چنان اختیار کنیم که به $+\infty$ واگرا باشند. برای نمونه فرض کنیم دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n = n$ یک چنین دنباله ای باشد پس $f(a_n) = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n}$ و می دانیم $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ پس می گوئیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ مشابهاً وقتی x ها به $-\infty$ میل می کنند، یعنی x ها علامت منفی دارند ولی از لحاظ قدر مطلق بزرگ و بزرگ تر می شوند. بنابراین دنباله ها را طوری باید اختیار کنیم که به $-\infty$ واگرا باشند. برای نمونه هرگاه با دنباله $a_n = 1 - n^2$ کار کنیم، $f(a_n) = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1 - n^2}$ و می دانیم که $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$ پس $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ و این واقعیتی است که از نمودار نیز به خوبی مشهود است.

حالت کلی: وقتی می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ، منظورمان آن است که مقادیر $f(x)$ را هر چقدر که بخواهیم به L نزدیک کنیم به شرط آنکه x های عضو دامنه f به قدر کافی بزرگ باشند.



دبیر: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1}$ را حدس بزنید.

محسن این گونه مسأله را بررسی کرده است:

در رابطه با حدسیه‌سازی $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1}$ با مقادیر بزرگ و بزرگ‌تر x سرو کار داریم. پس عدد ۱ و یا هر عدد ثابت دیگری، در مقابل x ناچیز است. پس اگر $x+1$ مخرج کسر را با x تقریب کنیم، مقادیر تابع با $\frac{x}{x}=1$ تقریب می‌گردند، بنابراین مقادیر این تابع برای x های بزرگ، عددهایی نزدیک ۱ هستند. در نتیجه حدس می‌زنیم که

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

آیا استدلال و تفکر شهودی محسن درست است؟

می‌توانید دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ با ضابطه‌های $a_n = n$ و $b_n = n^2 + 1$ را که هر دو به $+\infty$ واگرا هستند، محک بزنید.

در مورد مقدار $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1}$ چگونه فکر می‌کنید؟

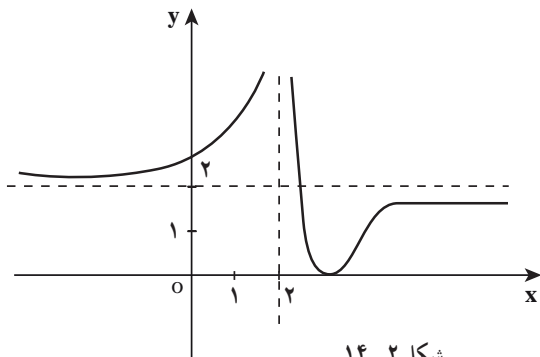
حالت کلی: هرگاه x با مقادیر منفی کوچک و کوچک‌تر شود، آنگاه $f(x)$ به L نزدیک و

نزدیک‌تر می‌شود، می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ و گوئیم حد تابع f در $-\infty$ برابر L است. توجه داشته باشید که وقتی x مقادیر منفی را اختیار کند، برای آن که مرتب کوچک‌تر شود باید قدرمطلق آن بزرگ‌تر گردد.



۱- مقدارهای $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ را در صورت وجود، حدس بزنید.

۲- نمودار تابع f در شکل ۱۴-۲ نشان داده شده است:



شکل ۱۴-۲

حدهای زیر را حدس بزنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

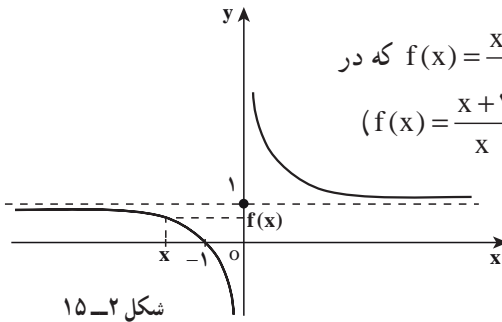
۳- تابع $f(x) = \frac{x+1}{x}$ و دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n = -10^n$ را در نظر بگیرید.
الف) وقتی x مقادیر این دنباله را طبق جدول زیر اختیار کند $f(x)$ را محاسبه کنید.

a_n	-10	-100	-1000	-10000
$f(a_n)$				

ب) آیا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وجود دارد؟

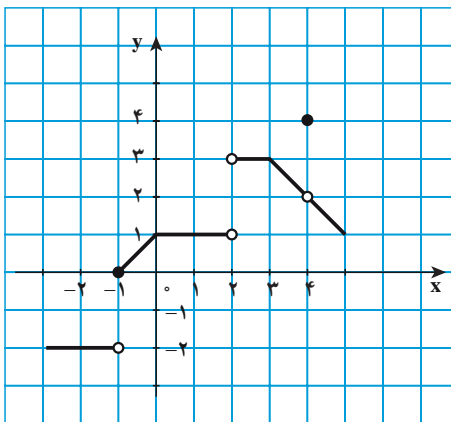
جواب خود را با توجه به نمودار $f(x) = \frac{x+1}{x}$ که در

شکل ۲-۱۵ آمده نیز توجیه کنید. $f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$



مسائل

۱- با استفاده از نمودار f که در زیر داده شده است، مقدار هر یک از عبارت‌های زیر را، در صورت وجود، مشخص کنید. اگر این مقدار وجود ندارد توضیح دهید که چرا وجود ندارد.



الف) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

۲- تابع هوی ساید (Heaviside) به صورت زیر تعریف می شود :

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

از این تابع در مدارهای الکتریکی برای نشان دادن هجوم ناگهانی جریان الکتریکی، یا ولتاژ، در لحظه زدن کلید استفاده می شود.

الف) نمودار تابع هوی ساید را رسم کنید.

ب) مقدار عبارت های $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t)$ و $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t)$ را مشخص کنید.

۳- تابع علامت (یا تابع signum) به صورت زیر تعریف می شود :

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

الف) نمودار تابع علامت را رسم کنید.

ب) مقدار عبارت های $\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sgn}(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sgn}(x)$ را مشخص کنید.

۴- نمودار تابع $f(x) = [x] + [-x]$ را رسم نموده و حدهای زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

آیا می توان نوشت : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -1$ ، (به ازای هر $a \in \mathbb{R}$)؟

۵- با رسم نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{[x]}$ در بازه $[-1, 1]$ ، مقدار هر یک از عبارت های زیر را، در صورت وجود، مشخص کنید.

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{[x]}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{[x]}$

([] علامت جزء صحیح است.)

۶- مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right]$ را پیدا کنید.

۲-۶- مفهوم ریاضی حد

همان‌طور که در فعالیت بخش اول بررسی شد، تابع $g(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ در مجاورت $x = 0^\circ$ (به ازای $x \neq 0^\circ$) دارای رفتاری نوسانی است و به ازای دنباله‌های همگرا به صفر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ و $\{x_n\}$ ، دنباله‌های $\{g(a_n)\}$ و $\{g(b_n)\}$ و $\{g(c_n)\}$ و $\{g(x_n)\}$ به ترتیب به 0° و 1° و -1° و $\frac{1}{p}$ همگرا می‌شوند یعنی به ازای هر دنباله دلخواه همگرا به صفر مقدارهای $g(x)$ به سمت یک عدد ثابتی میل نمی‌کند بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0^\circ} \sin \frac{\pi}{x}$ وجود ندارد.

البته نباید این ذهنیت به وجود آید که فقط نوسان‌های $g(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ جلوی حد داشتن آن را در $x = 0^\circ$ می‌گیرند. زیرا با بررسی وضعیت تابع $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ ، $x \neq 0^\circ$ در مجاورت $x = 0^\circ$ خواهیم دید این تابع مانند تابع $g(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ دارای نوسان است، اما در اینجا نوسان‌ها به وسیله عامل میرایی x ، مستهلک می‌شوند. برای یادگیری بهتر مفاهیم «عامل میرایی x » و «مستهلک شدن نوسان‌ها» ابتدا جدول‌های زیر را به کمک دنباله‌های فعالیت بخش اول که برای تابع $g(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ به کار بردیم، با تابع $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ تنظیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x = a_n & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots \\ \hline f(a_n) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \rightarrow 0 \end{array} \quad (5)$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x = b_n & \frac{2}{5} & \frac{2}{9} & \frac{2}{13} & \frac{2}{17} & \frac{2}{21} & \dots \\ \hline f(b_n) & \frac{2}{5} & \frac{2}{9} & \frac{2}{13} & \frac{2}{17} & \frac{2}{21} & \dots \rightarrow 0 \end{array} \quad (6)$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x = c_n & \frac{2}{3} & \frac{2}{7} & \frac{2}{11} & \frac{2}{15} & \frac{2}{19} & \dots \\ \hline f(c_n) & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{7} & -\frac{2}{11} & -\frac{2}{15} & -\frac{2}{19} & \dots \rightarrow 0 \end{array} \quad (7)$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x = x_n & \frac{6}{13} & \frac{6}{25} & \frac{6}{37} & \frac{6}{49} & \frac{6}{61} & \dots \\ \hline f(x_n) & \frac{3}{13} & \frac{3}{25} & \frac{3}{37} & \frac{3}{49} & \frac{3}{61} & \dots \rightarrow 0 \end{array} \quad (8)$$

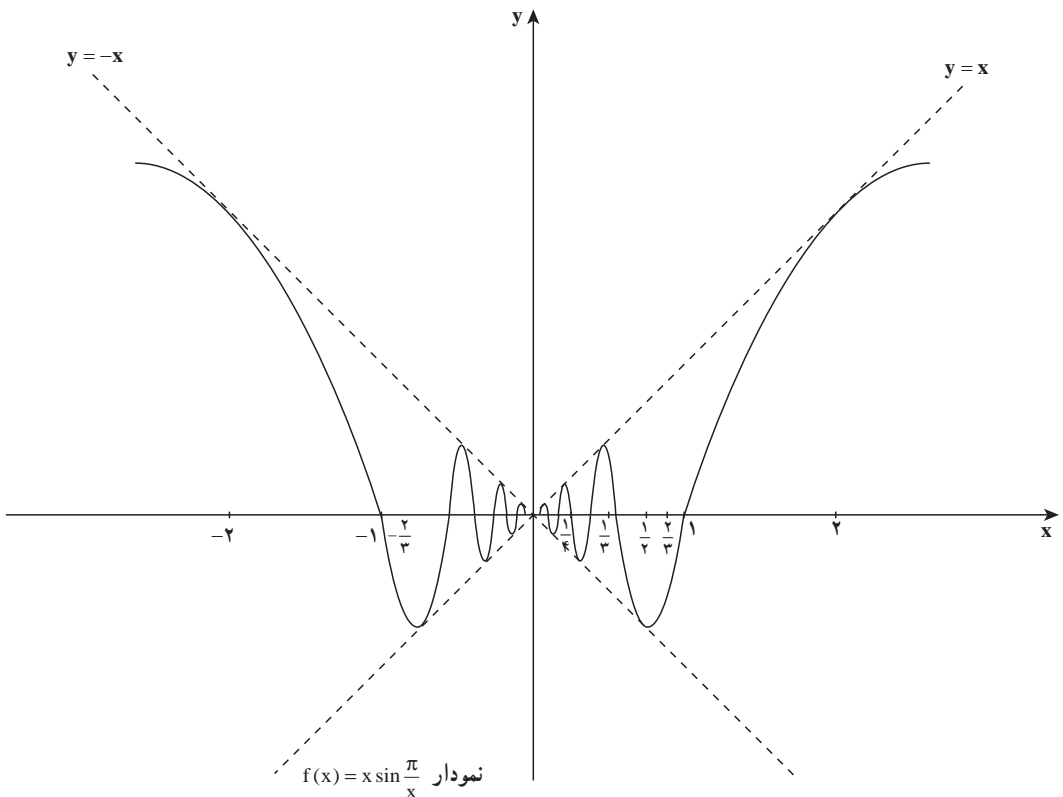
با مشاهده جدول‌های ۵ و ۶ و ۷ و ۸ معلوم می‌شود که با نزدیک کردن x (مقدار دنباله) به صفر، می‌توان هر قدر که بخواهیم $f(x)$ را به صفر نزدیک کنیم و عاملی که باعث شده به ازای هر دنباله همگرا به صفر نظیر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ و $\{x_n\}$ و ...، $f(x)$ به صفر میل کند همان عامل « x » است که در $\sin \frac{\pi}{x}$ ضرب شده و $f(x)$ را به وجود آورده است.

$$\text{از طرفی به ازای هر } x \neq 0, -1 \leq \sin \frac{\pi}{x} \leq 1 \text{ و}$$

$$-x \leq x \sin \frac{\pi}{x} \leq x, x > 0$$

$$-x \geq x \sin \frac{\pi}{x} \geq x, x < 0$$

از این رو در هر حالت $f(x)$ بین $y = x$ و $y = -x$ قرار می‌گیرد و چون تابع f زوج است نمودار تابع $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ نسبت به محور y تقارن دارد و حد مشترک توابع $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ و $y = x$ و $y = -x$ وقتی $x \rightarrow 0$ ، مساوی صفر است. (شکل ۲-۱۶)



شکل ۲-۱۶

با بررسی رفتار تابع $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ به طور شهودی نشان داده شد که $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{\pi}{x} = 0$. در حالی که $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$ وجود ندارد، از این رو برای طرح مفاهیم حد و اثبات قضایایی در باب حدود، تعریف حد را با رویکرد دقیق ریاضی بیان می‌کنیم.

توضیح اینکه در این بخش با تابع‌هایی سروکار داریم مانند $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ که دامنه آن D ، زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} (مجموعه اعداد حقیقی) است. در این کتاب وقتی از حد تابع f در نقطه $x=a$ صحبت می‌کنیم فرض بر این است که تابع f در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) نقطه a تعریف شده باشد.

تعریف: فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} و $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد، در این صورت، گوئیم حد تابع f در a ، عدد حقیقی L است و می‌نویسیم، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست ($a_n \neq a$)، دنباله $\{f(a_n)\}$ به L همگرا باشد.

دقت کنید چون حد دنباله $\{f(a_n)\}$ در صورت وجود یکتا است، حد تابع f در نقطه a نیز در صورت وجود یکتا است که آن را با $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ نشان می‌دهیم.

❖ **مثال:** به کمک تعریف ثابت کنید: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

حل: تابع $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ به ازای $x=1$ نامعین است و برای هر $x \neq 1$ داریم $f(x) = x+1$ و برای هر دنباله $\{a_n\}$ که $a_n \neq 1$ و همگرا به 1 داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + 1) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

بنابراین



به کمک تعریف ثابت کنید:

۱- $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ ، $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ ، $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ ، عدد ثابت،

۲- $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{\pi}{x} = 0$ ۳- $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$

۴- $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ ، n عددی است طبیعی (اگر n زوج باشد، $a \geq 0$)

❖ **مسئله:** به کمک تعریف ثابت کنید تابع $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ در نقطه $x = 0$ حد ندارد. در فعالیت زیر نشان می‌دهیم تابع f در $x = 0$ حد ندارد:

۱- دو دنباله به نام‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مثال بزنید که هر دو مخالف صفراند ولی به عدد صفر همگرا باشند.

۲- دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به چه عددی همگرا هستند؟

۳- آیا $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$ وجود دارد؟

در فعالیت بالا

۱- دنباله‌های $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n = \frac{1}{n}$ و $\{b_n\}$ با ضابطه $b_n = \frac{1}{2n + \frac{1}{2}}$ هر دو مخالف صفرند ولی به صفر همگرا هستند.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin n\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \quad \text{—۲}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

۳- در این فعالیت

بنابراین طبق تعریف حد، $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$ وجود ندارد.



ثابت کنید:

۱- $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ وجود ندارد.

۲- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 0 \\ x-1 & , x > 0 \end{cases}$ در نقطه صفر دارای حد نیست.

قضیه صفحه بعد محاسبه حد بسیاری از توابع را بدون مراجعه مستقیم به تعریف حد امکان‌پذیر می‌سازد.

❖ **قضیه ۱:** فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} باشد و $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ تابع‌هایی باشند که

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = L_1 + L_2 \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x) = L_1 - L_2 \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf)(x) = cL_1 \quad (\text{پ})$$

، c عددی ثابت است.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2 \quad (\text{ت})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L_1}{L_2} \quad (\text{ث})$$

اگر $L_2 \neq 0$ آنگاه

❖ **نتیجه:** با استفاده از استقرای ریاضی از قضیه (۱) نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \times \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \times \dots \times \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

❖ **مثال:** نشان دهید:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a) \quad (\text{ب})$$

اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای دلخواه باشد آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} Q(x) = Q(a) \neq 0 \quad (\text{پ})$$

اگر $Q(x)$ و $P(x)$ دو چندجمله‌ای دلخواه باشند و

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

حل: 

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = (\lim_{x \rightarrow a} x) \dots (\lim_{x \rightarrow a} x) = (\lim_{x \rightarrow a} x)^n = a^n \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad (\text{ب})$$

اگر آنگاه طبق قسمت الف و قسمت پ قضیه (۱)

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = a_n \lim_{x \rightarrow a} x^n + a_{n-1} \lim_{x \rightarrow a} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow a} a_0$$

داریم:

$$= a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_0 = P(a)$$

(پ) طبق قسمت (ث) قضیه (۱) و قسمت (ب) مثال (۲) داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} P(x)}{\lim_{x \rightarrow a} Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

اثبات قضیه (۱)

دنباله دلخواه $\{a_n\}$ ، همگرا به a را که $a_n \neq a$ است در نظر می‌گیریم چون $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = L_1$

و $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(a_n) = L_2$ پس :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(a_n) \pm g(a_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \pm \lim_{n \rightarrow +\infty} g(a_n) = L_1 \pm L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = L_1 \pm L_2$$

در نتیجه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} cf(a_n) = c \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = cL_1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n)g(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \lim_{n \rightarrow +\infty} g(a_n) = L_1L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = L_1L_2$$

در نتیجه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n)}{\lim_{n \rightarrow +\infty} g(a_n)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0$$

در نتیجه



۱- به کمک قضیه (۱) ثابت کنید :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0 \text{ اگر و تنها اگر } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

۲- به کمک قضیه (۱) ثابت کنید :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x+1} = \frac{4}{3} \quad \text{(ب)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} 9x^2 = 36 \quad \text{(الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)(x^2 + x) = 4 \quad \text{(پ)}$$

۷-۲- قضیه فشردگی

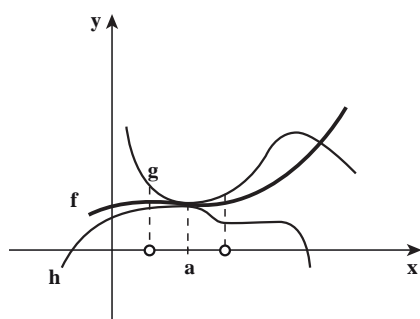
در بعضی مواقع برای محاسبه حد یک تابع، مقایسه آن تابع با دو تابع که دارای حد معلوم هستند مفید می‌باشد (هرسه تابع باید در حوالی یک نقطه باهم مقایسه شوند).

برای مثال در شکل (۱) این بخش مشاهده می‌شود نمودار تابع $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ به ازای $x \neq 0$ همواره بین نمودارهای دو تابع $g(x) = x$ و $h(x) = -x$ قرار دارد و با توجه به شکل (۱) اگر x به صفر میل کند، هر دو تابع $g(x) = x$ و $h(x) = -x$ به صفر میل می‌کنند و به‌طور شهودی نتیجه می‌شود که اگر $x \rightarrow 0$ آنگاه $f(x)$ ، که بین $g(x)$ و $h(x)$ فشرد شده است به صفر میل می‌کند. این ایده محتوای قضیه زیر موسوم به قضیه فشردگی است.

❖ **قضیه ۲:** هرگاه به ازای هر x در بازه‌ی بازی شامل a ، (به جز احتمالاً در خود a)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L : \text{آنگاه} \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad \text{و نیز} \quad h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

توصیف قضیه فشردگی، که گاهی آن را قضیه ساندویچ هم می‌نامند، در شکل ۱۷-۲ آورده شده است.



شکل ۱۷-۲

طبق این قضیه اگر $f(x)$ در نزدیکی a بین $g(x)$ و $h(x)$ فشرد شده باشد و اگر حدهای g و h در a برابر با L باشد، آنگاه تابع f در a حدی برابر با L دارد.

❖ **مثال:** نشان دهید $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$

🔪 **حل:** ابتدا توجه کنید که نمی‌توان نوشت:

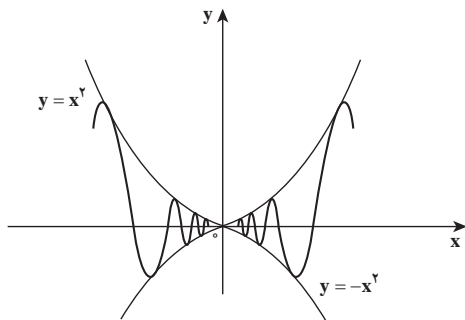
$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

زیرا $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ وجود ندارد (چرا؟)

ولی به علت این که $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ پس

همان‌طور که در شکل ۱۸-۲ هم مشاهده می‌شود

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$



شکل ۱۸-۲

و می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} (-x)^2 = 0$ پس طبق قضیه فشردگی نتیجه می‌گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

اثبات قضیه فشردگی: باید نشان دهیم که برای هر دنباله دلخواه $\{a_n\}$ که همگرا به a است و $a_n \neq a$ ، دنباله $\{f(a_n)\}$ به L همگراست.

و اما برای هر دنباله $\{a_n\}$ که به a همگراست، به ازای n ‌های به اندازه کافی بزرگ، a_n در یک همسایگی

$$\text{محدوف } a \text{ قرار می‌گیرد. بنابراین: } h(a_n) \leq f(a_n) \leq g(a_n) \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} h(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(a_n) = L$$

پس طبق قضیه فشردگی در دنباله‌ها داریم: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = L$ (شکل بالا را مشاهده کنید)

$$\cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ بنابراین}$$

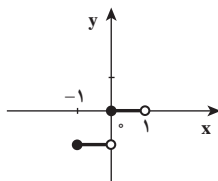
تعریف: اگر A زیرمجموعه‌ای از دامنه f باشد، آنگاه تابع f را بر مجموعه A کراندار می‌نامیم، در صورتی که عدد مثبتی مانند M یافت شود به طوری که برای هر $x \in A$

$$|f(x)| \leq M$$

❖ **مثال:** الف) تابع $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ در دامنه‌اش کراندار است. زیرا به ازای هر $x \in D_f$

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$$

ب) تابع $f(x) = [x]$ بر مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R}, -1 < x < 1\}$ کراندار است زیرا به ازای هر $x \in A$ ، $f(x)$ یا صفر است و یا -1 یعنی $|f(x)| \leq 1$



تمرین در کلاس

نشان دهید تابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ در دامنه‌اش کراندار است.

یادآوری: همان‌طور که قبلاً نشان داده شد تابع $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ در نقطه صفر حد ندارد ولی در دامنه‌اش کراندار است و با مشاهده نمودار تابع $g(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$ (شکل (۱) را مشاهده کنید) که بین دو تابع $y = x$ و $y = -x$ فشرده شده است. معلوم می‌شود که $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{\pi}{x} = 0$.

و از این ایده می‌توان قضیه زیر را بیان کرد، که در محاسبه حد بعضی از توابع به‌کار می‌رود.

❖ **قضیه ۳:** اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و تابع g در یک همسایگی محذوف a کراندار باشد. آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$$

❖ **مثال:** بنابر قضیه (۳) داریم:

$$۱) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1} = 0$$

زیرا: $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$ و $-1 \leq \sin \frac{1}{x-1} \leq 1$ یعنی تابع $g(x) = \sin \frac{1}{x-1}$ کراندار است.

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0} x^r [x] = 0$$

زیرا: $\lim_{x \rightarrow 0} x^r = 0$ و تابع $g(x) = [x]$ در یک همسایگی محذوف صفر و به شعاع مثلاً ۱

کراندار است.

اثبات قضیه (۳): طبق تعریف حد به ازای هر دنباله $\{a_n\}$ که همگرا به a باشد و $a_n \neq a$ داریم

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = 0$ و برای تابع g که در یک همسایگی محذوف a کراندار است عدد مثبتی مانند M

وجود دارد که $|g(a_n)| \leq M$ پس طبق قضیه فشردگی نتیجه می‌شود که دنباله $\{f(a_n)g(a_n)\}$ همگرا به

صفر است. بنابراین $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$



۱- نشان دهید که اگر $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

۲- اگر به ازای هر $x \neq 0$ داشته باشیم $3 - x^2 \leq f(x) \leq 3 + x^2$ ، مطلوب است $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

۳- تابع دیریکله با ضابطه x اصم، x گویا، $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{گویا،} \\ 0 & \text{اصم،} \end{cases}$ داده شده است. ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 0} xD(x) = 0$

یادداشت

در حالت کلی قاعده زیر درست است که در بخش پیوستگی تابع مرکب می‌توان آنرا ثابت کرد.

قاعده ریشه‌گیری: $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$ که در اینجا n عددی است طبیعی (اگر n زوج باشد، فرض می‌کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \geq 0$)

❖ مثال: طبق قاعده ریشه‌گیری داریم:

$$۱) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-2}{3x^2-2}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt[3]{\frac{x-6}{x^2+2}} = \sqrt[3]{\frac{-1}{27}} = \frac{-1}{3}$$

تمرین در کلاس

مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[4]{\frac{x+15}{2x^2-1}}$ را به دست آورید.

۲-۸- حدهای یک‌طرفه

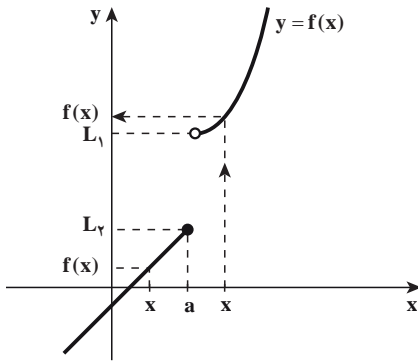
همان‌طور که بعد از تعریف حد بیان شد، حد تابع یکتاست، یعنی اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و

$$L_1 = L_2 \text{ آنگاه } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$$

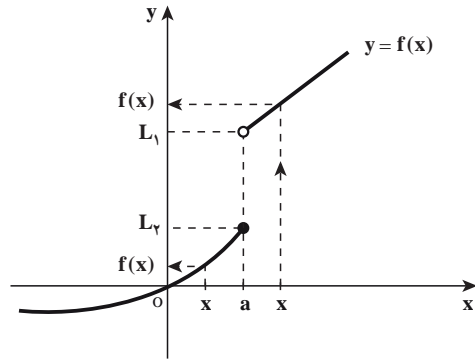
با وجود این که تابعی مانند f فقط می‌تواند یک حد در نقطه مفروض داشته باشد، گاهی لازم است بتوانیم رفتار تابعی را وقتی x با مقدارهای بزرگتر از a به a میل می‌کند و یا وقتی که x با مقدارهای کوچکتر از a به a میل می‌کند، توصیف کنیم.

همچنین ممکن است $f(x)$ ، با نزدیک شدن x به a از دو جهت راست و چپ به دو مقدار متفاوت میل کند. (الف، ب در شکل ۲-۱۹) و یا اینکه تابع به ازای x های کوچکتر از a و یا بزرگتر از a ، تعریف نشده باشد (پ، ت در شکل ۲-۱۹).

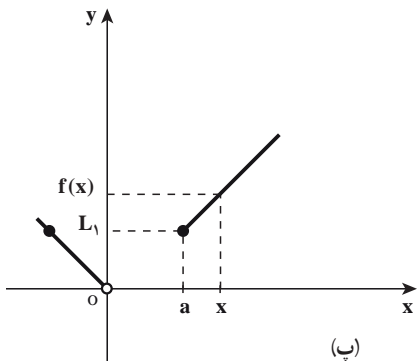
در حالتی که x با مقادیر بزرگتر از a (از سمت راست) به a میل کند حد $f(x)$ را، حد راست $f(x)$ و حد $f(x)$ ، وقتی x با مقادیر کوچکتر از a (از سمت چپ) به a میل کند حد چپ $f(x)$ نامیده می‌شود و حد راست تابع $y = f(x)$ در نقطه a را با نماد $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ و حد چپ تابع $y = f(x)$ در نقطه a را با نماد $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ نشان می‌دهیم.



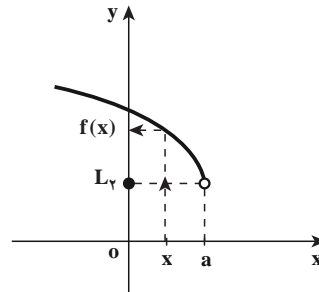
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

شکل ۲-۱۹

با این توضیحات دو تعریف زیر را بیان می‌کنیم. همچنین در حد راست تابع f در نقطه a فرض بر این است که تابع در یک همسایگی راست a تعریف شده و برای حد چپ لازم است تابع در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد.

تعریف: گوئیم تابع $y = f(x)$ در نقطه a دارای حد راست L است و می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

، هرگاه به ازای هر دنباله از عضوهای دامنه f مانند $\{a_n\}$ که به a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = L$$

همگراست و $a_n > a$ داشته باشیم :

❖ **مثال:** تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 1 \\ x^2+1, & x > 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. به کمک تعریف حد راست ثابت کنید

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

حل: فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه و همگرا به ۱ باشد ($a_n \neq 1$) که مقادیر آن همگی از ۱ بزرگتر باشند آنگاه:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n^2 + 1) = 1 + 1 = 2$$

پس طبق تعریف $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$

تمرین در کلاس

به کمک تعریف حد راست ثابت کنید: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$

تعریف: گوئیم تابع $y = f(x)$ در نقطه a دارای حد چپ L است و می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ ، هرگاه به ازای هر دنباله از عضوهای دامنه f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست و $a_n < a$ داشته باشیم: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = L$

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 1 \\ x^2 + 1, & x > 1 \end{cases}$ را در نظر گرفته و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ را به کمک تعریف حد چپ به دست آورید.

حل: فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه و همگرا به ۱ باشد ($a_n \neq 1$) که مقادیر آن همگی از ۱ کوچکتر باشند آنگاه:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2a_n - 1) = 2 - 1 = 1$$

پس طبق تعریف $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

تمرین در کلاس

به کمک تعریف ثابت کنید که اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ موجود و مساوی عدد حقیقی L باشند آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود و مساوی L است.

نکته: کلیه قضایایی که در این بخش بررسی شدند، با تغییرات جزئی و بدیهی در مورد حدهای یک طرفه نیز برقرار هستند.

❖ **مثال:** ثابت کنید: $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$ ، که در آن، $\left[\frac{1}{x} \right]$ جزء صحیح $\frac{1}{x}$ است.

🚀 **حل:** می‌دانیم به ازای هر عدد حقیقی S ، $S - 1 < [S] \leq S$ و با انتخاب $S = \frac{1}{x}$ ، $x \neq 0$ داریم:

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x} \quad (1)$$

رابطه (۱) را برای دو حالت زیر در نظر می‌گیریم.

(۱) طرفین نامساوی‌های (۱) را در $x > 0$ ضرب می‌کنیم.

$$1 - x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1$$

چون $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x) = 1$ ، بنابراین قضیه فشردگی داریم: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$

(۲) طرفین نامساوی‌های (۱) را در $x < 0$ ضرب می‌کنیم.

$$1 \leq x \left[\frac{1}{x} \right] < 1 - x$$

چون $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x) = 1$ ، بنابراین طبق قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1 \quad \text{در نتیجه}$$



نشان دهید: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ موجود نیست.

یادآوری: در حسابان دیده‌اید که اگر x برحسب رادیان باشد نامساوی‌های زیر به ازای x ‌هایی

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{که برقرارند، } 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

❖ **نتیجه:** نامساوی $|\sin x| \leq |x|$ به ازای هر x (برحسب رادیان) برقرار است.

👤 **برهان:** نامساوی به ازای $x = 0$ می‌شود $0 \leq 0$ که این هم درست است و به ازای $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

نامساوی به خاطر (۱) برقرار می‌باشد و نامساوی به ازای $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ نیز واضح است که برقرار است زیرا

$$|\sin x| \leq 1$$

❖ **مثال:** به کمک تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad \text{اگر } a \text{ یک عدد حقیقی باشد، آنگاه}$$

اثبات: دنباله دلخواه $\{a_n\}$ که همگرا به a است و برای هر عدد طبیعی n ، $a_n \neq a$ را در نظر بگیرید، در این صورت

$$|\sin a_n - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{a_n - a}{2} \cos \frac{a_n + a}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{a_n - a}{2} \right| \leq |a_n - a|$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin a_n = \sin a \quad \text{بنابراین}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad \text{در نتیجه طبق تعریف حد،}$$



$$1- \text{ ثابت کنید: } \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$$2- \text{ ثابت کنید: الف) } \lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a \quad , \quad a \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a \quad , \quad a \neq k\pi \quad (k \text{ عدد صحیح است})$$

۹-۲- محاسبه یک حد مهم

در بخش قبل با جدول و نمودار به صورت شهودی نتیجه گرفتیم که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (برحسب رادیان)

اکنون به کمک قضیه فشردگی درستی تساوی $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ را ثابت می‌کنیم.

اثبات: می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ و برای هر x که $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ ، $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \quad \text{و یا}$$

از طرفی $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 1 - 1 = 0$ پس بنا بر قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 0$$

در نتیجه: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

❖ **مثال:** حد تابع $f(x) = \frac{\sin ax}{bx}$ را وقتی $x \rightarrow 0$ بیابید. ($a, b \neq 0$)

🚀 **حل:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{b} \times \frac{\sin ax}{ax} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = \frac{a}{b} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$$

زیرا، وقتی $x \rightarrow 0$ ، $t = ax \rightarrow 0$ و اما $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

❖ **مثال:** حد تابع $f(x) = \frac{\sin(\sin x)}{x}$ را وقتی $x \rightarrow 0$ بیابید.

🚀 **حل:** می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ که در این تساوی $x \neq 0$ و $\sin x \neq 0$ بنابراین

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

زیرا اگر $x \rightarrow 0$ داریم $t = \sin x \rightarrow 0$



مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{3x}$ را حساب کنید.

روش‌های محاسبهٔ بعضی از حدود: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ آن وقت برای

محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ نمی‌توان از قضیه حد خارج‌قسمت استفاده کرد.

بلکه باید تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ را از طریق حذف عامل مخالف صفر مشترک در صورت و مخرج

کسر (با عمل تجزیه و گویا کردن صورت یا مخرج کسر) با تابعی ساده‌تر مانند $y = h(x)$ که حدشان برابر

است، عوض کرد. این کار به این دلیل درست است که به ازای $x \neq a$ ، $\frac{f}{g}(x) = h(x)$ و در حالت

کلی نتیجهٔ زیر درست است.

اگر $\frac{f}{g}(x) = h(x)$ ، $x \neq a$ در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ به شرط آنکه حدها وجود داشته باشند.

❖ مثال: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x + 2}{x + 2}$ را بیابید.

🚀 حل: چون $\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 + 5x + 2) = \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2) = 0$ بنابراین به ازای $x \neq -2$ و یا $x + 2 \neq 0$ داریم:

$$\frac{2x^2 + 5x + 2}{x + 2} = \frac{(x+2)(2x+1)}{(x+2)} = 2x+1$$

در نتیجه $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x + 2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (2x + 1) = -4 + 1 = -3$

تمرین در کلاس

مطلوب است محاسبه $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

❖ مثال: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}$ را بیابید.

🚀 حل: اگر x به صفر میل کند، صورت و مخرج کسر به صفر میل می‌کنند بنابراین به ازای $x \neq 0$ داریم:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3} = \frac{x^2(\sqrt{x^2 + 9} + 3)}{(\sqrt{x^2 + 9} - 3)(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} = \frac{x^2(\sqrt{x^2 + 9} + 3)}{x^2 + 9 - 9} = 3 + \sqrt{x^2 + 9}$$

در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3} = \lim_{x \rightarrow 0} (3 + \sqrt{x^2 + 9}) = 3 + \sqrt{9} = 6$

تمرین در کلاس

مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$ را بیابید.

❖ **مثال:** مقدار $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos^3 x}{\sin^2 x}$ را بیابید.

حل: وقتی x به π میل کند، صورت و مخرج کسر به صفر میل می‌کنند پس به ازای $x \neq \pi$ حد را در یک همسایگی محذوف π حساب می‌کنیم)

$$\frac{1 + \cos^3 x}{\sin^2 x} = \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{1 - \cos x + \cos^2 x}{1 - \cos x}$$

عامل $(1 + \cos x) \neq 0$ از صورت و مخرج ساده شده است زیرا $x \neq \pi$ است.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos^3 x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x + \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 + 1 + 1}{1 - (-1)} = \frac{3}{2} \quad \text{در نتیجه}$$



مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$ را محاسبه کنید.

مسائل

۱- به کمک تعریف دنباله‌ای حد، ثابت کنید

(ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

(الف) $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$

(ت) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a \geq 0$

(پ) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} = 0$

(ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} x^{\lfloor x \rfloor} = 0$

۲- الف) دو تابع به نام‌های f و g مثال بزنید که $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ وجود داشته باشد،

ولی نه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وجود داشته باشد نه $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$

ب) دو تابع به نام‌های f و g مثال بزنید که $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ وجود داشته باشد، ولی نه

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وجود داشته باشد، نه $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$

۳- با استفاده از قضایای حد، حدهای زیر را در صورت وجود حساب کنید :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^2 - 9}{x} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x+[x]-[2x]) \quad (\text{ت})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x \cot x \quad (\text{پ})$$

۴- آیا عددی مانند a وجود دارد که مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1-\sqrt{4x+1}}{2x^2+ax-4}$ عددی مخالف صفر باشد؟ مقدار a و مقدار این حد را پیدا کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1 \quad \text{که } a \text{ و } b \text{ را چنان انتخاب کنید}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|3x-1|-|3x+1|}{x} \quad \text{را حساب کنید.} \quad \text{۶-}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1-x \left[\frac{1}{x} \right] \right) \quad \text{را حساب کنید.} \quad \text{۷-}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x-4}{x^2-2x} - \frac{x+2}{x^2+x} \right) \quad \text{را حساب کنید.} \quad \text{۸-}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin 4x (\cot 2x - \cot x) \quad \text{را بیابید.} \quad \text{۹-}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^+} \frac{|\cos \pi x|}{1-\sqrt{2x}} \quad \text{را بیابید.} \quad \text{۱۰-}$$

$$f(x) = \left[\frac{4x^2+3}{x^2+1} \right] \quad \text{تابع} \quad \text{۱۱-}$$

۱۲- حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\sin x - \cos x} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} (2-\sqrt{x}) \tan \frac{\pi x}{8} \quad (\text{ت})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2} \quad (\text{پ})$$

۱۳- با استفاده از قضیه فشردگی مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$ را بیابید (می‌توانید راه حل ساده‌تری برای این مسئله، ارائه دهید؟)

۱۴- با فرض اینکه $f(x) = \left[x + \frac{1}{3} \right] + [3x]$ ، دنباله $\left\{ f\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right) \right\}$ به چه عددی همگراست؟

۱۵- به کمک تعریف دنباله‌ای حد، ثابت کنید تابع‌های زیر در نقطه داده شده، حدشان موجود نیست.

$$\text{الف) } f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} \text{ در نقطه } x=1 \quad \text{ب) } g(x) = \cos \frac{1}{x-1} \text{ در نقطه } x=1$$

۱۶- به کمک تعریف دنباله‌ای حد، ثابت کنید، تابع زیر (تابع دیریکله) در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ گویا} \\ 0 & , \text{ گنگ} \end{cases}$$

۱۷- به کمک تعریف دنباله‌ای حد، نشان دهید تابع زیر در نقطه $x = \frac{1}{3}$ دارای حد است و مقدار حد را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & , \text{ گویا} \\ 3x+1 & , \text{ گنگ} \end{cases}$$

$$18- \text{ ثابت کنید: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

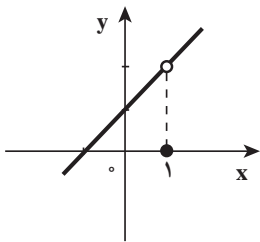
۲-۱- پیوستگی تابع

مقدمه: یک شیء، متحرک فیزیکی که در حال حرکت است، نمی‌تواند در یک‌جا ناپدید شده و دوباره درجایی دیگر ظاهر شود. لذا ما مسیر متحرک را یک خط راست یا یک منحنی یکپارچه بدون سوراخ (حفره) و بدون هیچ بریدگی یا جهشی می‌بینیم. این چنین خط راست یا منحنی‌هایی را «پیوسته» می‌گوییم. در این بخش، می‌خواهیم این مفهوم شهودی را به‌صورت ریاضی بیان کرده و چند خاصیت نمودارها و منحنی‌های پیوسته را توصیف کنیم.

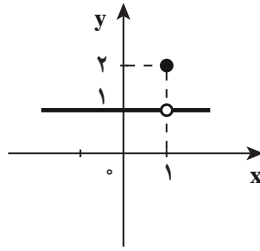
اولین ایده‌ای که از کلمه پیوستگی به ذهن شما می‌رسد چیست؟

«مسلسل»، «به‌هم چسبیده»، «بدون بریدگی»: همه اینها از کلمه پیوستگی به ذهن می‌رسد و به‌طور کلی تصور ذهنی ما از نمودار یک تابع پیوسته، یک خط راست یا یک منحنی صاف و هموار در صفحه مختصات است، اگرچه تابع‌هایی وجود دارد که در یک یا چند نقطه و یا در دامنه‌اش پیوسته‌اند ولی اطلاق کلمه پیوسته به آنها دور از ذهن به‌نظر می‌رسد (مثالی ارائه می‌شود) و در این بخش خواهیم دید، توابع پیوسته آن‌گونه که احساس و درک شهودی اولیه ما بیانگر آن است، خیلی هم ساده نیستند، در واقع خیلی از توابع پیوسته هموار نیستند.

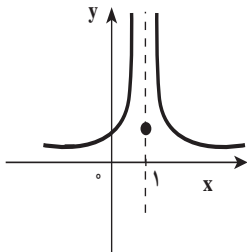
در شکل ۲-۲ رفتار توابع f_1 و f_2 و f_3 و f_4 را در حوالی نقطه $x = 1$ بررسی کنید. (مقدار تابع و حد تابع را در صورت وجود به دست آورید)



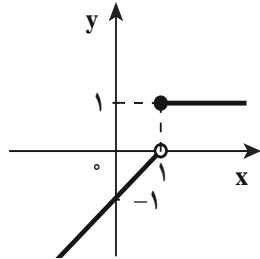
(ب)



(الف)



(ت)



(پ)

شکل ۲-۲

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad f_1(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$f_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad (\text{ت}) \quad f_3(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ x-1, & x < 1 \end{cases} \quad (\text{پ})$$

در فعالیت بالا دیدیم که رابطه $\lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = f(1)$ ، ($n = 1, 2, 3, 4$) در توابع داده شده برقرار نیست و به طور شهودی ملاحظه می‌شود که این توابع در نقطه $x = 1$ دارای بریدگی و یا پرش هستند و می‌گوییم این توابع در نقطه $x = 1$ ناپیوسته‌اند. در سایر نقاط وضعیت چگونه است؟

معلوم است که در هر نقطه به طول $x \neq 1$ نمودار تابع‌های بالا بریدگی و یا پرشی ندارند که در این حالت، می‌گوییم در نقاط $x \neq 1$ پیوسته‌اند. به زبان نمادی می‌گوییم تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است هرگاه

این امور ما را به تعریف زیر می‌رساند. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

تعریف ۱: فرض کنید تابع f در نقطه a و در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) تعریف شده باشد. در این صورت می‌گوییم تابع f در نقطه a پیوسته است هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

الف) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ وجود داشته باشد.

ب) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

تبصره ۱: البته شرط «ب» نیز به تنهایی پیوستگی تابع f را در a بیان می‌کند،

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

چرا که سخن از این عبارت متضمن وجود $f(a)$ ، وجود حد و تساوی مقدار حد با $f(a)$ است.

تبصره ۲: اگر تابع f در نقطه a عضو دامنه‌اش پیوسته نباشد، گوییم f در a ناپیوسته است.

مثال: آیا مقداری برای m یافت می‌شود که تابع $f(x) = \begin{cases} |x| & , x \neq 0 \\ m & , x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته باشد؟

حل: می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = -1$ ، در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$ وجود ندارد. لذا m را هر

عددی که بگیریم، شرط (ب) در تعریف پیوستگی برقرار نیست و نمی‌توان تابع f را در $x = 0$ پیوسته کرد.



پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & , x \neq 1 \\ 4 & , x = 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

پیوستگی تابع در هر نقطه از دامنه آن: دامنه اکثر توابعی که با آنها سروکار داریم بازه هستند یا اجتماع تعدادی بازه جدا از هم، نقطه c متعلق به دامنه را یک نقطه درونی دامنه می‌نامیم هرگاه این نقطه به بازه بازی واقع در دامنه تعلق داشته باشد. مثلاً دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

بازه بسته $[-1, 1]$ است که از نقاط درونی $(-1, 1)$ و نقطه انتهایی چپ -1 و نقطه انتهایی راست 1 تشکیل شده است. بنابراین می‌گوییم تابع f در نقطه درونی c متعلق به دامنه‌اش پیوسته است هرگاه

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

❖ مثال: نشان دهید تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است.

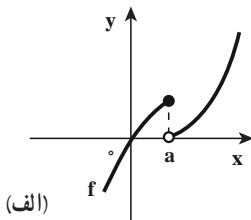
🚀 حل: $x = 0$ نقطه درونی دامنه f است و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ پس تابع f در $x = 0$ پیوسته است.

تمرین در کلاس

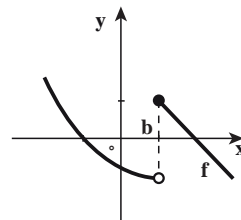
نشان دهید تابع $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته است.

پیوستگی راست و چپ: ممکن است یک تابع در یک نقطه از دامنه‌اش پیوسته نباشد (شکل

۲۱-۲ را ببینید)



(الف)



(ب)

شکل ۲-۲۱

در قسمت (الف) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ ، در این حالت می‌گوییم تابع f در $x = a$ پیوستگی چپ دارد و در قسمت (ب) $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$ که می‌گوییم تابع f در $x = b$ پیوستگی راست دارد، بنابراین تعریف زیر را بیان می‌کنیم.

تعریف ۲: می‌گوییم f در c از راست پیوسته است هرگاه $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$

می‌گوییم f در c از چپ پیوسته است هرگاه $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$

❖ **مثال:** تابع $f(x) = [x]$ در هر عدد صحیح n از راست پیوسته است اما از چپ ناپیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n = f(n)$$

زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n - 1 \neq f(n)$$

اما



پیوستگی تابع $f(x) = [\sin x]$ را در نقطه $x = \pi$ بررسی کنید. (پیوستگی راست و چپ)

تعریف: پیوستگی در نقاط انتهایی

(۱) اگر c یک نقطه انتهایی چپ دامنه f باشد، می‌گوییم f در c پیوسته است هرگاه در c از راست پیوسته باشد.

(۲) اگر c یک نقطه انتهایی راست دامنه f باشد می‌گوییم f در c پیوسته است هرگاه در c از چپ پیوسته باشد.

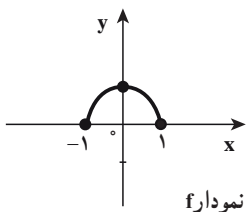
برای درک بهتر این تعریف به مثال زیر توجه کنید.

❖ **مثال:** دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ بازه $[-1, 1]$ است، f در نقطه انتهایی راست دامنه خود

یعنی 1 پیوسته است زیرا در آنجا از چپ پیوسته است، زیرا به این سبب که $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 0$ و f در نقطه انتهایی چپ دامنه خود یعنی -1 پیوسته است زیرا در آنجا از راست پیوسته

است:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = f(-1) = 0$$



شکل ۲-۲۲

البته f در هر نقطه درونی دامنه‌اش ($-1 < x < 1$) نیز پیوسته است

یعنی اگر $-1 < c < 1$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \sqrt{1-c^2} = f(c)$ (شکل ۲-۲۲ نمودار f است)

پرسش: آیا تابع f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است؟

تمرین در کلاس

پیوستگی تابع $f(x) = x - \sqrt{4 - x^2}$ را در نقاط انتهایی دامنه آن بررسی کنید.

پیوستگی روی بازه: می‌گوییم تابع f روی بازه I پیوسته است هرگاه f در هر نقطه I پیوسته باشد به ویژه می‌گوییم f تابعی پیوسته است هرگاه f در هر نقطه دامنه‌اش پیوسته باشد.

❖ **مثال:** پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در دامنه‌اش یعنی $(0, +\infty)$ بررسی کنید.

حل: تابع f در نقطه انتهایی چپ دامنه‌اش یعنی 0 پیوسته است زیرا در آنجا از راست پیوسته است $(\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = f(0))$ همچنین f در هر نقطه $c > 0$ پیوسته است زیرا $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$

تمرین در کلاس

پیوستگی تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ را در دامنه‌اش بررسی کنید.

۱-۱-۲ - مفهوم پیوستگی تابع f در یک نقطه بر اساس همگرایی دنباله‌ها

تابع f را در نقطه $x=a$ عضو دامنه‌اش پیوسته می‌نامیم، به شرطی که

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (1)$$

البته برقراری رابطه (۱) به طور ضمنی دو ویژگی زیر را لازم دارد.

$$1- \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ وجود داشته باشد.}$$

$$2- \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

با این توضیح و تعریف حد تابع بر اساس همگرایی دنباله‌ها، می‌توان تعریف دیگری از پیوستگی

تابع در یک نقطه را بر اساس همگرایی دنباله‌ها بیان کرد.

تعریف ۳: فرض کنیم D دامنه تابع f زیر مجموعه‌ای از \mathbb{R} باشد، $a \in D$ تابع $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه a پیوسته است، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط D مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست، دنباله $\{f(a_n)\}$ به $f(a)$ همگرا باشد.

محتوی این تعریف این است که پیوستگی تابع در یک نقطه هم ارز این است که با دقیق‌تر کردن ورودی، می‌توان به خروجی‌های دلخواه دقیق دست یافت.

به کمک تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه براساس همگرایی دنباله‌ها می‌توان پیوستگی مجموع، حاصل ضرب و خارج قسمت دو تابع پیوسته را نتیجه گرفت.

❖ **قضیه ۱:** فرض کنیم بازه D اشتراک دامنه تابع‌های f و g باشد و f و g هر دو در نقطه a پیوسته باشند و c عددی ثابت باشد آنگاه تابع‌های زیر نیز در a پیوسته‌اند.

$$\text{الف) } f+g \quad \text{ب) } f-g \quad \text{پ) } cf \quad \text{ت) } f \cdot g \quad \text{ث) } \frac{f}{g} \quad \text{به شرطی که } g(a) \neq 0$$

❖ **برهان:** همه حکم‌ها به سادگی از حکم‌های مشابه برای محاسبه حد مجموع و حاصل ضرب و خارج قسمت در قضیه (۱) نتیجه می‌شوند.

برای نمونه قسمت (ث) را ثابت می‌کنیم.

به ازای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ از نقاط D که همگرا به a است داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a) \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = g(a)$$

بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(a)}{g(a)}, \quad g(a) \neq 0$$

پس طبق تعریف (۳) تابع $\frac{f}{g}$ در نقطه a پیوسته است.

❖ **نکته:** عکس این قضیه همواره درست نیست.

❖ **مثال:** تابع‌های $f(x) = \begin{cases} x & \text{گویا،} \\ x & \text{گنگ،} \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x & \text{گویا،} \\ 1 & \text{گنگ،} \end{cases}$ در $x=0$ حد ندارند و بنابراین در

$$x=0 \text{ پیوسته نیستند. اما برای هر } x \in \mathbb{R} \text{، } (f \cdot g)(x) = 0$$

و این تابع ثابت در هر نقطه‌اش، حد آن با مقدار تابع در آن نقطه برابر است، پس در تمام نقاط از جمله $x=0$ پیوسته است.

دو تابع مثال بزنید که هر دو در نقطه a ناپیوسته باشند ولی مجموع آنها در a پیوسته باشد.

تابع‌هایی مانند تابع چند جمله‌ای و یا تابع کسری گویا، در هر نقطه از دامنه، حد تابع با مقدار تابع در آن نقطه برابر است و این خود ایده‌ای است برای بیان قضیه زیر

❖ قضیه ۲ :

الف) هر چند جمله‌ای همه‌جا پیوسته است یعنی روی $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ پیوسته است.
ب) هر تابع گویا در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است.

❖ برهان :

الف) هر چند جمله‌ای تابعی است به شکل

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

که در آن a_0 و a_1 و \dots و a_{n-1} و a_n عددهایی ثابت‌اند می‌دانیم

$$\lim_{x \rightarrow c} a_0 = a_0$$

$$\lim_{x \rightarrow c} x^m = c^m, \quad m=1, 2, 3, \dots, n$$

این تساوی به معنی آن است که تابع $f(x) = x^m$ تابعی است پیوسته در نتیجه بنابر قسمت (پ) قضیه (۱) $g(x) = ax^m$ نیز تابعی است پیوسته. چون $P(x)$ مجموع تابع‌هایی پیوسته نظیر $g(x) = ax^m$ و تابعی ثابت است بنابر قسمت الف قضیه (۱) نتیجه می‌شود تابع چند جمله‌ای در \mathbb{R} پیوسته است.

ب) هر تابع گویا تابعی است به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای‌اند و دامنه f مجموعه $D = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$ است.

از طرفی بنابر قسمت الف قضیه (۲)، $P(x)$ و $Q(x)$ در همه‌جا پیوسته‌اند در نتیجه طبق قسمت (ث) قضیه (۱) تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است.

❖ **مثال:** تابع $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$ روی چه بازه‌هایی پیوسته است؟

حل: دامنه f ، مجموعه $\{+1, -1\}$ ، بنابراین طبق قضیه (۱) تابع f به جز در نقاطی که مخرج آن صفر می‌شود، همه جا پیوسته است در نتیجه تابع روی بازه‌های زیر پیوسته است.
 $(-\infty, -1)$ و $(-1, 1)$ و $(1, +\infty)$



تابع $f(x) = \frac{2}{x-3} + \frac{x+1}{x^2+x+1}$ روی چه بازه‌هایی پیوسته است؟

۱۲-۲- پیوستگی توابع مثلثاتی

در حدهای مثلثاتی ثابت شده است که

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

بنابراین طبق تعریف پیوستگی تابع در نقطه a تابع‌های $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ در هر نقطه a

پیوسته اند در نتیجه تابع $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ بجز در نقاطی که $\cos x = 0$ پیوسته است و تابع $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ بجز در نقاطی که $\sin x = 0$ پیوسته است.

توضیح: در نقاطی که $\cos x = 0$ که $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

و در نقاطی که $\sin x = 0$ که $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

❖ **مثال:** فرض کنید $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ ، $f(0)$ را چنان تعریف کنید که تابع f در $x=0$ پیوسته

باشد.

حل:
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)}$$

وقتی x به صفر میل می‌کند داریم $(1 - \cos x) \neq 0$ پس

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 1 + 1 = 2$$

با انتخاب $f(0) = 2$ تابع f در صفر پیوسته می‌شود.

تمرین در کلاس

تابع $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \sin x}$ در چه نقاطی پیوسته است؟

به این ترتیب با اتکا به قضیه (۱) می‌توان با عملیات جبری از تابع‌های پیوسته داده شده، تابع‌های پیوسته جدیدی ساخت و علاوه بر این، روش دیگر، برای تولید تابع‌های پیوسته، ترکیب تابع‌های پیوسته است.

این کار بنا بر قضیه زیر میسر است.

❖ قضیه ۳: اگر تابع f در b پیوسته باشد و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ ، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b)$$

به عبارت دیگر $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))$

در حقیقت قضیه (۳) بیانگر آن است که وقتی x به a نزدیک شود، $g(x)$ به b نزدیک می‌شود و

چون f در b پیوسته است، وقتی $g(x)$ به b میل می‌کند آن وقت $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b)$ همچنین در این قضیه می‌توان نماد حد را به درون نماد تابع بُرد، به شرطی که تابع پیوسته باشد و حد وجود داشته باشد.

به عبارت دیگر در این قضیه تعویض و جابه‌جا کردن نماد « f » با نماد « \lim » مجاز است.

❖ مثال: می‌دانیم تابع $f(x) = |x|$ همه‌جا پیوسته است. و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ بنابراین طبق قضیه (۳)

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(b) = |b|$$

از قضیه (۳) نتیجه می‌گیریم که ترکیب دو تابع پیوسته، خود تابعی پیوسته است. و به بیان دقیق‌تر، اگر تابع g در نقطه a و تابع f در $g(a)$ پیوسته باشد، آنگاه تابع $f \circ g$ در نقطه a پیوسته است.

❖ مثال: نشان دهید تابع $y = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x^2+x+1}}$ همه‌جا پیوسته است.

حل:  مخرج کسر زیر رادیکال همواره مخالف صفر است ($\Delta = 1 - 4 < 0$) بنابراین تابع گویای

$$g(x) = \frac{x-2}{x^2+x+1}$$

همه جا پیوسته است.

از طرفی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ همواره پیوسته است ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sqrt[3]{a}$)


پس ترکیب دو تابع پیوسته f و g یعنی تابع $f(g(x)) = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x^2+x+1}}$ همه جا پیوسته است.

همان طور که در مقدمه پیوستگی تابع، گفته شد، تابع هایی وجود دارد که در یک یا چند نقطه از دامنه شان پیوسته اند ولی اطلاق کلمه پیوسته به آنها دور از ذهن به نظر می رسد.

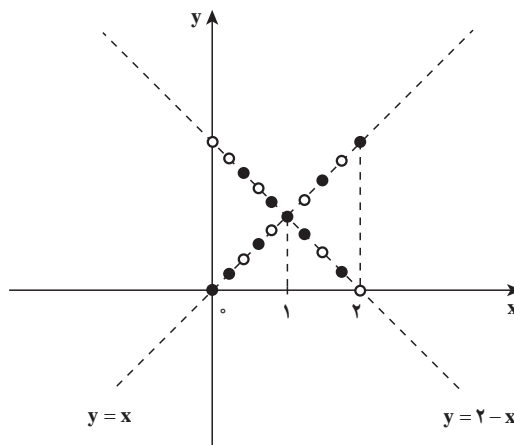
مثال:  تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{ گویا} \\ 2-x & , \text{ گنگ} \end{cases}$$

نقاطی از تابع f را تعیین کنید که تابع در آن نقاط پیوسته باشد.

حل:  می دانید که در هر بازه باز از اعداد حقیقی هم اعداد گویا وجود دارد و هم اعداد گنگ، بنابراین نقاط تابع f یا روی خط $y=x$ (وقتی که x گویا باشد) و یا روی خط $y=2-x$ (وقتی که x اصم باشد) قرار دارند.

با مشاهده نمودار به صورت نقطه چین تابع در شکل ۲-۲۳ هر چقدر به نقطه (۱، ۱) نزدیک تر شویم



شکل ۲-۲۳

نقطه چین‌ها به هم متراکم‌تر خواهند شد و به نظر می‌رسد که تابع در $x=1$ حد دارد و برای اثبات درستی حدس خود، از تعریف حد به شرح زیر استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه از اعداد حقیقی باشد به طوری که $a_n \rightarrow 1$ ($a_n \neq 1$)، کافی

است ثابت کنیم $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(a_n) - 1| = 0$ یا $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1$ در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$ و تابع f در نقطه $x=1$ پیوسته است.

و اما به ازای مقادیری از جملات دنباله $\{a_n\}$ که گویا باشند داریم $|f(a_n) - 1| = |a_n - 1|$.

و به ازای مقادیری از جملات دنباله $\{a_n\}$ که گنگ باشند داریم

$$|f(a_n) - 1| = |2 - a_n - 1| = |1 - a_n| = |a_n - 1|$$

و چون $\{a_n\}$ همگرا به عدد 1 است یا $0 \rightarrow |a_n - 1|$ نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(a_n) - 1| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - 1| = 0$$

بنابراین دنباله $\{f(a_n)\}$ به $f(1) = 1$ همگراست.



ثابت کنید تابع $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ گویا,} \\ 0, & x \text{ گنگ.} \end{cases}$ در نقطه $x=0$ پیوسته است.



۱- نقاط ناپیوستگی تابع f را پیدا کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$$

۲- تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ داده شده است. مقدار a را چنان انتخاب کنید

که تابع در $x=0$ پیوسته باشد.

۳- به ازای چه مقدار a ، تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته است.

۴- عددهای a و b را چنان انتخاب کنید که تابع f در نقطه $x=0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a + [x], & x < 0 \\ b, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}, & x > 0 \end{cases}$$

۵- تابع $f(x) = [\frac{x}{\pi}]$ در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۶- نقاط پیوستگی تابع $f(x) = [\sin x]$ را در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ مشخص کنید.

۷- اگر تابع f در نقطه‌ای پیوسته باشد، ثابت کنید تابع $|f|$ نیز در آن نقطه پیوسته است. آیا

عکس این مطلب نیز درست است؟

۸- دو تابع مثال بزنید که هر دو در یک نقطه ناپیوسته باشند ولی مجموع آنها در آن نقطه

پیوسته باشد.

۹- دو تابع مثال بزنید که هر دو در یک نقطه ناپیوسته باشند ولی ضرب آنها در آن نقطه

پیوسته باشد.

۱۰- با برهان خلف، ثابت کنید :

اگر تابع f در نقطه a پیوسته و تابع g در نقطه a ناپیوسته باشد آنگاه $f+g$ در a ناپیوسته است.

۱۱- با استفاده از قضایای حد و پیوستگی ثابت کنید تابع $f(x) = [x] \sin \pi x$ روی \mathbb{R} پیوسته است.

۱۲- تابع $f(x) = [x^2]$ روی بازه $[2, 2+k]$ پیوسته است، بزرگ‌ترین مقدار k را بیابید.

۱۳- تابع $f(x) = \begin{cases} 4, & x^2 = |x| \\ x+2, & x^2 \neq |x| \end{cases}$ در چند نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است؟

۱۴- تابع $f(x) = \frac{4 - \sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$ در چند نقطه از دامنه‌اش پیوسته است؟

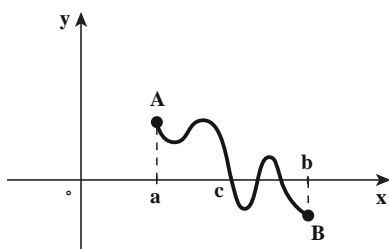
۱۵- نمودار تابع $f(x) = [x] - x + \sin\left(\frac{\pi}{4}[x]\right)$ را در بازه $[2, 5]$ رسم کرده و مشخص کنید، تابع در چند نقطه از این بازه ناپیوسته است.

۱۶- پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x^2, & x^2 \geq 2|x| \\ 2|x|, & x^2 < 2|x| \end{cases}$ را روی \mathbb{R} بررسی کنید.

۱۷- عددهای a و b را چنان انتخاب کنید که تابع $f(x) = (x^2 - bx + a) \operatorname{sgn}(x^2 + x - 2)$ روی \mathbb{R} پیوسته باشد. (sgn تابع علامت است)

۱۳-۲ ویژگی‌های مهم تابع‌های پیوسته

بیشتر ویژگی‌های تابع‌های پیوسته ناشی از این خصوصیت شهودی آنها است که نمودار تابع پیوسته بر یک بازه به صورتی ملموس دارای اتصال و یکپارچگی است.



شکل ۲-۲۴

اکنون فرض کنید تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته باشد. و مقدار آن در a مثبت و مقدار آن در b منفی باشد، باید حداقل، در یک نقطه از این بازه مانند c مقدار صفر را اختیار کند.

چون تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته است، (هموار و یکپارچه است) ناچار است در گذر از نقطه $A(a, f(a))$


بالای محور x به نقطه $B(b, f(b))$ پایین محور x حداقل در یک جا، محور x را قطع کند. (شکل ۲-۲۴ را ببینید)

طبق این ویژگی «اتصال و یکپارچگی» تابع، قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

❖ **قضیه ۴:** (قضیه بولزانو) اگر تابع f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته و $f(a)f(b) < 0$ آنگاه حداقل،

یک عدد مانند c در بازه باز (a, b) وجود دارد که $f(c) = 0$

❖ **مثال:** با استفاده از قضیه بولزانو ثابت کنید معادله $x^2 + x - 3 = 0$ ریشه‌ای در بازه $(1, 2)$ دارد.

 **حل:** تابع $f(x) = x^2 + x - 3$ را در نظر می‌گیریم، می‌دانیم که تابع چند جمله‌ای f که در هر نقطه از

\mathbb{R} یا بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است پس در بازه $[1, 2]$ نیز پیوسته است از طرفی $f(1) f(2) < 0$ (چرا؟)


بنابراین طبق قضیه بولزانو دست کم یک عدد c در بازه باز $(1, 2)$ وجود دارد که $f(c) = 0$ یعنی c ریشه معادله $x^2 + x - 3 = 0$ است.



نشان دهید معادله $x - \cos x = 0$ ، ریشه‌ای در بازه $(0, 1)$ دارد.

❖ **مثال:** اگر تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته و k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ ، $f(a) < f(b)$ و $f(x) = f(x) - k$ ،

نشان دهید، وجود دارد $c \in (a, b)$ که $g(c) = 0$

 **حل:** طبق فرض داریم $g(a) = f(a) - k < 0$ و $g(b) = f(b) - k > 0$ و تابع g در بازه $[a, b]$ پیوسته

است. (چرا؟) پس بنابر قضیه بولزانو وجود دارد $c \in (a, b)$ که $g(c) = 0$ یا $f(c) = k$ ایده مثال فوق قضیه مقدار میانی است که در زیر بیان می‌شود.

❖ **قضیه ۵:** (قضیه مقدار میانی): فرض کنیم f روی بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد و k عددی

بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، در این صورت حداقل یک عدد مانند c در بازه $[a, b]$ وجود دارد که $f(c) = k$.

قضیه مقدار میانی می‌گوید که برای تابع پیوسته f ، اگر x همه مقادیر بین a و b را بگیرد، $f(x)$

باید همه مقادیر بین $f(a)$ و $f(b)$ را بگیرد. به عنوان مثال ساده‌ای از این قضیه، قد افراد را در نظر

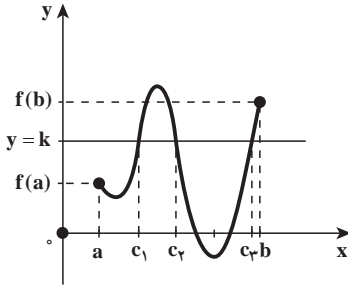
بگیریم. فرض کنید قد پسر بچه‌ای در ۱۳ سالگی 150° سانتی‌متر و در ۱۴ سالگی 165° سانتی‌متر باشد

پس به ازای هر قد h سانتی‌متر بین 150° سانتی‌متر و 165° سانتی‌متر باید زمانی چون t باشد که قدش

درست h سانتی‌متر بوده است. این امر معقول به نظر می‌رسد زیرا می‌دانیم رشد افراد پیوسته است و قد

نمی‌تواند جهشی ناگهانی داشته باشد قضیه مقدار میانی وجود حداقل یک عدد c در بازه بسته $[a, b]$

را تضمین می‌کند، البته ممکن است بیش از یک عدد مانند c که $f(c)=k$ وجود داشته باشد (شکل ۲-۲۵ را ببینید)



شکل ۲-۲۵

تعبیر هندسی قضیه مقدار میانی: شکل بالا نشان می‌دهد خط افقی $y=k$ بین خط‌های $y=f(a)$ و $y=f(b)$ می‌باشد. چون نمودار f بدون بریدگی و مانند یک ریسمان به هم پیوستگی و یکپارچگی دارد، برای رفتن از نقطه $(a, f(a))$ به نقطه $(b, f(b))$ باید خط $y=k$ را قطع کند و در شکل بالا خط $y=k$ نمودار f را در سه نقطه c_1 و c_2 و c_3 قطع کرده است.

❖ **مثال:** نشان دهید که خط $y=2$ نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2(x-3)^2+x$ را قطع می‌کند.

حل: چون تابع چند جمله‌ای f در بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است پس f در بازه $[1, 3]$ نیز پیوسته است. از طرفی $f(1)=1$ و $f(3)=3$

بنابراین طبق قضیه مقدار میانی خط $y=2$ که بین خطوط $y=1$ و $y=3$ قرار دارد نمودار f را قطع می‌کند.

تمرین در کلاس

آیا تابع $f(x) = \frac{x^3}{4} + \sin \pi x + 4$ در بازه $[-2, 2]$ مقدار ۵ را می‌تواند داشته باشد؟

۱۴-۲- پیوستگی تابع وارون یک تابع پیوسته

فرض کنیم $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ تابع باشد و $B = \{f(x) : x \in D\}$ مجموعه مقادیر f باشد (D دامنه f) اگر f یک به یک باشد، به ازای هر عضو B مانند y یک و فقط یک x در D وجود دارد که

$$f(x)=y$$

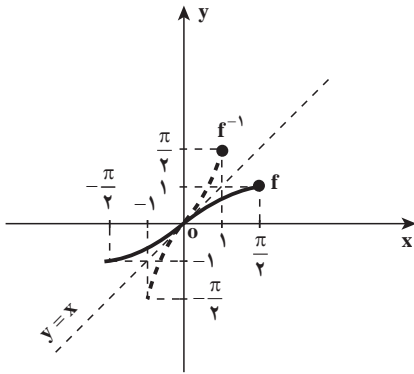
به این ترتیب، تابعی مانند $f^{-1}: B \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌شود که $f^{-1}(y)=x$ ، تابع f^{-1} را وارون f

می‌نامیم و دو حکم زیر درست‌اند.

(الف) به ازای هر $x \in D$ ، $f^{-1}(f(x))=x$

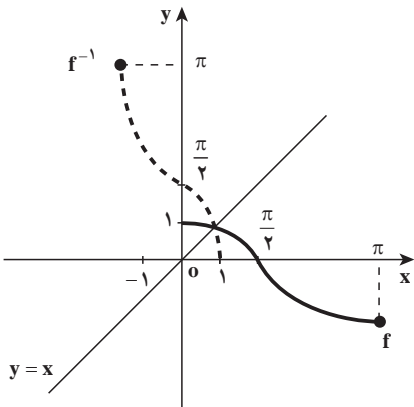
(ب) به ازای هر $y \in B$ ، $f(f^{-1}(y))=y$

همان‌طور که در حسابان آموزش داده شده است، به خاطر اینکه f^{-1} نقش x و y نسبت به f را عوض می‌کند، نمودار f^{-1} قرینه نمودار f نسبت به خط $y=x$ است (شکل ۲-۲۶ را ببینید).



شکل ۲-۲۶- نمودار f و نمودار f^{-1} نسبت به $y=x$ قرینه‌اند

در این شکل نمودارهای $f(x)=\sin x$ و $f^{-1}(x)=\sin^{-1}(x)$ که نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند، دیده می‌شوند. تابع f در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ یک به یک و صعودی است همچنین تابع f^{-1} در بازه $[-1, 1]$ یک به یک و صعودی می‌باشد و در شکل ۲-۲۷ که نمودارهای $f(x)=\cos x$ و $f^{-1}(x)=\cos^{-1}(x)$ نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند، دیده می‌شوند.



تابع f در بازه $[0, \pi]$ یک به یک و نزولی است. همچنین تابع f^{-1} در بازه $[-1, 1]$ یک به یک و نزولی می‌باشد.

شکل ۲-۲۷- نمودار f و نمودار f^{-1} (نقطه‌چین) نسبت به $y=x$ قرینه‌اند

تمرین در کلاس

نمودار و دامنه تابع وارون، توابع زیر را در صفحه مختصات رسم کنید.

(الف) $f(x)=\tan x$ ، $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (ب) $g(x)=\cot x$ ، $0 < x < \pi$

در مثال‌های بالا مشاهده می‌شود وقتی تابع f یک به یک و پیوسته است، تابع وارون آن نیز یک به یک و پیوسته است و این خود ایده‌ای است برای بیان قضیه زیر که کاربرد مهمی از قضیه مقدار میانی است.

❖ **قضیه ۶:** فرض کنیم f تابعی یک به یک و پیوسته باشد که دامنه آن بازه بسته D است. اگر f^{-1} با دامنه B ، تابع وارون f باشد، آنگاه تابع f^{-1} در هر نقطه از B پیوسته است.

❖ **مثال:** می‌دانیم وارون تابع $f(x)=x^2$ ، تابع $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ است. چون تابع f تابعی است یک به یک پیوسته، پس تابع $y=\sqrt{x}$ نیز یک به یک و پیوسته است. همچنین تابع $f(x)=\sin x$ با دامنه $D=[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ یک به یک و پیوسته است. پس طبق قضیه (۶) تابع $f^{-1}(x)=\sin^{-1}(x)$ با دامنه $B=[-1, 1]$ یک به یک و پیوسته است.

مسائل

۱- فرض کنید $f(x)=\begin{cases} x-1, & 1 < x < 2 \\ 2x-4, & 3 < x < 4 \end{cases}$ ، تابع f^{-1} در چند نقطه از دامنه اش ناپیوسته است، نمودار f^{-1} را رسم کنید.

۲- نشان دهید که معادله $x^2-x-1=0$ در بازه $[1, 2]$ جواب دارد.

۳- نشان دهید معادله $x^5+x^4+2x^3-x+2=0$ در بازه $[-2, 0]$ دارای جواب است.

۴- ثابت کنید معادله $\sin x - x^2 + x + 1 = 0$ حداقل دو ریشه در بازه $[-\pi, \pi]$ دارد.

۵- ثابت کنید که اگر $P(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه فرد باشد، آنگاه معادله $P(x)=0$ حداقل دارای یک ریشه حقیقی است.

۲-۱۵- حدهای نامتناهی (حد بی نهایت)

می‌دانید در عبارت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ (۱)

L عددی است حقیقی و چنین حدهایی را اصطلاحاً حدود متناهی نیز می‌نامند.

اکنون عبارت (۱) را برای وقتی $+\infty$ یا $-\infty$ جایگزین L می‌شوند، تعریف می‌کنیم. این تعریف‌ها به لحاظ منطقی همان تعریف قبلی حد هستند، با این تفاوت که نشانه نزدیکی $f(x)$ ‌ها به $+\infty$ ، بزرگ شدن دلخواه آنها است و نیز نشانه نزدیکی $f(x)$ ‌ها به $-\infty$ ، کوچک تر شدن دلخواه آنها است و در حقیقت نمادگذاری سودمندی برای توصیف رفتار توابعی است که مقادیرشان به دلخواه بزرگ یا کوچک می‌شوند.

هرگاه رفتار تابع $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ را در نزدیکی یک بررسی نماییم (شکل ۲-۲۸)، به این نتیجه می‌رسیم که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، $(x-1)^2$ با مقادیر مثبت به صفر نزدیک خواهد شد و مقدار $\frac{1}{(x-1)^2}$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد و یا $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ را می‌توان از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کرد ($f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کند) به شرطی که x را به اندازه کافی به ۱ نزدیک کنیم. به عنوان مثال اگر بخواهیم $\frac{1}{(x-1)^2}$ بزرگ‌تر از ۱۰۰۰۰۰۰ باشد

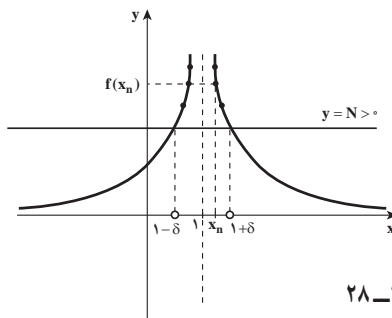
$$\text{و یا } \frac{1}{(x-1)^2} > 1000000 \quad \text{داریم:} \quad (x-1)^2 < \frac{1}{1000000}$$

$$|x-1| < \frac{1}{10000} \quad \text{و یا}$$

$$1 - \frac{1}{10000} < x < 1 + \frac{1}{10000}$$

$$(x-1)^2 < \frac{1}{1000000} \quad \text{یعنی اگر } |x-1| < \frac{1}{10000} \text{ آنگاه:}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2} > 1000000$$



یعنی اگر بخواهیم $f(x)$ بزرگ‌تر از عدد ۱۰۰۰۰۰۰۰ باشد کافی است x در همسایگی محذوف ۱ و به شعاع $\frac{1}{10000}$ قرار گیرد.

بنابراین در یک همسایگی محذوف ۱، $f(x)$ می‌تواند از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر شود. در این وضعیت گفته می‌شود، وقتی x به ۱ میل کند، $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کند و از نمادگذاری $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ استفاده می‌کنیم.

برای درک بهتر، مطلب بالا را روی نمودار تابع توضیح می‌دهیم. (در مثال بالا $N=1000000$ و $\delta = \frac{1}{10000}$)

برای هر خط افقی $y=N>0$ یک همسایگی محذوف ۱ و به شعاع $\delta>0$ ایجاد می‌شود که به

ازای هر $x_n \in D_f$ که در این همسایگی صدق کند، $f(x_n) > N$ است x_n مقدار جمله n ام دنباله $\{x_n\}$ است که به ۱ همگراست).

اکنون به صورت رسمی به تعریف حد نامتناهی (حد بی نهایت) می پردازیم.

تعریف ۱: فرض کنیم تابع D زیر مجموعه ای از \mathbb{R} و $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد، در این صورت، گوئیم حد تابع f در a ، $+\infty$ است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ هرگاه به ازای هر

دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{x_n\}$ که همگرا به a است و $x_n \neq a$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty$

❖ **مثال:** به کمک تعریف ثابت کنید: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = +\infty$

🚀 **حل:** به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ ، $(x_n \neq 0)$ همگرا به صفر، دنباله $\{f(x_n)\}$ واگرا به $+\infty$ است (چرا؟)

اگر رفتار تابع $f(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ را در نزدیکی ۱ بررسی نماییم (شکل ۲-۲۹) به این نتیجه

می رسیم که وقتی x با مقادیر بزرگ تر و یا کوچک تر از ۱ به ۱ نزدیک می شود، مقدار $\frac{-1}{(x-1)^2}$ بدون هیچ محدودیتی و با مقادیر منفی کاهش می یابد.

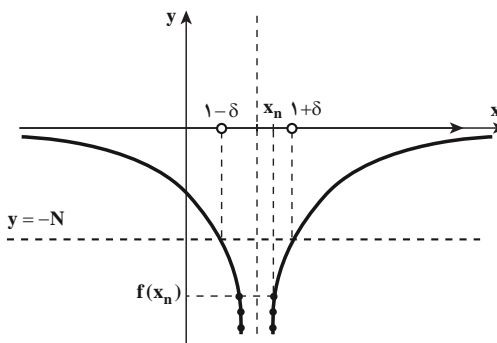
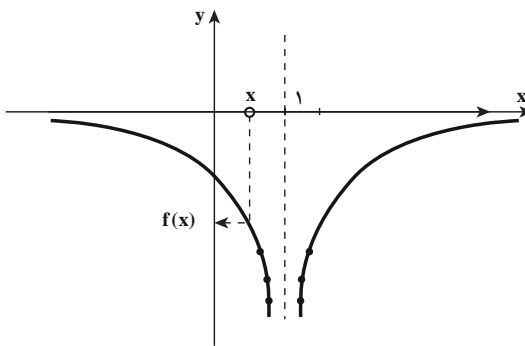
و یا $f(x)$ را می توان از هر عدد منفی کوچک تر کرد ($f(x)$ به $-\infty$ میل می کند) به شرطی که x به اندازه کافی به ۱ نزدیک شود.

این وضعیت تابع را در مجاورت $x=1$ ، روی نمودار تابع توضیح می دهیم. فرض کنید N یک عدد مثبت دلخواه است با رسم هر خط افقی $y=-N$ در شکل روبه رو یک همسایگی محذوف ۱ و به شعاع $\delta > 0$ ایجاد می شود که برای هر $x_n \in D_f$ که در این

همسایگی صدق کند، $f(x_n) < -N$

x_n مقدار جمله n ام دنباله $\{x_n\}$ است که به ۱ همگراست)

اکنون به صورت رسمی به تعریف حد نامتناهی (حد منهای بی نهایت) می پردازیم.



شکل ۲-۲۹

تعریف ۲: فرض کنید D زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} (مجموعه اعداد حقیقی)، دامنه تابع f باشد.

گوئیم حد تابع f در a ، $-\infty$ است و می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ اگر به ازای هر دنباله از نقاط

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = -\infty, \quad x_n \neq a \text{ است و } a \text{ همگرا به } \{x_n\} \text{ که همگرا به } a \text{ است و } x_n \neq a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$

❖ **مثال:** به کمک تعریف (۲) ثابت کنید

حل: برای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ که همگرا به ۲ است و $x_n \neq 2$ داریم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(x_n - 2)^2} = -\infty$$

زیرا وقتی دنباله $\{x_n\}$ به ۲ همگرا باشد، دنباله $\{(x_n - 2)^2\}$ با مقادیر مثبت به صفر همگراست بنابراین دنباله $\{f(x_n)\}$ به $-\infty$ واگراست.

$$۱- \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$۲- \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

عبارت‌های

$$۳- \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$۴- \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

مشابه تعریف‌های ۱ و ۲، قابل تعریف هستند. به عنوان مثال عبارت (۲) به معنی آن است که: اگر

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad \text{آنگاه} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = -\infty, \quad x_n > a \text{ که } a \text{ همگرا به } \{x_n\} \text{ هر دنباله}$$



عبارت‌های ۱ و ۳ و ۴ را مشابه تعریف ۱ و ۲ تعریف کنید.

۲-۱۶- حد توابع کسری و مجانب قائم

با توجه به تعریف و مثال‌های حدهای مثبت بی‌نهایت و منفی بی‌نهایت مشخص می‌شود که در یک تابع کسری وقتی x به a میل کند و حد مخرج کسر صفر و حد صورت کسر عددی مخالف صفر باشد، حد تابع کسری $+\infty$ یا $-\infty$ است و این خود یک ایده‌ای است برای مطرح کردن قضیه مهم صفحه بعد

❖ **قضیه ۱:** فرض کنید: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$:
 الف) اگر $L > 0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

ب) اگر $L > 0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

پ) اگر $L < 0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

ت) اگر $L < 0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

توضیح اینکه این قضیه برای حدود یک طرفه (چپ یا راست) نیز برقرار است.
 برای اینکه به کاربرد قضیه (۱) در محاسبه حدود نامتناهی بیشتر آشنا شویم به مثال‌های زیر توجه کنید.

❖ **مثال:** حدهای نامتناهی زیر را مشخص کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3x - 4} \quad \text{ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2} \quad \text{الف)}$$

 **حل:**

الف) وقتی $x \rightarrow 0^+$ ، حد صورت کسر یک و حد مخرج کسر صفر است و مخرج کسر یعنی x^2 در یک همسایگی محذوف صفر مثبت است بنابراین طبق قسمت الف قضیه (۱) داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2} = +\infty$$

ب) وقتی x با مقادیر کوچک‌تر از ۱ به ۱ میل کند، حد صورت کسر ۳ است و حد مخرج کسر یعنی $(x-1)(x+4)$ صفر است و مخرج کسر به ازای $x < 1$ ، مثلاً در بازه باز $(1-\delta, 1)$ منفی است بنابراین طبق قسمت ب قضیه (۱) داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3x - 4} = -\infty$$

حدهای زیر را حدس زده و با استفاده از قضیه (۱) جواب حد را پیدا کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x \quad -۴$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x \quad -۳$$

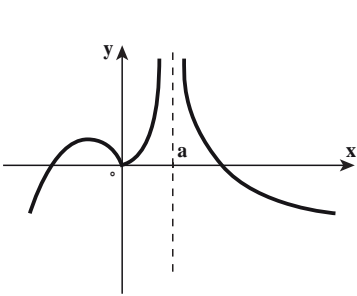
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]-1}{x^2-1} \quad -۲$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+1}{x+2} \quad -۱$$

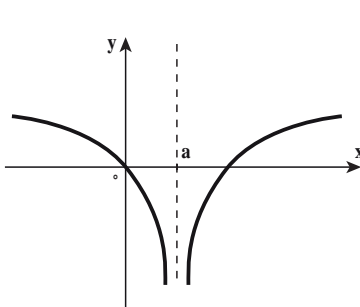
مجاناب قائم تابع: به توصیف عبارت‌های $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ در شکل

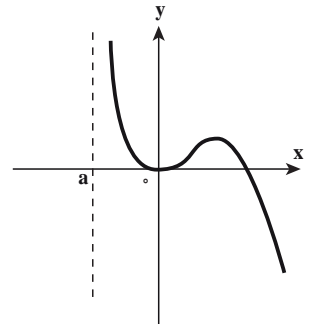
۳-۲ توجه می‌کنیم.



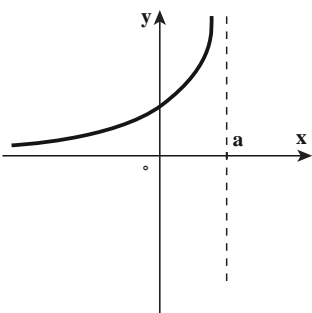
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$



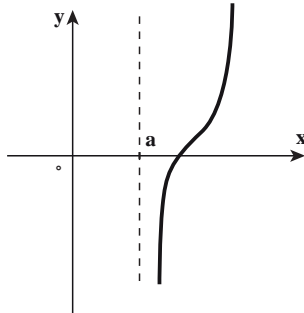
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$



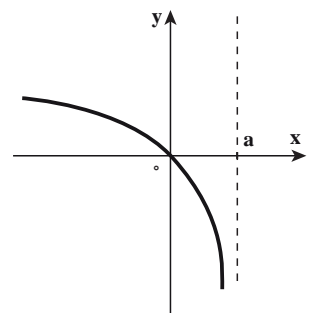
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

شکل ۳-۲

در نمودارهای شکل ۲-۳ دیده می‌شود که تابع f در $x=a$ تعریف نشده است و وقتی x از هر دو طرف و یا از طرف راست و یا از طرف چپ به a میل کند، $f(x)$ بی‌کران افزایش یا کاهش می‌یابد و این خود ایده‌ای است برای مطرح کردن مجانب قائم تابع که در رسم نمودارها بسیار مفید است.

تعریف ۳: خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع f می‌نامند، هرگاه حداقل یکی از حکم‌های زیر درست باشد.

$$۱- \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$۲- \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$۳- \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

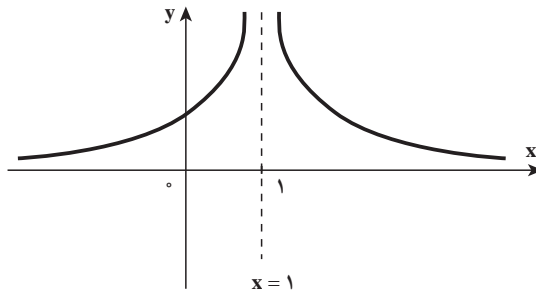
$$۴- \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$۵- \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$۶- \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

مثلاً خط $x=a$ مجانب قائم هر یک از شش حالت نشان داده شده در شکل ۲-۳ است.

❖ **مثال:** خط $x=1$ مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ است زیرا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$



تمرین در کلاس

۱- مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ را در صورت وجود به دست آورید.

۲- مجانب‌های قائم تابع‌های زیر را به دست آورید.

ب) $g(x) = \tan x, -\pi \leq x \leq \pi$

الف) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

۱۷-۲- حد در بی‌نهایت و مجانب افقی

تاکنون برای بررسی رفتار تابع f در نزدیکی نقطه مانند $x=a$ ، از «حد» استفاده کرده‌ایم و در آنجا

x را به سمت a میل می‌دادیم

اما هرگاه تابع f در بازه‌هایی مانند $(c, +\infty)$ و یا $(-\infty, c)$ تعریف شده باشد، علاقه‌مندیم که بدانیم، اگر x به دلخواه بزرگ (مثبت) و یا کوچک (منفی) می‌شود، و به بیان دیگر وقتی x به سمت $+\infty$ و یا به سمت $-\infty$ میل می‌کند، چه بر سر $f(x)$ می‌آید. دانستن رفتار انتهای تابع برای رسم نمودار آن بسیار مفید است.

تعریف ۴: فرض کنید f تابعی باشد که در بازه‌ای مانند $(c, +\infty)$ تعریف شده و L عددی حقیقی باشد. می‌گوییم حد تابع f وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند برابر L است و می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{x_n\}$ ، واگرا به $+\infty$ ، دنباله $\{f(x_n)\}$ به L همگرا باشد.



تعریف مشابه برای حد در منفی بی‌نهایت را فرمول‌بندی کنید.

❖ **مثال:** ثابت کنید، اگر r یک عدد گویای مثبت باشد آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \quad (\text{ب}) \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \quad (\text{الف})$$

حل:

الف) برای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ که واگرا به $+\infty$ است داریم:

$$f(x_n) = \frac{1}{(x_n)^r} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \qquad \text{دنباله } \{f(x_n)\} \text{ همگرا به صفر است (چرا؟) پس}$$

ب) برای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ که واگرا به $-\infty$ است داریم:

$$f(x_n) = \frac{1}{(x_n)^r} \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \qquad \text{و } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0 \text{ (چرا؟) بنابراین}$$

تذکر: قوانینی که در مورد $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ثابت کردیم در مورد حد در بی‌نهایت نیز برقرارند

مثلاً اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_2$: آنگاه :

$$۱- \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$$

$$۲- \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = L_1 L_2$$

$$۳- \lim_{x \rightarrow +\infty} cf(x) = cL_1, \text{ c یک عدد ثابت,}$$

$$۴- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, (L_2 \neq 0)$$

$$۵- \lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$$

این قوانین برای وقتی که x به $-\infty$ میل کند نیز برقرارند.

بدیهی است که نتایج قضیه‌های ۱ و ۲ و ۳ بخش دوم با تغییرات جزئی در مورد حد در بی نهایت

نیز برقرارند. (چرا؟)

❖ **مثال:** مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x + 1}{3x^2 - x}$ را حساب کنید.

حل: وقتی x بزرگ می‌شود، بدیهی است که صورت و مخرج کسر هر دو بزرگ می‌شوند، در نتیجه معلوم نیست چه بر سر مقادیر این کسر می‌آید بنابراین از معلومات جبری مان کمک می‌گیریم و تابع کسری را به شکل دیگری می‌نویسیم.

ابتدا صورت و مخرج را بر بزرگ‌ترین توانی از x که در مخرج وجود دارد تقسیم می‌کنیم، (چون مقدارهای بزرگ x برای محاسبه این حد به کار می‌روند پس می‌توان فرض کرد $x \neq 0$) در این کسر بزرگ‌ترین توان x در مخرج ۲ است، در نتیجه :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x + 1}{3x^2 - x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2}}{\frac{3x^2 - x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{1}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2})}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - \frac{1}{x})} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} \\ &= \frac{2 + 0 + 0}{3 - 0} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

❖ **مثال:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ را حساب کنید.

حل: وقتی x بزرگ است، $\sqrt{x^2 + x}$ و x هر دو بزرگ اند و بسیار دشوار است که بدانیم چه بر سر تفاضل آنها می آید، لذا ابتدا از جبرمقدماتی استفاده می کنیم و تابع را به شکل دیگری می نویسیم. برای این کار صورت و مخرج را (می توانیم فرض کنیم که مخرج تابع ۱ است) در مزدوج صورت یعنی $(\sqrt{x^2 + x} + x) \neq 0$ ضرب می کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)}{1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{1 \times (\sqrt{x^2 + x} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} \quad (|x| = x, x > 0) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



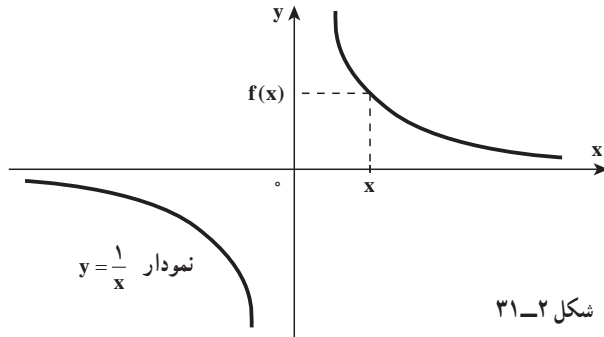
۱- مطلوبست محاسبه:

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + x + 1}{x^3 - x + 2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{2x - 3}$ پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos \frac{1}{x}$

۲- اگر به ازای هر $x > 1$ ، $\frac{2x^2 + 3x}{x^2} < f(x) < \frac{2x - 1}{x}$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ را پیدا کنید.

مجانب افقی

نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ به شکل ۳۱-۲ است. در نمودار تابع f ، وقتی x با مقادیر مثبت بی کران افزایش و یا با مقادیر منفی بی کران کاهش یابد، $f(x)$ به ترتیب با مقادیر مثبت یا منفی به صفر نزدیک می شود و به عبارت دیگر نمودار تابع در بی نهایت دور مثبت یا منفی به خط افقی $y=0$ بسیار نزدیک می شود و این توصیف، خود ایده ای است برای تعریف مجانب افقی.



تعریف ۵: خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار تابع f می نامند به شرطی که

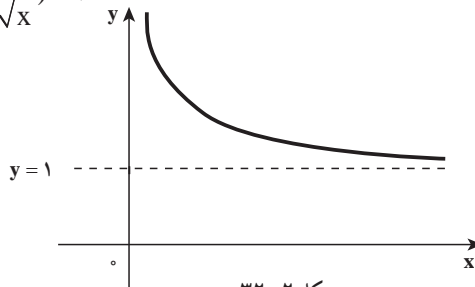
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

$$\text{یا } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

❖ **مثال:** خط $y=1$ مجانب افقی تابع $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ است که در شکل ۳۲-۲ نشان داده شده

است، زیرا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$$



پرسش: خط مجانب قائم تابع $y = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ را به دست آورید.

مجانب‌های افقی تابع‌های زیر را به دست آورید.

$$۱- y = \frac{2x+1}{x-2}$$

$$۲- y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$۳- y = \frac{\sin x}{x}$$

۱۸-۲- حد بی‌نهایت در بی‌نهایت و مجانب مایل

در تابع $f(x)=x^2$ وقتی x بزرگ می‌شود، x^2 هم بزرگ می‌شود، مثلاً،

x	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰
x^2	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰

در واقع می‌توانیم با بزرگ گرفتن x به اندازه کافی، x^2 را به هر اندازه دلخواه بزرگ کنیم و

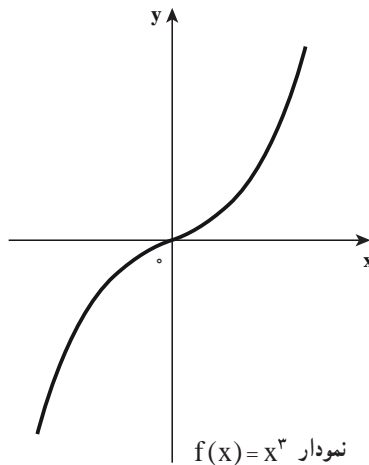
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

می‌نویسیم

و به‌طور مشابه، وقتی x کوچک منفی می‌شود، x^2 هم کوچک منفی می‌شود و می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = -\infty$$

درستی این حکم‌های حدی را می‌توان به‌صورت شهودی از روی نمودار تابع $f(x)=x^2$ حدس زد.



اکنون به‌صورت رسمی به تعریف حد بی‌نهایت در بی‌نهایت می‌پردازیم.

تعریف ۶: می‌نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{x_n\}$ و اگر $x_n \rightarrow +\infty$ ، دنباله $\{f(x_n)\}$ و اگر $x_n \rightarrow +\infty$ باشد.

تمرین در کلاس

با توجه به تعریف ۶، نمادهای $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ را به طور مشابه تعریف کنید.

مثال: به کمک تعریف ثابت کنید: $\lim_{x \rightarrow -\infty} cx^2 = -\infty$ (c عدد ثابت منفی)

حل: به ازای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ از دامنه تابع $f(x) = cx^2$ که $x_n \rightarrow -\infty$ است داریم

$$f(x_n) = cx_n^2$$

می‌دانید که دنباله $\{f(x_n)\}$ و اگر $x_n \rightarrow -\infty$ است (c < 0) و دنباله $\{x_n^2\}$ و اگر $x_n \rightarrow +\infty$ است)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} cx^2 = -\infty$$

بنابراین

مثال: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x)$$

حل:

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) = +\infty$$

تذکر مهم: همواره نمی‌توان از قاعده‌های حدگیری برای حدهای نامتناهی استفاده کرد. زیرا $+\infty$ و یا $-\infty$ عدد نیستند.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty - \infty$$

مثلاً نوشتن اینکه

غلط است ($+\infty - \infty$) را نمی‌توان تعریف کرد) با این وجود، می‌توان نوشت

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x^2 - 1) = +\infty$$

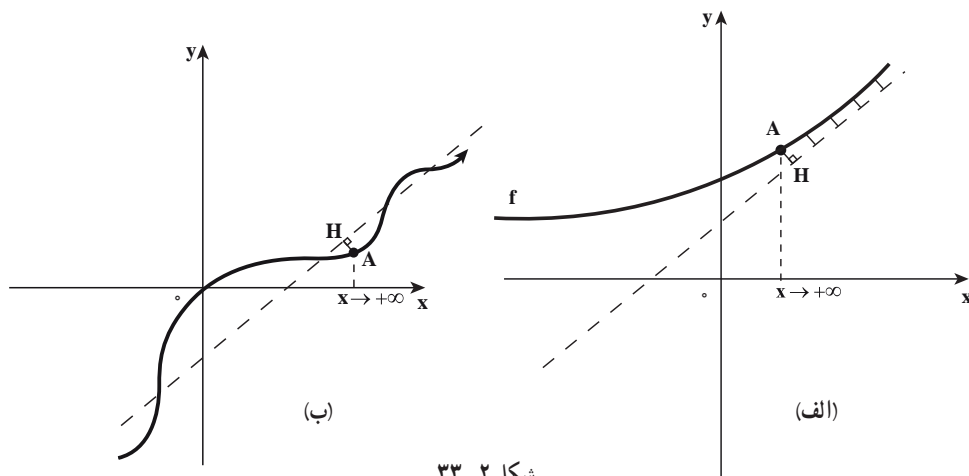
زیرا x و x^2-1 هر دو به دلخواه بزرگ می‌شوند در نتیجه حاصل ضرب آنها نیز بزرگ می‌شود و با نوشتن اینکه:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)} = \frac{-\infty}{-\infty}$$

غلط است ($\frac{\infty}{\infty}$ را نمی‌توان تعریف کرد) و برای محاسبه این حد می‌نویسیم (صورت و مخرج

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2}{1} \quad (\text{کسر بر } x < 0 \text{ تقسیم شده است})$$

مجانب مایل: خط L به معادله $y=mx+b$ ($m \neq 0$) و تابع $y=f(x)$ را در نظر می‌گیریم. چنانچه فاصله نقطه متغیر $A(x, f(x))$ تا خط مستقیم L وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ به صفر نزدیک شود (قسمت‌های الف و ب در شکل ۲-۳۲ را ببینید) آنگاه خط L مجانب مایل نمودار f نامیده می‌شود.



شکل ۲-۳۳

❖ **تبصره:** به بیان نادقیق اگر نمودار تابع f در دور دست‌ها ($+\infty$ یا $-\infty$) به خط نامتناهی L به دلخواه نزدیک شود، خط L یک مجانب f خواهد بود.

تعریف: خط $y=mx+b$, $m \neq 0$ مجانب مایل نمودار تابع f است، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad (\text{الف})$$

❖ **مثال:** مجانب مایل تابع $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + x - 1}$ را (در صورت وجود) به دست آورید.

حل: چون درجه صورت یعنی ۳ بزرگ تر از درجه مخرج کسر است ابتدا عبارت صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم.

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 1 \\ \underline{-x^3 + x^2 - x} \\ -4x^2 + x + 1 \\ \underline{+4x^2 - 4x + 4} \\ 5x - 3 \end{array}$$

در نتیجه $f(x) = x - 4 + \frac{5x - 3}{x^2 + x - 1}$

چون $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 3}{x^2 + x - 1} = 0$ (چرا؟) پس $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 4)] = 0$ (همین نتیجه برای حالت $x \rightarrow -\infty$ نیز درست است)

بنابراین خط $y = x - 4$ مجانب مایل تابع f می باشد.

پرسش: با توجه به راه حل مثال بالا، آیا می توان نتیجه گرفت یک تابع کسری گویا با چه شرایطی مجانب مایل دارد؟ و سپس راه حلی کوتاه برای محاسبه مجانب مایل تابع کسری گویا بیان کنید.

مسئله: فرض کنید خط $y = mx + b$ مجانب مایل تابع $y = f(x)$ است. مقادیر m و b را حساب کنید.

۱- فاصله نقطه متغیر $A(x, f(x))$ تا خط $y - mx - b = 0$ را به دست آورید.

۲- اگر $h(x)$ فاصله نقطه $A(x, f(x))$ تا خط $y - mx - b = 0$ باشد. مقادیر m و b

را چنان تعیین کنید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ یا $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$

پس از انجام فعالیت بالا نتیجه می گیریم که اگر خط $y = mx + b$ مجانب مایل تابع

$y = f(x)$ باشد آنگاه: $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ یا $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$ یا $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx]$

۱- فاصله نقطه $M(x_1, y_1)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

❖ **مثال:** معادله مجانب مایل تابع $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 3}$ را وقتی $x \rightarrow +\infty$ به دست آورید.

حل: بنابر دستورالعمل‌های بالا داریم 

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \right) = 3$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \sqrt{x^2 + 3} - 3x)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 3 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = 0$$

بنابراین خط $y = 3x$ مجانب مایل تابع است.

تمرین در کلاس 

در مثال بالا معادله مجانب مایل را وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، به دست آورید.

مسائل مجانب‌ها:

الف) معادله مجانب‌های مایل و افقی تابع‌های زیر را به دست آورید.

$$1- y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$2- y = x - \sqrt{x^2 + 2x}$$

$$3- y = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 3}$$

$$4- y = x + \sqrt{4x^2 + x + 1}$$

ب) اندازه زاویه بین دو خط مجانب مایل تابع $y = \sqrt{x^2 + 4x}$ را حساب کنید.

۱- حدهای زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \cot x \quad (\text{ب}) & \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x - 2} \quad (\text{ب}) & \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} \quad (\text{الف}) \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2 - 4} \quad (\text{ج}) & \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x - 2}{x^2 - 2x - 8} \quad (\text{ث}) & \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi^-}{2}} \tan x \quad (\text{ت}) \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad (\text{ح}) & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}} \frac{\tan x}{\cot x} \quad (\text{ج}) \end{array}$$

۲- در نظریه نسبیت جرم ذره ای با سرعت V برابر است با $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ که در آن m_0 جرم سکون ذره است و c سرعت نور وقتی که $V \rightarrow c^-$ چه اتفاقی می افتد؟

۳- حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x - 1}{2x^2 - 1} \quad (\text{ب}) & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x - 3} \quad (\text{الف}) & \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x}) \quad (\text{ت}) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x^2 + 3x - 1} \quad (\text{پ}) & \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 3} \right] \quad (\text{ج}) & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 - 3x}) \quad (\text{ث}) & \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{8x^3 + 2x^2 - 2x}) \quad (\text{ح}) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \tan^{-1} x}{2 - x} \quad (\text{ج}) & \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) \quad (\text{د}) & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 3}} \quad (\text{خ}) & \end{array}$$

۴- حدود زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x} - 1} \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{x^2 + x - 1} \quad (\text{الف})$$

۵- ثابت کنید که اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و g در یک همسایگی محذوف a کراندار باشد آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{1}{x} + [x] \right) \text{ و سپس } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty \text{ را پیدا کنید.}$$

مشتق و کاربرد آن

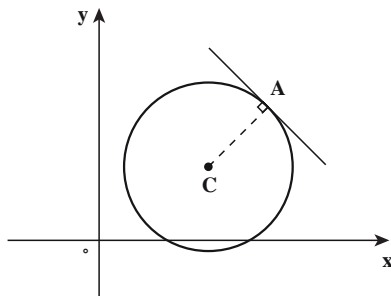
۱-۳- آهنگ تغییر و خط مماس

در این فصل به مطالعه حساب دیفرانسیل که درباره تغییر یک کمیت به کمیتی دیگر است می‌پردازیم. مفهوم اصلی حساب دیفرانسیل، مشتق است که تعمیم سرعت و شیب خط مماس است که سال گذشته در حسابان آموزش داده شده است.

می‌دانید مسأله پیدا کردن خط مماس بر منحنی و یافتن سرعت یک متحرک هردو منجر به یافتن یک نوع حد می‌شوند که این حد خاص را مشتق می‌نامند و خواهیم دید که می‌توان آن را در هر شاخه‌ای از علم و مهندسی به آهنگ تغییر تعبیر کرد.

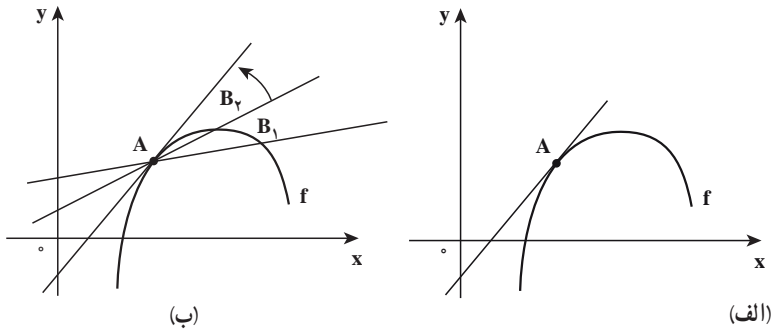
مسأله خط مماس: وقتی می‌گوییم یک خط بر یک منحنی در یک نقطه مماس است به چه معنی است؟

در دایره می‌توان خط مماس در نقطه A را خط عمود بر خط شعاع در نقطه A بیان کرد (شکل ۱-۳).



شکل ۱-۳

ولی مسأله برای یک منحنی کلی مشکل تر است مثلاً، در شکل ۲-۳ قسمت (الف) خط مماس چگونه تعریف می شود؟



شکل ۲-۳

و اما مسأله یافتن خط مماس در نقطه A به مسأله یافتن شیب خط مماس در A منجر می شود. این شیب را می توان با شیب خطی که از نقطه A و نقطه دیگری که از منحنی مثلاً B_1 می گذرد تقریب زد (قسمت ب شکل ۲-۳) یک چنین خط را خط قاطع می نامیم.

هرگاه $A(a, f(a))$ نقطه تماس و $B_1(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$ نقطه دیگری از نمودار f باشد، شیب خط قاطع که از دو نقطه A و B_1 می گذرد عبارت است از:

$$m_{AB_1} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

طرف راست این تساوی را خارج قسمت تفاضلی می نامیم. Δx را تغییر x و صورت کسر

$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$ را تغییر y می نامیم.

زیبایی این روند در آن است که با انتخاب دنباله ای از نقاط که به نقطه تماس نزدیک می شوند

(قسمت ب شکل ۲-۳)، می توان تقریبات دقیق تری به شیب خط مماس به دست آورد.

تعریف خط مماس: اگر f بر بازه بازی شامل a تعریف شده و حد زیر

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = m$$

موجود باشد، آنگاه خطی که از نقطه $(a, f(a))$ گذشته و به شیب m می باشد، خط مماس بر

نمودار f در نقطه $(a, f(a))$ نامیده می شود.

اغلب شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه $(a, f(a))$ را شیب نمودار f در $x=a$ می گوئیم.

❖ **مثال:** معادله خط مماس بر نمودار $f(x) = x^2$ را در نقطه $A(1,1)$ پیدا کنید.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x}$$

حل: 

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}(\Delta x + 2)}{\cancel{\Delta x}} = 2$$

شیب خط مماس

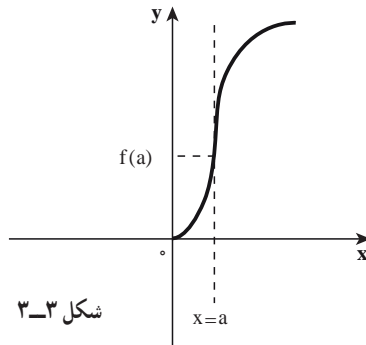
بنابراین معادله خط مماس می‌شود:

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{یا} \quad y = 2x - 1$$

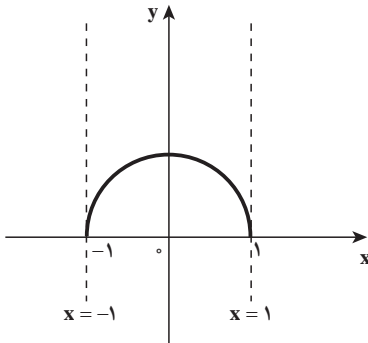
یادداشت: تعریف ما از خط مماس بر یک نمودار خط مماس قائم را در بر نمی‌گیرد. برای خطوط مماس قائم تعریف زیر را می‌آوریم.

اگر f در a پیوسته بوده و $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right| = +\infty$ ، آنگاه خط $x=a$ که از $(a, f(a))$

می‌گذرد، خط مماس قائم بر نمودار f است (شکل ۳-۳ را ببینید).



شکل ۳-۳



شکل ۳-۴

یادداشت: اگر دامنه f بازه بسته $[c, d]$ باشد،

آنگاه تعریف خط مماس قائم را با توجه به پیوستگی f در نقاط انتهایی c و d طوری تعمیم می‌دهیم که نقاط انتهایی را در بر گیرد.

به عنوان مثال، خطوط $x = \pm 1$ ، خطوط مماس

قائم بر منحنی $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ هستند. (شکل ۳-۴)

نشان دهید خط $x=1$ ، مماس قائم بر منحنی $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ می‌باشد.

۲-۳- مشتق تابع

همان‌طور که گفته شد و نیز در حسابان دیده‌اید، برای پیدا کردن شیب خط مماس و سرعت یک متحرک به یک نوع از حد برمی‌خوریم. در حقیقت، حدهایی به صورت

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

هنگام محاسبه آهنگ تغییر در بسیاری از شاخه‌های علوم و مهندسی نظیر سرعت واکنش در شیمی یا سرعت ذره در فیزیک و یا هزینه نهایی در اقتصاد پیش می‌آیند. چون به این نوع از حد، بسیار زیاد برمی‌خوریم، به این نوع حد نام خاصی داده‌اند و برای آن از نمادگذاری خاصی استفاده می‌کنند.

تعریف: فرض کنید a نقطه درونی از دامنه f است. در این صورت مشتق تابع f در $x=a$ که آن را به $f'(a)$ نشان می‌دهیم، برابر است با

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

اگر فرض کنیم $x = a + \Delta x$ آنگاه $\Delta x = x - a$

بدیهی است که وقتی Δx به صفر میل کند، x هم به a میل می‌کند.

بنابراین

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

فرایند یافتن مشتق یک تابع مشتق‌گیری نام دارد. گوییم تابع f در x مشتق‌پذیر است. اگر مشتق آن در x موجود باشد و بر بازه I مشتق‌پذیر است اگر در هر نقطه از این بازه مشتق‌پذیر باشد.

❖ **مثال:** مشتق تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 + x + 1$ را به وسیله فرایند حد در $(x, f(x))$ بیابید.
حل: توجه داشته باشیم که x ضمن حدگیری (وقتی $\Delta x \rightarrow 0$) ثابت گرفته می‌شود. بنابراین

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + x + \Delta x + 1 - (x^2 + x + 1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(\Delta x + 2x + 1)}{\Delta x} \\ &= 2x + 1 \end{aligned}$$

توضیح اینکه به ازای هر $x \in D_f$ ، $f'(x)$ شیب خط مماس بر منحنی f است.



از $f'(x)$ را برای تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ به وسیله فرایند حد به ازای $x > 0$ بیابید و با استفاده از نتیجه به دست آمده، شیب خط مماس در نقطه $(1, 1)$ را به دست آورید.

مسائل

- ۱- معادلات خط‌های مماس و قائم بر منحنی $y = \sqrt{x}$ را در نقطه $(1, 1)$ بیابید. (بامحاسبه شیب مماس به کمک تعریف)
 - ۲- نقاطی از منحنی $y = \frac{1}{x}$ را که در آنها خط مماس بر خط $y = 2x$ عمود است بیابید. (بامحاسبه شیب مماس به کمک تعریف)
 - ۳- آیا تابع‌های زیر در نقطه مشخص شده خط مماس دارند؟
 اگر پاسخ مثبت است معادله خط مماس را بیابید.
- الف) $f(x) = \sin x$ در $x = 0$ ب) $g(x) = |\sin x|$ در $x = 0$

۴- آیا تابع‌های زیر در نقطه مشخص شده خط مماس دارند؟
اگر پاسخ مثبت است معادله خط مماس را بیابید.

الف) $f(x) = |x|$ در $x=1$ ب) $g(x) = |x^2 - 1|$ در $x=1$

پ) $e(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x=0$ ت) $t(x) = x \operatorname{sgn}(x)$ در $x=0$

راهنمایی: $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ (تابع علامت)

۳-۳- آهنگ تغییر

در این بخش چند مثال برای نمایش و تعبیر تغییرات و آهنگ تغییر پدیده‌های دنیای پیرامون می‌آوریم.

طبیعی است که مانند سرعت یک شیء متحرک، تغییر را وابسته به زمان تلقی کنیم، ولی لزومی ندارد که خود را تا این اندازه مقید سازیم. تغییر نسبت به متغیرهایی غیر از زمان را نیز می‌توان به همان ترتیب مورد بررسی قرار داد. مثلاً یک پزشک می‌خواهد بداند چه تغییرات کوچکی در مقدار دارو می‌تواند واکنش بدن را به آن دارو برانگیزد، و یا اقتصاددانی می‌خواهد نحوه تغییر سرمایه‌گذاری خارجی در کشور معینی را نسبت به نوسانات موجود در نرخ‌های بهره رایج در آن کشور مورد مطالعه قرار دهد. همه این مسائل را می‌توان برحسب آهنگ تغییر یک تابع نسبت به یک متغیر فرمول‌بندی کرد.

❖ **مثال:** فرض کنیم $s=f(t)=t^2-5t^2+6t$ معادله حرکت (رابطه بین مکان و زمان) ذره‌ای باشد که روی خطی راست حرکت می‌کند و مکان ذره در زمان‌های $t=1$ و $t=1+\Delta t$ مشخص است در این صورت اندازه جابجایی این ذره برابر است با

$$\Delta S = f(1+\Delta t) - f(1) = \Delta t(\Delta t^2 - 2\Delta t - 1)$$

و در بازه زمانی $[1, 1+\Delta t]$ ، از تقسیم اندازه جابجایی بر مدت جابجایی (Δt)

آهنگ متوسط تغییر مکان ذره به دست می‌آید، که آن را عموماً سرعت متوسط ذره در فاصله

زمانی $t=1$ تا $t=1+\Delta t$ نیز می‌نامند، یعنی

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \Delta t^2 - 2\Delta t - 1$$

هرچه Δt کوچکتر شود این سرعت متوسط به سرعت ذره در حول و حوش لحظه $t=1$ نزدیکتر می‌گردد که در این حالت آن را سرعت لحظه‌ای می‌نامند، در واقع سرعت لحظه‌ای وقتی است که Δt به صفر میل کند، یعنی

$$\text{حد} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \text{سرعت لحظه‌ای در لحظه } t=1$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

بدین ترتیب سرعت لحظه‌ای را **آهنگ لحظه‌ای** تغییر مکان ذره در لحظه $t=1$ نیز می‌نامند و با استفاده از نمادگذاری ریاضی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

براساس مثال بالا و این نمادگذاری می‌توان ایده اصلی این بخش را معرفی کرد.

تعریف:

الف) **آهنگ متوسط** تغییر تابع f نسبت به x روی بازه $[a, a+\Delta x]$ عبارت است از

$$\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

ب) **آهنگ آنی** تغییر تابع f نسبت به x در $x=a$ عبارت است از

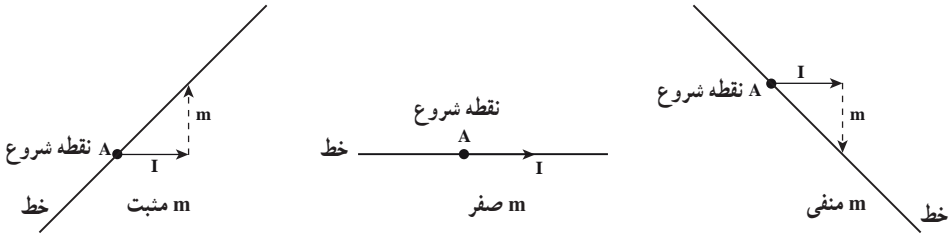
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

مشروط بر اینکه این حد وجود داشته باشد.

برحسب قرارداد وقتی متغیر x بیانگر زمان باشد به جای کلمه «آنی» واژه «لحظه‌ای» را به کار می‌بریم و اغلب با حذف واژه «آنی» و یا «لحظه‌ای» وقتی می‌گوییم **آهنگ تغییر**، مقصودمان آهنگ آنی یا لحظه‌ای تغییر است.

ویژگی ضریب زاویه یا شیب یک خط: اگر از نقطه‌ای بر خطی با ضریب زاویه m ، یک واحد به سمت راست حرکت کنیم، در این صورت باید m واحد در جهت محور y حرکت نماییم تا به

روی خط باز گردیم. (شکل ۳-۵)



شکل ۳-۵

بنابراین می‌توانیم شیب خط را این طور تعریف کنیم:
افزایش یا کاهش عرض نقطه شروع (A) را وقتی که طول آن را یک واحد در جهت مثبت محور x افزایش دهیم، شیب خط می‌نامیم.

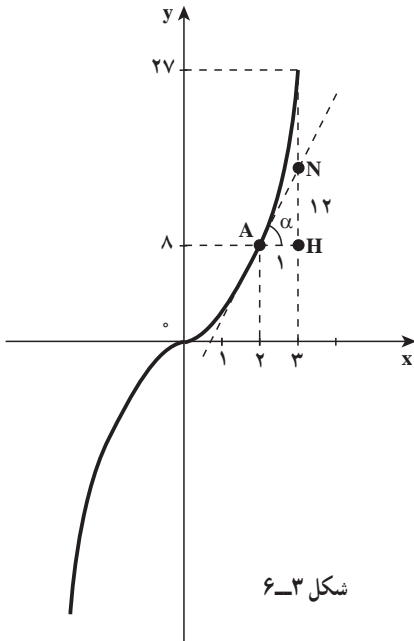
رابطه بین آهنگ تغییر و مسأله مماس: می‌دانیم آهنگ تغییر تابع f با ضابطه $f(x) = x^2$ وقتی که $x=2$ است برابر است با

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(2) = 4$$

در شکل ۳-۶ به تعبیر هندسی عدد ۴

می‌پردازیم.



شکل ۳-۶

$f'(2) = 4$ یعنی در نقطه $x=2$ ، وقتی

یک واحد به $x=2$ اضافه شود تقریباً ۴ واحد

به y اضافه می‌شود و اما $f(2) = 8$ بنابراین

مقدار تابع (y) در نقطه $x=3$ تقریباً $8 + 4 = 12$

است. ولی مقدار واقعی y در نقطه ۳ می‌شود

$$f(3) = 27$$

❖ **مثال:** اگر هوا را به داخل بالونی بدمیم، آهنگ تغییر حجم بالون، وقتی که شعاع آن ۱۵ سانتی متر

است، چقدر است؟

حل: اگر V حجم بالون کروی شکل و r شعاع بالون باشد، آهنگ تغییر حجم نسبت به شعاع

عبارت است از

$$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = 4\pi r^2$$

وقتی r برابر ۱۵ سانتی متر است، حجم بالون با آهنگ $900\pi = 4\pi \times 225$ سانتی متر مکعب بر

سانتی متر تغییر می کند و به عبارت دیگر، وقتی که شعاع بالون ۱۵ سانتی متر است، اگر یک واحد (یک

سانتی متر) دیگر به شعاع اضافه شود تقریباً 900π سانتی متر مکعب به حجم بالون افزوده می گردد.



حجم آب یک منبع آب، t دقیقه پس از شروع تخلیه، برحسب لیتر برابر است با:

$$V(t) = 250(16-t)^2$$

آهنگ لحظه‌ای تخلیه آب بعد از ۴ دقیقه، چقدر است و آن را توصیف کنید.

آهنگ تغییر در علم اقتصاد: فرض کنید $C(x)$ کل مبلغی باشد که کارخانه‌ای برای تولید x

واحد از یک نوع کالا، هزینه می کند. تابع C را تابع هزینه می نامند. اقتصاددانان مقدار حد $\frac{\Delta C}{\Delta x}$ را

وقتی که $\Delta x \rightarrow 0$ ، یعنی آهنگ لحظه‌ای تغییر هزینه نسبت به تعداد کالای تولید شده را هزینه نهایی

تولید می نامند.

چون معمولاً مقدارهای x عددهایی صحیح اند، ممکن است بی معنی باشد که Δx را به 0 میل

دهیم. بنابراین هزینه نهایی تولید را سهواً به عنوان هزینه اضافی لازم برای تولید یک واحد دیگر از

محصول تعریف می کنند. یعنی $\Delta C = C(x+1) - C(x)$

برای بهتر فهمیدن این مطلب، رابطه بین آهنگ تغییر و مسأله مماس را دوباره بخوانید.

❖ **مثال:** هزینه ساخت x یخچال $c(x)$ تومان است که در آن

$$C(x) = 800000 + 40000x - 500x^2$$

می باشد. هزینه تولید ۱۰۱ امین یخچال چقدر است و معنی آن را توضیح دهید.

$$C'(x) = 4000000 - 1000x \quad \text{هزینه نهایی}$$

$$C'(100) = 4000000 - 100000 = 3000000$$

حل: 

یعنی وقتی کارخانه ۱۰۰ یخچال تولید کرده و بخواهد ۱۰۱ امین یخچال را تولید کند تقریباً ۳۰۰۰۰۰ تومان هزینه می کند.

تمرین در کلاس

یک کارخانه پارچه بافی، طاقه هایی از پارچه ای به عرض ثابت تولید می کند. هزینه تولید x متر از این پارچه $C(x)$ تومان است.
الف) معنی $C'(x)$ چیست؟
ب) معنی $C'(1000) = 900$ چیست؟

مسائل

- ۱- حجم یک مکعب به طول ضلع x عبارت است از $V = x^3$ ، آهنگ تغییر حجم مکعب نسبت به x را وقتی $x = 4$ است بیابید.
- ۲- آهنگ تغییر مساحت دایره را نسبت به قطر آن بیابید.
- ۳- فرض کنید آنفلوآنزا در یک منطقه شیوع پیدا کرده است و مسئولین اداره بهداشتی تعداد افراد مبتلا به بیماری در زمان t (برحسب روز از زمان شیوع) را برابر $P(t) = 60t^2 - t^3$ تخمین می زنند، با شرط اینکه $0 \leq t \leq 40$.
الف) آهنگ تغییر بخش آنفلوآنزا را در $t = 30$ پیدا کنید.
ب) چه زمانی آهنگ بخش آنفلوآنزا ۹۰۰ نفر در روز است؟
- ۴- فرض کنید تابع هزینه تولید x واحد از محصولی $C(x) = 0.05x^3 - 3x$ و سطح تولید روزانه ۱۰۰ واحد است.
الف) هزینه افزایش تولید از ۱۰۰ به ۱۰۱ واحد در روز چقدر است؟
ب) هزینه نهایی در این سطح تولید چقدر است؟
- ۵- فرض کنید که درآمد حاصل از تولید x واحد از محصولی $R(x) = 0.1x^2 - 3x$ ، درآمد نهایی «آهنگ آبی تغییر درآمد» را در سطح تولید ۱۸۰۰ واحد حساب کنید.

۴-۳- تابع مشتق

می‌دانیم که مشتق تابع f در نقطه‌ای ثابت مانند x_0 (در صورت وجود):

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1)$$

در این بخش دیدگاه خود را تغییر می‌دهیم و می‌گذاریم x_0 تغییر کند. اگر در رابطه (۱)، x_0 را

با متغیر x جایگزین کنیم، داریم

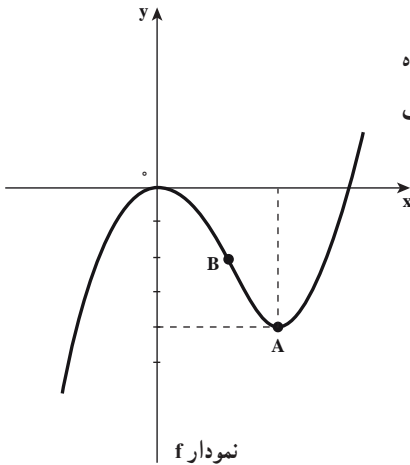
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2)$$

به ازای هر x ای که این حد وجود داشته باشد، x را به $f'(x)$ نظیر می‌کنیم. به این ترتیب f' می‌توانیم تابع جدیدی در نظر بگیریم و آن را تابع مشتق f (مشتق f) بنامیم و می‌دانیم تعبیر هندسی مقدار f' به ازای x ، یعنی $f'(x)$ ، شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه $(x, f(x))$ است.

نامیدن تابع f' به مشتق f به خاطر این است که به کمک حدگیری در رابطه (۲)، از f «مشتق»

شده است.

دامنه f' مجموعه $\{x : f' \text{ وجود دارد}\}$ است که زیرمجموعه‌ای از دامنه f است.



شکل ۷-۳

❖ **مثال:** نمودار تابع f در شکل ۷-۳ نشان داده

شده است. با استفاده از آن نمودار تابع f' را به تقریب

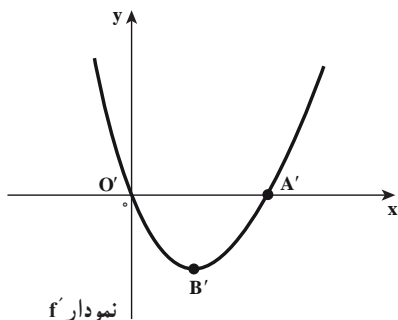
نشان دهید.

🚀 **حل:** شیب خط‌های مماس بر منحنی f قبل از نقطه O مثبت است پس در این جاها $f'(x)$

مثبت است و خط مماس در نقطه O افقی است پس به ازای طول این نقطه مقدار f' صفر است و بین

O و A شیب خط‌های مماس منفی است پس در این جاها $f'(x)$ منفی است و نمودار f' زیر محور x

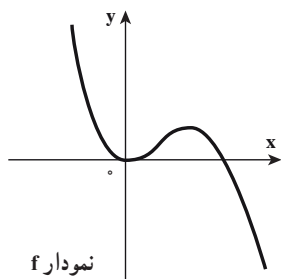
است و خط مماس در نقطه A افقی است پس به ازای طول این نقطه مقدار تابع f' صفر است در نتیجه نمودار f' محور x را در نقاط O' و A'



شکل ۸-۳

(O' با O و A' با A هم طول اند) قطع می کند.

و بعد از نقطه A شیب خط های مماس مثبت است پس در این جاها $f'(x)$ مثبت است و نمودار f' بالای محور x است. بنابراین نمودار f' را می توان به صورت شکل ۸-۳ نشان داد دقت کنید، نقطه B' روی نمودار f' نقطه ای است هم طول با نقطه B از نمودار f که بعداً در مورد آن توضیح خواهیم داد.



شکل ۹-۳

نمودار تابع f به شکل ۹-۳ است، از روی آن نمودار f' را حدس زده و آن را رسم کنید.

❖ **مثال:** اگر $f(x) = x^3$ ، ضابطه $y = f'(x)$ را پیدا کنید.

حل: از رابطه (۲) استفاده می کنیم، با این فرض که h متغیر است و ضمن محاسبه حد مورد نظر x را موقتاً ثابت در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3hx^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3hx + h^2)}{\cancel{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3hx + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

بنابراین $f'(x) = 3x^2$

یادداشت: برای مشتق تابع $y=f(x)$ علاوه بر نماد $f'(x)$ ، نماد $\frac{dy}{dx}$ یا y'_x به کار می‌رود.



اگر $f(x) = \sqrt{x}$ ، ضابطه تابع f' را به دست آورده و به کمک نمودار f ، نمودار f' را رسم کنید.

نقاط مشتق‌ناپذیر: وقتی $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ و یا $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ وجود

داشته باشد می‌گوییم f در x_0 مشتق‌پذیر است و یا f در x_0 مشتق دارد. در نقطه‌ای که f مشتق‌پذیر نیست، می‌گوییم f مشتق‌ناپذیر است و یا مشتق f وجود ندارد.

❖ مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$$

حل:

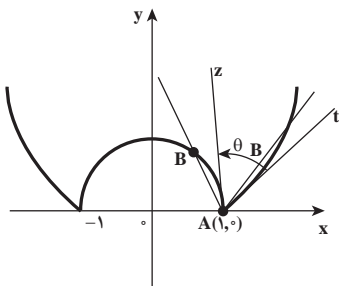
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

و اما

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = -2$$

ملاحظه می‌کنید که این حد وجود ندارد بنابراین تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست (و یا به عبارت دیگر در $(1, 0)$ خط مماس وجود ندارد) نمودار تابع f در شکل ۳-۱ نشان داده شده است.

در این شکل مشاهده می‌شود وقتی B از سمت چپ به A میل کند قاطع AB به مماس چپ



AZ میل می‌کند که شیب آن -2 است، در این صورت

می‌گوییم تابع f دارای مشتق چپ است.

و اگر B از سمت راست به A میل کند قاطع

AB به مماس راست At میل می‌کند که شیب آن 2

است، در این صورت می‌گوییم تابع f دارای مشتق

راست است.

شکل ۳-۱

در این وضعیت نقطه A ، یک نقطه «گوشه» برای تابع f است.
بنابراین اگر $A(x_0, f(x_0))$ یک نقطه گوشه برای تابع f باشد و مشتق چپ یعنی

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

و مشتق راست یعنی

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

وجود داشته ولی با هم نابرابر باشند، آنگاه یک مماس چپ در نقطه A به شیب $m_1 = f'_-(x_0)$ وجود دارد که معادله آن می‌شود

$$y = m_1(x - x_0) + f(x_0)$$

و همین‌طور، در نقطه A یک مماس راست به شیب $m_2 = f'_+(x_0)$ وجود دارد

$$y = m_2(x - x_0) + f(x_0)$$

به معادله :

و اگر زاویه بین دو مماس چپ و راست در نقطه گوشه را به θ نشان دهیم، دو حالت برای محاسبه θ در نظر می‌گیریم :

$$(1) \text{ اگر } m_1 \cdot m_2 = -1, \text{ آنگاه } \theta = 90^\circ$$

$$(2) \text{ اگر } m_1 \cdot m_2 \neq -1 \text{ آنگاه } \theta \text{ از رابطه زیر به دست می‌آید.}$$

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

که در مثال بالا اندازه زاویه بین دو مماس چپ و راست (θ) از رابطه زیر به دست می‌آید. (چرا؟)

$$\tan \theta = \left| \frac{-2 - 2}{1 - 4} \right| = \frac{4}{3}$$



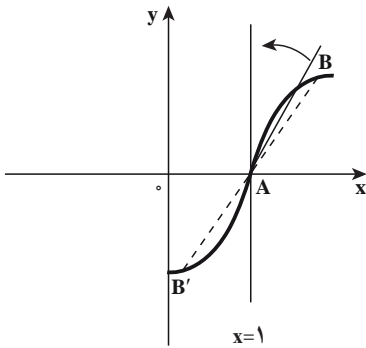
الف) با محاسبه مشتق چپ و مشتق راست تابع $f(x) = |x|$ در نقطه $x = 0$ ، نشان دهید مبدأ مختصات یک نقطه گوشه برای f است و سپس اندازه زاویه ایجاد شده در نقطه گوشه را به دست آورید.

ب) نشان دهید مبدأ مختصات یک گوشه برای تابع $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ ، می‌باشد و اندازه زاویه ایجاد شده در گوشه را به دست آورید.

❖ **مثال:** مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ را در $x=1$ بررسی نمایید.

🚀 **حل:** تابع f در $x=1$ پیوسته است (چرا؟) و

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty$$



بنابراین تابع در $x=1$ مشتق پذیر نیست و اما طبق

تعریف مماس قائم، تابع در نقطه $(1, 0)$ مماس قائم دارد به

معادله $x=1$ (شکل روبه‌رو را ببینید)

با مشاهده شکل روبه‌رو قاطع AB به خط مماس به

معادله $x=1$ میل می‌کند.

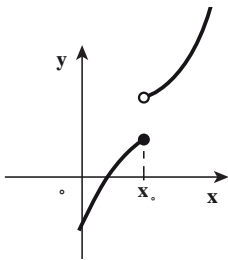
بنابراین تابع f که در نقطه $(x_0, f(x_0))$ مماس قائم

داشته باشد، در آن نقطه مشتق ناپذیر است.

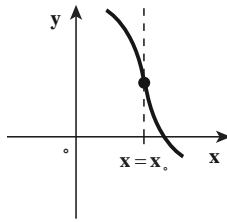
در سوّمین حالت، اگر تابع در نقطه x_0 پیوسته

نباشد، آن وقت در a مشتق پذیر نیست. بنابراین در هر نقطه ناپیوستگی f مشتق پذیر نیست.

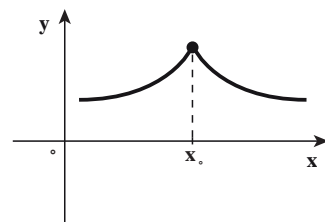
سه حالتی را که برای مشتق ناپذیری ذکر کردیم در شکل ۳-۱۱ دیده می‌شوند.



(پ) ناپیوستگی داشتن



(ب) مماس قائم داشتن



(الف) گوشه داشتن

شکل ۳-۱۱



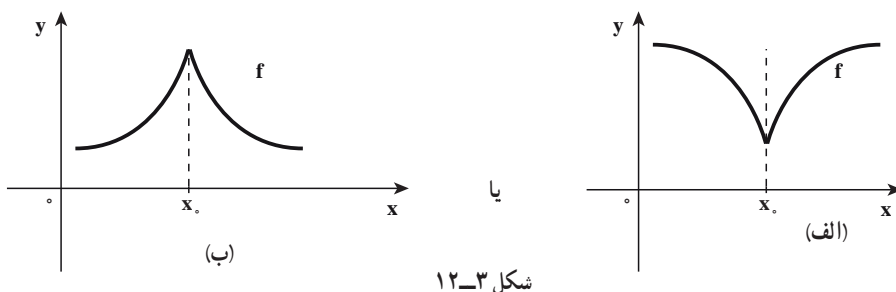
تابع $f(x) = \sqrt{x^2}$ را در نظر بگیرید.

(الف) ثابت کنید $f'(0)$ وجود ندارد.

(ب) به ازای هر $x \neq 0$ ، $f'(x)$ را پیدا کنید (ضابطه تابع مشتق).

(پ) نشان دهید که تابع f در $(0, 0)$ مماس قائم دارد و نمودار f را رسم کنید.

یادداشت: اگر تابع f در نقطه $(x_0, f(x_0))$ دارای مماس قائم با نموداری به شکل ۱۲-۳ باشد در آن صورت، $(x_0, f(x_0))$ نقطه بازگشتی تابع نامیده می‌شود.



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$$

به عنوان نمونه در تمرین کلاسی بالا معلوم می‌شود که مبدأ مختصات نقطه بازگشتی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ است.

۳-۵- نتایج اولیه مشتق‌پذیری

اگر بنا باشد مشتق هر تابعی را با استفاده از تعریف مشتق حساب کنیم کار محاسبه مشتق، دشوار و عذاب‌آور است. خوشبختانه راه آسانتری نیز هست و آن هم به دست آوردن تعدادی قاعده مشتق‌گیری، این قواعد ما را قادر می‌سازند تا مشتق ترکیب‌های پیچیده توابع را به آسانی از مشتق

توابع مقدماتی که این توابع را ساخته‌اند محاسبه کنیم، مثلاً قادر خواهیم بود مشتق تابع $y = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ را به دست آوریم. با این فرض که مشتق توابع مقدماتی $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$ را بدانیم. در نتیجه می‌توانیم رده بزرگی از توابع مشتق را معرفی کنیم.

سپس به ذکر پاره‌ای از خواص ابتدایی مشتق و کاربردهای آن می‌پردازیم. و اما برای اثبات بعضی از قواعد مشتق‌گیری، لازم است قضیه‌ای بدیهی ولی بسیار مهم زیر را بدانیم و صرف نظر از جزئیات، این قضیه بیان می‌کند که اگر نمودار یک تابع در نقطه‌ای هموار (مشتق‌پذیر) باشد، نمی‌تواند در آن نقطه ناپیوسته باشد.

❖ **قضیه ۱:** اگر تابع f در a مشتق پذیر باشد، آن وقت در a پیوسته است.

قضیه (۱) نشان می‌دهد که مشتق پذیری در یک نقطه، پیوستگی در آن نقطه را نتیجه می‌دهد، اما، عکس این قضیه درست نیست. یعنی ممکن است یک تابع در یک نقطه پیوسته باشد ولی در آن نقطه مشتق پذیر نباشد. مانند تابع $f(x)=|x|$ که در $x=0$ پیوسته است ولی در این نقطه مشتق پذیر نیست
($f'_+(0)=1$ و $f'_-(0)=-1$)

❖ **برهان قضیه (۱):** چون f در a مشتق پذیر است داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$


برای اثبات پیوستگی f در a باید نشان دهیم که

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$$

با استفاده از قضایا و قواعد حد، داریم

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times h \right) \\ &= f(a) + f'(a) \times 0 = f(a) \end{aligned}$$

❖ **مثال:** مقادیر a و b را به قسمی تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} (x+1)^3, & x \leq 0 \\ ax + a + b, & x > 0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق پذیر باشد.

 **حل:** برای مشتق پذیر بودن تابع f در $x=0$ ، ابتدا لازم است f در $x=0$ پیوسته باشد. یعنی تساوی‌های زیر برقرار باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$1 = a + b = 1$$

$$a + b = 1 \quad \text{و یا}$$

و با اجرا گذاشتن شرط مشتق پذیری، باید $f'_+(0) = f'_-(0)$ و اما

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+1)^3 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} ((x+1)^2 + (x+1) + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax + a + b - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} = a$$

بنابراین با انتخاب $a=3$ و $b=-2$ تابع f در $x=0$ مشتق پذیر است.

تابع f در نقطه a پیوسته است، ثابت کنید تابع $g(x) = (x-a)f(x)$ در نقطه a مشتق پذیر است.

همان طور که گفته شد، محاسبه مشتق توابع به کمک تعریف در بعضی از موارد بسیار دشوار است، لذا قضیه زیر که محاسبه مشتق توابع را آسان می‌سازد، ارائه می‌شود.

❖ **قضیه ۲:** هرگاه توابع f و g در نقطه a مشتق پذیر باشند و c یک عدد ثابت باشد.

آن وقت توابع $f+g$ و $f \cdot g$ و cf و $\frac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$) همگی در نقطه a مشتق پذیر هستند و

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a) \quad \text{(الف)}$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a) \cdot f(a) \quad \text{(ب)}$$

$$(cf)'(a) = cf'(a) \quad \text{(پ)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)} \quad \text{(ت)}$$

در قسمت (الف) قاعده مجموع را می‌توان به مجموع هر تعدادی از تابع‌ها تعمیم داد

❖ **مثال:** معادله حرکت ذره‌ای $s = t^3 - 4t^2 + 2t + 3$ است. (s بر حسب سانتی‌متر و t بر حسب ثانیه است)

شتاب این ذره را به عنوان تابعی از زمان پیدا کنید. پس از گذشت ۳ ثانیه شتاب چقدر است.

$$V(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 8t + 2 \quad \text{سرعت} \quad \text{حل: } \img alt="pen icon" data-bbox="815 590 867 620"/>$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t - 8$$

پس از گذشت ۳ ثانیه شتاب برابر است با:

$$a(3) = 10 \text{ cm/s}^2$$

معادله خط مماس بر منحنی $y = \frac{x}{x^2 + 6}$ را در نقطه $(2, 0/2)$ پیدا کنید.

❖ **برهان قضیه (۲):** اثبات قسمت‌های (الف)، (ب)، (پ) قضیه (۲) در کتاب حسابان آموزش

داده شده است. بنابراین به اثبات قسمت (ت) می‌پردازیم.

فرض کنیم $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ و a نقطه‌ای باشد که در آن f و g مشتق پذیر باشند و $g(a) \neq 0$ خارج قسمت تفاضلی مربوط به h در نقطه a عبارت است از

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \frac{1}{x - a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} \right) = \frac{1}{x - a} \times \frac{f(x)g(a) - g(x)f(a)}{g(x)g(a)}$$

اکنون با افزودن و کاستن $f(a)g(a)$ در صورت کسر، داریم

$$\begin{aligned} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} &= \frac{g(a)f(x) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{(x - a)g(x)g(a)} \\ &= \frac{g(a)(f(x) - f(a)) - f(a)(g(x) - g(a))}{(x - a)g(x)g(a)} \\ &= \frac{1}{g(a)g(x)} \left[g(a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] \end{aligned}$$

چون تابع g در a مشتق پذیر است، پس بنا بر قضیه (۱) در a پیوسته و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$

از این رو با محاسبه حد کسر $\frac{h(x) - h(a)}{x - a}$ و با استفاده از قوانین حد مجموع، حد حاصل ضرب و حد خارج قسمت نتیجه می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \frac{1}{g^2(a)} \left[g(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right]$$

و یا

$$h'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$



اگر تابع‌های f و g در نقطه a مشتق پذیر باشند، در این صورت ثابت کنید تابع $f \cdot g$ در نقطه a مشتق پذیر است و

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

۳-۶- مشتق توابع مثلثاتی

همان طور که می دانید تابع های مثلثاتی سینوس و کسینوس در دامنه تعریفشان پیوسته اند. اکنون مشتق پذیری این توابع را روی دامنه تعریفشان ثابت می کنیم و دستورهایی برای مشتق آنها بدست می آوریم و بنابر قضیه (۲) کافی است مشتق پذیری توابع سینوس و کسینوس ثابت شود زیرا دو تابع دیگر \tan و \cot به صورت خارج قسمت این دو تابع تعریف می شوند.

یادآور می شویم که در عبارات $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, x برحسب رادیان است. همچنین

$$\text{در فصل حد، نشان دادیم که } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh h}{h} = 0 \text{ و } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \text{ (برحسب رادیان)}$$

اکنون ثابت می کنیم $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ (برحسب رادیان است)

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

❖ برهان:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sinh \cos x - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sinh}{h} \right) \cos x - \left(\frac{1 - \cosh}{h} \right) \sin x \right]$$

چون در محاسبه حد وقتی h به صفر میل کند، x را ثابت می گیریم،

بنابراین

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin x = \sin x, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \cos x = \cos x$$

در نتیجه

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh}{h}$$

$$= \cos x \times 1 - (\sin x)(0) = \cos x$$



به طور مشابه ثابت کنید:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

❖ **مثال:** اگر $f(x) = \tan x$ ، مطلوب است تعیین $\frac{dy}{dx}$

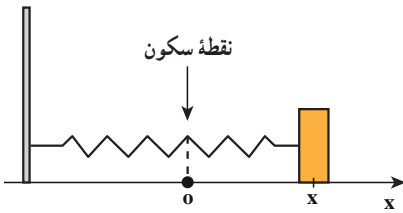
🚀 **حل:** چون $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ و $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\cos^2 x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

و یا $\frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2 x$ (به‌ازای هر x عضو دامنه f)

تمرین در کلاس

برای تابع $y = \cot x$ ، $\frac{dy}{dx}$ را تعیین کنید.



شکل ۳-۱۳

❖ **مثال:** جسمی که به انتهای فنری متصل

است به‌طور افقی روی سطحی صاف نوسان می‌کند

(شکل ۳-۱۳) معادله حرکت این جسم $x(t) = 6 \sin t$

است که در آن t بر حسب ثانیه است و x بر حسب سانتی‌متر

الف) سرعت و شتاب این جسم را در لحظه t

بدست آورید.

ب) موقعیت، سرعت و شتاب جسم مورد نظر را در زمان $t = \frac{2\pi}{3}$ و جهت حرکت در این زمان

چگونه است؟

🚀 **حل:** الف)

$$\text{سرعت } V(t) = \frac{dx}{dt} = 6 \cos t$$

$$\text{شتاب } a(t) = \frac{dv}{dt} = -6 \sin t$$

$$x\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 6 \sin \frac{2\pi}{3} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm} \quad \text{ب)}$$

در موقعیت $3\sqrt{3}$ سانتی‌متری از نقطه سکون است.

$$\text{سرعت } V\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 6\left(-\frac{1}{3}\right) = -3 \text{ cm/s}$$

چون سرعت منفی است، حرکت جسم به سمت چپ است.

$$a\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3} \text{ cm/s}^2$$

قاعده توانی: یکی از فرمول‌های قابل توجه حسابان، فرمول

$$\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1}$$

است، که به قاعده توانی معروف است. وقتی با استفاده از تعریف مشتق مثال‌هایی مانند:

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x, \quad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2, \quad \frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

را حل می‌کنید، فرمول بالا تداعی می‌شود، آنچه جالب است این است که قاعده توانی برای هر عدد حقیقی r برقرار است. مثلاً، ثابت می‌کنیم

$$\frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-3}, \quad \frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

و یا در بحث نماهای گنگ ثابت می‌شود:

$$\frac{d}{dx}(x^\pi) = \pi x^{\pi-1}$$

این قاعده طبعاً محدودیت‌هایی دارد، مثلاً در:

$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

دامنه عبارت است از مجموعه x هایی که مثبت‌اند.

با توجه به حالت‌های نمای r ، قاعده توانی در چند مرحله ثابت می‌شود.

حالت اول: $r=n$ ، که در آن n عدد صحیح نامنفی است.

$$\frac{d}{dx}(x^1) = 1x^0 \quad \text{و} \quad \frac{d}{dx}(x^0) = 0x^{-1} \quad \text{می‌گوید} \quad \text{قاعده توانی می‌گوید } n=1 \text{ و } n=0, \text{ وقتی } (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{یا ساده‌تر } \frac{d}{dx}(1) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{d}{dx}(x) = 1 \quad \text{وقتی } x \neq 0.$$

از این رو، در دامنه پذیرفته شده درست است. البته، هیچکس عملاً از آن در این حالات استفاده

نمی‌کند، زیرا فرمول‌های $\frac{d}{dx}(1) = 0$ و $\frac{d}{dx}(x) = 1$ بدون توسل به قاعده توانی (و در IR) برقرارند.

از این رو، فرض کنیم $n \geq 2$ و $f(x) = x^n$ ، در این صورت

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n) - x^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1})}{\cancel{h}}
 \end{aligned}$$

با حذف عامل $h \neq 0$ ، همه جملات باقی مانده جز جمله اول دارای عامل h هستند در نتیجه وقتی

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad h \rightarrow 0 \text{ خواهیم داشت:}$$

حالت دوم: $r = n$ ، که در آن n عدد صحیح منفی است. با انتخاب $m = -n > 0$ و $x \neq 0$ ،

$$f(x) = x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

لذا بنابر قضیه ۲ (مشتق خارج قسمت) و $\frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$ داریم:

$$f'(x) = \frac{0 \times x^m - mx^{m-1} \times 1}{(x^m)^2} = -mx^{m-1-2m}$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

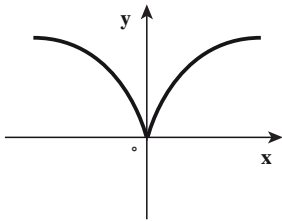
حالت سوم: وقتی r عدد گویای $\frac{p}{q}$ باشد و $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ ثابت می‌شود (در بخش بعدی)

به ازای هر x از دامنه تابع مشتق

$$f'(x) = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

حالت چهارم: وقتی r عدد گنگی باشد، مثل $\frac{d}{dx}(x^\pi) = \pi x^{\pi-1}$. فعلاً نمی‌توانیم به اثبات

آن بپردازیم زیرا هنوز علامتی مانند x^π و یا $x^{\sqrt{\pi}}$ را تعریف نکرده‌ایم.



شکل ۳-۱۴

❖ **مثال:** فرض کنید $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

(الف) دامنه تابع مشتق f را تعیین کنید.

(ب) ضابطه تابع مشتق f را به دست آورید.

✍ **حل:** (الف) قبلاً نمودار f به شکل ۳-۱۴ رسم شده و در مبدأ

نقطه بازگشتی دارد، پس تابع f در $x = 0$ مشتق ناپذیر است.

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{0\}$$

بنابراین

$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

پ) به ازای هر x عضو دامنه تابع f' داریم.

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

بنابراین

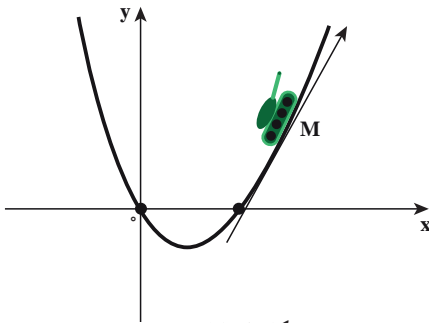


با فرض اینکه $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h) - f^3(1)}{h}$ را به دست آورید.

❖ **مثال:** یک تانک دشمن در صفحه مختصات خودی روی منحنی $f(x) = x^2 - x$ حرکت می کند

(شکل ۳-۱۵) و یک بسیجی با (آر - بی - جی - ۷) در نقطه $(4, 8)$ منتظر شکار تانک است و زمان مطلوب وقتی است که مسیر گلوله خط راستی مماس بر منحنی f باشد، نقطه مطلوب مسیر تانک را تعیین کنید.

حل: فرض کنید $M(a, a^2 - a)$ نقطه مطلوب باشد. در این صورت، ابتدا معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه M به دست می آوریم.



شکل ۳-۱۵

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$y - (a^2 - a) = f'(a)(x - a)$$

$$y - a^2 + a = (2a - 1)(x - a)$$

خط مماس از نقطه $(4, 8)$ می گذرد بنابراین

$$8 - a^2 + a = (2a - 1)(4 - a)$$

$$a^2 - 8a + 12 = 0$$

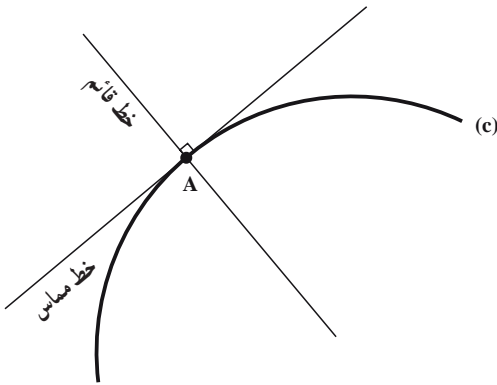
$$a = 2 \text{ یا } a = 6$$

پس مسیر موشک در نقطه $(2, 2)$ بر مسیر تانک مماس است.

یادداشت: مثال فوق نشان می دهد که از نقطه $A(4, 8)$ خارج منحنی $y = x^2 - x$ می توان

دو خط مماس به شیب های $m_1 = f'(2) = 3$ و $m_2 = f'(6) = 11$ بر منحنی f رسم کرد، با نقاط تماس

$$M(2, 2) \text{ و } B(6, 30)$$



شکل ۳-۱۶

یادداشت: به کمک قاعده‌های مشتق‌گیری و بدون مراجعه به تعریف مشتق علاوه بر خط‌های مماس، می‌توانیم خط‌های قائم را هم پیدا کنیم. خط قائم بر منحنی (C) در نقطه A خطی است که از A می‌گذرد و بر خط مماس بر منحنی در A عمود است (در فیزیک بخش نور، به زاویه میان پرتوهای نور و خط عمود بر عدسی نیاز است) (شکل ۳-۱۶ را ببینید).



۱- معادله خط‌های مماس و قائم بر منحنی $y = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ در نقطه $(\frac{1}{3}, 0)$ را پیدا کنید.

۲- از نقطه $A(0, -1)$ دو خط مماس بر منحنی $f(x) = x^2 + x$ رسم شده است معادلات این دو خط مماس را به دست آورید.

۳- خط $y = 2x + 1$ در نقطه $x_0 = 1$ بر منحنی پیوسته $y = f(x)$ مماس است مقدار

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + 3f(x) - 18}{x - 1}$$

را حساب کنید.

۳-۷- مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر

برای به دست آوردن تابع شتاب، از تابع موقعیت (مکان)، باید از تابع موقعیت دوبار مشتق گرفت.

$$S(t) \text{ (تابع موقعیت)}$$

$$V(t) = S'(t) \text{ (تابع سرعت)}$$

$$a(t) = V'(t) = S''(t) \text{ (تابع شتاب)}$$

$a(t)$ را مشتق دوم $s(t)$ نامیده و آن را با $s''(t)$ نشان می‌دهیم مشتق دوم، مثالی است از مشتق مرتبه‌های بالاتر بنابراین اگر تابع مشتق یعنی f' مشتق‌پذیر باشد، تابع مشتق f' را با f'' نشان داده و آن را مشتق مرتبه دوم (و یا مشتق دوم) f می‌نامیم.

تا آنجا که مشتق پذیری وجود دارد، می‌توان مشتق‌گیری از مشتقات را ادامه داد و در این صورت، مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر تابع $y = f(x)$ را به‌صورت زیر نسبت به x نشان می‌دهیم:

مشتق اول f : $y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}[f(x)], D_x(y)$

مشتق دوم f : $y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2}{dx^2}[f(x)], D_x^2(y)$

مشتق سوم f : $y^{(3)}, f^{(3)}(x), \frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^3}{dx^3}[f(x)], D_x^3(y)$


⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

مشتق n ام f : $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n}{dx^n}[f(x)], D_x^n(y)$

❖ **مثال:** اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n باشد، یعنی

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

که در آن $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ ثابت هستند، ($a_n \neq 0$) مشتق n ام، $f(x)$ را حساب کنید.

 **حل:** چون تابع چندجمله‌ای درجه n ، از هر مرتبه مشتق پذیر است بنابراین:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots + na_nx^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$f^{(3)}(x) = 6a_3 + 24a_4x + \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1 \times a_n = n!a_n$$

و برای هر $k > n$ ، $f^{(k)}(x) = 0$

 **تمرین در کلاس**

مشتق چهارم تابع $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)$ را در $x = 1$ حساب کنید.

❖ **مثال:** مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x|$ و مشتق‌های مراتب بالاتر آن را روی \mathbb{R} بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

 **حل:** می‌دانیم

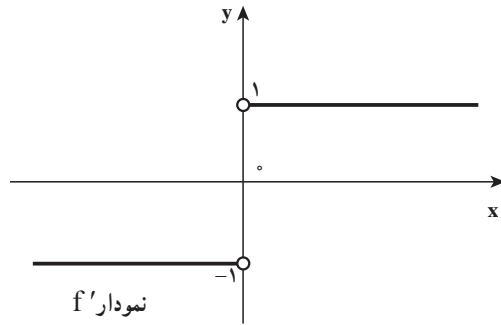
$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

چون

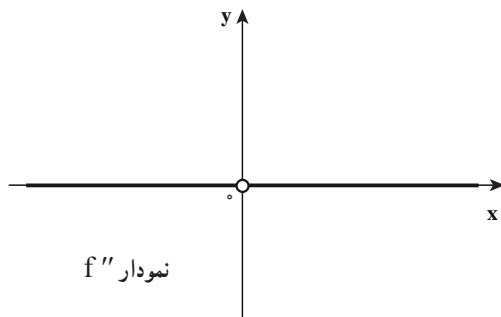
$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

بنابراین تابع f در $x = 0$ مشتق پذیر نیست و

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ \text{تعریف نشده} & , x = 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$



$$f''(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 0 & , x > 0 \end{cases}$$



تابع f'' در $x = 0$ تعریف نشده است.

$$f''(x) = 0, x \neq 0$$

و یا

$$f^{(n)}(x) = 0, x \neq 0$$

و برای هر $n \geq 3$



فرض کنید $f(x) = |x^2 - 4|$

الف) مشتق پذیری تابع f را در 2 و -2 بررسی نمایید.

ب) ضابطه تابع مشتق و نمودار آن را رسم کنید.

پ) با تعیین ضابطه توابع f'' و $f^{(3)}$ ، ضابطه مشتق n ام تابع f را به دست آورید.

برای یافتن مشتق تابع‌های **قطعه قطعه** تعریف شده (نظیر تابع قدر مطلق و تابع جزء صحیح) قضیه زیر بسیار مؤثر است و حل مسأله را ساده‌تر می‌کند.

❖❖❖ قضیه ۳: ❖❖❖

الف) اگر f روی بازه $(a, x_0]$ پیوسته و روی بازه باز (a, x_0) مشتق پذیر بوده و $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ وجود داشته باشد، آنگاه:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$$

ب) اگر f روی بازه $[x_0, b)$ پیوسته و روی بازه باز (x_0, b) مشتق پذیر بوده و $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ وجود داشته باشد، آنگاه:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

❖❖❖ **مثال:** مشتق چپ و مشتق راست تابع $f(x) = |x-1| + 2|x-2|$ را در $x=1$ حساب کنید.

🚀 **حل:** تابع f روی \mathbb{R} پیوسته است و برای هر x از بازه $(0, 1)$ ، $f(x) = -3x + 5$

پس برای هر x از بازه $(0, 1)$ ، $f'(x) = -3$

همچنین برای هر x از بازه $[1, 2)$ ، $f(x) = -x + 3$

پس برای هر x از بازه $(1, 2)$ ، $f'(x) = -1$

بنابراین $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -3$

$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -1$

در نتیجه تابع در $x=1$ مشتق پذیر نیست.

🏷️ تمرین در کلاس

مشتق چپ و مشتق راست تابع f با ضابطه $f(x) = x[x^2 + 3]$ را در نقطه $x=0$ را در صورت وجود به دست آورید ($[]$ نماد جزء صحیح است).

۱- فرض کنید تابع f در $x = 1$ مشتق پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3$ ، مقادیرهای $f(1)$ و $f'(1)$ را به دست آورید .

۲- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x^3, & |x| \geq 1 \\ 2x^2 - 1, & |x| < 1 \end{cases}$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - 1}{h}$ را بیابید .

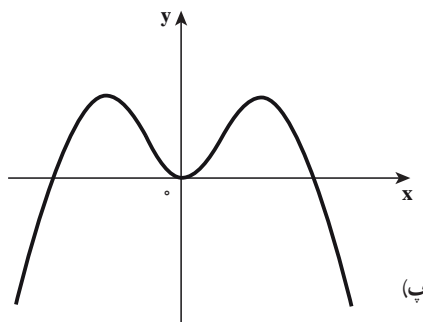
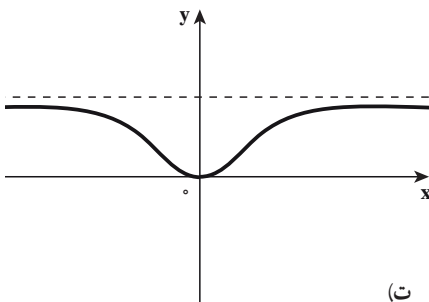
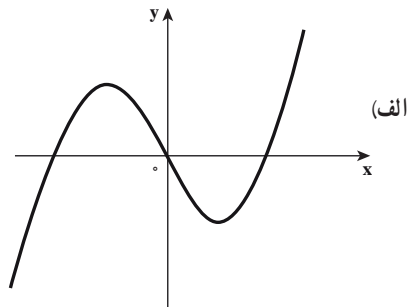
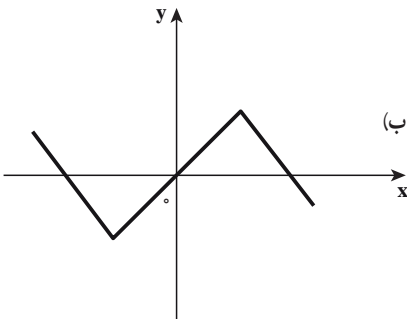
۳- فرض کنید $f(x) = \sin x \left[\cos \frac{x}{\pi} \right]$ ، مشتق چپ و مشتق راست تابع f را در نقطه $x = \pi$ حساب کنید .

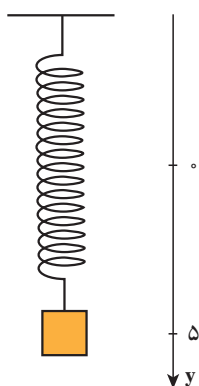
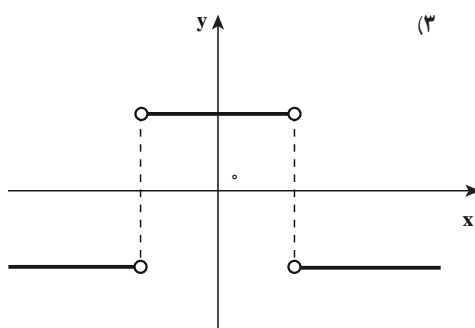
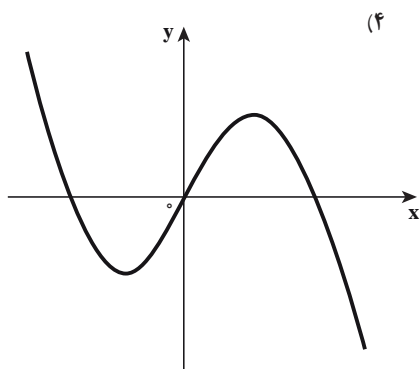
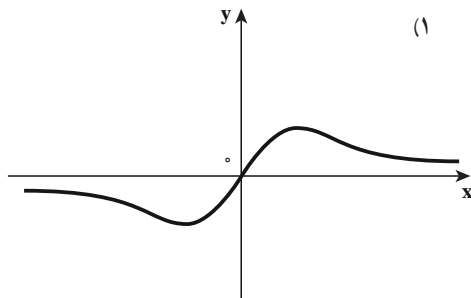
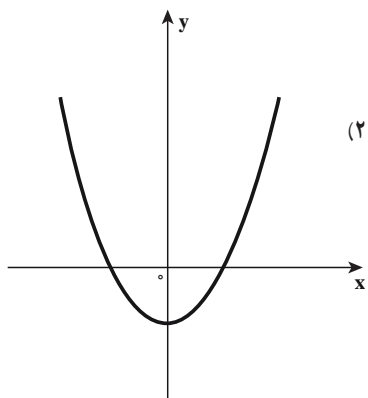
۴- الف ثابت کنید : اگر f در a مشتق پذیر باشد، حد زیر موجود و برابر با $f'(a)$ است

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$$

ب) نشان دهید که اگر حد در قسمت الف وجود داشته باشد، لزومی ندارد که تابع در نقطه a مشتق پذیر باشد .

۵- نمودار هر یک از تابع‌های قسمت‌های (الف) تا (ت) را به نمودار مشتقش در قسمت‌های (۱) تا (۴) متناظر کنید و ضمناً دلیل انتخاب خود را بیان کنید .





۶- اگر $f(x) = \sqrt{x}g(x)$ ، $g(4)=8$ ، $g'(4)=7$ ، مقدار $f'(4)$ به دست آورید.

۷- جسمی به انتهای فنری آویزان است، آن را به اندازه ۵ سانتی متر پایین کشیده و در لحظه $t=0$ رهاش می‌کنیم (مطابق شکل رسم شده جهت رو به پایین، جهت مثبت است) موقعیت این جسم در زمان t از رابطه $y = f(t) = 5\cos t$ به دست می‌آید. سرعت و شتاب این جسم را در زمان t پیدا کنید و سپس به کمک نتایج به دست آمده حرکت جسم را تحلیل کنید.

۸- فرض کنید $f(x) = x^6 - 2x^4 - x + 1$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h}$ را به دست آورید.

۹- اگر $f(x) = \frac{x+1}{x} \operatorname{sgn}(x^2 - x + 1)$ ، $f'(x)$ را حساب کنید.
 ۱۰- ضابطه تابع درجه دوم f را چنان انتخاب کنید که $f(1) = 2$ و $f'(1) = 3$ و $f''(1) = 4$ باشد.

۱۱- نقطه‌ای روی نمودار تابع $y = x^2 + x$ پیدا کنید که در آن نقطه، خط مماس بر منحنی تابع، موازی قاطعی باشد که دو نقطه با طول‌های $x = 1$ و $x = 3$ واقع بر منحنی تابع را به هم وصل کند.

۱۲- معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{1 + 2 \sin x}{\sin x}$ را در نقطه $(\frac{\pi}{6}, 4)$ به دست آورید.

۱۳- به ازای چه مقادیری از a ، b ، c تابع $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ ax^2 + bx + c, & x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق مرتبه دوم دارد؟

۱۴- الف) با محاسبه مشتق اول و دوم و سوم تابع $f(x) = \sin x$ ، مشتق n ام تابع f را حدس بزنید و سپس درستی حدس خود را به استقراء ثابت کنید.

ب) با استفاده از قسمت الف، دستور مشتق n ام تابع $f(x) = \cos x$ را به دست آورید.

۳-۸- قاعده زنجیری

با وجود اینکه می‌توانیم مشتق \sqrt{x} و $x^2 + 1$ را بیابیم ولی هنوز نمی‌توانیم مشتق $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ را حساب کنیم.

توجه کنید که f تابعی ترکیبی است که اگر فرض کنیم $y = f(u) = \sqrt{u}$ و $u = g(x) = x^2 + 1$ می‌توانیم بنویسیم:

$$y = h(x) = f(g(x))$$

یعنی $h = f \circ g$

قاعده محاسبه مشتق تابع‌های f و g را می‌دانیم، در نتیجه دانستن قاعده‌ای که براساس آن بدانیم چگونه مشتق $h = f \circ g$ را بر حسب مشتق‌های f و g پیدا کنیم، بسیار با اهمیت است. و این قاعده را قاعده زنجیری می‌نامند.

اکنون فرض کنید تابع $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ برابر است با تابع مرکب $y = f(g(x))$ ، که در آن $f(u) = \frac{1}{u}$ و $u = g(x) = x^2 + 1$ و این توابع دارای مشتق‌های $g'(x) = 2x$ ، $f'(u) = \frac{-1}{u^2}$ هستند.

بنابر قاعدهٔ خارج قسمت (که حالت خاصی از قاعدهٔ زنجیری است)

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-1}{(x^2 + 1)^2} (2x) = f'(g(x))g'(x)$$

این مثال می‌گوید مشتق تابع مرکب $y = f(g(x))$ برابر است با مشتق f به ازای $g(x)$ ، ضرب در مشتق g به ازای x ، این همان قاعدهٔ زنجیری است.

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

طرح این مثال ایده‌ای است برای بیان قضیه مشتق تابع مرکب (و یا قاعده زنجیری)

❖ **قضیه ۱: قاعده زنجیری:** اگر تابع g در نقطهٔ x و تابع f در نقطهٔ $g(x)$ مشتق پذیر باشند، آنگاه

$$\text{تابع مرکب } f \circ g \text{ در نقطه } x \text{ مشتق پذیر است و } (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

با استفاده از نمادگذاری لاینیتس، اگر $y = f(u)$ ، که در آن $u = g(x)$ آنگاه $y = f(g(x))$ و

$$\frac{dy}{du} \text{ آهنگ تغییر } y \text{ نسبت به } u \text{ عبارت است از}$$

$$\frac{du}{dx} \text{ آهنگ تغییر } u \text{ نسبت به } x \text{ عبارت است از}$$

بنابراین، آهنگ تغییر $y = f(u) = f(g(x))$ نسبت به x عبارت است از $\frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ یعنی

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}} \quad (1)$$

که $\frac{dy}{du}$ در $u = g(x)$ محاسبه شده است.

به نظر می‌رسد که برای رسیدن به رابطه (۱)، نماد du را از صورت و مخرج حذف کرده‌ایم، ولی

این کار معنی داری نیست زیرا $\frac{dy}{du}$ معرف خارج قسمت دو کمیت نیست، بلکه کل آن معرف کمیت واحدی به نام مشتق y نسبت به u است.

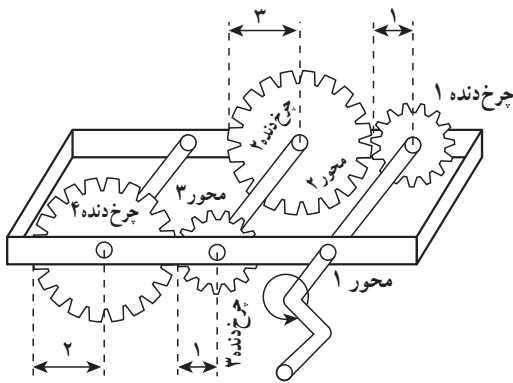
بیان یک مثال فیزیکی از مشتق تابع مرکب: در شکل ۳-۱۷ مجموعه‌ای از چرخ دنده‌ها

را می‌بینید که چرخ دندهٔ دوم و سوم روی محور واحدی قرار دارند. وقتی محور اول می‌چرخد، محور

دوم را حرکت می‌دهد، و این محور خود محور سوم (چرخ دنده ۴) را حرکت خواهد داد. فرض کنیم

y ، u و x تعداد دوران‌های محورهای اول، دوم، و سوم در دقیقه باشند. $\frac{dy}{du}$ و $\frac{du}{dx}$ و $\frac{dy}{dx}$ را یافته

$$\text{و نشان دهید } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$



شکل ۳-۱۷

محور ۱: y دوران در دقیقه

محور ۲: u دوران در دقیقه

محور ۳: x دوران در دقیقه

حل. چون محیط چرخ دنده دوم ۳ برابر

محیط چرخ دنده اول است ($r_2 = 3r_1$) شعاع،

چرخ دنده اول باید ۳ دور بچرخد تا چرخ دنده

دوم یک بار دوران نماید. همچنین چرخ دنده

دوم باید ۲ دور بچرخد تا چرخ دنده چهارم

یک بار دوران نماید و داریم $\frac{dy}{du} = 3$ و $\frac{du}{dx} = 2$

با ادغام این دو نتیجه معلوم می شود که محور اول باید ۶ دور بچرخد تا محور سوم (چرخ دنده ۴)

یک بار دوران نماید. در نتیجه

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = (3)(2) = 6$$

به عبارت دیگر، میزان تغییر y نسبت به x حاصلضرب میزان تغییر y نسبت به u در میزان تغییر

u نسبت به x است.

❖ مثال: مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$ را با استفاده از قاعده زنجیری پیدا کنید.

🚀 حل اول: ابتدا ضابطه f را به شکل $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ می نویسیم که در آن

$u = g(x) = x^4 + 1$ و $f(u) = \sqrt{u}$ چون $f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ و $g'(x) = 4x^3$ پس بنا بر قضیه ۴

$$h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 1}} \times 4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

🚀 حل دوم: با استفاده از تساوی (۱) اگر فرض کنیم $u = x^4 + 1$ و $y = \sqrt{u}$ ، آنگاه

$$h'(x) \text{ یا } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times 4x^3 = \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 1}} \times 4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

تمرین در کلاس

اگر n عدد حقیقی باشد و تابع $u = g(x)$ مشتق پذیر، آن وقت $\frac{d}{dx}(u^n)$ را به دست آورید.

یادداشت: از فعالیت بالا که محاسبه $\frac{d}{dx}(u^n)$ مورد نظر است قاعده مهم زیر به دست می آید و آن را قاعده توانی کلی می نامیم.

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx} = nu^{n-1} u'$$

❖ مثال: از توابع زیر مشتق بگیرید.

(الف) $y = \sin(x^2)$ (ب) $y = \cos^2(x)$

حل: 

(الف) فرض کنید $u = x^2$ و $y = \sin u$ پس بنا بر قاعده زنجیری $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

در نتیجه $\frac{dy}{dx} = (\cos u) \times 2x = 2x \cos x^2$

(ب) فرض کنید $u = \cos x$ و $y = u^2$ ، پس بنا بر قاعده توانی کلی

$$\frac{dy}{dx} = 2u^1 u' = 2 \cos^2 x (-\sin x) = -2 \sin x \cos^2 x$$

تمرین در کلاس 

فرض کنید $u = g(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد.

(الف) مشتق تابع های $y = \sin u$ و $y = \cos u$ را بیابید.

(ب) مشتق تابع های $y = \tan u$ و $y = \cot u$ (با شرط اینکه \tan و \cot در u مشتق پذیرند) را بیابید.

۹-۳- مشتق گیری ضمنی

اکثر توابعی که با آنها سروکار داریم، دارای معادله ای هستند که y (مقدار تابع) را به طور صریح بر حسب متغیر x بیان می کند مثلاً

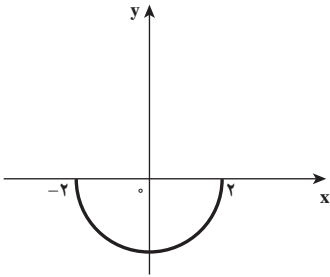
$$y = \sin x, \quad y = x\sqrt{x^2 + 1}$$

یا در حالت کلی، $y = f(x)$

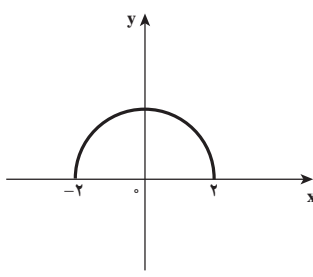
اما بعضی اوقات به معادلاتی نظیر $0 = 4 - x^2 + y^2 = 6xy, x^2 + y^2 = 4$ برمی خوریم که y را به طور صریح بر حسب متغیر x به دست نمی دهند. البته در برخی موارد می توان چنین معادله هایی را حل کرد تا y را به طور صریح بر حسب x به دست آورد مثلاً در معادله $4 = x^2 + y^2$ (معادله دایره ای به مرکز مبدأ

مختصات و به شعاع $R=2$ جواب‌های y می‌شوند $y = \pm\sqrt{4-x^2}$ در نتیجه $x^2 + y^2 - 4 = 0$ معادله
 ضمنی تابع‌های $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $g(x) = -\sqrt{4-x^2}$ می‌باشد.

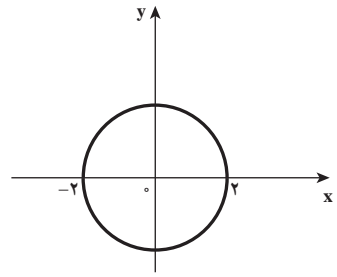
نمودارهای f و g نیم‌دایره‌های بالایی و پایینی دایره $x^2 + y^2 = 4$ هستند. (شکل زیر)



$g(x) = -\sqrt{4-x^2}$ (ب)

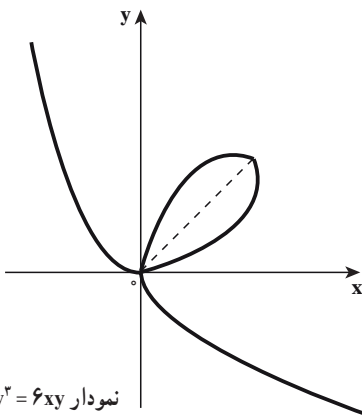


$f(x) = \sqrt{4-x^2}$ (ب)



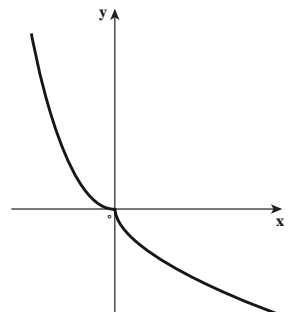
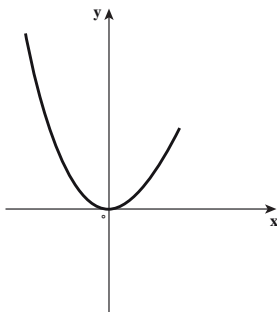
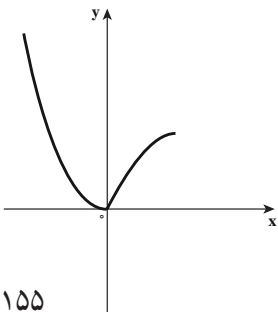
$x^2 + y^2 = 4$ (الف)

حل کردن معادله $x^2 + y^2 = 6xy$ برای یافتن y بر حسب متغیر x کار ساده‌ای نیست (برای سیستم‌های
 جبری کامپیوتری چنین کاری دشوار نیست، اما عبارتی که به دست می‌آید خیلی پیچیده است) به هر حال



نمودار $x^2 + y^2 = 6xy$

$x^2 + y^2 = 6xy$ معادله یک منحنی است که آن را منحنی
 برگ‌گی دکارت می‌نامند. (شکل روبه‌رو) و از این منحنی برگ‌گی
 دکارت می‌توان چندین تابع تعریف کرد که معادله ضمنی آن
 توابع همان $x^2 + y^2 = 6xy$ است در شکل زیر سه تا از آن
 تابع‌ها نشان داده شده‌اند.



درخور توجه است که برای پیدا کردن $\frac{dy}{dx}$ نیازی نداریم که y را برحسب متغیر x پیدا کنیم، به جای این کار از مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم، برای این منظور از دو طرف معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم و از معادله حاصل $y' = \frac{dy}{dx}$ را به دست می‌آوریم، با این فرض که همواره معادله داده شده، y را به‌طور ضمنی برحسب تابعی مشتق‌پذیر از x تعریف می‌کند.

❖ **مثال: الف)** اگر $x^2 + y^2 = 4$ ، $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

ب) معادله مماس بر دایره $x^2 + y^2 = 4$ را در نقطه $(1, \sqrt{3})$ بیابید.

🚀 **حل:** از طرفین معادله $x^2 + y^2 = 4$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx} 4 \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

قابل توجه این که $y = f(x)$ تابعی است مشتق‌پذیر و بنا بر قاعده «توانی کلی» در مشتق تابع مرکب

داریم:

$$\frac{d}{dx}(y^2) = 2yy'$$

$$2x + 2yy' = 0$$

بنابراین

اکنون از این معادله y' را پیدا می‌کنیم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} \quad \text{یا} \quad y' = \frac{-x}{y} \quad (y \neq 0)$$

ب) در نقطه $(1, \sqrt{3})$ ، مشتق تابع (نیم‌دایره بالایی) برابر است با

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{شیب مماس}$$

بنابراین معادله خط مماس بر دایره در نقطه $(1, \sqrt{3})$ می‌شود

$$y - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$$

یا

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

الف) اگر $\cos \sqrt{y} = y^2 \sin x$ ، $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید.

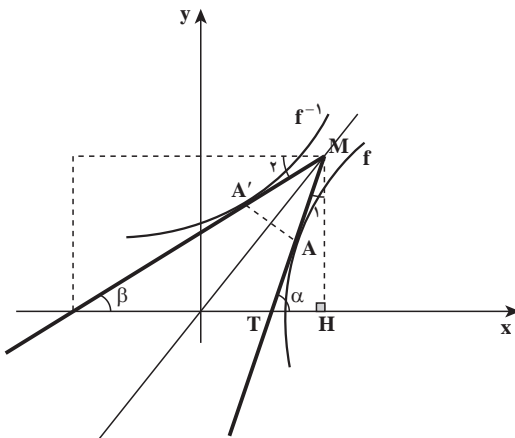
ب) اگر $x + y^2 + 1 = y + x^2 + xy^2$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ را در نقطه $(1, 1)$ پیدا کنید.

پ) معادله خط مماس بر منحنی $x^3 + y^3 = 6xy$ را در نقطه $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ پیدا کنید.

۳-۱۰-۱ مشتق تابع وارون

فرض کنیم f تابعی یک به یک و مشتق پذیر باشد. با یک رویکرد هندسی می توانیم تابع مشتق پذیر را تابعی بدانیم که نمودارش گوشه یا پیچ ندارد. در نتیجه نمودار f^{-1} که قرینه نمودار f نسبت به خط $y=x$ است، گوشه یا پیچ ندارد. (شکل ۳-۱۸) بنابراین انتظار داریم که f^{-1} نیز به جز در جاهایی که مماس ها

قائم اند، مشتق پذیر باشد. و به صورت شهودی با یک استدلال هندسی مقدار مشتق f^{-1} را در نقطه داده شده به دست آورید در شکل (۳-۱۸) نقطه $A(a, b)$ روی نمودار f و نقطه $A'(b, a)$ قرینه A نسبت به خط $y=x$ روی نمودار f^{-1} در نظر می گیریم
 $(f^{-1})'(b) = \tan \beta$ و $f'(a) = \tan \alpha$



شکل ۳-۱۸- تابع f در نقطه A هموار است و تابع وارون

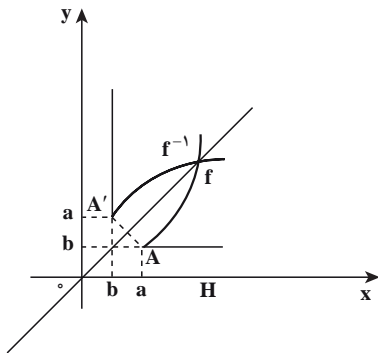
آن f^{-1} نیز در A' هموار می باشد

شکل (۳-۱۸) را در نظر گرفته و رابطه بین $f'(a)$ و $(f^{-1})'(b)$ را به دست آورید.

نتیجه به دست آمده در این فعالیت یک ایده ای است برای بیان قضیه بعدی.

❖ **قضیه:** فرض کنیم I یک بازه و $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که در نقاط درونی بازه I مشتق پذیر و مشتق آن همه جا مثبت یا همه جا منفی است. در این صورت تابع f^{-1} (وارون f) نیز در همه نقاط درونی دامنه اش مشتق پذیر است و به ازای هر نقطه درونی از دامنه f^{-1} مانند b که $b = f(a)$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$



شکل ۳-۱۹

یادداشت: اگر $f'(a) = 0$ یعنی خط مماس بر نمودار f افقی باشد و به معادله $y = b$ ، آن وقت خط مماس در نقطه b از نمودار f^{-1} خطی است عمود بر محور x و به معادله $x = b$ و در این صورت تابع f^{-1} در نقطه b مشتق ندارد. (شکل ۳-۱۹ را ببینید)

❖ **مثال:** فرض کنید $f(x) = 2x^2 + 3x^2 + 6x + 1$ مقدار $(f^{-1})'(1)$ را در صورت وجود پیدا کنید.

🚀 **حل:** تابع f همواره مشتق پذیر و مشتق آن همه جا مثبت است (چرا؟) و $b = 1$ پس از

$$1 = 2x^2 + 3x^2 + 6x + 1 \quad \text{نتیجه می شود فقط } x = 0 \text{ یعنی } a = 0$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x + 6 = f'(0) = 6$$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{6}$$

بنابراین

تمرین در کلاس

۱- فرض کنید f^{-1} تابع وارون تابع مشتق پذیر f باشد و $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$ اگر $f(1) = 2$ و $f'(1) = \frac{1}{8}$ ، $g'(2)$ را بیابید.

۲- تابع $f(x) = \sin x$ را با دامنه $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ در نظر بگیرید. مشتق تابع $f^{-1} = \sin^{-1}$ را به ازای هر x ، عضو بازه باز $(-1, 1)$ بیابید.

۳-۱-۱- مشتق توابع نمایی و لگاریتمی طبیعی

وقتی سرمایه‌ای با آهنگ یکنواخت ۱۴ درصد در سال افزایش می‌یابد به نظر منطقی است که انتظار داشته باشیم آهنگ رشد آن در هر لحظه با مقدار سرمایه در آن لحظه متناسب باشد و یا وقتی جمعیت یک جامعه با آهنگ یکنواخت ۳ درصد در سال افزایش می‌یابد، آهنگ رشد جمعیت متناسب با جمعیت است. اینها نمونه‌هایی از پدیده‌ای موسوم به رشد نمایی می‌باشند.

همانند رشد نمایی، می‌توان صحبت از زوال نمایی کرد مثلاً مقدار اورانیم رادیواکتیو U^{235} با آهنگی متناسب با مقدار موجود U^{235} زوال می‌یابد. زوال اورانیم (یا به‌طور کلی عنصرهای رادیواکتیو) نمونه‌ای از پدیده‌ای به نام زوال نمایی است.

اکثر مسائل رشد نمایی و زوال نمایی به مدل ریاضی $f(x) = e^x$ می‌انجامد که برخی از خواص این تابع را پیش از این به وسیله مفهوم حد و پیوستگی بررسی کرده‌ایم. اکنون می‌خواهیم آهنگ تغییر تابع نمایی طبیعی $f(x) = e^x$ را بررسی کنیم و قاعده‌ای برای مشتق این تابع بیابیم.

مشتق تابع نمایی طبیعی: مشتق تابع $f(x) = e^x$ را با استفاده از تعریف مشتق پیدا می‌کنیم

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \times \frac{e^h - 1}{h}$$

عامل e^x به h بستگی ندارد، بنابراین می‌توانیم آن را به پیش از حد ببریم:

$$f'(x) = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \quad (1)$$

از تعریف e (عدد نپر) داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

$$(1+h)^{\frac{1}{h}} \approx e$$

$$((1+h)^{\frac{1}{h}})^h \approx e^h$$

$$(1+h) \approx e^h$$

از این رابطه و مفهوم حد نتیجه می‌شود

و این رابطه ایجاب می‌کند که

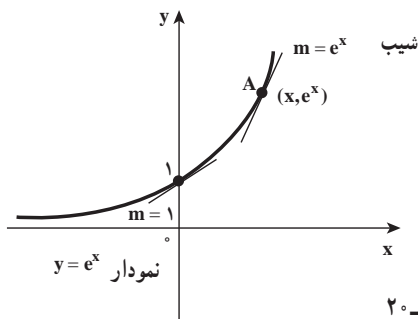
و یا

این مقدار را در رابطه (۱) جایگزین می‌کنیم

$$f'(x) = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = e^x \times 1 = e^x$$

$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	مشتق تابع نمایی طبیعی
---------------------------	-----------------------

بنابراین



در نتیجه تابع مشتق تابع نمایی طبیعی $f(x) = e^x$ خودش می‌باشد و با بیان هندسی شیب خط مماس بر منحنی $y = e^x$ در هر نقطه برابر با مختص y همان نقطه است. (شکل ۳-۲ را ببینید)

شکل ۳-۲

یادداشت: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ خط $y = 0$ مجانب افقی $y = e^x$ است.

❖ **مثال:** فرض کنید $u = g(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، مشتق تابع $y = e^u$ را بیابید.

🚀 **حل:** با فرض $u = g(x)$ و $f(x) = e^x$ و $(f \circ g)(x) = e^u$ ، بنابر قاعده زنجیری داریم:
 $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$

چون $f'(x) = e^x$ پس $f'(u) = e^u$ ، بنابراین

$$\frac{d}{dx}(e^u) = u'e^u$$

تمرین در کلاس

معادله خط مماس بر منحنی $y = e^{\lambda x} \cos \pi x$ را در نقطه $(0, 1)$ پیدا کنید.

❖ **مثال:** مقدارهایی از λ را پیدا کنید که به ازای آنها $y = e^{\lambda x}$ در معادله دیفرانسیل $y'' + 6y' + 8y = 0$ صدق کند.

(معادله‌ای که رابطه‌ای بین y و مشتقات اول یا بالاتر آن را بیان می‌کند، یک معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود).

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

با جایگزین کردن y' و y'' در معادله دیفرانسیل داریم:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 6\lambda e^{\lambda x} + 8e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + 6\lambda + 8) = 0$$

چون $e^{2x} \neq 0$ ، پس

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda = -2, -4$$

$y = e^{-2x}$ و $y = e^{-4x}$ جواب‌های معادله دیفرانسیل $y'' + 6y' + 8y = 0$ می‌باشند.

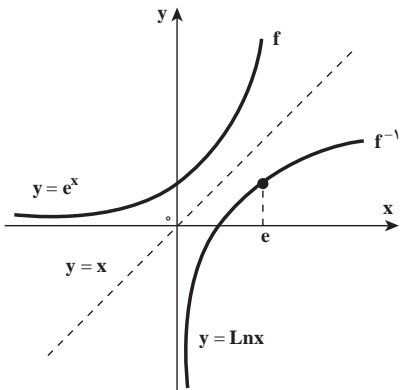
تابع لگاریتمی طبیعی: با توجه به ویژگی‌های $f(x) = e^x$ ، تابع f پیوسته و یک به یک است

بنابراین تابع وارون f موجود است و تابعی است پیوسته و یک به یک.

وارون تابع $y = e^x$ را می‌توان به صورت $x = e^y$ نوشت (تابع f تابع x ، تابع f^{-1} است و بالعکس) و

در عبارت $x = e^y$ ، y را لگاریتم x در پایه e می‌خوانیم و با نماد $y = \text{Ln}x$ نشان می‌دهیم و این تابع را

تابع لگاریتمی طبیعی می‌نامیم.



شکل ۳-۲۱

با توجه به اینکه نمودار تابع وارون تابع f ،

قرینه نمودار تابع f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم

است، به سادگی می‌توان نمودار تابع $y = \text{Ln}x$ را، به

کمک نمودار $y = e^x$ رسم کرد. (شکل ۳-۲۱)

دامنه تابع $y = \text{Ln}x$ ، $(0, +\infty)$ و برد آن IR

است و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Ln}x = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Ln}x = +\infty$

بنابراین خط $x = 0$ مجانب قائم تابع $y = \text{Ln}x$ است.

مشتق تابع لگاریتمی طبیعی: تابع لگاریتم

طبیعی $y = \text{Ln}x$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که این

تابع مشتق پذیر است، زیرا وارون تابع مشتق پذیر $y = e^x$ است.

فرض کنید $y = \text{Ln}x$ ، در این صورت $x = e^y$ اگر از طرفین معادله $e^y = x$ نسبت به متغیر x به

صورت ضمنی مشتق بگیریم، به دست می‌آید:

$$e^y \times \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

و یا

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\text{Ln}x) = \frac{1}{x}}$$

(۱)

در نتیجه

تمرین در کلاس

فرض کنید $u = g(x) > 0$ تابعی مشتق پذیر باشد، به کمک قاعده (۱) و قاعده زنجیری ثابت

$$\frac{d}{dx}(\text{Lnu}) = \frac{u'}{u} \quad \text{کنید:}$$

❖ **مثال:** اگر $f(x) = \text{Ln}|x|$ ، $f'(x)$ را پیدا کنید.

🚀 **حل:** دامنه تابع f ، $\mathbb{R} - \{0\}$ است پس

$$f(x) = \begin{cases} \text{Lnx} & , x > 0 \\ \text{Ln}(-x) & , x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} & , x < 0 \end{cases}$$

بنابراین

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

نتیجه مثال (۷) ارزش به خاطر سپردن را دارد:

$$\frac{d}{dx}(\text{Ln}|x|) = \frac{1}{x}$$

تمرین در کلاس

۱- اگر $u = g(x) \neq 0$ تابع مشتق پذیری باشد، به کمک نتیجه مثال ۷ و قاعده زنجیری نشان

$$\frac{d}{dx}(\text{Ln}|u|) = \frac{u'}{u} \quad \text{دهید:}$$

۲- از دو طرف تساوی $y = x^{\sqrt{x}}$ ، $x > 0$ لگاریتم طبیعی بگیرید و با استفاده از مشتق گیری

ضمنی، $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید.

در یک آزمون ریاضی مسأله‌ای به شرح زیر مطرح شد.

مطلوب است مشتق $f(x) = \text{Ln}(\text{Lnsinx})$.

در جریان تصحیح پاسخ نامه دانش آموزان شرکت کننده در آزمون مشخص شد که اکثریت

دانش آموزان مسأله را به صورت زیر حل کرده‌اند.

$$u(x) = \text{Ln}(\sin x) \Rightarrow f(x) = \text{Ln}(u(x))$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}, \quad u'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\text{Ln}(\sin x)} = \frac{\cos x}{\sin x \text{Ln}(\sin x)}$$

دسته‌ای دیگر از دانش‌آموزان که در اقلیت بودند راه حل گروه اول را انجام ندادند و به شیوه‌ای کاملاً متفاوت با این مسأله برخورد کرده بودند و پاسخی متفاوت به این مسأله داده بودند.

الف) راه حل گروه نخست دانش‌آموزان را تجزیه و تحلیل کنید.

ب) سعی کنید راه حل گروه دوم را حدس بزنید!

پ) مستقل از این راه حل‌ها و با تفکر و اندیشه خودتان این مسأله را بررسی و

حل کنید.

ت) چه نتایجی از بررسی و حل این مسأله می‌توان گرفت؟

مسائل

۱- در هر مورد $f'(x)$ را پیدا کنید.

ب) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^2}$

الف) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x}{x^2 + 1}}$

ت) $f(x) = \sin \sqrt[3]{x}$

پ) $f(x) = \sin(\cos x)$

ث) $f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$

۲- نقاطی از منحنی $y = \tan(2x)$ ، $(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4})$ ، را تعیین کنید که در آنها مماس بر منحنی

با خط $y = 4x$ موازی باشد.

۳- ثابت کنید:

الف) اگر تابع f زوج و مشتق‌پذیر باشد آنگاه تابع مشتقش فرد است.

ب) اگر تابع f فرد و مشتق‌پذیر باشد آنگاه تابع مشتقش زوج است.

۴- با فرض اینکه تابع f زوج و تابع g فرد و $f'(1) = 2$ و $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 3$ ، مقدار $(f+g)'(-1)$ را حساب کنید.

۵- با فرض این که تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در \mathbb{R} مشتق پذیر از مرتبه دوم باشد و به ازای هر عدد حقیقی x ، $g(x) = f(2-x^2)$ و $f'(2) = 2$ مقدار $g''(0)$ را حساب کنید.

۶- اگر f تابعی چندجمله‌ای از درجه n و تابع $f \circ f'$ از درجه 12 باشد مقدار $n^2 + 4n$ را حساب کنید.

۷- اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ، آنگاه مشتق تابع باضابطه $y = f(\cot x)$ را با شرط $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ حساب کنید.

۸- معادله خط مماس بر منحنی $y = \sin(x^\circ)$ در نقطه‌ای با طول $x = 45$ را به دست آورید.

(از رابطه $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ نتیجه می‌شود، x° مساوی $\frac{\pi}{180}x$ رادیان است)

۹- با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید، برای هر عدد صحیح مثبت n ، تساوی‌های زیر برقرارند:

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin(ax) = a^n \sin(ax + \frac{n\pi}{2}) \quad (\text{الف})$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos(ax) = a^n \cos(ax + \frac{n\pi}{2}) \quad (\text{ب})$$

۱۰- معادله خط مماس بر نمودار تابع وارون، تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ را در نقطه $(4, 2)$ به دست آورید.

۱۱- تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در \mathbb{R} وارون پذیر و مشتق پذیر است و $f'(x) = \sqrt{9+f^2(x)}$ ، مقدار $(f^{-1})'(4)$ را پیدا کنید.

۱۲- معادله خط مماس بر نمودار $x^2 + y^2 = 3xy$ در نقطه $A(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ را بیابید و نشان دهید خط قائم بر منحنی در نقطه A از مبدأ مختصات می‌گذرد.

۱۳- خط $y = ax + b$ نمودار $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ را در نقاط M و N قطع می‌کند. a و b را چنان حساب کنید که مماس در نقاط M و N خط عمود بر محور x باشد.

۱۴- در هر مورد $f'(x)$ را پیدا کنید.

$$f(x) = \ln|x^2 - 1| \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = e^{\tan x} \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = \ln|\cos x| \quad (\text{ت})$$

$$f(x) = \ln|\sin x| \quad (\text{ب})$$

۱۵- معادله خط مماس بر منحنی $y = \frac{\text{Ln}x}{x}$ را در نقطه $(1, 0)$ پیدا کنید.

۱۶- مشتق دوم تابع f با ضابطه $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ ، (به ازای هر عدد حقیقی x) را حساب کنید.

۱۷- در چه نقاطی نمودار $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ دارای مماس افقی است.

۱۸- مشتق تابع وارون، تابع f با ضابطه: $f(x) = 3x + \text{Ln}x$ را در $x=3$ به دست آورید.

۱۹- (مدلسازی یک بیماری همه گیر) تعداد (y) افرادی که به یک ویروس بسیار مسری مبتلا شده اند به وسیله منحنی تدارکاتی $y = \frac{L}{1 + Me^{-kt}}$ مدلسازی شده است که در آن t از لحظه بروز بیماری، برحسب ماه اندازه گیری می شود.

در ابتدا تعداد مبتلایان ۲۰۰ نفر بود و یک ماه بعد، این تعداد به ۱۰۰۰ نفر افزایش یافت. سرانجام تعداد مبتلایان در عدد ۱۰۰۰۰ ثابت ماند. پارامترهای L و M و K را تعیین کنید و مشخص کنید تعداد مبتلایان ۳ ماه بعد از بروز بیماری چند نفر هستند و آهنگ رشد در آن لحظه چقدر بوده است.

۱۲-۳- مقدارهای اکستریم سراسری و مسائل بهینه سازی

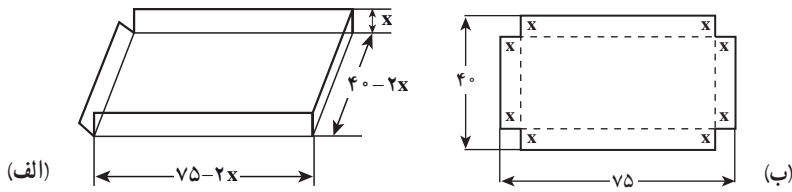
اغلب در زندگی وقتی با مسأله ای روبرو می شویم، تلاش می کنیم بهترین راه حل را برای آن مسأله پیدا کنیم.

برای مثال یک کشاورز می خواهد ترکیبی از محصولات انتخاب کند که تا حد امکان تولیدش بیشترین سود را داشته باشد. و یا یک پزشک علاقمند است که کمترین مقدار دارو را در طول درمان یک بیمار معین تجویز کند.

همچنین یک کارخانه دار مایل است هزینه توزیع کالاهايش را به حداقل برساند. گاهی اوقات یک مسأله از این نوع را می توان با نمادگذاری، رابطه ای (به شکل معادله) به عنوان ضابطه تابعی از یک متغیر بیان کرد تا با استفاده از روش های حسابان با ماکسیم کردن یا مینیم کردن مقدار تابع روی یک مجموعه خاص ابزار لازم برای حل این مسأله فراهم شود.

به عنوان نمونه با طرح مسأله ساختن یک جعبه در باز که در صنعت بسیار کاربرد دارد، شروع می کنیم.

❖ **مثال ۱:** می‌خواهیم یک جعبهٔ درباز از یک قطعه مقوای ۷۵×۴۰ سانتی‌متر بسازیم با این روش که مربع‌هایی با اندازه مساوی از چهار گوشهٔ این مقوا برش می‌زنیم و جدا می‌کنیم (شکل ۳-۲۲).



شکل ۳-۲۲

اکنون می‌خواهیم بدانیم طول ضلع این مربع‌ها چقدر باشد تا جعبه ساخته شده بیشترین حجم ممکن را داشته باشد.

برای مدل‌سازی این مسأله نماد x را برای طول ضلع مربع‌هایی که باید از چهار گوشه مقوا بریده شود انتخاب می‌کنیم (قسمت الف شکل بالا) و نماد V را برای حجم جعبه‌ای که می‌خواهیم بسازیم، در نظر می‌گیریم (قسمت ب شکل بالا).

به بیان دیگر

x : طول (برحسب سانتی‌متر) ضلع‌های مربع‌هایی که باید بریده شود.

V : حجم (برحسب سانتی‌متر مکعب) جعبه دربازی که ساخته می‌شود.

چون از هر گوشه مقوا، یک مربع به ضلع x از هر گوشه مقوا برش می‌دهیم، ابعاد جعبهٔ در باز مطلوب عبارتند از x و $(۴۰ - ۲x)$ و $(۷۵ - ۲x)$ ، (شکل ۳-۲۲)

بنابراین حجم این جعبه که به شکل مکعب مستطیل است به صورت زیر به دست می‌آید.

$$V = (۴۰ - ۲x)(۷۵ - ۲x) \times x = ۴x^3 - ۲۳۰x^2 + ۳۰۰۰x \quad (۱)$$

متغیر x در این معادله با محدودیت‌های معینی روبرو است، زیرا به دلیل اینکه x طول ضلع مربع است، نمی‌تواند منفی باشد. همچنین عرض مقوا ۴۰ سانتی‌متر است، پس x نمی‌تواند بیشتر از نصف آن باشد (چرا؟)

در نتیجه متغیر x از معادله (۱) باید در رابطه $۰ < x \leq ۲۰$ صدق کند (چرا؟)

بنابراین مسأله واقعی ما به یک مدل ریاضی تبدیل شد که در این مدل ریاضی باید مقادیری از x را در بازه $[۰, ۲۰]$ پیدا کنیم که مقدار V در معادله (۱) بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

می‌توان این مسأله‌ها را به پیدا کردن مقدارهای ماکسیمم یا مینیمم تابع‌ها تبدیل کرد. ابتدا توضیح می‌دهیم که منظورمان از مقدارهای ماکسیمم و مینیمم چیست؟

تعریف ۱: فرض کنیم D دامنه تابع f و نقطه c عضو دامنه باشد، می‌گوییم:

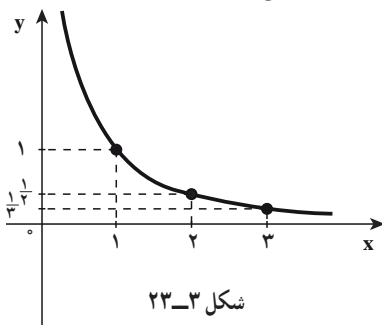
الف) مقدار ماکسیمم (ماکسیمم سراسری یا مطلق) تابع f روی D است، به شرطی که به ازای هر x عضو D داشته باشیم: $f(x) \leq f(c)$

ب) مقدار مینیمم (مینیمم سراسری یا مطلق) تابع f روی D است، به شرطی که به ازای هر x عضو D داشته باشیم: $f(c) \leq f(x)$

پ) مقدار اکسترمم مطلق تابع f روی D است که یا مقدار ماکسیمم مطلق و یا مقدار مینیمم مطلق تابع f روی D باشد.

در این بخش از کتاب (۳-۱۲)، مقدار ماکسیمم مطلق، مقدار مینیمم مطلق، مقدار اکسترمم مطلق

تابع را به اختصار مقدار ماکسیمم تابع، مقدار مینیمم تابع و مقدار اکسترمم تابع بیان می‌کنیم.

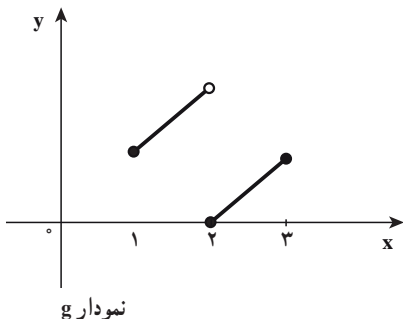


شکل ۳-۲۳

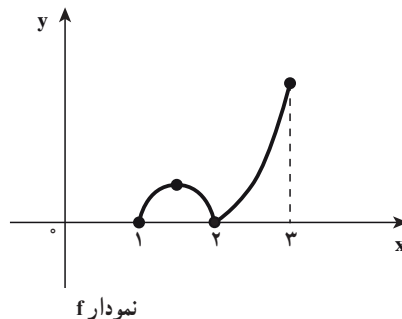
شکل ۳-۲۳ نمودار تابع f با دامنه $D = (0, +\infty)$ و ضابطه $f(x) = (\frac{1}{x})$ را نشان می‌دهد. تابع f در بازه $(0, +\infty)$ نه دارای مقدار ماکسیمم است و نه مقدار مینیمم زیرا بُرد تابع مجموعه $R = (0, +\infty)$ است و $f(x)$ می‌تواند از هر عدد مثبتی بزرگتر شود (با نزدیک کردن x مثبت به صفر) و $f(x)$ با مقادیر مثبت می‌تواند به صفر نزدیک شود (با انتخاب x های مثبت و بزرگ) از طرف دیگر تابع f در بازه $[1, 3]$ هم

دارای ماکسیمم و هم دارای مینیمم است، مقدار ماکسیمم تابع $f(1) = 1$ و مقدار مینیمم تابع $f(3) = \frac{1}{3}$ است و اما تابع f در بازه $(1, 3]$ ، مقدار مینیمم آن $f(3) = \frac{1}{3}$ و در این بازه مقدار ماکسیمم ندارد (چرا؟)

در شکل ۳-۲۴ نمودارهای توابع f و g را در نظر بگیرید.



نمودار g



نمودار f

الف) پیوستگی توابع f و g را در بازه $[۱, ۳]$ بررسی نمایید.
 ب) آیا توابع f و g در بازه $[۱, ۳]$ دارای مقدار ماکسیمم و مقدار مینیمم هستند و اگر جواب مثبت است آن مقادیر را مشخص کنید.

در مثال بالا دیدیم که تابع f با ضابطه $f(x) = (\frac{1}{x})$ در هر بازه بسته نظیر بازه $[۱, ۳]$ که پیوسته است دارای مقدار ماکسیمم و مقدار مینیمم است.

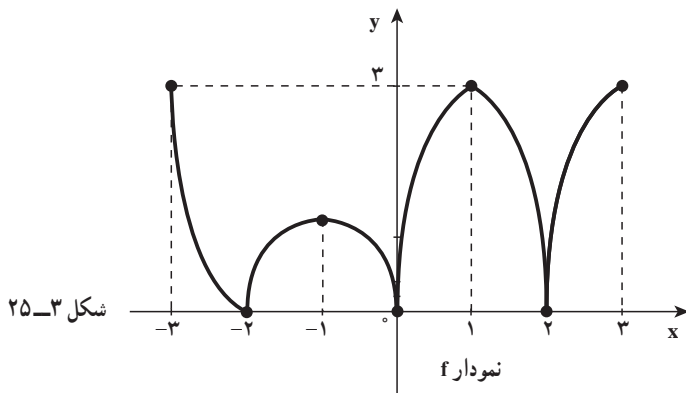
همچنین در این فعالیت تابع f در بازه بسته $[۱, ۳]$ پیوسته است. و تابع در این بازه دارای مقدار مینیمم و همچنین دارای مقدار ماکسیمم است. و اما تابع g در بازه $[۱, ۳]$ ناپیوسته است (چرا؟) و در این بازه مقدار ماکسیمم ندارد ولی مقدار مینیمم دارد.

دیدیم که برخی تابع‌ها مقدار اکسترمم دارند و برخی ندارند. اکنون می‌خواهیم به این سؤال پاسخ دهیم که تحت چه شرایطی می‌توانیم تضمین کنیم تابع هم دارای ماکسیمم و هم دارای مینیمم است. در قضیه زیر شرط‌هایی را آورده‌ایم که به اعتبار آنها تابع هم مقدار ماکسیمم و هم مقدار مینیمم دارد.

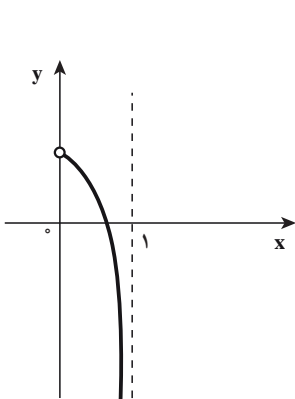
♦♦♦ **۱- قضیه ۱ (مقدار اکسترمم مطلق):** اگر تابع f در بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، آن وقت در این بازه هم مقدار ماکسیمم مطلق و هم مقدار مینیمم مطلق دارد.
 برای درک بهتر قضیه مقدار اکسترمم، شکل ۳-۲۵ را در نظر بگیرید و به پرسش‌های زیر جواب دهید.

الف) تابع پیوسته f در بازه بسته $[-۳, ۳]$ در چه نقاطی مینیمم دارد؟ در صورت مثبت بودن جواب، مقدار مینیمم تابع را به دست آورید.

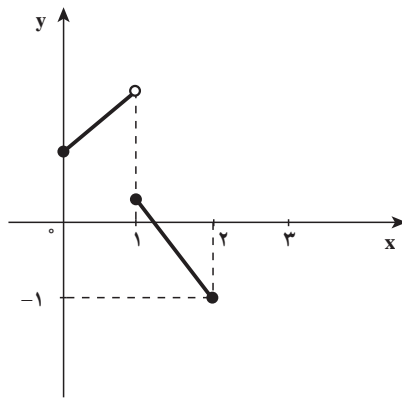
ب) تابع پیوسته f در بازه بسته $[-۳, ۳]$ در چه نقاطی ماکسیمم دارد؟ در صورت مثبت بودن جواب، مقدار ماکسیمم تابع را به دست آورید.



❖ **پرسش:** آیا شرایط قضیه مقدار اکسترمم در نمودارهای شکل ۳-۲۶ برقرار است (چرا؟)



(ب) این تابع در دامنه‌اش که بازه باز $(0, 1)$ است پیوسته است و نه ماکسیمم دارد و نه مینیمم



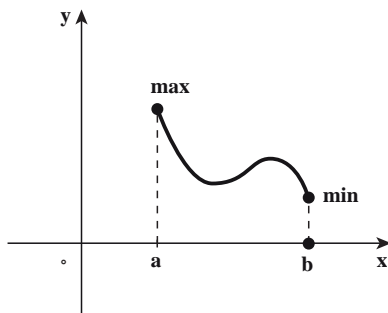
(الف) این تابع در دامنه‌اش که بازه بسته $[0, 2]$ است پیوسته نیست و مقدار ماکسیمم ندارد ولی مقدار مینیمم دارد که برابر $f(2) = -1$

شکل ۳-۲۶

❖ **پرسش:** می‌خواهیم بدانیم در چه نقاطی مقادیر اکسترمم رخ می‌دهند؟ معمولاً مقادیر اکسترمم یک تابع را در بازه‌ای مانند I از دامنه آن جستجو می‌کنیم البته ممکن است بازه I شامل نقاط انتهایی خود باشد و نباشد.

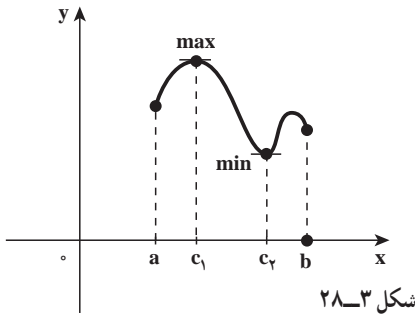
برای نمونه بازه $I = [a, b]$ شامل هر دو نقطه انتهایی خود است. و بازه $I = [a, b)$ فقط شامل نقطه انتهایی چپ خود می‌باشد و بازه $I = (a, b]$ شامل نقطه انتهایی خود نیست. در سه حالت زیر مقادیر اکسترمم تابع را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: وقتی که مقادیر اکسترمم را در نقاط انتهایی بازه داشته باشیم. (شکل ۳-۲۷)

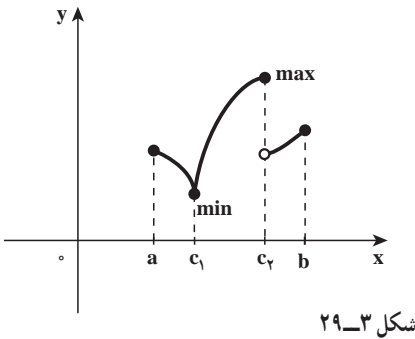


شکل ۳-۲۷

حالت دوم: وقتی که مقادیر اکسترمم را در نقاط درون بازه داشته باشیم و در آن نقاط مقدار مشتق صفر است. (شکل ۳-۲۸)



حالت سوم: وقتی که مقادیر اکسترمم را در نقاط درون بازه داشته باشیم و در آن نقاط تابع مشتق پذیر نباشد. (شکل ۳-۲۹) که تابع در نقطه c_1 بازگشتی است و در نقطه c_2 پرشی و ناپیوسته است.



در سه حالت بالا نقاطی را مطرح کردیم که نقاط کلیدی قضیه مقدار اکسترمم هستند. نقطه‌ای از دامنه f در هر یک از حالت‌های دوم و سوم بالا که تابع مقدار اکسترمم داشت «نقطه بحرانی» تابع f می‌نامیم.

تعریف ۲: نقطه درونی $c \in D_f$ را نقطه بحرانی تابع f می‌نامیم، هرگاه $f'(c) = 0$ و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

❖ **مثال:** نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ را در بازه $[-\frac{1}{3}, 2]$ بیابید.

حل: تابع f به ازای هر x از بازه باز $(-\frac{1}{3}, 2)$ مشتق پذیر است و $f'(x) = -6x^2 + 6x$ که به ازای

$x=0$ و $x=1$ داریم $f'(0) = 0$ و $f'(1) = 0$ و در بازه $(-\frac{1}{3}, 2)$ نقطه‌ای وجود ندارد که تابع f مشتق نداشته باشد. بنابراین تابع f در نقاط ۰ و ۱ بحرانی است.

نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ را در دامنه‌اش بیابید.

❖ ۲- قضیه نقطه بحرانی: فرض کنیم تابع f روی بازه I تعریف شده و c نقطه درونی بازه I است، اگر $f(c)$ مقدار اکسترمم تابع، آنگاه باید c نقطه بحرانی باشد یعنی c یکی از موارد زیر باشد:

الف) c یک نقطه درونی بازه I ، به طوری که $f'(c) = 0$

ب) c یک نقطه درونی بازه I و $f'(c)$ موجود نباشد.

❖ برهان: ابتدا فرض کنیم $f(c)$ مقدار ماکسیمم f روی بازه I و c نقطه درونی بازه I و $f'(c)$ موجود باشد.

ثابت می‌کنیم $f'(c) = 0$ است

چون $f(c)$ مقدار ماکسیمم f است. پس برای هر x در I ، $f(x) \leq f(c)$ و یا $f(x) - f(c) \leq 0$

اگر $x < c$ یا $x - c < 0$ آن وقت

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

و اگر $x > c$ آن وقت

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

و اما $f'(c)$ موجود است بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'_-(c) = f'(c) \geq 0 \quad (1)$$

(چرا؟)

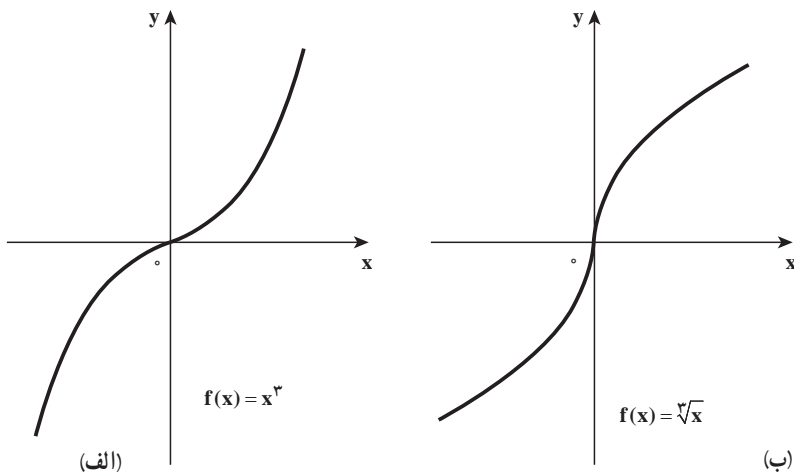
$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'_+(c) = f'(c) \leq 0 \quad (2)$$

(چرا؟)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $f'(c) = 0$

در حالتی که $f(c)$ مقدار مینیمم تابع است، قضیه را ثابت کنید.

البته باید توجه داشت که هر نقطه بحرانی لزوماً نقطه اکسترم نیست.
 به عنوان نمونه برای تابع f با ضابطه $f(x)=x^3$ داریم $f'(0)=0$ پس $x=0$ نقطه بحرانی تابع f است
 و این تابع نه مقدار ماکسیمم و نه مقدار مینیمم دارد (شکل ۳-۳ قسمت الف)
 همچنین نقطه $x=0$ نقطه بحرانی تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt[3]{x}$ است زیرا $f'(0)$ موجود نیست.
 (شکل ۳-۳ قسمت ب)



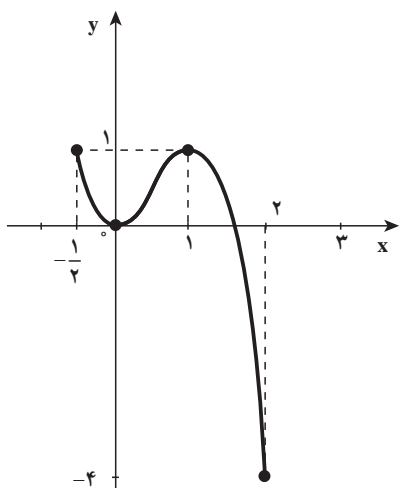
شکل ۳-۳

❖ **مسئله:** چگونه می‌توانیم مقادیر اکسترم تابع را پیدا کنیم.
 با استفاده از قضایای ۱ و ۲ می‌توانیم مقادیر اکسترم تابع f را که روی بازه بسته I پیوسته است
 به شرح زیر پیدا کنیم.

گام اول: پیدا کردن نقاط بحرانی f روی بازه بسته I
گام دوم: محاسبه مقدار f در هر یک از نقاط بحرانی و نقاط انتهایی در بازه بسته I و از بین
 مقادیر به دست آمده، بزرگ‌ترین آنها مقدار ماکسیمم و کوچک‌ترین آنها مقدار مینیمم تابع f روی بازه
 بسته I می‌باشد.

❖ **مثال:** مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع f با ضابطه $f(x)=-2x^3+3x^2$ را روی بازه $[-\frac{1}{3}, 2]$
 بیابید.

حل: در مثال (۲) نقاط بحرانی این تابع را که عبارت‌اند از 0 و 1 به دست آوریم، و به ازای
 این اعداد داریم:



شکل ۳-۳۱

$$f(0)=0 \text{ و } f(1)=1$$

مقادیر تابع در نقاط انتهایی عبارتند از:

$$f(-\frac{1}{4})=1 \text{ و } f(2)=-4$$

بنابراین مقدار ماکسیمم تابع برابر ۱ می‌باشد که

در نقاط $x = -\frac{1}{4}$ و $x = 1$ رخ می‌دهد و -۴ مقدار

مینیمم تابع است که در نقطه ۲ اتفاق می‌افتد.

در شکل ۳-۳۱ نمودار تابع f روی بازه

$[-\frac{1}{4}, 2]$ رسم شده است.

تمرین در کلاس

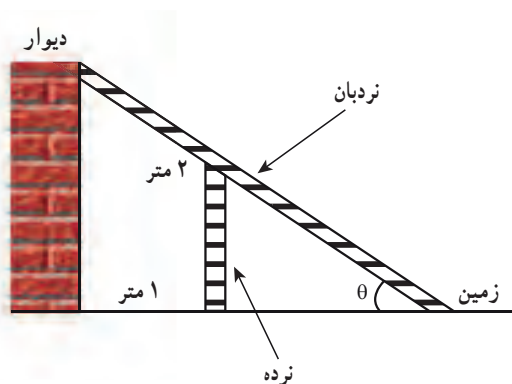
در مثال ۱، مقدار x را چنان حساب کنید که مقدار حجم (V) بیشترین مقدار ممکن را

داشته باشد.

قابل ذکر است که یکی از مهم‌ترین کاربردهای مشتق در مسائل «بهینه‌سازی» است که در آنها

کمیتی باید ماکسیمم یا مینیمم گردد (مانند مثال ۱ همراه با فعالیت)، مثال‌هایی از این نوع در زندگی

روزمره فراوان است.



شکل ۳-۳۱

❖ **مثال:** در شکل ۳-۳۱ یک نرده

به ارتفاع ۲ متر و به‌طور قائم بر زمین، به

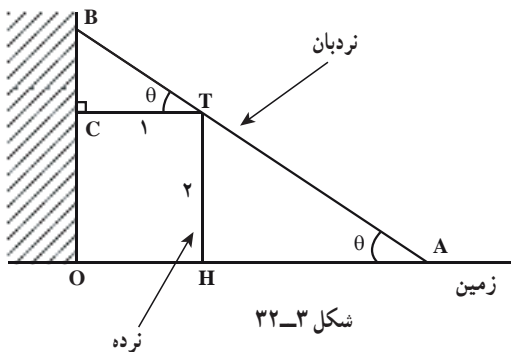
فاصله ۱ متر از یک دیوار قائم قرار دارد.

طول کوتاه‌ترین نردبانی را تعیین کنید که از

روی نرده به ارتفاع ۲ متر گذشته و یک سر

آن روی زمین و خارج نرده و سر دیگر آن

مماس بر دیوار قائم باشد.



شکل ۳-۳۲

حل: اندازه زاویه AB (نردبان) با زمین را θ فرض می‌کنیم و طول نردبان (L) را به صورت تابعی از θ به دست می‌آوریم (شکل ۳-۳۲).
 $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

$$AB = BT + TA$$

در مثلث‌های قائم‌الزاویه $\triangle TCB$ و $\triangle AHT$ داریم:

$$\sin \theta = \frac{2}{AT} \text{ و } \cos \theta = \frac{1}{BT}$$

بنابراین

$$L = L(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{2}{\sin \theta}$$

$$L'(\theta) = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^3 \theta - 2 \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$$

$$L'(\theta) = 0 \Rightarrow \sin^3 \theta - 2 \cos^3 \theta = 0 \Rightarrow \tan^3 \theta = 2 \text{ یا } \tan \theta = \sqrt[3]{2}$$

و یا $\theta_0 = \tan^{-1}(\sqrt[3]{2})$ که نقطه بحرانی تابع L است.

θ	0	$\tan^{-1}(\sqrt[3]{2})$	$\frac{\pi}{2}$
$L'(\theta)$		-	+
$L(\theta)$	$+\infty$	$L(\theta_0)$ Min	$+\infty$

در نتیجه به ازای $\theta_0 = \tan^{-1}(\sqrt[3]{2})$ مقدار مینیمم $L(\theta)$ به دست می‌آید. و اگر بخواهیم طول کوتاه‌ترین نردبان را حساب کنیم، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + \sqrt[3]{4}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{4}}}$$

$$\sin \theta = \tan \theta \cdot \cos \theta = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{4}}}$$

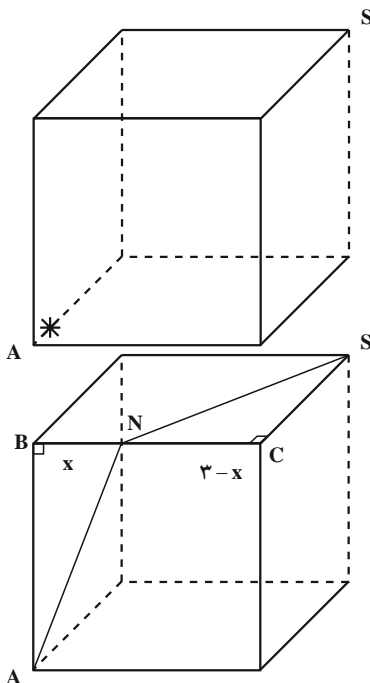
در نتیجه، مقدار مینیمم مطلق $L(\theta)$ روی بازه $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ عبارت است از

$$L(\theta_0) = \sqrt{1+\sqrt[3]{4}} + \frac{2\sqrt{1+\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2}} \approx 4/16$$

بنابراین طول کوتاه‌ترین نردبانی که بتوان یک سر آن را از بالای نرده به دیوار تکیه داد و سر دیگرش بر زمین و خارج نرده باشد، تقریباً $4/16$ متر است.

تمرین در کلاس

شان دهید که در بین همه مثلث‌های متساوی‌الساقینی که محیط یکسانی دارند، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای بیشترین مساحت است.



شکل ۳-۳۳

مثال: (مسئله کوتاه‌ترین مسیر عنکبوت) مطابق شکل ۳-۳۳ یک عنکبوت در گوشه S از سقف اتاق مکعب شکل که هر ضلع آن ۳ متر است قرار دارد و می‌خواهد یک سوسک که در گوشه مقابل او (A) روی کف اتاق خوابیده است را شکار کند. عنکبوت مجبور است روی سقف اتاق حرکت کند (نمی‌تواند پرواز کند) و سپس روی دیوارها یا کف اتاق راه برود، او می‌خواهد کوتاه‌ترین مسیر برای شکار سوسک را پیدا کند. او را راهنمایی کنید. فراموش نکنید که معمولاً موجودات به‌طور غریزی کوتاه‌ترین مسیر را انتخاب می‌کنند.

حل: به کمک مشتق و تعیین کمترین مسیر فرض کنیم مسیر عنکبوت از S به N و از N به A باشد

$$d = SN + NA$$

اگر $BN=x$ فرض کنیم، آنگاه $NC=3-x$ بنابراین

$$d(x) = \sqrt{(3-x)^2 + 9} + \sqrt{x^2 + 9}$$
 تابع طول مسیر

$$d'(x) = \frac{-2(3-x)}{2\sqrt{9+(3-x)^2}} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = \frac{-(3-x)\sqrt{9+x^2} + x\sqrt{9+(3-x)^2}}{\sqrt{9+(3-x)^2} \times \sqrt{x^2+9}}$$

$$d'(x) = 0 \Rightarrow x\sqrt{9+(3-x)^2} = (3-x)\sqrt{9+x^2}$$

طرفین معادله را به توان ۲ رسانده و پس از ساده کردن و حذف جمله‌های مساوی از طرفین معادله داریم:

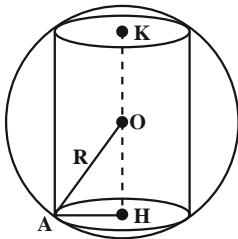
$$2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \quad (\text{بازه } (0, 3))$$

x	0	$\frac{3}{2}$	3
d'(x)	-	0	+
d(x)	$3(1+\sqrt{2})$	$3\sqrt{5}$	$3(1+\sqrt{2})$

بنابراین کوتاه‌ترین مسیر وقتی است که N وسط ضلع BC باشد. مقدار مینیمم طول مسیر $3\sqrt{5}$ است.

قابل ذکر است که این مسأله با یک راه حل کوتاه و ساده هندسی حل می‌شود. حل مسأله را از راه هندسی انجام دهید.

❖ **مثال:** می‌خواهیم در کره‌ای به شعاع R یک استوانه دوار قائم محاط کنیم که بزرگ‌ترین حجم را داشته باشد، در این صورت شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را بیابید.



شکل ۳-۳۴

🚀 **حل:** فرض کنیم استوانه مورد نظر دارای شعاع r و ارتفاع h می‌باشد و $AH=r$ و $KH=h$ و به علت تقارن مرکز کره نقطه O وسط KH است (شکل ۳-۳۴). بنابراین

$$\triangle OHA: \frac{h^2}{4} + r^2 = R^2$$

و حجم استوانه برابر است با:

$$V = \pi r^2 h = \pi h \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right), \quad 0 \leq h \leq 2R$$

واضح است که اگر $h=0$ یا $h=2R$ باشد، $V=0$ ، بنابراین نقاط بحرانی تابع حجم استوانه را بر حسب متغیر h در بازه $(0, 2R)$ پیدا می‌کنیم.

$$V'(h) = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{2}) = 0 \Rightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

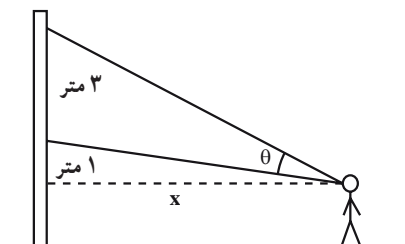
نقطه بحرانی

h	0	$\frac{2R}{\sqrt{3}}$	$2R$
$V'(h)$	$+$	0	$-$
$V(h)$	0	$\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$	0

بنابراین تابع حجم استوانه در بازه $[0, 2R]$ به ازای $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ و $r = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$ مقدار ماکسیمم حجم آن $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ است.

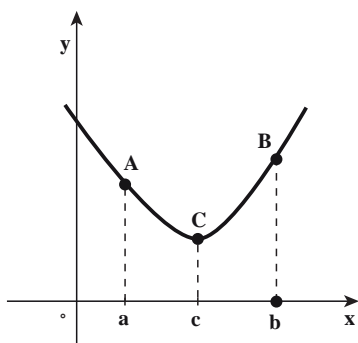
مسائل بهینه‌سازی

- ۱- مجموع دو عدد مثبت برابر ۹ است. بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای حاصل ضرب آنها را پیدا کنید.
- ۲- حاصل ضرب دو عدد مثبت برابر ۸ است. کمترین مقدار ممکن برای مجموع آنها را پیدا کنید.
- ۳- مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی را بیابید که در نیم دایره‌ای به شعاع R محاط شده است و یک ضلع مستطیل روی قطر نیم دایره قرار دارد.



- ۴- (بهترین دید از یک نقاشی دیواری) شخصی باید در چه فاصله‌ای از یک نقاشی دیواری به ارتفاع ۳ متر بایستد تا بهترین دید را از آن داشته باشد (شکل روبه‌رو)، با این فرض که پایین نقاشی ۱ متر بالاتر از خط دید شخص است.

- ۵- قرار است محوطه‌ای مستطیل شکل برای نگهداری گوسفندها ساخته شود، یک طرف این محوطه دیوار طولی است که از قبل وجود داشته است و سه طرف دیگر آن را باید زرده گذاری کنیم. اگر 15° متر زرده در اختیار داشته باشیم، بیشترین مساحت ممکن برای محوطه مورد نظر چقدر است؟



شکل ۳-۳۵

تابع‌های صعودی اکید و نزولی اکید: با مشاهده نمودار تابع f در شکل ۳-۳۵ وقتی نقطه‌ای در امتداد منحنی از A به C برود مقادیر تابع با افزایش طول کاهش می‌یابند، و وقتی نقطه در امتداد منحنی از C به B برود، مقادیر تابع با افزایش طول افزایش می‌یابند در این صورت گوئیم f بر بازه $[a, c]$ نزولی اکید و بر بازه $[c, b]$ صعودی اکید است.

ذیلاً تعاریف تابع‌های صعودی اکید و نزولی اکید و تابع ثابت بر یک بازه را بیان می‌کنیم.

تعریف ۳:

(الف) تابع f روی بازه I صعودی اکید است، اگر برای هر دو عدد x_1 و x_2 در I ,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

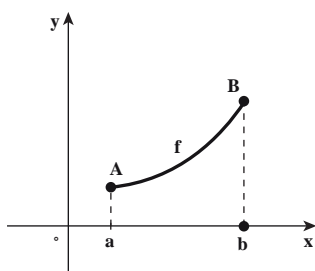
(ب) تابع f روی بازه I نزولی اکید است، اگر برای هر دو عدد x_1 و x_2 در I ,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

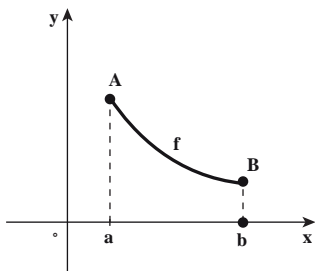
(پ) تابع f روی بازه I ثابت است، اگر برای هر دو عدد x_1 و x_2 در I ,

$$f(x_1) = f(x_2)$$

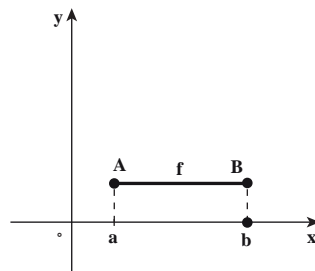
برای یادگیری بهتر تعریف بالا نمودارهای شکل ۳-۳۶ را ببینید. $I=[a,b]$



f صعودی اکید است



f نزولی اکید است

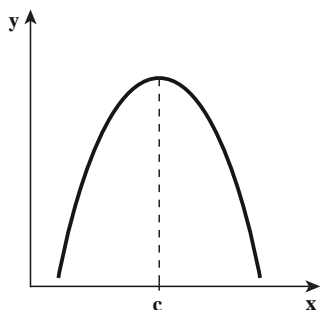


f ثابت است

شکل ۳-۳۶

با توجه به تعریف بالا، تابع f روی بازه I اکیداً یکنواست، اگر روی بازه I یا صعودی اکید و

یا نزولی اکید باشد.



شکل ۳-۳۷

نمودار تابع f در شکل ۳-۳۷ را در نظر بگیرید.
 الف) با رسم مماس‌هایی در نقاط مختلف نمودار f تعیین کنید در چه بازه‌ای شیب مماس‌ها مثبت و در چه بازه‌ای شیب مماس‌ها منفی است.
 ب) تعیین کنید در چه بازه‌ای مشتق f مثبت است و در چه بازه‌ای مشتق f منفی است.

پ) از اینکه $f'(x)$ ، میزان تغییر مقادیر $f(x)$ نسبت به x است، با در نظر گرفتن علامت $f'(x)$ ، معلوم کنید تابع f در چه بازه‌ای صعودی اکید است و در چه بازه‌ای نزولی اکید است.

نتایج به دست آمده در فعالیت بالا به ما کمک می‌کند که قضیه زیر را بیان کنیم.

❖ **۳- قضیه ۳:** فرض کنیم تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته و بر بازه باز (a, b) مشتق پذیر باشد. در

این صورت

الف) اگر به ازای هر x در (a, b) ، $f'(x) > 0$ ، آنگاه تابع f بر $[a, b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در بازه (a, b) ، $f'(x) < 0$ ، آنگاه تابع f ، بر بازه $[a, b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر x در بازه (a, b) ، $f'(x) = 0$ ، آنگاه تابع f بر بازه $[a, b]$ ثابت است.

این قضیه به ما اجازه می‌دهد که بررسی کنیم، یک تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید و در چه بازه‌ای ثابت است.

❖ **مثال:** مشخص کنید تابع f با ضابطه $f(x) = 2x^2 - 3x^2 - 12x + 7$ در کجاها صعودی اکید و در

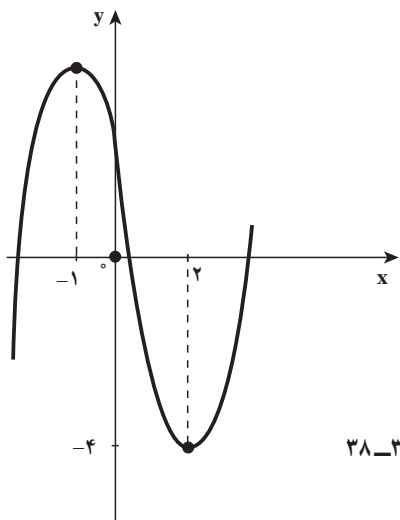
کجاها نزولی اکید است.

🚀 **حل:** ابتدا مشتق تابع را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

عبارت $f'(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0



شکل ۳-۳۸

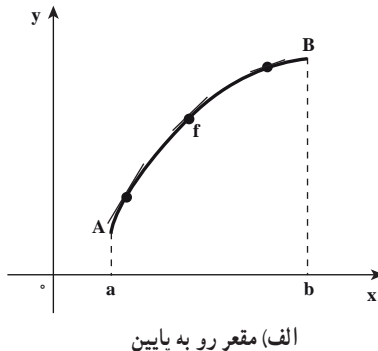
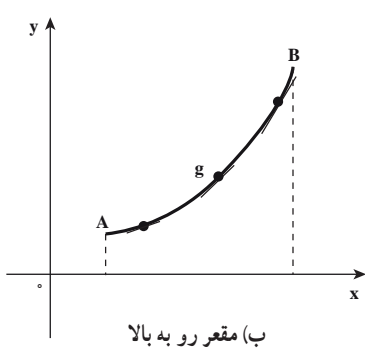
طبق قضیه فوق تابع f در بازه $(-1, 2)$ نزولی اکید و در هر یک از بازه‌های $(-\infty, -1)$ و $(2, +\infty)$ صعودی اکید است و نمودار f به شکل ۳-۳۸ است:
در نقاط -1 و 2 که مشتق تابع صفر است خط مماس افقی است.



تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ در چه بازه‌ای صعودی اکید و در چه بازه‌ای نزولی اکید است؟

۳-۱۳- مشتق دوم و تقعر نمودار تابع

در شکل ۳-۳۹ نمودار دو تابع صعودی اکید روی بازه I رسم شده‌اند. هر دوی این نمودارها دو نقطه A و B را بهم وصل می‌کنند. اما متفاوت به نظر می‌رسند زیرا نمودار f پایین خط‌های مماسی است که در نقاط مختلف f رسم شده‌اند و منحنی f را روی بازه I مقعر رو به پایین می‌نامیم. و اما نمودار g بالای خط‌های مماسی است که در نقاط مختلف g رسم شده‌اند و منحنی g را روی بازه I مقعر رو به بالا می‌نامیم.



شکل ۳-۳۹

تعریف ۴:

الف) اگر نمودار f روی بازه I بالای همه مماس‌هایش باشد آنگاه نمودار f را **مقعر** رو به بالا می‌نامیم.

ب) اگر نمودار f روی بازه I پایین همه مماس‌هایش باشد، آنگاه نمودار f را **مقعر** رو به پایین می‌نامیم.

اکنون ببینیم مشتق دوم چه کمکی به مشخص کردن تقعر نمودار در یک بازه می‌کند.

با مشاهده شکل (۳-۳۹) به موارد زیر پاسخ دهید.

الف) در قسمت الف) (شکل ۳-۳۹) با حرکت از چپ به راست شیب مماس‌ها کم می‌شوند یا زیاد و در نتیجه تابع f' (تابع مشتق) تابعی است نزولی اکید یا صعودی اکید.

ب) در قسمت ب) (شکل ۳-۳۹) با حرکت از چپ به راست شیب مماس‌ها کم می‌شوند یا زیاد و در نتیجه تابع g' تابعی است نزولی اکید یا صعودی اکید.

پ) علامت $f''(x)$ و $g''(x)$ را در بازه (a,b) تعیین کنید. نتایج به دست آمده در فعالیت بالا به ما کمک می‌کند که قضیه زیر را بیان کنیم.

❖ ۴- قضیه تقعر: فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر x از بازه I موجود باشد

الف) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) > 0$ آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد.

ب) اگر به ازای هر x از I ، $f''(x) < 0$ آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پایین دارد.

❖ مثال: تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ روی چه بازه‌هایی صعودی اکید یا

نزولی اکید است و روی چه بازه‌هایی نمودار f تقعر رو به بالا دارد یا مقعر رو به پایین است.

حل: 

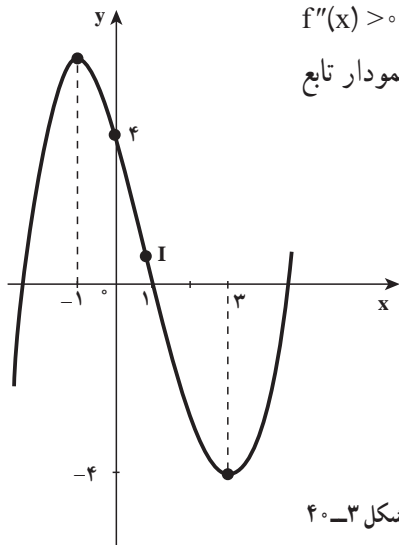
$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$$f''(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$$

با تعیین علامت عبارت $(x+1)(x-3)$ معلوم می‌شود تابع f روی بازه $[-1, 3]$ نزولی اکید و روی

هر یک از بازه‌های $[-1, -\infty)$ و $(3, +\infty)$ صعودی اکید است. و روی بازه $(-\infty, 1)$ ، $f''(x) < 0$ و تقعر

منحنی رو به پایین است و روی بازه $(1, +\infty)$ ، $f''(x) > 0$ و تقعر منحنی رو به بالا است. شکل ۳-۴ نمودار تابع f است.



تمرین در کلاس

تابع f با ضابطه $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ روی چه بازه‌هایی صعودی اکید یا نزولی اکید و روی چه بازه‌هایی تقعر رو به بالا دارد یا مقعر رو به پایین است.

در مثال (۹) جهت تقعر نمودار f در نقطه $I(1, \frac{1}{3})$ تغییر می‌کند، به طوری که روی بازه $(-\infty, 1)$ تقعر نمودار رو به پایین است و روی بازه $(1, +\infty)$ تقعر رو به بالا است و خط مماس در نقطه I به معادله

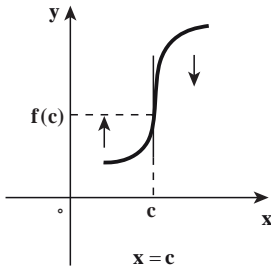
$$y = -4x + \frac{13}{3}$$

می‌باشد چنین نقطه‌ای را نقطه عطف نمودار تابع می‌نامیم.

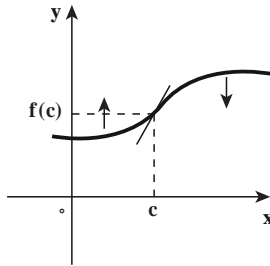
تعریف ۵: فرض کنیم تابع f در $x=c$ پیوسته باشد در این صورت نقطه $(c, f(c))$ نقطه عطف نمودار تابع f است (یا تابع f در c نقطه عطف دارد) هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

(الف) نمودار f در نقطه $(c, f(c))$ خط مماس داشته باشد.

(ب) تقعر f در نقطه $(c, f(c))$ از رو به بالا به رو به پایین (یا به عکس) تغییر نماید.



ب) $x=c$ مماس قائم



الف) $m=f'(c)$ شیب خط مماس

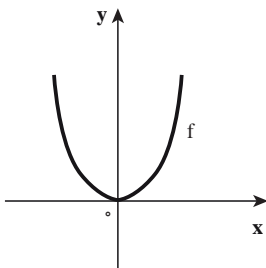
شکل ۳-۴۱

توجه داشته باشید که از شرط (الف) نتیجه می‌شود که یا f در c مشتق پذیر است یا نمودار آن در این نقطه خط مماس قائم دارد (شکل ۳-۴۱)

از شرط (ب) نتیجه می‌شود که خط مماس بر نمودار تابع در c از نمودار عبور می‌کند. (شکل

۳-۴۱)

چون نقطه عطف جایی است که تغير نمودار تغییر می‌کند، باید علامت $f''(x)$ در این نقاط تغییر نماید. بنابراین در نقاط عطف تابع یا $f''(c) = 0$ (شکل ۳-۴۱ قسمت الف) و یا $f''(c)$ تعریف نشده است (قسمت ب شکل ۳-۴۱)



شکل ۳-۴۲

اما شرط $f''(c) = 0$ وجود نقطه عطف برای نمودار تابع f در c را نتیجه نمی‌دهد. به عنوان مثال در تابع f با ضابطه $f(x) = x^3$ داریم $f''(x) = 12x^2$ و $f''(0) = 0$ ولی $f''(x)$ در 0 تغییر علامت نمی‌دهد و در دامنه‌اش تغير آن رو به بالا است پس $(0,0)$ نقطه عطف f نیست. (شکل ۳-۴۲)

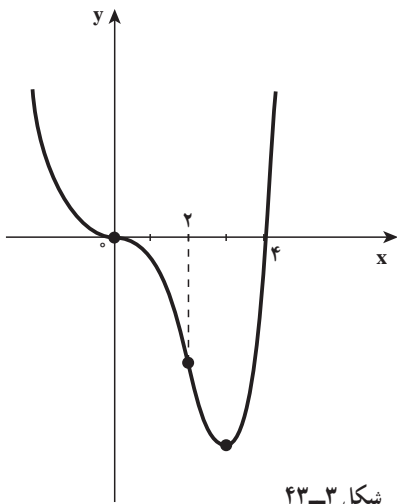
❖ **مثال:** جهت تغير نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 - 4x^2$ را در دامنه‌اش بررسی نموده و نقاط عطف آن را به دست آورید.

حل: 

$$f'(x) = 3x^2 - 8x$$

$$f''(x) = 6x - 8 = 2(3x - 4)$$

x	$-\infty$	0	4/3	$+\infty$
علامت $f''(x)$	+	0	-	+
جهت تغير f	روبه بالا		روبه پایین	روبه بالا



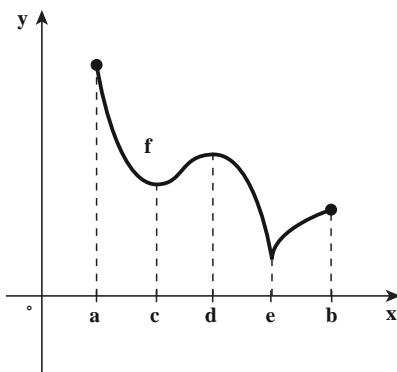
شکل ۳-۴۳

در نقطه $(0,0)$ شیب خط مماس بر منحنی f $m=f'(0)=0$ و در نقطه $(2,-16)$ شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه 2 $m=f'(2)=-16$ است.

چون در نقاط $(0,0)$ و $(2,-16)$ خط مماس وجود دارد و در این نقاط جهت تقعر منحنی عوض می‌شود، لذا $(0,0)$ و $(2,-16)$ نقاط عطف f هستند. نمودار f به شکل ۳-۴۳ است.

تمرین در کلاس

جهت تقعر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x}$ را در دامنه‌اش بررسی نموده و نقطه عطف آن را به دست آورید.



شکل ۳-۴۴

۳-۴-۱- ماکسیمم و مینیمم موضعی (نسبی)

می‌دانید که مقدار ماکسیمم تابع (در صورت وجود) روی مجموعه $D=[a,b]$ به عنوان دامنه، بزرگ‌ترین مقدار تابع روی مجموعه D است که آن را مقدار ماکسیمم (و یا مقدار ماکسیمم سراسری یا مطلق) می‌نامیم.

در شکل ۳-۴۴، مقدار ماکسیمم مطلق f روی بازه $[a,b]$ است.

با توجه به مطالب بالا در مورد $f(d)$ چه می‌توان گفت؟

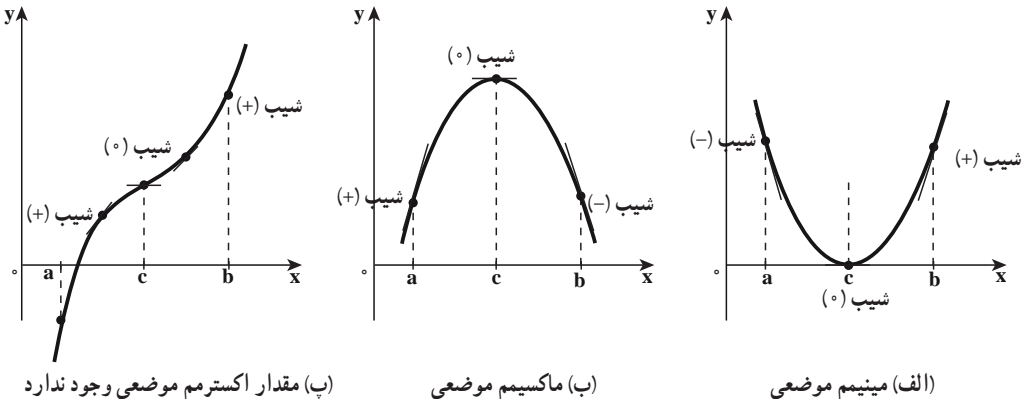
اگر $f(a)$ را به عنوان قهرمان دوی 100 متر در سراسر کشور ایران تصور کنیم، $f(d)$ را می‌توان قهرمان دو 100 متر در یک منطقه از کشور تصور کرد و به زبان ریاضی $f(d)$ مقدار ماکسیمم موضعی (نسبی) تابع f در یک همسایگی به مرکز d نامیده می‌شود.

به طریق مشابه $f(e)$ مقدار مینیمم سراسری مجموعه D است و آن را مقدار مینیمم مطلق f روی مجموعه D نیز می‌گویند. و $f(c)$ مقدار مینیمم موضعی (نسبی) تابع f در یک همسایگی به مرکز c است بدیهی است که $f(e)$ نیز مقدار مینیمم موضعی (نسبی) تابع f در یک همسایگی به مرکز e می‌باشد.

تعریف ۶: فرض کنیم D دامنه تابع f که شامل نقطه c است، می‌گوییم:

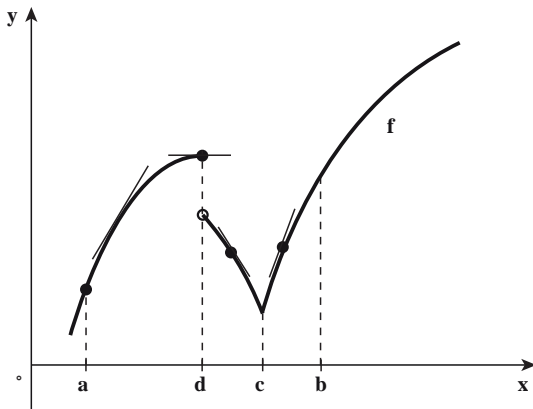
- (الف) $f(c)$ یک مقدار ماکسیمم موضعی تابع f است، هرگاه عددی مانند $r > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x متعلق به دامنه f و $|x-c| < r$ ، $f(x) \leq f(c)$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x متعلق به دامنه f است، هرگاه عددی مانند $r > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x متعلق به دامنه f و $|x-c| < r$ ، $f(x) \geq f(c)$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x متعلق به دامنه f است که یا مقدار ماکسیمم موضعی و یا مقدار مینیمم موضعی تابع f باشد.

در شکل ۳-۴ مشاهده می‌شود که تابع f در نقاط a و d و b دارای ماکسیمم موضعی و در نقاط c و e دارای مینیمم موضعی است و از بین نقاط بحرانی درون بازه، نقاط اکسترم موضعی به دست می‌آیند ولی ادعا نمی‌کنیم که هر نقطه بحرانی، یک اکسترم موضعی است. شکل ۳-۴ قسمت (پ) این را روشن می‌کند.



شکل ۳-۴

از شکل ۳-۴ معلوم است که در قسمت (الف) روی بازه (a,c) مشتق منفی است و روی بازه



(c,b) مشتق مثبت است و در نقطه c مینیمم موضعی داریم و در قسمت (ب) که روی بازه (a,c) مشتق مثبت و روی بازه (c,b) مشتق منفی است در نقطه c ماکسیمم موضعی داریم و البته در نقاط اکسترمم موضعی شکل ۳-۴۵، $f'(c)=0$ است و اما قابل ذکر است که لزومی ندارد در نقاط اکسترمم موضعی تابع مشتق داشته باشد (شکل ۳-۴۶ را ببینید).

شکل ۳-۴۶- تابع در $x=c$ مشتق ندارد و در این نقطه مینیمم موضعی دارد.

در این شکل، روی بازه (c,b) مشتق مثبت و روی بازه (d,c) مشتق منفی است و $f'(c)$ موجود نیست (تابع در نقطه c بازگشتی است) و $f(c)$ مقدار مینیمم موضعی است. روی بازه (d,c) مشتق تابع منفی و روی بازه (a,d) مشتق مثبت است و $f(d)$ مقدار ماکسیمم موضعی است ضمن اینکه تابع در نقطه d ناپیوسته و در نتیجه مشتق ندارد. این تجربیات مبنای آزمون زیر است.

آزمون مشتق اول

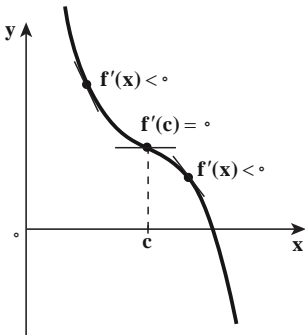
فرض کنیم c نقطه بحرانی تابع f باشد که بر بازه باز $I=(a,b)$ شامل c پیوسته است. هرگاه بر این بازه، جز احتمالاً در نقطه c، مشتق پذیر باشد، در این صورت:

(الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه (a,c)، $f'(x) > 0$ ، و به ازای تمام مقادیر x در بازه (c,b)، $f'(x) < 0$ ، آنگاه $f(c)$ یک مقدار ماکسیمم موضعی f است.

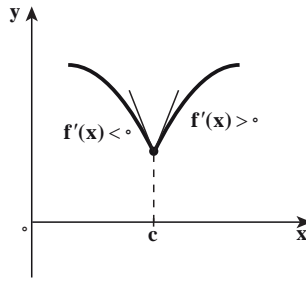
(ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه (a,c)، $f'(x) < 0$ ، و به ازای تمام مقادیر x در بازه (c,b)، $f'(x) > 0$ ، آنگاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم موضعی f است.

(پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد آنگاه $f(c)$ ، نه مقدار مینیمم موضعی است و نه مقدار ماکسیمم موضعی است.

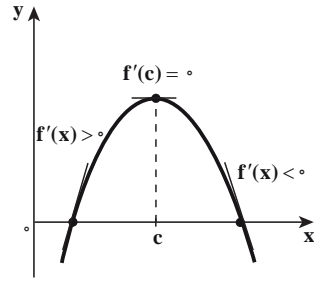
با تجسم کردن نمودارهای شکل های صفحه بعد و شکل ۳-۴۷ به سادگی می توان آزمون مشتق اول را به خاطر سپرد.



اکسترمم موضعی ندارد



$f(c)$ مقدار مینیمم موضعی $f'(c)$ موجود نیست



$f(c)$ مقدار ماکسیمم موضعی

شکل ۳-۴۷

❖ مثال: مقادیر اکسترمم موضعی تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x}$ را روی بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$

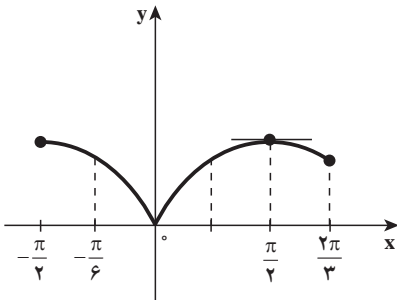
پیدا کنید.

حل:

$$f'(x) = \frac{2 \cos x}{3 \sqrt[3]{\sin x}}, \quad x \neq 0$$

به ازای $x = \frac{\pi}{2}$ که در بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ است، $f'(x) = 0$ پس $x = \frac{\pi}{2}$ یک نقطه بحرانی تابع f است و $x = 0$ ریشهٔ مخرج کسر $f'(x)$ است پس $f'(0)$ موجود نیست و $x = 0$ نقطهٔ بحرانی f است که در بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ قرار دارد.

به ازای هر x از بازه $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ ، $f'(x) < 0$ و برای هر x از بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ ، $f'(x) > 0$ بنابراین طبق آزمون مشتق اول $f(0) = 0$ یک مقدار مینیمم موضعی تابع f است.



شکل ۳-۴۸

چون به ازای هر x از بازه $(0, \frac{\pi}{2})$ ، $f'(x) > 0$ و برای

هر x از بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$ ، $f'(x) < 0$ پس بنا بر آزمون مشتق اول

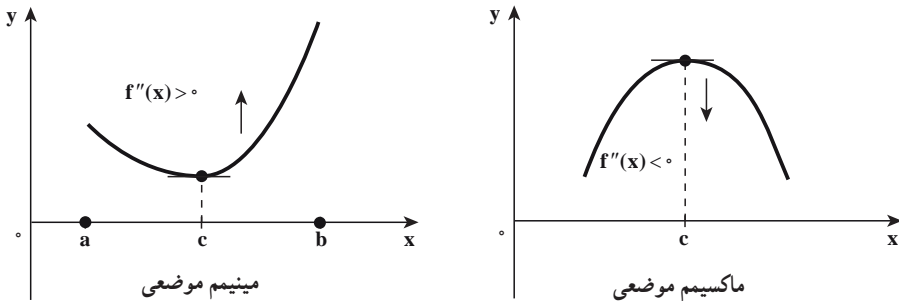
$f(\frac{\pi}{2}) = 1$ یک مقدار ماکسیمم موضعی تابع f است. نمودار f

روی بازه $[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ به شکل ۳-۴۸ است.

مقدارهای ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{3}x - 2\cos x$ را روی بازه $(0, 2\pi)$ پیدا کنید.

آزمون مشتق دوم: گاهی می‌توان از مشتق دوم برای انجام آزمون ساده‌ای برای مقادیر ماکسیمم و مینیمم موضعی استفاده کرد.

این آزمون مبتنی بر این است که اگر تابع f چنان باشد که $f'(c) = 0$ و بازه‌بازی شامل نقطه c باشد نمودار f بر آن تقعر رو به بالا داشته باشد، $f(c)$ یک مقدار مینیمم موضعی f است و به همین نحو، اگر تابع f چنان باشد که $f'(c) = 0$ و بازه‌بازی شامل c باشد که نمودار f بر آن تقعر رو به پایین داشته باشد، $f(c)$ یک مقدار ماکسیمم موضعی f است. (شکل ۳-۴۹ را ببینید)



شکل ۳-۴۹

آزمون مشتق دوم برای اکسترمم‌های موضعی

- فرض کنیم $(c, f(c))$ نقطه بحرانی تابع f باشد که در آن $f'(c) = 0$ و f' به ازای جمیع x های بازه I ، شامل c موجود باشد. هرگاه $f''(c)$ وجود داشته و
- (الف) $f''(c) < 0$ ، آنگاه f در c ماکسیمم موضعی دارد.
 - (ب) $f''(c) > 0$ ، آنگاه f در c مینیمم موضعی دارد.

❖ **مثال:** به فرض آنکه $f(x) = x^2 e^{-x}$ ، با اعمال آزمون مشتق دوم، اکسترم‌های موضعی f را بیابید و نمودار f را رسم کنید.

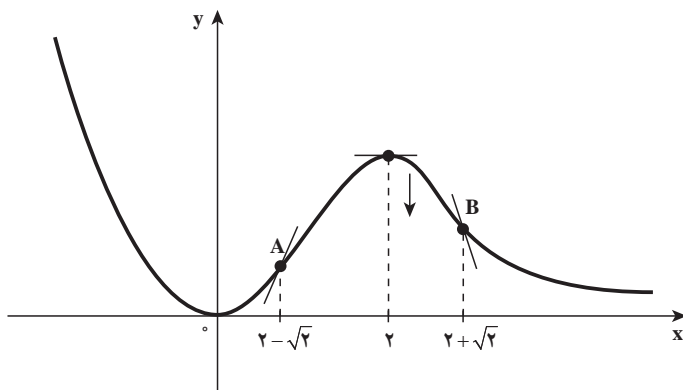
حل: ابتدا نقاط بحرانی f را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 2xe^{-x} - e^{-x}x^2 = x(2-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=2$$

نقاط بحرانی ۰ و ۲ و $c=0$ که $f'(0)=0$ و $f'(2)=0$ و f' به ازای هر x از بازه $I=(-\infty, +\infty)$ موجود است.

$$f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

چون $f''(0) = 2 > 0$ پس $f(0) = 0$ مقدار مینیم موضعی f است و $f''(2) = -2e^{-2} < 0$ پس $f(2) = 4e^{-2}$ مقدار ماکسیم موضعی f است و نمودار f به شکل ۵-۳ است. A و B نقاط عطف f هستند.



شکل ۳-۵

تمرین در کلاس

به فرض آنکه $f(x) = x^4 - 2x^3$ ، با اعمال آزمون مشتق دوم، مقادیر اکسترم‌های موضعی f را بیابید و نمودار f را رسم کنید.

۱- اگر تابع f دارای ماکزیمم مطلق بوده و $g(x) = |f(x)|$ باشد، آیا g حتماً ماکزیمم مطلق دارد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۲- نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x) = x|x^2 - 1|$ را پیدا کنید.

۳- نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x) = |x - 1|\sqrt[3]{x^2}$ را پیدا کنید.

۴- نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم مطلق توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = x^2 - 3x + 1, \quad -\frac{3}{2} \leq x \leq 3 \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = \sin^2 x + 2 \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (\text{ب})$$

۵- ارتفاع یک توپ (به متر) در لحظه t (به ثانیه) از تابع مکان به معادله $S(t) = 3t - 5t^2$ به دست می‌آید. بازه زمانی بازی را بیابید که بر آن توپ پایین می‌آید. ارتفاع ماکسیمم توپ چقدر است؟

۶- جهت تقعر منحنی f با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ را به کمک قضیه تقعر بررسی نموده و نقطه عطف تابع را در صورت وجود پیدا کنید.

۷- به ازای چه مقادیری از a ، تقعر منحنی f با ضابطه $f(x) = x^2 + ax^3 + 3x^2$ همواره رو به بالا است.

۸- نشان دهید که نقطه عطف تابع f با ضابطه $f(x) = x(x-6)^2$ وسط پاره خطی است که نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع را به هم وصل می‌کند.

۹- در یکنوایی و مقادیر اکسترمم تابع f با ضابطه $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ بحث کنید. چرا در $x = \pm 2$ مماس‌های عمود بر محور طول‌ها وجود دارند؟

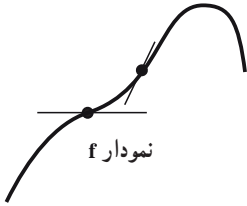
۱۰- غلظت c یک داروی شیمیایی در جریان خون t ساعت پس از تزریق در ماهیچه مساوی است با:

$$c = \frac{3t}{27+t^3}$$

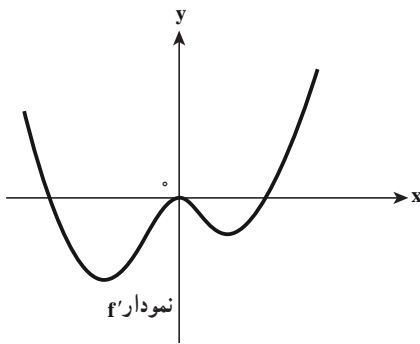
چه وقت غلظت ماکزیمم است؟

۱۱- یک تابع چند جمله‌ای از درجه ۳ بیابید که در $(2, 4)$ ماکسیمم نسبی، در $(4, 2)$ مینیمم نسبی داشته باشد.

۱۲- شکل مقابل نمودار تابع f است در مورد مقادیر اکسترمم نسبی f' (تابع مشتق f) بحث کنید.

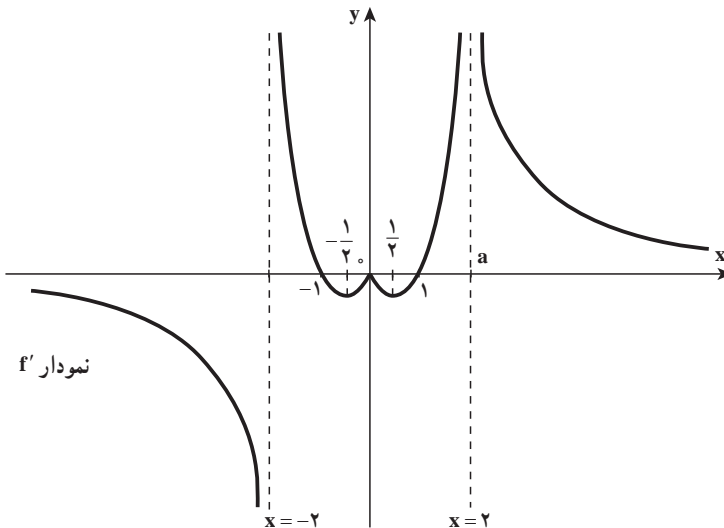


۱۳- شکل مقابل نمودار تابع مشتق، تابع f است تابع f چند نقطه عطف دارد؟ دلیل خود را بیان کنید.



۱۴- تابع f با ضابطه $f(x) = xe^x$ را در نظر بگیرید با استفاده از هر نوع اطلاعاتی که می‌توانید از خود تابع و مشتق‌های اول و دوم آن به دست آورید، نمودار f را رسم کنید.

۱۵- نمودار تابع f' (تابع مشتق، تابع همواره پیوسته f) به شکل زیر می‌باشد. تابع f در چه نقاطی ماکسیمم نسبی و یا مینیمم نسبی دارد؟ و نقاط عطف تابع f را در صورت وجود مشخص کنید.



۱۵-۳- آهنگ‌های تغییر وابسته

اگر هوا را به درون بالن بدمیم و تغییرات حجم بالن را وابسته به تغییر شعاع بدانیم، وقتی که اندازه شعاع r سانتی متر است و یک سانتی متر به شعاع بالن افزوده شود، آهنگ تغییر حجم بالن به صورت زیر حساب می‌شود.

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$


$$V'(r) = 4\pi r^2$$

وقتی اندازه شعاع بالن r است و یک سانتی متر به شعاع بالن افزوده شود، آهنگ تغییر حجم بالن $4\pi r^2$ است. (به حجم بالن تقریباً $4\pi r^2$ سانتی متر مکعب افزوده می‌شود) در مثال بالا کمیت حجم وابسته به کمیت شعاع است، اکنون اگر کمیت شعاع وابسته به زمان (متغیر t) باشد، آنگاه کمیت حجم نیز به زمان وابسته خواهد شد.

بنابراین حجم و شعاع بالن دو کمیت وابسته به هم هستند که نسبت به متغیر سومی به نام زمان تغییر می‌کنند و اما محاسبه مستقیم آهنگ افزایش حجم بالن از محاسبه آهنگ افزایش شعاع بالن ساده‌تر است، لذا برای مطالعه پدیده‌های طبیعی و مسائل واقعی مربوط به آهنگ‌های وابسته، ایده این است که آهنگ تغییر کمیتی را که حساب کردن آن ساده‌تر است، بر حسب کمیت دیگر حساب می‌کنیم و برای انجام این عمل، معادله‌ای پیدا می‌کنیم که این دو کمیت را به هم مرتبط کند و سپس با استفاده از قاعده زنجیری از طرفین این معادله نسبت به زمان مشتق می‌گیریم.

بررسی این ایده را همراه با حل کردن مثال‌های زیر توضیح می‌دهیم.

❖ **مثال:** بالنی را از هوا پر می‌کنیم، به طوری که حجم آن با آهنگ 8° سانتی متر مکعب بر ثانیه افزایش می‌یابد، وقتی شعاع بالن 2° سانتی متر است، شعاع بالن با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟

حل:  خواندن دقیق صورت مسأله و تشخیص معلوم و مجهول و استفاده از نمادگذاری مناسب.

معلوم: آهنگ افزایش حجم هوا 8° سانتی متر مکعب بر ثانیه است.

مجهول: آهنگ افزایش شعاع وقتی که شعاع 2° سانتی متر است کمیت‌های حجم و شعاع را با نماد ریاضی می‌نویسیم.

V حجم بالن و r شعاع آن

می‌دانید که آهنگ تغییر، مشتق است و در این مثال کمیت‌های حجم و شعاع وابسته به زمان

(t) هستند.

$$\frac{dv}{dt} = 80 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} \quad \text{معلوم}$$

بنابراین:

مجهول: $\frac{dr}{dt}$ ، وقتی که $r = 20 \text{ cm}$ است.

برای اینکه $\frac{dv}{dt}$ و $\frac{dr}{dt}$ را به هم مربوط کنیم، ابتدا V و r را با دستور حجم کره به هم مربوط

می‌کنیم:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

برای اینکه از معلوم مسأله استفاده کنیم از دو طرف این معادله نسبت به t مشتق می‌گیریم

(مشتق‌گیری از سمت راست با استفاده از قاعده زنجیری انجام می‌شود)

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$80 = 4\pi \times 400 \times \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{20\pi} \approx 0.016$$

بنابراین شعاع بالن با آهنگی در حدود 0.016 سانتی‌متر بر ثانیه افزایش می‌یابد.

برای اینکه به ظرافت‌های بیشتر در بررسی این‌گونه مسائل پی ببریم، نیاز به تجربه واقعی است

که فعالیت زیر این فرصت را فراهم می‌کند.



مردی که قدش 180 سانتی‌متر است با سرعت 0.4

متر بر ثانیه روی زمین مسطحی به سمت تیر چراغ برق قدم

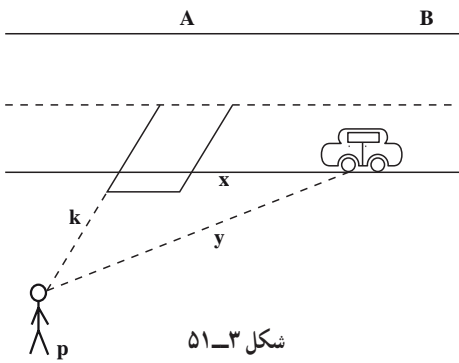
می‌زند. اگر لامپ چراغ برق از زمین 4 متر ارتفاع داشته

باشد طول سایه مرد وقتی که در فاصله $2/4$ متری تیر چراغ

برق قرار دارد با چه سرعتی کاهش می‌یابد؟ در این زمان

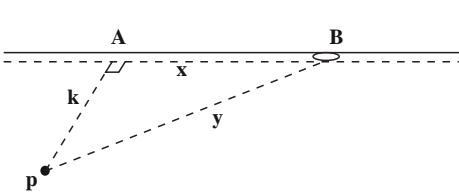
سایه سر او با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

همان گونه که در فعالیت (۱) دیده شد، مدل سازی این گونه مسأله ها از اهمیت بالایی برخوردار است و نیازمند مهارت در استفاده از مشتق یا آهنگ تغییر است که در مثال بعدی فرصت را برای هر دو هدف فراهم می کند.



شکل ۳-۵۱

با آهنگ 90° کیلومتر بر ساعت افزایش می یابد. اتومبیل با چه سرعتی در حرکت است؟



❖ **مثال:** (دوربین راداری) پلیس راهنمایی در نزدیک بزرگراهی ایستاده است. و از یک دوربین راداری برای ثبت سرعت های غیرمجاز استفاده می کند (شکل ۳-۵۱ را ببینید) و دوربین را به سمت اتومبیلی نشان می رود که در همین لحظه از جلوی او می گذرد. وقتی راستای دوربین با راستای بزرگراه زاویه 45° می سازد، ملاحظه می کند که فاصله بین اتومبیل و دوربین

شکل را به صورت مقابل در نظر می گیریم در مثلث قائم الزاویه PAB می توان نوشت:

$$x^2 + k^2 = y^2 \quad (1)$$

از طرفین رابطه (۱) نسبت به زمان (t)

مشتق می گیریم.

$$2x \frac{dx}{dt} + 0 = 2y \frac{dy}{dt}$$

$$x \frac{dx}{dt} = y \frac{dy}{dt}$$

و یا

در مثلث قائم الزاویه PAB، $\hat{P} = \hat{B} = 45^\circ$ سپس $x = k$ و $y = k\sqrt{2}$

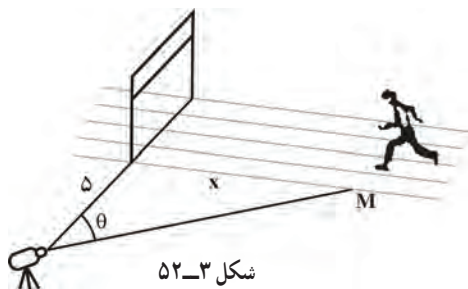
طبق صورت مسأله دوربین رادار نشان می دهد که $\frac{dy}{dt} = 90 \text{ km/h}$

بنابراین

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k\sqrt{2} \times 90}{k} = 90\sqrt{2} \approx 127 \text{ km/h}$$

پس سرعت اتومبیل در حدود ۱۲۷ کیلومتر بر ساعت است.

تمرین در کلاس



شکل ۳-۵۲

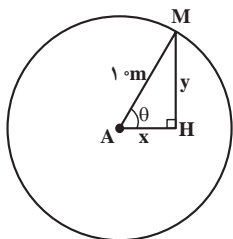
شکل ۳-۵۲، یک دوربین تلویزیون را (که در ۵ متری خط پایان روی یک مسیر مستقیم قرار دارد) نشان می‌دهد که دوندۀ المپیک M را تعقیب می‌کند.

وقتی دوندۀ در ۵ متری خط پایان است با

سرعت 1° متر بر ثانیه می‌دود. سرعت چرخش دوربین در این لحظه چقدر است؟

برای یادگیری و تسلط بیشتر در حل مسائل آهنگ‌های وابسته مثال دیگری را مطرح می‌کنیم.

مثال: (چرخ و فلک) شخصی بر چرخ و فلکی به شعاع 1° متر سوار شده است که در هر دقیقه یک دور می‌زند. وقتی فاصله افقی آن شخص از مرکز قائم گذرنده از مرکز چرخ و فلک برابر ۵ متر است، سرعت بالا رفتن یا پایین آمدن آن شخص چقدر خواهد بود؟



شکل ۳-۵۳

حل: فرض کنیم محل نشستن شخص روی چرخ و فلک باشد و x فاصله افقی شخص در لحظه t ، از خط قائمی که از مرکز می‌گذرد و y ارتفاع نقطه M از خط افقی که از مرکز می‌گذرد (طبق شکل ۳-۵۳) و θ زاویه نشان داده شده در شکل باشد.

در مثلث قائم‌الزاویه AHM داریم:

$$x = 1 \cdot \cos \theta \quad \text{و} \quad y = 1 \cdot \sin \theta$$

اکنون از دو طرف معادله $y = 1 \cdot \sin \theta$ نسبت به زمان (t) مشتق می‌گیریم.

$$\frac{dy}{dt} = 1 \cdot \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

و اما بنا بر صورت مسأله معلوم می‌شود:

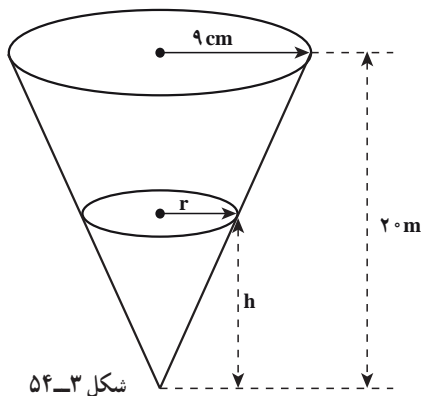
$$\frac{d\theta}{dt} = 1 \text{ رادیان بر دقیقه} = 2\pi \text{ دور بر دقیقه}$$

و در لحظه‌ای که، x برابر ۵ متر است، داریم $\cos \theta = \frac{5}{1} = \frac{1}{4}$

$$\frac{dy}{dt} = 1 \cdot \frac{1}{4} \times 2\pi = 1 \cdot \pi \approx 3.14 \text{ m/min}$$

یعنی در لحظه‌ای که x برابر ۵ متر است، سرعت بالا یا پایین رفتن حدود $\frac{31}{4}$ متر بر دقیقه است.

تمرین در کلاس



ظرف قیفی شکل با ارتفاع 20 سانتی متر و شعاع قاعده 9 سانتی متر چنان قرار گرفته است که رأس آن در پایین است و ظرف به شکل مخروط دوار است. (شکل ۳-۵۴)

فرض کنید آب با سرعت $\frac{1}{8}$ سانتی متر مکعب بر ثانیه در این ظرف ریخته شود آهنگ افزایش ارتفاع آب را وقتی ارتفاع آب 6 سانتی متر است پیدا کنید.

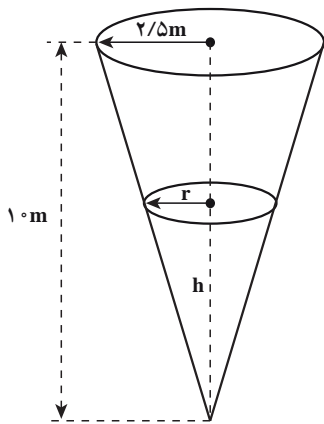
آنالیز ریاضی به اندازه خود طبیعت گسترده است (فوریه ۱۸۲۰-۱۷۶۸)

مسائل

- جسمی با سرعت 8 سانتی متر بر ثانیه به عدسی نزدیک می‌گردد، اگر نسبت فاصله‌های جسم و تصویر آن از عدسی $\frac{2}{\sqrt{2}}$ باشد، تصویر جسم با چه سرعتی و در کدام جهت تغییر می‌کند؟ (در عدسی‌های نازک رابطه $\frac{1}{s} + \frac{1}{S} = \frac{1}{f}$ برقرار است، که در آن s فاصله جسم از عدسی و S فاصله تصویر از عدسی و f فاصله کانونی عدسی است)
- مخزنی استوانه‌ای به شعاع 3 متر را با آهنگ 2 متر مکعب بر دقیقه از آب پر می‌کنند. ارتفاع آب با چه آهنگی بالا می‌آید؟
- شعاع کره‌ای با آهنگ 3 میلی متر بر ثانیه بزرگ می‌شود. در لحظه‌ای که قطر کره 60 میلی متر است، حجم کره با چه آهنگی افزایش می‌یابد.

۴- اگر ارتفاع بادبادک شما از زمین 20° متر باشد و فاصله افقی آن از شما 30° متر و با آهنگ

۸ متر در دقیقه به طور افقی از شما دور شود طول ریسمان با چه آهنگی افزایش می یابد؟



۵- آب با سرعت ۹ متر مکعب بر ساعت وارد منبعی

می شود که نشستی دارد. این منبع به شکل مخروطی است که

رأس آن به طرف پایین است و عمق آن 10° متر و قطر قاعده

آن ۵ متر است. وقتی عمق آب ۵ متر است، سطح آن با آهنگ

۱۸ سانتی متر بر ساعت بالا می رود، در این لحظه آب با چه

آهنگی به خارج نشست می کند؟

۳- ۱۶- رسم نمودار توابع

تاکنون نمودار توابعی به صورت خط راست و یا خط شکسته مانند نمودار تابع $y = |x-1|$ در

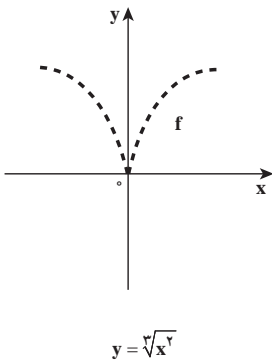
کتاب های ریاضی سال های قبل دیده اید. نمودار توابعی نظیر $y = x^2$ و $y = \frac{1}{x}$ و یا $y = \sqrt[3]{x^2}$ را

می توانیم با نقطه یابی در یک صفحه مختصات شطرنجی شناسایی و ترسیم کنیم. اما مشکلی که در

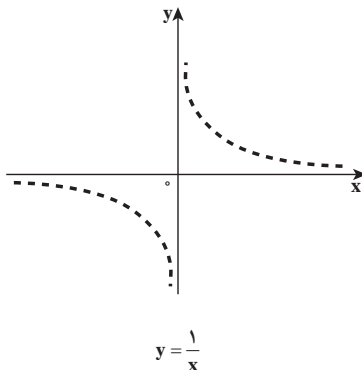
اینجا وجود دارد، از پیش نمی توانیم رفتار این گونه توابع را پیش بینی کنیم، در نتیجه فقط با افزایش

نقاطی از صفحه که مختصات آنها در معادله این توابع صدق می کند، شکل دقیق تری از نمودار ترسیم

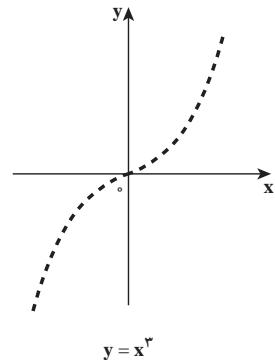
می گردد. (شکل ۳-۵۵ را ببینید)



$$y = \sqrt[3]{x}$$



$$y = \frac{1}{x}$$

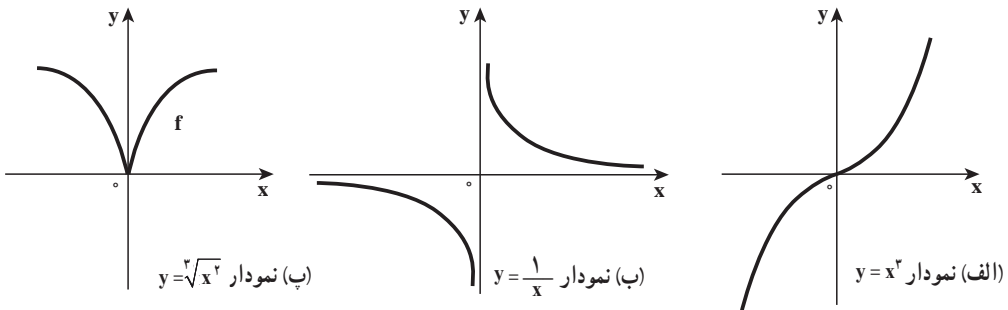


$$y = x^3$$

شکل ۳-۵۵

رایانه‌ها با یافتن نقاط بیشتری از توابع نمودار نسبتاً دقیق‌تری از توابع مربوطه به دست می‌دهند. اکنون که مفهوم مشتق و شگردهای مربوط به آن را در بخش‌های پیشین بیان کردیم، به کمک آن می‌توانیم به آسانی رفتار بسیاری از توابع را مشخص کرده و حتی بدون رسم نمودار هندسی خواص آن را تعیین کنیم. برای نمونه با استفاده از حد تابع، پیوستگی، مجانب‌ها، مشتق و کاربرد آن، می‌توان نمودار هندسی توابع زیر را با دقت بیشتری در صفحه مختصات رسم کرد.

الف) تابع f با ضابطه $y = x^2$ در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = -\infty$ و شیب‌های خط مماس در تمام نقاط $x \neq 0$ ، مثبت‌اند و در $x=0$ شیب مماس بر منحنی صفر است در نتیجه نمودار تابع در مبدأ بر محور طول‌ها مماس است. در بازه $(0, +\infty)$ ، $f''(x) = 2x > 0$ ، پس تقعر منحنی در این بازه رو به بالا است و در بازه $(-\infty, 0)$ ، $f''(x) < 0$ ، پس تقعر منحنی در این بازه رو به پایین است بنابراین $(0, 0)$ نقطه عطف تابع است. (شکل ۵۶-۳ قسمت الف)



شکل ۵۶-۳

ب) تابع f با ضابطه $y = \frac{1}{x}$ در $x=0$ تعریف نشده است و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ پس خط $x=0$ مجانب قائم تابع است و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ پس خط $y=0$ مجانب افقی تابع است در بازه $(0, +\infty)$ ، $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ و تقعر منحنی در این بازه رو به بالا است در بازه $(-\infty, 0)$ ، $f''(x) < 0$ و تقعر منحنی در این بازه رو به پایین است (شکل ۵۶-۳ قسمت ب را ببینید)

پ) تابع f با ضابطه $y = \sqrt{x}$ در \mathbb{R} پیوسته است و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$ پس نمودار تابع در $x=0$ نقطه بازگشتی دارد و در این نقطه تابع مشتق‌پذیر نیست و $(0, 0)$ نقطه مینیمم نسبی و در این نقطه مینیمم مطلق خود را می‌گیرد.

در بازه $(-\infty, 0)$ ، $f''(x) = \frac{-2}{9x\sqrt[3]{x}} < 0$ ، و تقعر منحنی در این بازه رو به پایین است. و در بازه

$(0, +\infty)$ ، $f''(x) < 0$ ، و تقعر منحنی در این بازه رو به پایین است. (شکل ۳-۵۶ قسمت پ را ببینید.)

تاکنون اکثر موارد مربوط به رسم نمودارها را بررسی کرده‌ایم: دامنه تابع، تقارن، حد و پیوستگی، مجانب‌ها، مشتق و مماس، نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و مطلق، صعودی و نزولی بودن تابع در یک بازه، جهت تقعر و نقاط عطف منحنی. همه این اطلاعات را به شرح زیر جمع‌بندی کرده تا بتوانیم با استفاده از آنها نمودار تابع را با دقت نسبتاً خوبی رسم کنیم.

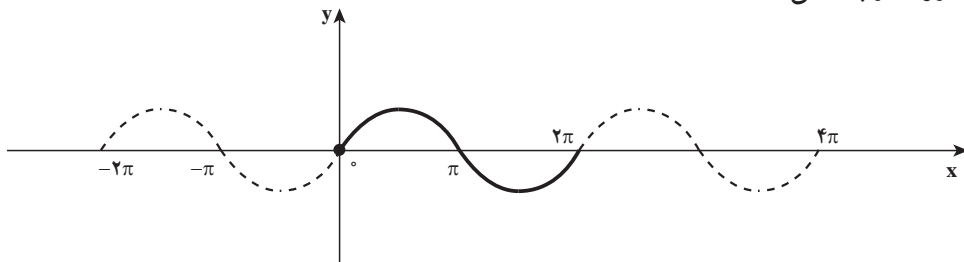
الف) دامنه تابع را مشخص می‌کنیم.

ب) تقارن

(۱) اگر تابع زوج باشد، نمودار نسبت به محور y تقارن دارد. بنابراین کافی است ابتدا نمودار را به ازای $x \geq 0$ رسم کنیم و سپس قرینه آن را نسبت به محور y پیدا کنیم تا نمودار تابع کامل شود.

(۲) اگر تابع فرد باشد، نمودار نسبت به مبدأ تقارن دارد. در این حالت نمودار را به ازای $x \geq 0$ رسم کرده و سپس قرینه آن را نسبت به مبدأ مختصات پیدا می‌کنیم تا نمودار تابع کامل شود.

(۳) اگر تابع f متناوب و با دوره تناوب اصلی T باشد. ابتدا نمودار تابع را در یک دوره تناوب مثلاً در بازه $[0, T]$ یا $[\alpha, \alpha+T]$ رسم می‌کنیم و اگر بدانیم نمودار تابع در بازه‌ای به طول T چه شکلی است، آن وقت می‌توانیم کل نمودار را با انتقال رسم کنیم. مانند شکل زیر برای تابع $f(x) = \sin x$ با دوره تناوب اصلی $T=2\pi$



پ) نقطه برخورد با محورهای مختصات

ت) مجانب‌های قائم و افقی و مایل تابع را در صورت وجود پیدا می‌کنیم.

ث) بازه‌هایی که تابع در آنها صعودی یا نزولی است، پیدا می‌کنیم (با استفاده تعیین علامت $f'(x)$ در بازه‌های بدست آمده)

ج) نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی را پیدا می‌کنیم (نقاط بحرانی درون بازه را پیدا کرده و از آزمون مشتق اول استفاده کرده تا نقاط ماکسیمم و یا مینیمم نسبی تابع به دست آیند)

چ) تقعر و نقطه‌های عطف تابع f را به کمک $f''(x)$ و آزمون تقعر مشخص می‌کنیم.
 ح) تنظیم یک جدول به نام جدول رفتار تابع که کلیه اعمال انجام شده در قسمت‌های بالا در آن درج شده باشد.

خ) رسم نمودار تابع با استفاده از اطلاعات قسمت‌های الف تا ج و یا با استفاده از جدول رفتار تابع

❖ **مثال:** جدول رفتار و نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 3x^3 - 9x$ را رسم کنید.

حل: دامنه تابع مجموعه اعداد حقیقی است و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، (∞, ∞)

نقطه برخورد نمودار تابع با محور y است و $(0, 0)$ و $(-\sqrt{3}, 0)$ و $(\sqrt{3}, 0)$ نقاط برخورد نمودار تابع با محور x هستند. از طرفی مشتق تابع برابر است با $f'(x) = 9x^2 - 9$ به ازای $x < -1$ ، $f'(x) > 0$ و به ازای $-1 < x < 1$ ، $f'(x) < 0$ و به ازای $x > 1$ ، $f'(x) > 0$ در بازه‌هایی که $f'(x) > 0$ ، تابع صعودی اکید است و در بازه‌هایی که $f'(x) < 0$ ، تابع نزولی اکید است.

با $f'(x) = 0$ داریم $x = -1$ و $x = 1$ که نقاط بحرانی تابع اند. چون f' در $x = -1$ از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، لذا بنابر آزمون مشتق اول $(-1, 6)$ نقطه ماکسیم نسبی تابع است. و f' در $x = 1$ از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد، پس بنابر آزمون مشتق اول، $(1, -6)$ نقطه مینیم نسبی است. مشتق دوم تابع f برابر است با

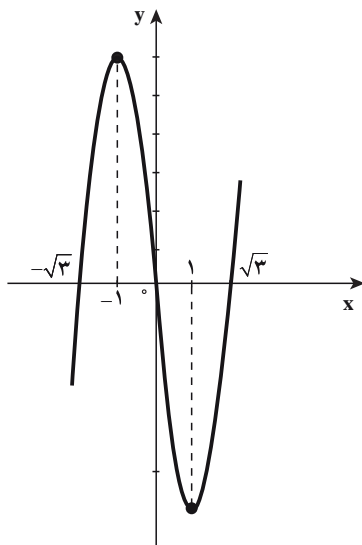
$$f''(x) = 18x$$

به ازای هر $x > 0$ ، $f''(x) > 0$ و به ازای هر $x < 0$ ، $f''(x) < 0$ و به ازای $x = 0$ ، $f''(x) = 0$
 منحنی تابع در بازه $(-\infty, 0)$ تقعرش روبه پایین است. و در بازه $(0, +\infty)$ تقعر منحنی رو به بالا است. و در نقطه $(0, 0)$ مماس وجود دارد با شیب $m = f'(0) = -9$ پس $(0, 0)$ نقطه عطف منحنی است. نتیجه محاسبات و اعمال فوق را در جدول رفتار تابع درج می‌کنیم.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	+	0	-	-
y''		+	+	0	-
y	$-\infty$	$\nearrow 6$	$\searrow 0$	$\searrow -6$	$\nearrow +\infty$

Max نقطه عطف Min

با استفاده از جدول رفتار تابع، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



تمرین در کلاس

جدول رفتار و نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$ را رسم کنید.

مثال: جدول رفتار و نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ را رسم کنید.

حل:

الف: دامنه تابع $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

ب) در نقاط $(\frac{-1}{3}, 0)$ و $(0, -1)$ نمودار تابع محورها را قطع می‌کند.

پ) چون $x=2$ ریشه مخرج کسر است، حدهای زیر را حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

بنابراین $x=2$ مجانب قائم تابع است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

پس خط $y=1$ مجانب افقی تابع است.
 (ت) مشتق تابع برابر است با:

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}, x \neq 2$$

به ازای هر x از بازه‌های $(-\infty, 2)$ و $(2, +\infty)$ ، $f'(x) < 0$ در هر کدام از بازه‌های $(-\infty, 2)$ و $(2, +\infty)$ نزولی است.

(ث) مشتق دوم تابع f برابر است با

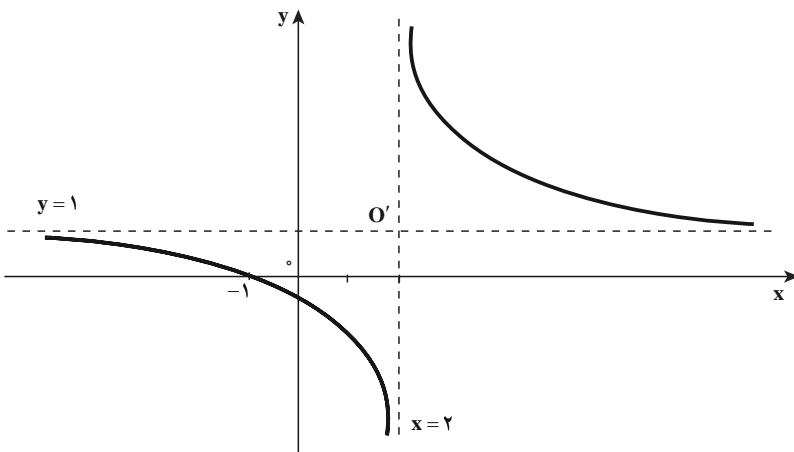
$$f''(x) = \frac{6}{(x-2)^3}, x \neq 2$$

به ازای هر x از بازه $(-\infty, 2)$ ، $f''(x) < 0$ پس تقعر منحنی f در این بازه رو به پایین است و برای هر x از بازه $(2, +\infty)$ ، $f''(x) > 0$ پس تقعر منحنی f در این بازه رو به بالا است.

(ج) جدول رفتار تابع

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
y'	_____				_____
y''	_____				+
y	1 ↘	0 ↘	$\frac{-1}{2}$ ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘

(چ) با استفاده از جدول رفتار تابع، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



یادداشت: مانند تابع بالا، تابعی با ضابطه $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ را که $c \neq 0$ و $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ تابع هموگرافیک

می نامیم و $0'$ نقطه تلاقی مجانب‌ها مرکز تقارن نمودار تابع است. در مثال بالا $(1, 2)$ مرکز تقارن

نمودار تابع $y = \frac{x+1}{x-2}$ است.



جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{x-2}{x}$ را رسم کنید.

❖ مثال: جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ را رسم کنید.

🚀 حل:

الف) دامنه تابع $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

ب) طول و عرض نقطه برخورد منحنی با محورها هر دو صفرند.

پ) چون $x = \pm 1$ ریشه‌های مخرج کسر هستند، حدهای زیر را حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$$

بنابراین $x=1$ و $x=-1$ مجانب‌های قائم تابع هستند.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

پس خط $y=1$ مجانب افقی تابع است.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \quad \text{(ت)}$$

به ازای $x < 0$ ($x \neq -1$)، $f'(x) > 0$ و به ازای $x > 0$ ($x \neq 1$)، $f'(x) < 0$ در بازه‌هایی

که $f'(x) > 0$ ، تابع صعودی اکید است و در بازه‌هایی که $f'(x) < 0$ ، تابع نزولی اکید است.

ث) با $f'(x) = 0$ داریم $x = 0$ پس تنها نقطه بحرانی $x = 0$ است.

چون f' در 0 از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد، لذا بنا بر آزمون مشتق اول $f'(0) = 0$ مقدار ماکسیمم نسبی است.

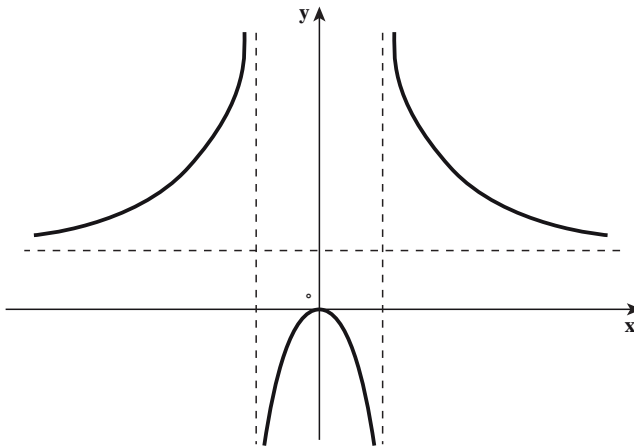
(ج) مشتق دوم تابع f برابر است با $f''(x) = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$ چون به ازای هر x ، $6x^2 + 2 > 0$ پس:

به ازای هر x که $|x| > 1$ داریم $f''(x) > 0$ و به ازای هر x که $|x| < 1$ داریم $f''(x) < 0$ بنابراین منحنی تابع در بازه‌های $(-\infty, -1)$ و $(1, +\infty)$ تقعرش رو به بالا است و در بازه $(-1, 1)$ تقعر منحنی رو به پایین است و تابع نقطه عطفی ندارد.

(چ) جدول رفتار تابع

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	+	0	-	-
y''	+	-	-	-	+
y	$1 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow \text{Max} \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 1$	$+\infty \rightarrow 1$	$1 \rightarrow +\infty$

(ح) نمودار تابع



جدول رفتار نمودار تابع $y = \frac{x^2 - 3x}{x - 4}$ را رسم کنید.

❖ مثال: جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ را رسم کنید.

حل: الف) دامنه تابع f ، $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ است. پس برای مجانب‌های قائم حدهای چپ و راست تابع را وقتی $x \rightarrow 0^+$ حساب می‌کنیم با انتخاب $t = \frac{1}{x}$ وقتی که $x \rightarrow 0^+$ داریم $t \rightarrow +\infty$ در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$$

بنابراین $x = 0$ مجانب قائم است.

وقتی که $x \rightarrow 0^-$ داریم $t \rightarrow -\infty$ در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

از طرفی دیگر $y = 1$ مجانب افقی است.

ب) مشتق تابع را با استفاده از قاعده زنجیری به دست می‌آوریم.
 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

به ازای هر x از بازه‌های $(0, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$ ، $f'(x) < 0$ پس تابع f در این بازه‌ها نزولی اکید است و هیچ نقطه بحرانی وجود ندارد، در نتیجه تابع f ماکسیمم یا مینیمم ندارد.

پ) مشتق دوم تابع f برابر است با:

$$f''(x) = -\frac{x^2 e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) - e^{\frac{1}{x}} (2x)}{x^4} = \frac{e^{\frac{1}{x}} (2x + 1)}{x^4}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

به ازای $x > -\frac{1}{2}$ ($x \neq 0$)، $f''(x) > 0$ و به ازای $x < -\frac{1}{2}$ ، $f''(x) < 0$ بنابراین تقعر منحنی

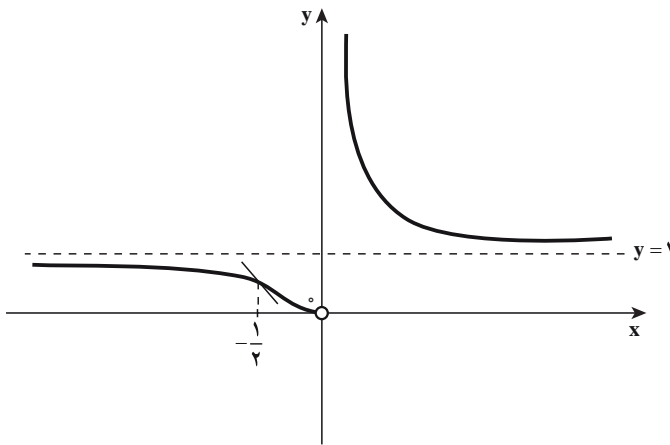
در بازه‌های $(-\frac{1}{2}, 0)$ و $(0, +\infty)$ رو به بالا است. و تقعر منحنی روی بازه $(-\infty, -\frac{1}{2})$ رو به پایین است.

پس $(-\frac{1}{2}, e^{-2})$ نقطه عطف منحنی است.

ت) جدول رفتار تابع

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
y'	—		—	—
y''	—	+	—	—
y	1	e^{-2}	0	1

ث) با استفاده از جدول رفتار تابع، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



توجه کنید که تابع در $x = 0$ تعریف نشده است و اما $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

تمرین در کلاس

جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ را رسم کنید.

مثال: جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ را رسم کنید.

حل:

الف) دامنه تابع تمام اعداد حقیقی به جز $x = 1$ ، چون $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$

بنابراین $x = 1$ x مجانب قائم f است.

چون $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و f تابع کسری گویا است به طوری که درجه صورت یک واحد بیشتر از درجه مخرج کسر است، بنابراین تابع f مجانب مایل دارد که از تقسیم صورت بر مخرج کسر به دست می آید.

$$\begin{array}{r} x^3 \left| \begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \\ x + 2 \end{array} \right. \\ \hline \mp x^3 \pm 2x^2 \mp x \\ \hline 2x^2 - x \\ \hline \mp 2x^2 \pm 4x \mp 2 \\ \hline 3x - 2 \end{array}$$

مجانب مایل

(ب) مشتق تابع f برابر است با

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 4x + 3)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}, \quad x \neq 1$$

اگر $f'(x) = 0$ داریم $x = 0$ و $x = 3$ پس $(0, 0)$ و $(3, \frac{27}{4})$ نقاط بحرانی تابع اند و در بازه $(1, 3)$ ، $f'(x) < 0$ پس f نزولی اکید و در بازه $(3, +\infty)$ ، $f'(x) > 0$ پس f صعودی اکید است و بنا بر آزمون مشتق اول $(3, \frac{27}{4})$ نقطه مینیمم نسبی f است و در بازه های $(-\infty, 0)$ و $(0, 1)$ ، $f'(x) > 0$ پس f صعودی اکید است در نتیجه $(0, 0)$ نه نقطه ماکسیمم است و نه نقطه مینیمم.

(ب) مشتق دوم تابع f برابر است با

$$f''(x) = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x^3 - 3x^2)}{(x-1)^6} = \frac{6x}{(x-1)^4}, \quad x \neq 1$$

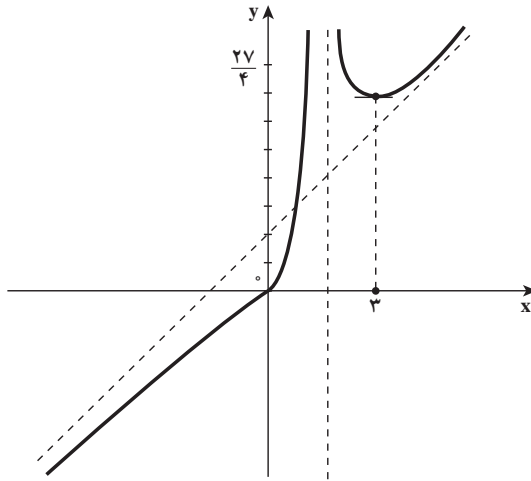
به ازای $f''(x) = 0$ ، $x = 0$ است.

در بازه $(-\infty, 0)$ ، $f''(x) < 0$ لذا تقعر منحنی رو به پایین است. و در بازه $(0, 1)$ ، $f''(x) > 0$ پس تقعر منحنی رو به بالا است و منحنی در $(0, 0)$ بر خط $y = 0$ مماس است بنابراین $(0, 0)$ نقطه عطف منحنی است.

(ت) جدول رفتار

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
y'		+ 0 +		- 0 +	
y''		- 0 +		+	
y	$-\infty$	↗ 0 ↗	↘ $+\infty$ ↘	$\frac{27}{4}$ Min ↗	$+\infty$

ث) با اطلاعات جدول رفتار تابع، نمودار آن را رسم می‌کنیم.



تمرین در کلاس

جدول رفتار و نمودار تابع $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ را رسم کنید.

❖ **مثال:** جدول رفتار تابع $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ را تنظیم کرده و به کمک آن نمودار تابع را رسم کنید.

حل:

الف) دامنه تابع $\mathbb{R} - \{0\}$ است با انتخاب $U = \frac{1}{x}$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{U \rightarrow +\infty} \tan^{-1}(U) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{U \rightarrow -\infty} \tan^{-1}(U) = -\frac{\pi}{2}$$

تابع f در نقاط $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ و $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ تعریف نشده است و اما $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{U \rightarrow 0^+} \tan^{-1}(U) = 0$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{U \rightarrow 0^-} \tan^{-1}(U) = 0$$

بنابراین خط $y = 0$ مجانب افقی تابع است.

ب) مشتق تابع $y = \tan^{-1}(x)$ می‌شود $y' = \frac{1}{1+x^2}$ پس با استفاده از قاعده زنجیری مشتق تابع

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{1+x^2} < 0$$

: $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ برابر است با:

تابع در هر یک از بازه $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ نزولی اکید است و نقطه بحرانی ندارد.

ب) مشتق دوم تابع برابر است با:

$$f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

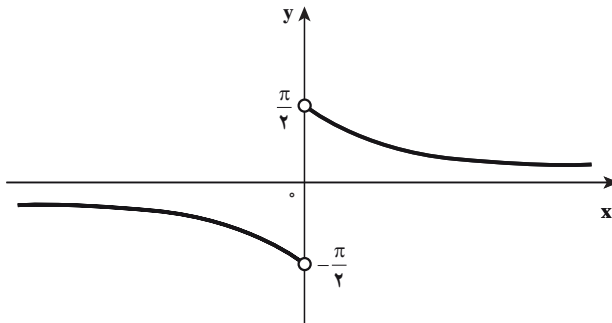
در بازه $(-\infty, 0)$ ، $f''(x) < 0$ و تقعر منحنی روبه پایین است.

و در بازه $(0, +\infty)$ ، $f''(x) > 0$ پس تقعر منحنی روبه بالا است.

ت) جدول رفتار تابع

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-		-
y''	-		+
y	0 ↘	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ ↘ 0

ث) نمودار تابع به صورت زیر است.



جدول رفتار و نمودار تابع f با ضابطه $y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ را رسم کنید.

۱- جدول رفتار و نمودار توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

$$y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x - 3} \quad (\text{ب})$$

$$y = \frac{x^2 - 4x + 8}{x - 2} \quad (\text{الف})$$

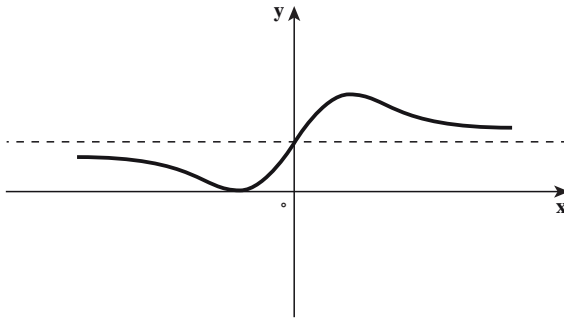
$$y = \sin x + \sqrt{3} \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (\text{ت})$$

$$y = x + \sqrt{x^2 - 3x + 2} \quad (\text{پ})$$

$$y = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi \quad (\text{ث})$$

۲- a و b را چنان اعدادی انتخاب کنید که نمودار تابع f با ضابطه $y = \frac{x^2 + ax + 1}{2x^2 + b}$ به صورت

زیر باشد.



انتگرال

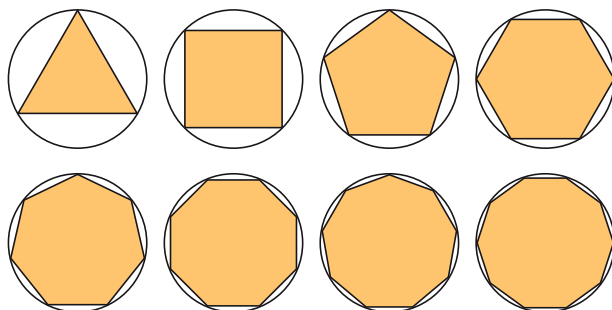
۱-۴- مسأله مساحت

فرمول‌های مربوط به مساحت چندضلعی‌ها، نظیر مربع، مستطیل، مثلث و دوزنقه از زمان‌های شروع تمدن‌های نخستین به خوبی شناخته شده بوده است. با این حال، مسأله یافتن فرمولی برای بعضی نواحی که با مرزهای منحنی‌الخط هستند (که دایره ساده‌ترین آنهاست) برای ریاضیدانان اولیه در خور مشکلاتی بوده است.

اولین پیشرفت واقع‌بینانه محاسبه چنین مساحت‌هایی توسط ریاضیدان یونانی به نام ارشمیدس صورت گرفت. ارشمیدس توانست مساحت ناحیه‌هایی با مرزهای محدود به قوس‌های دایره، سهمی و منحنی‌های دیگر را با استفاده از روش خارق‌العاده‌ای، که امروزه به روش افنا مشهور است، محاسبه کند. در چنین روشی برای محاسبه دایره از درج چندضلعی‌های منتظم در درون دایره استفاده می‌شود و تعداد اضلاع این چندضلعی‌ها متوالیاً زیاد و زیادتر شده و به نحو نامحدودی افزایش می‌یابد (شکل

۱-۴)

۱۰۰	۳,۱۳۹۵۲۵۹۷۶۴۷
۲۰۰	۳,۱۴۱۰۷۵۹۰۷۸۱
۳۰۰	۳,۱۴۱۳۶۲۹۸۲۵۰
۴۰۰	۳,۱۴۱۴۶۳۴۶۲۳۶
۵۰۰	۳,۱۴۱۵۰۹۹۷۰۸۴
۱۰۰۰	۳,۱۴۱۵۷۱۹۸۲۷۸
۲۰۰۰	۳,۱۴۱۵۸۷۴۸۵۸۸
۳۰۰۰	۳,۱۴۱۵۹۰۳۵۶۸۳
۴۰۰۰	۳,۱۴۱۵۹۱۳۶۱۶۶
۵۰۰۰	۳,۱۴۱۵۹۱۸۲۶۷۶
۱۰,۰۰۰	۳,۱۴۱۵۹۲۴۴۶۸۸



جدول و شکل ۱-۴- هرچه تعداد اضلاع چندضلعی بیشتر شود مساحت چندضلعی به مساحت دایره نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد.

همچنان که تعداد اضلاع چنین چندضلعی‌هایی افزایش می‌یابد، چندضلعی به پرکردن ناحیه درون دایره متمایل شد و در نتیجه مساحت این چندضلعی‌ها تقریب‌های بهتر و بهتری از مساحت دقیق دایره به دست می‌دهد.

برای آنکه ملاحظه کنیم که چگونه این روش کار می‌کند، فرض می‌کنیم $A(n)$ نمایش مساحت چندضلعی با n ضلع بوده باشد که درون دایره به شعاع واحد محاط شده است.

جدول ۱-۴ مقادیر $A(n)$ را برای انتخاب‌های مختلف n نشان می‌دهد. می‌بینیم که برای مقادیر بزرگ n مساحت $A(n)$ ظاهراً به عدد π نزدیک می‌گردد و این چیزی است که انتظارش را داریم. این تجربه به ما می‌گوید که برای مساحت دایره‌ای به شعاع ۱، می‌توانیم روش افنا را معادل تساوی حدی ارزیابی کنیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = \pi$$

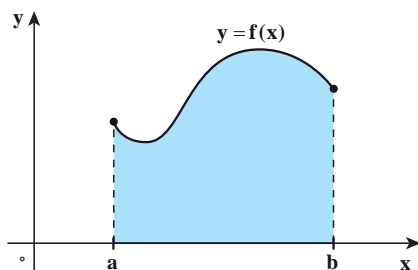
اما یونانیان باستان از مفهوم «بینهایت» خوششان نمی‌آمد و لذا در بررسی‌های مربوط به ریاضیات از آن احتراز می‌کردند؛ در نتیجه محاسبه مساحت با استفاده از روش افنا یک فرایند سرانگشتی به حساب می‌آمد. در واقع این روش تا زمان نیوتن و لایبنیتز باقی ماند – کسانی که روشی کلی برای محاسبه مساحت با استفاده ضمنی از مفهوم حد ارائه کردند. ما روش این دانشمندان را در بررسی مسأله زیر به کار خواهیم گرفت.

❖ **مسأله مساحت:** با داشتن تابع پیوسته و نامنفی f که بر بازه $[a, b]$ تعریف شده است، مساحت بین نمودار f و بازه $[a, b]$ بر محور x را پیدا کنید (شکل ۲-۴)

پرسش: همچنان که در شکل ۱-۴ ملاحظه می‌کنیم تعدادی چندضلعی منتظم در درون دایره به شعاع واحد محاسبه شده‌اند. در جدول سمت راست برای مقادیر بزرگ n که تعداد اضلاع چندضلعی را نشان می‌دهد، مساحت چندضلعی‌ها با نماد $A(n)$ نشان داده شده است. آیا می‌توان گفت که وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود مساحت n ضلعی محاطی با مساحت دایره برابر می‌گردد؟

به زبان دنباله‌ها، برای هر $n \geq 3$ ، $A(n)$ که مساحت n ضلعی است عددی است حقیقی. در نتیجه $\{A(n)\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی است که جمله n ام آن مساحت n ضلعی منتظم محاط در درون دایره است. می‌دانیم که مساحت دایره $S = \pi r^2 = \pi \times 1 = \pi$ می‌باشد. آیا به زبان حدی می‌توانیم بگوییم که:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n) = \pi$$



شکل ۴-۲- ناحیه تحت نمودار

تابع f محدود به محور x و دو خط $x = a$ و $x = b$

ما در این فصل به مطالعه و بررسی مسأله مساحت می پردازیم و لذا از این طریق مفهوم مهم انتگرال معین را فرمول بندی خواهیم کرد. اما ذکر این نکته نیز جالب است که گرچه انتگرال در رابطه با مسأله مساحت مفهوم سازی شده است، لکن از این مفهوم برای بررسی و مطالعه مسأله های دیگری در ریاضیات، فیزیک و سایر علوم دقیقه استفاده می شود، نظیر مسأله پتانسیل الکتریکی، مسأله کار انجام شده توسط نیروها، مطالعه و تعیین معادله مسیر متحرک ها با استفاده از سرعت های داده شده و نظایر این ها. قبل از آن که به مطالعه و بررسی مساحت بپردازیم لازم است با مجموع های متناهی و نماد سیگما آشنا شویم.

مجموع ها و نماد سیگما: در محاسبه و مطالعه مساحت ها که در بخش بعدی با آن درگیر می شویم، با مجموع هایی متناهی از مقدارهای یک تابع سروکار خواهیم داشت. در این بخش برآنیم تا نماد مناسبی برای نمایش یک مجموع با تعداد متناهی جمله معرفی کنیم. همچنین به روش هایی برای محاسبه حاصل جمع چنین مجموع هایی محتاج خواهیم بود. از نماد Σ (سیگما) برای نمایش یک مجموع استفاده می کنیم.

تعریف ۱: نماد سیگما هرگاه m و n دو عدد صحیح $m \leq n$ و همچنین f تابعی باشد که بر اعداد صحیح $\sum_{i=m}^n f(i)$ تعریف شده باشد، نماد Σ نشانگر حاصل جمع مقادیر تابع f در این اعداد $m, m+1, m+2, \dots, n$ می باشد: $\sum_{i=m}^n f(i) = f(m) + f(m+1) + \dots + f(n)$

مجموع سمت راست این تساوی بسط مجموع تأثیر داده شده با سیگمای سمت چپ نامیده می شود.

❖ مثال:

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

حرف i ظاهر شده در نماد $\sum_{i=m}^n f(i)$ را اندیس جمع‌بندی می‌نامیم. پس برای محاسبه $\sum_{i=m}^n f(i)$ ، اندیس i را با اعداد $m, m+1, m+2, \dots, n$ متوالیاً جایگزین کرده و مقادیر حاصله را جمع می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که مقدار حاصل جمع به اندیس جمع‌بندی بستگی ندارد؛ چرا که این اندیس در سمت راست تعریف وجود ندارد.

$$\sum_{i=m}^n f(i) = \sum_{k=m}^n f(k) \quad \text{برای هر } k:$$

$$\sum_{k=1}^5 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

لکن حاصل جمع $\sum_{i=m}^n f(i)$ به دو عدد جمع m و n بستگی تام دارد، این دو عدد را حدود جمع‌بندی می‌نامیم؛ m را حد پایین و n را حد بالا می‌نامیم.

❖ مثال: نمایش حاصل جمع‌ها با استفاده از نماد سیگما

$$\sum_{j=1}^{20} j = 1 + 2 + 3 + \dots + 18 + 19 + 20$$

$$\sum_{i=0}^n x^i = x^0 + x^1 + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n$$

$$\sum_{m=1}^n 1 = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_n$$

$$\sum_{k=-2}^3 \frac{1}{k+8} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11}$$

نکته: در اکثر اوقات به جای استفاده از نماد تابعی $f(i)$ از یک متغیر اندیس‌دار مانند a_i برای

نمایش جمله i ام یک حاصل جمع عمومی استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$$

به‌خصوص وقتی تعداد جملات نامتناهی باشد. چنین مجموعی را یک سری نامتناهی می‌نامیم:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

پس وقتی جمله‌ای به‌عنوان جمله آخر به دنبال سه نقطه ... نمی‌آید، باید این معنی را داشته باشد که جملات برای همیشه و به‌طور نامتناهی ادامه دارند.

پرسش: اکنون این پرسش پیش می‌آید که وقتی تعداد جملات متناهی باشد، استفاده از نماد سیگما چه ویژگی‌هایی دارد؟

چون نماد سیگما تعمیم عمل جمع به تعداد متناهی جمله است، پس ویژگی‌های اساسی عمل جمع را به ارث می‌برد. برای مثال، وقتی تعداد متناهی عدد را جمع می‌کنیم، ترتیب قرار گرفتن جملات تأثیری در مقدار حاصل جمع ندارد و یا آنکه هرگاه همه جملات دارای عامل مشترک باشند، این عامل مشترک را می‌توان از جملات جدا کرده و به صورت فاکتور ضرب در نماد سیگما لحاظ کرد همانند وقتی که تعداد جملات فقط ۲ جمله است:

$$ca + cb = c(a + b)$$

لذا قوانین اولیه حساب ویژگی‌هایی به نماد سیگما می‌دهد که اینک اهم آن را بیان می‌کنیم.

$$\sum_{i=m}^n (Af(i) + Bg(i)) = A \sum_{i=m}^n f(i) + B \sum_{i=m}^n g(i) \quad (\text{الف})$$

که A ، B اعدادی ثابت و مستقل از اندیس i هستند.

ب) دو عبارت $\sum_{i=0}^n f(i+m)$ و $\sum_{i=m}^{m+n} f(i)$ دارای یک بسط هستند؛ در واقع هر یک برابر $f(m) + f(m+1) + \dots + f(m+n)$ هستند (امتحان کنید!). پس

$$\sum_{i=m}^{m+n} f(i) = \sum_{i=0}^n f(i+m) \quad (\text{د})$$

این قانون را قانون لغزاندان اندیس‌ها می‌نامیم.

❖ **مثال:** $\sum_{i=3}^{17} \sqrt{1+i^2}$ را به صورت $\sum_{i=1}^n f(i)$ بنویسید.

حل: باید در عبارت داده شده اندیس‌های پایین و بالا را ۲ واحد کم کنیم تا اندیس پایین از ۱ شروع گردد؛ در عین حال به همان مقدار، یعنی ۲ واحد به اندیس عبارت تحت Σ باید اضافه کنیم:

$$\sum_{i=3}^{17} \sqrt{1+i^2} = \sum_{i=1}^{15} \sqrt{1+(i+2)^2}$$

نکته: ملاحظه کنید که $\sum_{i=m+1}^n f(i) = \sum_{i=1}^n f(i) - \sum_{i=1}^m f(i)$ (چرا؟)



اکنون شما عبارت $\sum_{i=a+1}^{12} (b+i)^3$ را به صورت $\sum_{i=1}^n f(i)$ بنویسید.

محاسبه مجموع‌ها: وقتی یک مجموع مانند $S = \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ داده می‌شود که درگیر تعداد زیادی جمله می‌باشد، داشتن فرمولی که مقدار این مجموع را به شکلی بسته نشان دهد بسیار ضروری می‌باشد.

منظورمان از شکل بسته چنین فرمولی آن است که از شکل بسط آن (شامل سه نقطه) استفاده نشده باشد. برای مجموع بالا فرمول به صورت $S = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ می‌باشد.

دانش‌آموزان، در این مورد خاص، مشکلی ندارند. می‌توانید به شکل زیر عمل کنید.

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

پس جمع را یک بار به صورت معمولی به جلو هریک بار به صورت عقب‌گرد نوشته‌ایم. دو ردیف را همچنان که زیر هم نوشته شده‌اند با هم جمع می‌کنیم:

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) = n(n+1)$$

فرمول S فوق‌الضاهره با تقسیم طرفین تساوی اخیری بر ۲ به دست می‌آید.

اما همیشه محاسبه یک مجموع و یافتن فرمولی برای آن به این آسانی نخواهد بود. این مسأله یکی از مسأله‌های چالش‌برانگیز در مباحث ریاضیات است. لیکن چنین فرمول‌هایی که در بخش بعدی بدان نیاز داریم، فرمول‌هایی سراسر ساده و ساده بوده که در قضیه بعدی گردآوری شده‌اند.

قضیه ۱: فرمول‌های جمع بندی

$$\sum_{i=1}^n 1 = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_n = n \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{i=1}^n i = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{i=0}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\text{ج})$$

$$\sum_{i=1}^n r^{i-1} = 1+r+r^2+r^3+\dots+r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1}, \quad (r \neq 1) \quad (\text{د})$$

❖ برهان:

(الف) بدیهی است حاصل جمع n بار عدد ۱ برابر n است. یک راه حل برای (ب) قبلاً آرایه گردید. برای اثبات (ج) n بار اتحاد زیر را

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

به ازای هر k که $1 \leq k \leq n$ نوشته و جمع می‌کنیم.

$$\begin{array}{rclclcl}
 k=1 & 2^3 - 1^3 & = 3 \times 1^2 & + & 3 \times 1 & +1 \\
 k=2 & 3^3 - 2^3 & = 3 \times 2^2 & + & 3 \times 2 & +1 \\
 k=3 & 4^3 - 3^3 & = 3 \times 3^2 & + & 3 \times 3 & +1 \\
 \vdots & \vdots & & & & \\
 k=n-1 & n^3 - (n-1)^3 & = 3(n-1)^2 & + & 3(n-1) & +1 \\
 k=n & (n+1)^3 - n^3 & = 3n^2 & + & 3n & +1
 \end{array}$$

با استفاده از (ب) $(n+1)^3 - 1 = 3\left(\sum_{i=1}^n i^2\right) + \frac{3n(n+1)}{2} + n$

در نتیجه به آسانی $\sum_{i=1}^n i^2$ از تساوی اخیر به دست می‌آید.

$$3 \sum_{i=1}^n i^2 = (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - n - 1$$

$$= n^3 + 3n^2 + 2n - \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n^2 + 3n + 2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(د) همان مجموع جملات یک دنباله هندسی با قدرنسبت r می‌باشد که از قبل با آن آشنایی

دارید.

در برهان قسمت ج، قسمت‌های سمت چپ n تساوی را باهم جمع کردیم و هر جمله اول یک تساوی با جمله دوم تساوی بعدی حذف گردید (به دلیل قرینه بودن) و از همه جملات، فقط جمله اول تساوی n ام (آخر) و جمله دوم تساوی اول باقی ماندند که همان عبارت $1^3 - (n+1)^3$ سمت چپ، حاصل جمع تساوی ظاهر گردید. در واقع می‌توانستیم از نماد سیگما استفاده کنیم: هر عبارت در سمت چپ به شکل کلی $(k+1)^3 - k^3$ است که در آن $1 \leq k \leq n$. پس جمع آن به شکل $\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3)$ است. اما حاصل آن، با حذف جملات قرینه، برابر $1^3 - (n+1)^3$ شد. بنابراین:

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 1^3 \quad (1)$$

این یک مثال از حالت کلی جمعی است که جمع تلسکوپی نامیده می‌شود.

فرم جمع تلسکوپی به صورت کلی:

$$\sum_{i=m}^n (f(i+1) - f(i)) = f(n+1) - f(m) \quad (2)$$

می‌باشد، زیرا همه جملات آن به جز اولی و آخری حذف می‌شوند. قاعده جمع

تلسکوپی را برخی قاعده ادغام نیز می‌نامند.

ابتدا تساوی (۱) را به استقراء ثابت کنید. سپس (۲) را به استقراء ابتدا از

ثابت کنید.

$$\sum_{k=m+1}^n (6k^2 - 4k + 3)$$

❖ مثال: محاسبه کنید:

که در آن $1 \leq m \leq n$

🚀 حل: از قواعد جمع بندی و فرمول‌های قضیه قبل استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{k=1}^n (6k^2 - 4k + 3) = 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k + 3 \sum_{k=1}^n 1$$

$$= 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \frac{n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= 2n^3 + n^2 + 2n$$

$$\sum_{k=m+1}^n (6k^2 - 4k + 3) = \sum_{k=1}^n (6k^2 - 4k + 3) - \sum_{k=1}^m (6k^2 - 4k + 3) \quad \text{بنابراین}$$

$$= 2n^3 + n^2 + 2n - 2m^3 - m^2 - 2m$$

نکته: برنامه‌ریزی میپل (Maple) شکل بسته فرمولی برخی از جمع‌ها را به دست می‌دهد.

برای مثال:

$$> \text{Sum}(i^4, i=1..n); \text{factor}(\%);$$

$$= \frac{1}{5}(n+1)^5 - \frac{1}{2}(n+1)^4 + \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{30}n - \frac{1}{30}$$

$$= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

در تمرین‌های ۸-۱ جمع را بسط دهید :

$$۱- \sum_{i=1}^4 i^2$$

$$۲- \sum_{j=1}^{100} \frac{j^3}{j+1}$$

$$۳- \sum_{j=1}^n 3j$$

$$۴- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i+1}$$

$$۵- \sum_{i=2}^n \frac{(-2)^i}{(i+2)^2}$$

$$۶- \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{n^3}$$

$$۷- \sum_{n=1}^k \sin \frac{n\pi}{3k}$$

$$۸- \sum_{k=2}^n \frac{e^{-k}}{nk}$$

جمع‌های زیر را با استفاده از نماد \sum بنویسید. (متذکر می‌شویم که جواب منحصر به فرد

نمی‌باشد)

$$۹- ۵+۶+۷+۸+۹$$

$$۱۰- ۲+۲+۲+۲+ \dots + ۲ \text{ (بار } ۲۰۰ \text{)}$$

$$۱۱- ۲^2-۳^2+۴^2-۵^2+ \dots -۹۹^2$$

$$۱۲- ۱+۲x+۳x^2+۴x^3+ \dots + ۱۰۰x^{99}$$

$$۱۳- ۱+x+x^2+x^3+ \dots + x^n$$

$$۱۴- ۱-x+x^2-x^3+ \dots + x^{2n}$$

$$۱۵- ۱-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+ \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

$$۱۶- \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+ \dots$$

۲-۴- مساحت به‌عنوان حد مجموع

در فصل ۳ با استفاده از تعریف حد، مماس بر یک منحنی خاص به مطالعه و بررسی مشتق پرداختیم. در اینجا نیز بیشتر دوست داشتیم تا با استفاده از تعریفی از مساحت یک ناحیه در صفحه به مطالعه انتگرال بپردازیم. اما ارائه تعریفی از مساحت بسیار مشکل‌تر از تعریفی برای مماس است. بنابراین فرض می‌کنیم که منظورمان از مساحت به‌گونه‌ای ملموس بر ما معلوم بوده و از این رو برخی از ویژگی‌های آن را یادآوری می‌شویم.

الف) مساحت یک ناحیه در صفحه عددی حقیقی و نامنفی برحسب واحدهای سطح (مربع‌ها)

می‌باشد.

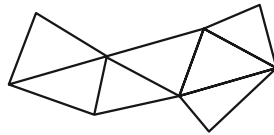
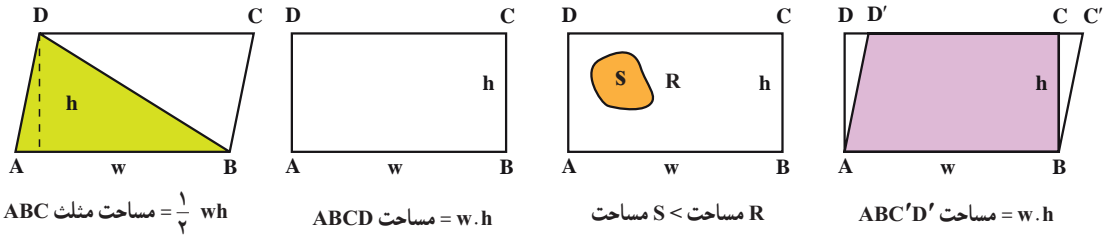
ب) مساحت یک مستطیل با عرض w و ارتفاع h برابر $A=wh$ است.

ج) مساحت ناحیه‌های صفحه‌ای که برابر باشند یکی است.

د) هرگاه ناحیه S درون ناحیه R باشد، مساحت S کمتر از مساحت R است.

ه) هرگاه ناحیه R اجتماعی متناهی از ناحیه‌های مجزا باشد، مساحت R برابر مجموع مساحت‌های این ناحیه‌های مجزا است.

با استفاده از این ویژگی‌های شهودی مساحت می‌توانیم مساحت خیلی از اشکال هندسی را بررسی و یا محاسبه کنیم. شما در شکل‌های زیر می‌توانید بگویید که نتیجه حاصله که در زیر هر شکل نوشته شده است بر طبق کدام یک از ویژگی‌های (الف) - (ه) می‌باشد.



مجموع مساحت مثلث‌ها مساوی مساحت چندضلعی

شکل ۴-۳- ویژگی مساحت‌ها

اما فراتر از چندضلعی‌ها نمی‌توان رفت، مگر آنکه از مفهوم حد کمک بگیریم. شما با مفهوم حد در سال قبل و همچنین در فصل ۱ این کتاب به خوبی آشنا شده‌اید. هرگاه یک مساحت دارای مرزی منحنی‌وار بوده باشد، محاسبه ساده آن فقط می‌تواند به صورت تقریبی با استفاده از مساحت مثلث‌ها و مستطیل‌ها به دست آید؛ محاسبه دقیق این گونه مساحت‌ها محتاج محاسبه یک حد است. روش مستطیل برای محاسبه مساحت: در این بخش قصدمان این است که نشان دهیم چگونه می‌توان مساحت یک ناحیه مانند R را که تحت نمودار تابع پیوسته و نامنفی $y=f(x)$ و محدود به دو خط قائم $x=a$, $x=b$ است به دست آوریم.

برای این کار به طرز زیر عمل می‌کنیم. بازه $[a, b]$ را به n زیر بازه جزء با استفاده از نقاط

افرازی

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

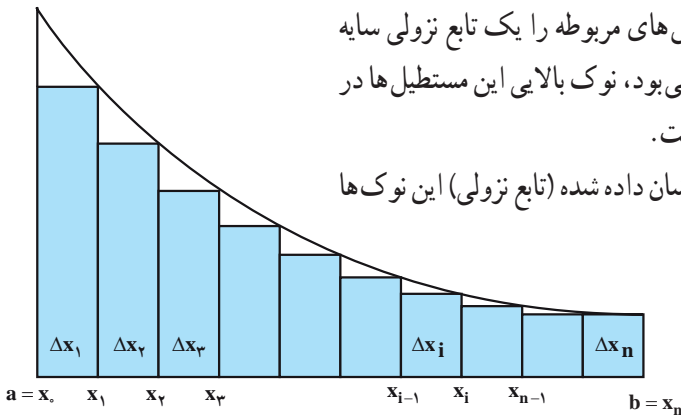
$(n+1)$ نقطه تقسیم می‌کنیم، طول بازه i ام $[x_{i-1}, x_i]$ را به Δx_i نشان می‌دهیم:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

بر روی هر بازه جز $[x_{i-1}, x_i]$ مستطیلی با عرض Δx_i و ارتفاع $f(x_i)$ می‌سازیم. پس مساحت این مستطیل برابر $f(x_i)\Delta x_i$ می‌باشد. مجموع این مساحت‌ها را تشکیل می‌دهیم.

$$S_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \dots + f(x_n)\Delta x_n$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$$

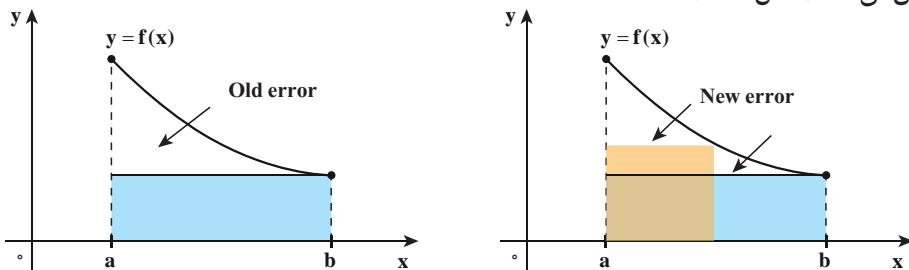


در شکل ۴-۴ مستطیل‌های مربوطه را یک تابع نزولی سایه زده‌ایم، اگر تابع مان صعودی می‌بود، نوک بالایی این مستطیل‌ها در بالای نمودار تابع قرار می‌گرفت. در حالی که در شکل نشان داده شده (تابع نزولی) این نوک‌ها در زیر نمودار قرار دارد.

شکل ۴-۴- حاصل جمع مساحت مستطیل‌ها برابر $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$ است.

واضح است که S_n تقریبی از مساحت ناحیه R است و با افزایش n این تقریب به مقدار واقعی مساحت R نزدیک‌تر می‌شود، مشروط بر آنکه نقاط $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ را چنان انتخاب کنیم که عرض Δx_i ‌ها نیز به صفر میل کند.

برای مثال، در شکل بعدی، ملاحظه می‌کنیم که تقسیم یک بازه جزء، به دو بازه کوچک‌تر خطای این تقریب را، با کاهش قسمتی از مساحت تحت نمودار که مشمول در مستطیل‌ها شده است، کاهش می‌دهد (شکل ۴-۵).



شکل ۴-۵- استفاده از مستطیل‌های بیشتر خطای محاسبه را کوچکتر می‌کند.

بنابراین برای یافتن مساحت R معقول آن است که حد دنباله S_n را وقتی $n \rightarrow \infty$ به دست آوریم (با این شرط که طول بزرگترین Δx_i ها نیز به صفر میل کند).

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad \text{مساحت}$$


نکته مهم: برای آنکه، در حدگیری Δx_i ها همگی به صفر میل کنند، اغلب اوقات مناسب تر آن است که طول همه بازه‌های جز مساوی اختیار شوند. در این صورت داریم:

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \Delta x \quad , \quad x_i = a + i\Delta x = a + \frac{i}{n}(b-a)$$

که در آن، چون همه Δx_i ها را مساوی اختیار کرده‌ایم و طول مشترک را به Δx نشان داده‌ایم. از این نوع تقسیم بازه، به بازه‌های جزء مساوی، به عنوان افراز منظم یاد خواهیم کرد. معلوم است که در مورد افرازهای منظم، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\Delta x \rightarrow 0$ و دیگر نیازی به شرط آن که طول بزرگترین بازه جزء به صفر میل کند، نمی‌باشد.

محاسبه برخی مساحت‌ها: در این بخش به عنوان نمونه به محاسبه تقریبی برخی مساحت‌ها با استفاده از روش فوق می‌پردازیم. ابتدا با ناحیه‌ای شروع می‌کنیم که مساحت آن را از قبل می‌دانیم و از این راه بیشتر قانع می‌شویم که روش توصیف شده مان مقدار دقیق را به دست می‌دهد.

❖ **مثال:** مساحت ناحیه‌ای را بیابید که تحت خط مستقیم به معادله $y = x + 1$ بوده و محدود به خطوط $x = 0$ ، $x = 2$ می‌باشد.

حل:  ناحیه مورد نظر در شکل زیر هاشور زده شده است. این ناحیه یک ذوزنقه است. به علاوه می‌دانیم که مساحت این ناحیه ۴ واحد سطح است (چرا؟). اینک مساحت این ناحیه را به عنوان حد مجموع مساحت مستطیل‌هایی که به روش فوق ساخته می‌شوند به روش زیر می‌توانید حساب کنید.

۱- بازه $[0, 2]$ را به n بازه جزء با طول مساوی تقسیم کنید:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{2}{n}, x_2 = \frac{4}{n}, x_3 = \frac{6}{n}, \dots, x_n = \frac{2n}{n} = 2$$

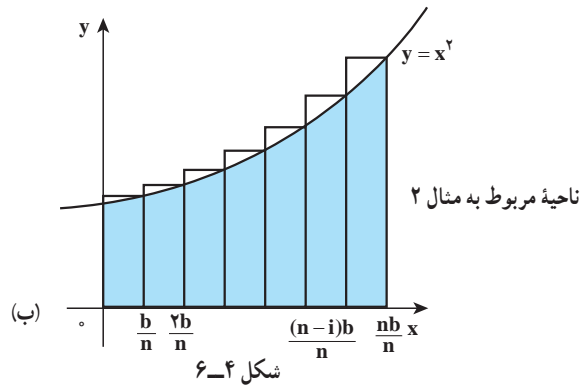
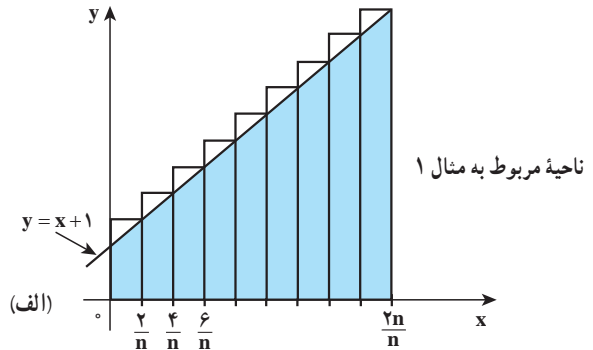
۲- پس مقدار تابع $f(x) = x + 1$ در نقطه دلخواه x_i برابر است با $x_i + 1 = \frac{2i}{n} + 1$

و بازه جزء i ام $\left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n} \right]$ دارای طولی برابر $\Delta x_i = \frac{2}{n}$ است.

۳- ملاحظه می‌کنیم که مجموع مساحت‌های مستطیل‌های نشان داده در شکل ۴-۶ (الف)

برابر است با :

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sum_{i=1}^n i}{n} + 1 \right) \frac{\sum_{i=1}^n i}{n} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n i}{n} \left[\frac{\sum_{i=1}^n i}{n} + \sum_{i=1}^n 1 \right] \\
 &= \left(\frac{\sum_{i=1}^n i}{n} \right) \left[\frac{\sum_{i=1}^n i}{n} + n \right] \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n i}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^n i \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n i}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^n i
 \end{aligned}$$



شکل ۶-۴

بنابراین مساحت A با حدگیری از این دنباله به دست می آید.

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^n i}{n} + 1 \right) = 1 + 1 = 2$$

واحد سطح

❖ **مثال:** مساحت ناحیه ای را که محدود به سهمی $y = x^2$ و خطوط $y = 0$ ، $x = 0$ ، $x = b > 0$ ،

می باشد به دست آورید.

حل: هرگاه مساحت ناحیه مورد بررسی را A بنامیم، A برابر حد مجموع های S_n (دنباله $\{S_n\}_{n=1}$)

مربوط به مساحت مستطیل های نشان داده شده در شکل ۶-۴ (ب) می باشد. با استفاده از افزایش منظمی با $n+1$

نقطه افزایشی، طول هریک از بازه ای جز، برابر $\frac{b}{n}$ می شود. پس ارتفاع مستطیل i ام برابر $\left(\frac{ib}{n}\right)^2$ است. بنابراین

بنابر قضیه (ج)

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{ib}{n} \right)^2 \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

از این رو مساحت مورد نظر با حدگیری به دست می آید :

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b^3 \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{b^3}{3} \quad \text{واحد سطح}$$



۱- با استفاده از اتحاد $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ و قاعده تلسکوپی نشان دهید

$$\sum_{i=1}^k i^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 \quad \text{که}$$

۲- مساحت ناحیه ای را که محدود به نمودار $y = x^2$ و خطوط $x = b > 0$, $x = 0$, $y = 0$ می باشد به دست آورید. (راهنمایی: از اتحاد به دست آمده در مسأله ۱ استفاده کنید)

گرچه ممکن است به نظر باطل نما جلوه کند، اما همه علوم دقیق (علوم محض) تحت تسلط ایده تقریب هستند. (برتراند راسل - ریاضی دان انگلیسی)

یک پرسش اساسی

به لحاظ هندسی کاملاً مشهود است که مساحت تحت نمودار تابع f به شکل نمودار f بستگی دارد. نمودار هر تابع در واقع رفتار هندسی مقادیر تابع را نمایان می سازد.

پس مقدار مساحت در مرحله اول به تابع مورد نظر بستگی دارد. در مرحله بعد البته مقدار مساحت به بازه $[a, b]$ که تابع در آن تعریف شده است، یعنی خطوط $x = a$ و $x = b$ که مرزهای عمودی ناحیه را می سازند نیز بستگی خواهد داشت. برای آنکه بیشتر وارد جزئیات جبری مسأله شویم، به مثال ۲ مراجعه می کنیم. ملاحظه کردیم که مساحت ناحیه محدود به نمودار $y = x^2$ و خطوط $x = 0$ و $x = b$ (یعنی بازه $[0, b]$) برابر است با:

$$A = \frac{b^3}{3}$$

پس هرگاه بخواهیم مساحت محدود به نمودار $y = x^2$ را با پایه $[0, x]$ حساب کنیم، این مساحت

$$A(x) = \frac{x^3}{3}$$

برابر

خواهد شد. حال سؤال اساسی در این جا چنین است که مدل $A(x)$ چه رابطه‌ای با تابع $y = x^2$ دارد؟
 همین سؤال را در مورد مثال ۱ نیز می‌توان مطرح کرد. در این جا $f(x) = x + 1$ و برای محاسبه
 مساحت آن بر بازه $[0, b]$ (به جای $[0, 2]$ در مثال) داریم:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{b}{n}, x_2 = \frac{2b}{n}, \dots, x_n = \frac{nb}{n} = b$$

$$f(x_i) = x_i + 1 = \frac{ib}{n} + 1 \quad \text{داریم:}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{ib}{n} + 1 \right) \frac{b}{n} \quad \text{بنابراین:}$$

$$= \frac{b}{n} \left[\frac{b}{n} \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right]$$

$$= \frac{b}{n} \left[\frac{b}{n} \frac{n(n+1)}{2} + n \right]$$

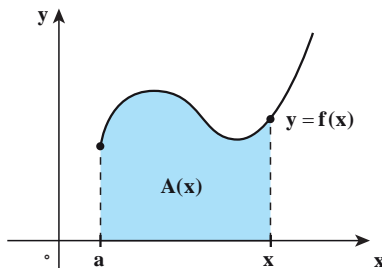
$$= \frac{(n+1)}{n} \times \frac{b^2}{2} + b$$

$$A(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^2}{2} \times \frac{n+1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} b \quad \text{و با حدگیری به دست می‌آوریم:}$$

$$= \frac{b^2}{2} + b$$

و هرگاه بخواهیم بازه $[a, x]$ را منظور کنیم مساحت موردنظر به عنوان تابعی از x به دست

$$A(x) = \frac{x^2}{2} + x \quad \text{خواهد آمد:}$$

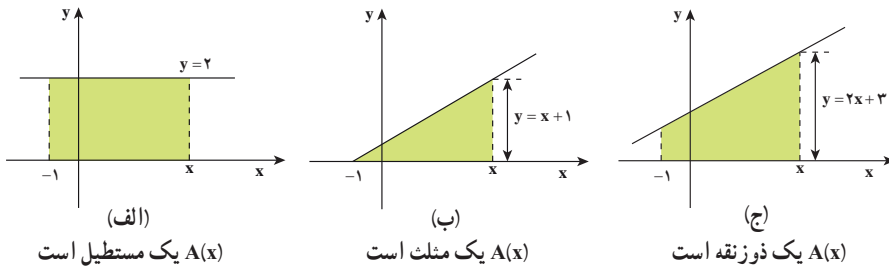


شکل ۴-۷- وقتی a ثابت باشد $A(x)$ به x بستگی خواهد داشت.

برای هریک از توابع f ، مساحت $A(x)$ محصور به نمودار f و بازه $[-1, x]$ را به دست آورید. سپس مشتق تابع A یعنی $A'(x)$ را محاسبه کرده و با تابع f مقایسه کنید.

(الف) $f(x) = 2$ (ب) $f(x) = x + 1$ (ج) $f(x) = 2x + 3$

برای راهنمایی نمودار تابع f و بازه $[-1, x]$ در هر مورد در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۴-۸

مسائل

با استفاده از افرازهای مناسب همانند مثال‌های ۱ و ۲ این درس مساحت نواحی را که در تمرین‌های ۷-۱ آمده‌اند محاسبه کنید:

- ۱- ناحیه تحت $y = 3x$ ، بالای $y = 0$ از $x = 0$ تا $x = 1$.
- ۲- ناحیه تحت $y = 2x + 1$ ، بالای $y = 0$ از $x = 0$ تا $x = 3$.
- ۳- ناحیه تحت $y = 2x - 1$ ، بالای $y = 0$ از $x = 1$ تا $x = 3$.
- ۴- ناحیه تحت $y = 3x + 4$ ، بالای $y = 0$ از $x = -1$ تا $x = 2$.
- ۵- ناحیه تحت $y = x^2$ ، بالای $y = 0$ از $x = 1$ تا $x = 3$.
- ۶- ناحیه تحت $y = x^2 + 1$ ، بالای $y = 0$ از $x = 0$ تا $x = a > 0$.
- ۷- ناحیه تحت $y = x^2 + 2x + 3$ ، بالای $y = 0$ از $x = -1$ تا $x = 2$.

در تمرین‌های ۱۱-۸ مساحت‌ها را محاسبه کنید. به خاطر داشته باشید که مساحت همواره عددی مثبت خواهد بود.

- ۸- ناحیه بالای $y = x^2 - 1$ زیر $y = 0$.

۹- ناحیه بالای $y = 1 - x$ ، زیر $y = 0$ از $x = 2$ تا $x = 4$.

۱۰- ناحیه بالای $y = x^2 - 2x$ ، زیر $y = 0$.

۱۱- ناحیه تحت $y = 4x - x^2 + 1$ بالای $y = 1$.

۱۲- مساحت ناحیه محدود به $y = x^2$ را که بالای محور x بوده و بین خطوط $x = 0$ و

$$x = b > 0 \text{ است به دست آورید (راهنمایی از فرمول } \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ استفاده کنید.)}$$

۱۳- مساحت تحت منحنی به معادله $y = \frac{1}{x}$ را که بالای $y = 0$ و محدود به $x = a > 0$ و

$x = b > a$ است به دست آورید.

۳-۴- انتگرال معین

هدفمان در این بخش تعمیم آن چیزی است که در بخش قبلی برای محاسبه مساحت‌ها به کار بردیم. با استفاده از چنین تعمیمی مفهوم انتگرال معین تابعی مانند f را که بر بازه I تعریف شده است تعریف می‌کنیم. در بخش قبلی با استفاده از روش مستطیل‌ها و تشکیل دنباله $\{S_n\}$ و حدگیری به محاسبه مساحت پرداختیم. در این بخش برای محاسبه مساحت از دو راه وارد می‌شویم: از یک طریق مستطیل‌های کوچک را طوری انتخاب می‌کنیم که همگی زیر نمودار f واقع شوند و در طریق دیگر مستطیل‌های کوچک را طوری می‌گیریم که همگی بالای نمودار f قرار گیرند. این روش به ما این امکان را می‌دهد که با تقریبات نقصانی و همچنین تقریبات اضافی به مساحت تحت نمودار نگاه کنیم. در سرتاسر این بخش فرض می‌کنیم که تابع f کراندار باشد اما به این فرض که مقادیر f نامنفی باشند نیازی نخواهیم داشت. در واقع از ایده اولیه محاسبه مساحت عدول کرده و به تابع f بر بازه $[a, b]$ عددی وابسته خواهیم کرد که انتگرال معین f بر بازه $[a, b]$ نامیده خواهد شد. در این‌جا، گرچه هنوز شهود و نگرش هندسی کمک‌ساز خواهد بود اما استدلال و فرایند جبری نقش مهم‌تری را عهده‌دار خواهد بود؛ و این چاشنی تعمیم در ریاضیات است که به تجربه و جبر نقش اساسی‌تری می‌دهد تا با موارد مجردتر بهتر و مؤثرتر برخورد گردد.

فرض کنیم P افرازی از بازه $[a, b]$ باشد. بنابراین P مجموعه‌ای از اعداد $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ است که در آن $x_0 = a, x_n = b, x_{i-1} < x_i$ است به افراز P بستگی دارد. درشت‌ترین افراز.

بازه $[a, b]$ افرازی است که فقط شامل یک بازه جزء یعنی خود بازه $[a, b]$ است. در این

صورت عدد n برابر ۱ است. هرچه تعداد نقاط افراز بیشتر باشد، افراز ظریفتر خواهد بود و عدد n افزایش خواهد یافت. ضمناً یادآوری می‌کنیم که عدد $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

طول بازه جزء i ام می‌باشد. چون تابع f بر هر بازه جزء $[x_{i-1}, x_i]$ نیز پیوسته است، پس ماکسیمم و مینیمم (مطلق) خود را در این بازه اختیار می‌کند. یعنی نقاطی مانند L_i و U_i از $[x_{i-1}, x_i]$ است که برای هر $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ و $f(L_i) \leq f(x) \leq f(U_i)$

هرگاه $f(x) \geq 0$ بر $[a, b]$ ، آنگاه $f(L_i)\Delta x_i$ و $f(U_i)\Delta x_i$ نشانگر مساحت مستطیل‌های با قاعده (عرض) $[x_{i-1}, x_i]$ بوده که نوک مستطیل اول زیر نمودار f و نوک مستطیل دوم بالای نمودار f قرار دارند (شکل ۴-۹). به عبارت دیگر هرگاه ناحیه با قاعده $[x_{i-1}, x_i]$ محدود به نمودار تابع f از A_i بنامیم، $f(L_i)\Delta x_i$ نمایشگر مساحت مستطیلی است که درون A_i محاط شده، در حالی که $f(U_i)\Delta x_i$ نمایشگر مساحت مستطیلی است که محیط بر A_i می‌باشد. به زبان جبری:

$$f(L_i)\Delta x_i \leq A_i \leq f(U_i)\Delta x_i \quad (۱)$$

هرگاه f مقادیر منفی نیز اختیار کند آنگاه $f(L_i)\Delta x_i$ یا $f(U_i)\Delta x_i$ و یا هر دوی آنها ممکن است منفی باشند، در چنین صورتی این عبارات‌ها نمایشگر قرینه مساحت مستطیلی هستند که زیر محور x واقع است، در هر صورت که f همواره مقادیر نامنفی اختیار کند و یا مقادیر منفی نیز بگیرد نامساوی $f(L_i) \leq f(U_i)$ برقرار بوده و لذا همواره $f(L_i)\Delta x_i \leq f(U_i)\Delta x_i$ برقرار است.

مجموع‌های بالا و پایین: اکنون به تعریف مجموع‌های بالا و پایین می‌پردازیم. قبل از این، برای ساده‌تر کردن نمادهایمان همواره فرض می‌کنیم که افراز چنان باشد که طول همه بازه‌های جزء حاصله مساوی باشند، پس هرگاه افراز P شامل $n+1$ نقطه بوده و در نتیجه n بازه جزء پدید آورد طول هر بازه جزء برابر $\frac{b-a}{n}$ می‌باشد.

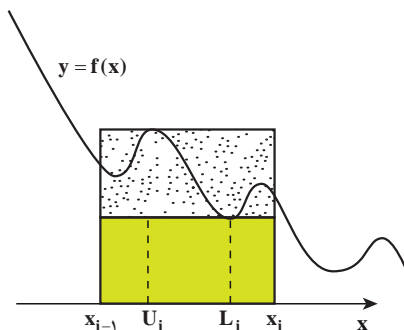
این‌گونه افرازاها را **افرازهای منظم** می‌نامیم. عدد طبیعی n مشخص کننده افرازی با $n+1$ نقطه با طول بازه‌ای جزء $\frac{b-a}{n}$ است. پس به‌جای آن‌که از افرازاها به عنوان متغیر یاد کنیم از عدد طبیعی n یاد می‌کنیم. در سرتاسر بحث f نمایشگر یک تابع است که در طول بحث ثابت فرض می‌شود.

الف) **مجموع پایین** که با نماد $L(f, p)$ و یا نماد ساده‌تر L_n نشان داده می‌شود چنین تعریف می‌گردد.

$$L_n = f(I_1)\Delta x_1 + f(I_2)\Delta x_2 + \dots + f(I_n)\Delta x_n$$

$$L_n = \sum_{i=1}^n f(I_i)\Delta x_i$$

یعنی



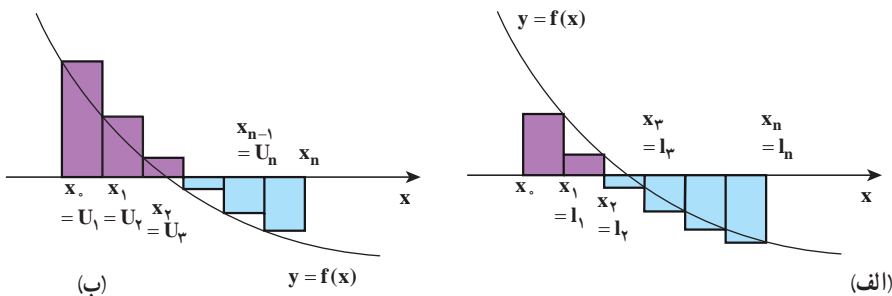
شکل ۴-۹- مستطیل کوچک‌تر سهم $f(l_i)\Delta x_i$ و مستطیل بزرگ‌تر سهم $f(u_i)\Delta x_i$ متناظر با بازه جزء $[x_{i-1}, x_i]$ را نشان می‌دهد.

(ب) مجموع بالا که با نماد $U(f, p)$ و یا نماد ساده شده U_n نشان داده می‌شود چنین تعریف

$$U_n = f(u_1)\Delta x_1 + f(u_2)\Delta x_2 + \dots + f(u_n)\Delta x_n \quad \text{می‌گردد.}$$

$$U_n = \sum_{i=1}^n f(u_i)\Delta x_i$$

در شکل زیر یک حاصل جمع پایین (سمت راست) و یک حاصل جمع بالا (سمت چپ) برای یک تابع نزولی نشان داده شده است. مساحت مستطیل‌های رنگی به صورت مثبت و مساحت مستطیل‌های با رنگ آبی هاشور زده شده به صورت منفی در مقدار انتگرال لحاظ خواهند شد.



شکل ۴-۱۰- (الف) یک مجموع پایین و (ب) یک مجموع بالا را برای یک تابع نزولی نشان می‌دهند. ناحیه‌های رنگی سهم‌های مثبت و ناحیه‌های آبی هاشور زده سهم‌های منفی به مقدار مجموع‌ها می‌دهند.

۱- L حرف اول Lower به معنی پایین و U حرف اول Upper به معنی بالا می‌باشد.

❖ **مثال:** مجموع‌های پایین و بالا را برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ بر بازه $[1, 2]$ با افراز منظم P مستطیل از ۵ نقطه و ۴ بازه جزء محاسبه کنید.

✍ **حل:** چنین افرازی می‌بایست مشتمل بر نقاط به طول‌های $x_0 = 1$ و $x_1 = \frac{5}{4}$ و $x_2 = \frac{3}{2}$ و $x_3 = \frac{7}{4}$ و $x_4 = 2$ باشد. (چرا؟)
چون تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ بر این بازه نزولی است مینیمم و ماکزیمم آن بر بازه به ترتیب برابر $\frac{1}{x_i}$ و $\frac{1}{x_{i-1}}$ می‌باشد. سپس مجموع‌های پایین و بالا چنین‌اند:

$$L_4 = \frac{1}{4} \left(f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) + f(2) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \right) = \frac{533}{840} \approx 0.6345$$

$$U_4 = \frac{1}{4} \left(f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} \right) = \frac{319}{420} \approx 0.7595$$

❖ **مثال:** مجموع‌های پایین و بالا را برای تابع $f(x) = x^2$ بر بازه $[1, 2]$ به ازای $n=4, n=2, n=1$ محاسبه کنید.

✍ **حل:** می‌دانیم تابع f بر $[1, 2]$ صعودی است، پس بر هر بازه جزء آن نیز صعودی است. لذا برای بازه جزء i ام یعنی $[x_{i-1}, x_i]$ و $l_i = x_{i-1}$ و $u_i = x_i$ وقتی $n=1$ فقط یک بازه جزء وجود دارد و آن هم بازه $[1, 2]$ است:

$$L_1 = (2-1)f(1) = 1 \quad \text{و} \quad U_1 = (2-1)f(2) = 4$$

برای $n=2$ ، دو بازه جزء $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ و $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ خواهیم داشت. پس

$$L_2 = \frac{1}{2} \left(f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{9}{4} \right) = 1.625$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{4} + 4 \right) = 3.125$$

برای $n=3$ ، سه بازه جزء داریم $[1, \frac{4}{3}]$ $[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}]$ $[\frac{5}{3}, 2]$

$$L_3 = \frac{1}{3} (f(1) + f(\frac{4}{3}) + f(\frac{5}{3})) = \frac{1}{3} (1 + \frac{16}{9} + \frac{25}{9}) = \frac{50}{27} = 1/851$$

$$U_3 = \frac{1}{3} (f(\frac{4}{3}) + f(\frac{5}{3}) + f(2))$$

$$= \frac{1}{3} (\frac{16}{9} + \frac{25}{9} + 4) = \frac{77}{27} = 2/651$$

با انتخاب $n=4$ مشابهاً مقادیر $U_4=2/718$ و $L_4=1/968$ را به دست می آوریم.

بالاخره با انتخاب $n=8$ مقادیر $U_8=2/148$ و $L_8=2/534$ را به دست می آوریم.



در رابطه با تابع مثال ۲، $L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7$ و همچنین $U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7$ را محاسبه کنید.

نکته: مقادیر L_1 تا L_n نشانگر آنند که دنباله $\{L_n\}_{n=1}$ دنباله ای صعودی است، در حالی که مقادیر U_1 تا U_n نشان می دهند که دنباله $\{U_n\}_{n=1}$ دنباله ای نزولی است. البته این حدسی بیش نیست، اما می توانید آن را به طریق ملموس و شهودی با استفاده از مستطیل های محاطی و محیطی برای یک نمودار دلخواه از تابعی پیوسته و به تعیین نزدیک نمایید. کافی است دو جمله متوالی مانند L_n, L_{n+1} را با هم مقایسه کنید.

پرسش: آیا می توانیم بگوییم که دنباله های U_n, L_n به یک عدد همگرا هستند؟

مجموع های پایین و بالا را برای تابع $f(x)=x^2$ بر بازه $[0, \alpha]$ محاسبه کنید؛ مجموع هایی که متناظر افزایش منظم از این بازه مشکل از $n+1$ نقطه و n بازه جزء بوده باشند. بدین سان جملات عمومی دنباله ای $\{L_n\}$ ، $\{U_n\}$ را محاسبه خواهید کرد. سپس

$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ را به دست آورید. چه نتیجه ای می گیرید؟

این مثال‌ها و بررسی‌ها ما را به صورت بندی تعریف مهم زیر رهنمون می‌کند:


هرگاه دنباله‌های عددی مجموع‌های بالا و پایین تابع f به یک عدد مانند A همگرا باشند، عدد A را انتگرال معین این تابع بر بازه $[\alpha, b]$ می‌نامیم و می‌نویسیم.

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

\int که صورت کشیده حرف S است از حرف اول کلمه مجموع (Sum) اقتباس شده است و آن معادل حرف سیگما Σ یونانی است. بنابراین $A = \int_a^b f(x) dx$ را انتگرال معین f بر $[a, b]$ و یا انتگرال معین f از a تا b می‌نامیم.

باید توجه کنیم وقتی f تابعی نامنفی است تعبیر هندسی انتگرال معین مساحت تحت نمودار f و محدود به بازه $[a, b]$ است اما ما این شرط را نداشته‌ایم، بنابراین انتگرال معین، در حالت کلی عددی حقیقی است که می‌تواند مثبت، منفی و یا برابر صفر باشد.

❖ **مثال:** ثابت کنید تابع $f(x) = x^2$ بر بازه $[0, a]$ ، $a > 0$ ، انتگرال پذیر است و مقدار $\int_a^0 x^2 dx$ را به دست آورید.

 **حل:** قبلاً دنباله‌های L_n ، U_n را محاسبه کردیم. کافی است حد این دنباله‌ها را به دست آوریم.

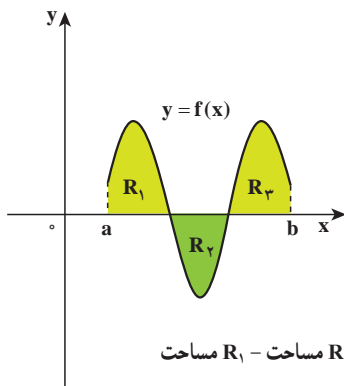
$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(2n-1)a^3}{6n^2} = \frac{a^3}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)a^3}{6n^2} = \frac{a^3}{3}$$

$$\int_a^0 x^2 dx = \frac{a^3}{3} \quad \text{بنابراین:}$$

نکته: باید توجه داشته باشیم که تعریف انتگرال به شکل فوق مستقل از مفهوم مساحت است، گرچه این مفهوم در آغاز از مفهوم مساحت به وجود آمده است. وقتی تابع f بر بازه $[0, a]$ تابعی نامنفی باشد، یعنی نمودار آن بالای محور x باشد، مقدار انتگرال معین برابر مساحت محدود به نمودار تابع f و خطوط $x=a$ و $x=b$ است. برای وقتی که همواره $f(x) \leq 0$ ، یعنی نمودار تابع پایین محور x است، $\int_a^b f(x) dx$ برابر قرینه مساحت محدود به نمودار f و خطوط $x=a$ و $x=b$ می‌باشد. در حالت کلی، $\int_a^b f(x) dx$ برابر است با مساحت قسمتی از ناحیه R (یعنی ناحیه تحت نمودار و محدود به خطوط $x=a$ و $x=b$) که بالای محور x است منهای مساحت بخشی از R که زیر محور x

است. (شکل ۴-۱۱)



شکل ۴-۱۱. برابر است با مساحت R_2 + مساحت R_1 - مساحت R_3

تمرین در کلاس

۱- $\int_a^a x dx$ را که در آن $a > 0$ ، محاسبه کنید.

۲- $\int_a^b dx$ را محاسبه کنید. توجه کنید که در اینجا $f(x)=1$ تابع ثابت با مقدار ۱ است.

۳- $\int_a^b c dx$ را، که در آن $f(x)=c$ تابع ثابت با مقدار c است، محاسبه کنید.

تعمیم: در تعریف انتگرال معین فرض کردیم که تابع f بر $[a,b]$ پیوسته است. اکنون یک گام به جلو بر می‌داریم و فرض می‌کنیم که تابع f بر $[a,b]$ کراندار بوده اما لزوماً پیوسته نباشد. می‌دانیم که هر تابع پیوسته بر یک بازه بسته کراندار است اما عکس این حکم در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. قصدمان این است که انتگرال معین را برای توابع کراندار نیز تعریف کنیم.

فرایند تعریف را که برای توابع پیوسته به کار گرفتیم در اینجا نیز می‌توانیم اعمال کنیم. تنها یک تفاوت کوچک وجود دارد که در نتیجه کار بلااثر می‌باشد. فرض کنیم P یک افراز $[a,b]$ باشد. f بر $[a,b]$ کراندار است پس بر هر بازه جزء $[x_{i-1}, x_i]$ نیز کراندار است. چون (مقادیر) f بر این بازه یک مجموعه کراندار است، پس از بالا کراندار است. پس دارای سوپریمی مانند M_i است. مشابهاً چون f بر این بازه کراندار است از پایین کراندار بوده و در نتیجه دارای اینفیمی مانند m_i است.

واضح است که برای هر $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ، $m_i \leq f(x_i) \leq M_i$. در نتیجه $m_i \Delta x_i \leq f(x_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$. اکنون مجموع‌های بالا و پایین را چنین تعریف می‌کنیم.

$$U_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad L_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

هرگاه دنباله‌های $\{L_n\}$ و $\{U_n\}$ هر دو به یک عدد مانند A همگرا باشند گوییم تابع f بر $[\alpha, \beta]$ انتگرال پذیر است و عدد A را مقدار انتگرال معین f بر این بازه می‌نامیم. به زبان نمادی می‌نویسیم.

$$\int_a^b f(x) dx = A$$

اینک این تعریف را با تعریف قبلی در باب توابع پیوسته مقایسه کنید.

وقتی تابع پیوسته است، m_i به ازای نقطه‌ای مانند l_i از $[x_{i-1}, x_i]$ حاصل می‌شود.

$$m_i = f(l_i)$$

$$M_i = f(u_i)$$

همچنین M_i به ازای u_i از $[x_{i-1}, x_i]$ به دست می‌آید.

و ماجرا عیناً به حالت قبل برمی‌گردد.

اما تعریف اخیر کلی است و نیازی ندارد که f پیوسته فرض شود، بلکه کافی است f کراندار فرض گردد.

تعمیم‌های دیگری نیز می‌توان صورت‌بندی کرد لیکن از حوصله این درس خارج است. به مثال زیر توجه کنید.

❖ **مثال:** تابع f بر بازه $[0, 1]$ چنین تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$$

ثابت کنید انتگرال معین $\int_0^1 f(x) dx$ وجود ندارد.

🚀 **حل:** فرض کنیم P افزایش دلخواه از $[0, 1]$ با $n+1$ نقطه افزایشی باشد.

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

بنابراین

هرگاه m_i و M_i را به ترتیب مینیمم و ماکزیمم تابع f بر بازه i ام بنامیم، چون در هر بازه اعداد گویا و گنگ وجود دارد،

$$m_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$M_i = 1, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$L_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \times \frac{1}{n} = 0 \quad \text{در نتیجه:}$$

$$U_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 = \frac{1}{n} \times n = 1$$

بنابراین $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 1$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 0$ زیرا L_n دنباله ثابت صفر و U_n دنباله ثابت ۱ است. در

نتیجه تابع f بر $[0, 1]$ انتگرال پذیر نمی‌باشد.

تابع f را بر بازه $[-1, 1]$ چنین تعریف می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ 1-x & , x < 0 \end{cases}$$

ثابت کنید $\int_{-1}^1 f(x) dx$ وجود دارد و مقدار آن را به دست آورید. (نمودار تابع را رسم کنید).

قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

❖ **قضیه ۱:** هر تابع پیوسته بر یک بازه بسته، انتگرال پذیر است.

نتیجه: هرگاه f پیوسته باشد می‌توانیم با یکی از دنباله‌های $\{L_n\}$ یا $\{U_n\}$ کار کنیم و با حدگیری مقدار انتگرال را به دست آوریم.

نکته: در حساب مقدماتی آموخته‌اید که نامساوی‌های هم‌جهت را می‌توان با هم جمع کرد:

$$\begin{aligned} a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2 & \quad \text{هرگاه} \\ a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2 & \quad \text{آنگاه} \end{aligned}$$

یعنی

و اگر یکی از نامساوی‌های فرض اکید باشد، نامساوی به دست آمده نیز اکید است. این ویژگی نامساوی‌ها به آسانی قابل تعمیم است:

هرگاه $\alpha_i \leq b_i$ ($1 \leq i \leq n$) نامساوی باشند آنگاه $\sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n b_i$. از این ویژگی نامساوی‌ها استفاده می‌کنیم و یکی از خواص توابع پیوسته را در رابطه با مقدار انتگرال به آسانی به دست می‌آوریم؛ در مابقی این بخش مجدداً همه جا f را پیوسته فرض می‌کنیم.

❖ **قضیه ۲:** هرگاه تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته باشد و m و M به ترتیب مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad \text{بر این بازه باشند، آنگاه}$$

❖ **برهان:** فرض کنیم P افرازی منظم با n بازه جزء از بازه $[a, b]$ باشد.

برای هر i ، $f(U_i) \leq M$ ، $m \leq f(L_i)$ (چرا).

$$L_n = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(L_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(L_i) \quad \text{پس:}$$

$$\begin{aligned} & \geq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n m = \frac{b-a}{n} \times m \sum_{i=1}^n 1 \\ & = \frac{b-a}{n} \times m \times n = m(b-a) \end{aligned}$$

$$U_n = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(U_i) \quad \text{همچنین:}$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i) \leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n M = (b-a)M$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} L_n \geq m(b-a) \quad \text{در نتیجه، با حدگیری،}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \leq M(b-a)$$

اکنون دو نامساوی را با هم می‌نویسیم

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

(۱)

آیا می‌توانید این نامساوی‌ها را در شکل ۴-۱۲ تعبیر کنید؟ مستطیل‌های با پایه $b-a$ و ارتفاع m و M را در نظر بگیرید.

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \quad \text{نامساوی‌های (۱) را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت}$$

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

تعریف: قرار می‌دهیم

\bar{f} را مقدار متوسط یا میانگین تابع f بر بازه $[a, b]$ می‌نامیم.

میانگین تابع f برابر ارتفاع مستطیلی با پایه $b-a$ است که مساحت آن برابر مساحت ناحیه تحت f (برای $f \geq 0$) محدود به خطوط $x=a$ و $x=b$ می‌باشد.

❖ مثال: می‌خواهیم بدون محاسبه انتگرال معین، برای $\int_1^3 (x^3 - 3x^2 + 1) dx$ کران بالا و

کران پایینی بدست آوریم.

حل: تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ در بازه $[1, 3]$ دارای مقدار ماکسیمم مطلق ۱ و مینیمم

مطلق -۳ است (چرا؟)

$$-3(3-1) \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 1(3-1)$$

پس، طبق قضیه ۲ داریم:

و یا

$$-6 \leq \int_1^3 (x^3 - 3x^2 + 1) dx \leq 2$$

نشان دهید که،

$$0 \leq \int_{-3}^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx \leq \frac{3}{2}$$

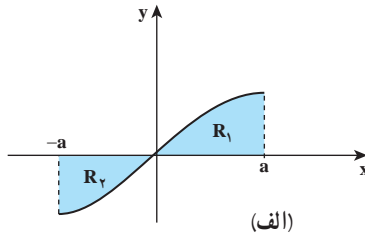
۱- فرض کنیم f تابعی زوج بر $[-a, a]$ باشد، یعنی برای هر x از این بازه

$$f(-x) = f(x) \text{ ثابت کنید : } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

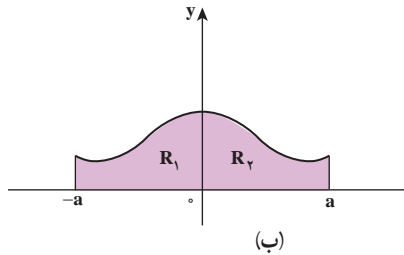
۲- فرض کنیم f تابعی فرد بر $[-a, a]$ باشد، یعنی برای هر x از این بازه $f(-x) = -f(x)$

ثابت کنید.

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$



شکل (الف) تابع f فرد است.



شکل (ب) تابع f زوج است.

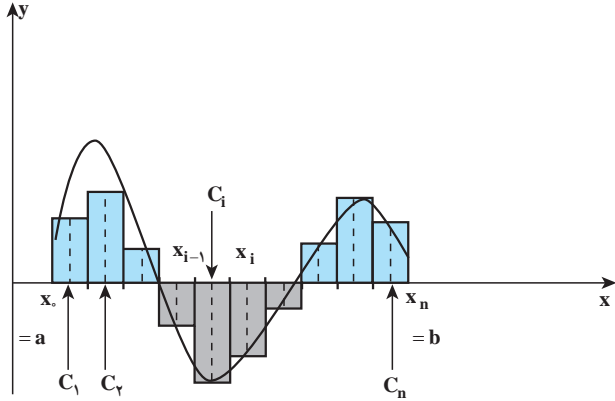
(تعبیری دیگر از انتگرال معین) - فرض کنیم تابع f بر بازه $[\alpha, b]$ پیوسته باشد؛

$$P: x_0 = \alpha < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

همچنین

افرازی دلخواه از این بازه باشد. هرگاه $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($1 \leq i \leq n$) نقطه دلخواهی از بازه جزء Δ نام باشد، ثابت کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$



مجموع مساحت مستطیل‌های رنگی منهای حاصل جمع مستطیل‌های با رنگ خاکستری است.

راهنمایی: از اینکه f بر هر بازه جزء پیوسته است استفاده کنید. سپس با استفاده از حاصل جمع‌های بالا و پایین و قضیه فشردگی، تساوی فوق به آسانی به دست می‌آید.

مسائل

در تمرین‌های ۱-۶، P_n یک افراز منظم از بازه $[a, b]$ است به طوری که $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ برای این تمرین‌ها، U_n ، L_n را برای مقدار مفروض n به دست آورید.

۱- $f(x) = x$ بر $[0, 2]$ ، با انتخاب $n=8$.

۲- $f(x) = x^2$ بر $[0, 4]$ ، با انتخاب $n=4$.

۳- $f(x) = e^x$ بر $[-2, 2]$ ، با انتخاب $n=4$.

۴- $f(x) = L_n(x)$ بر $[1, 2]$ ، با انتخاب $n=5$.

۵- $f(x) = \sin x$ بر $[0, \pi]$ ، با انتخاب $n=6$. مقدار انتگرال را با مساحت توضیح دهید.

۶- $f(x) = \cos x$ بر $[0, 2\pi]$ ، با انتخاب $n=4$. مقدار انتگرال را با مساحت توضیح دهید.

در تمرین‌های ۷-۸ ابتدا U_n ، L_n را برای افراز منظم با n بازه جزء محاسبه کنید.

سپس ثابت کنید که $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ از این رو انتگرال معین مربوطه را به دست آورید.

$$7- \text{بر } [a, b] = [0, 2] \text{ } f(x) = 1 - x$$

$$8- \text{بر } [a, b] = [0, 1] \text{ } f(x) = x^2$$

$$9- \text{انتگرال را محاسبه کنید. } \int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$$

۱۰- فرض کنیم f تابعی پیوسته و صعودی اکید بر $[a, b]$ و P افراز منظم با n بازه جزء از این

بازه بوده باشد. ثابت کنید.

$$U_n - L_n = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}$$

چون سمت راست این عبارت را می‌توانیم با انتخاب n به قدر کافی بزرگ از هر عدد مثبتی کوچک‌تر کنیم، تابع f می‌بایست بر $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد. (این مسأله اثباتی ساده از کدام قضیه به دست می‌دهد؟)

۱۱- دو تمرین جفت برای تمرین‌های ۵ و ۶ به شکل زیر می‌تواند مطرح شود:

$$\int_0^\pi \sin x dx \text{ و } \int_0^{2\pi} \cos x dx . \text{ این مقادیر را حساب کرده و آنها را به ترتیب با اعداد به دست}$$

آمده در ۵ و ۶ مقایسه کنید.

۴-۴- ویژگی‌های انتگرال معین

ریاضیدانان را عادت بر این است که وقتی مفهومی را برای موارد ملموس و فیزیکی فرمول‌بندی

می‌کنند، آن را به صورتی کلی‌تر و در واقع در نهایت کلی آن، تعمیم دهند. ما انتگرال معین $\int_a^b f(x) dx$ را با محدودیت‌هایی مطرح و بررسی کردیم:

ابتدا فرض کردیم f تابعی پیوسته بر بازه $[a, b]$ باشد، سپس آن را به توابع کراندار تعمیم دادیم.

چون بازه $[a, b]$ نقش کلیدی در تعریف انتگرال داشت (افرازها چنین نقشی داشتند) پس $a < b$ ؛

و این یک فرض الزام‌آور به حساب آمده است!

سخن از وقتی که f ناپیوسته باشد و یا آنکه f بر $[a, b]$ بی‌کران باشد خارج از برنامه این درس

است.

اما برای وقتی که $a = b$ یا $a > b$ ، به آسانی می‌توانیم مفهوم انتگرال معین را تعمیم دهیم.

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{(الف) قرار می‌دهیم}$$

در واقع در چنین صورتی هر افراز از بازه $[a, b]$ فقط شامل یک نقطه است و لذا طول هر بازه جزء $\Delta x_i = 0$ است. x_i ها به شکل ضریب در Σ ظاهر می‌شوند، پس تعریف فوق که حالت خاص از انتگرال معین است، طبیعی می‌نماید.

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad \text{(ب) هرگاه } a > b \text{، تعریف می‌کنیم.}$$

❖ **قضیه ۳ (خواص خطی انتگرال):** فرض کنیم f و g توابعی انتگرال پذیر $[a, b]$ و c_1 و c_2 دو

عدد ثابت باشند. در این صورت تابع $c_1 f + c_2 g$ نیز بر $[a, b]$ انتگرال پذیر است؛ به علاوه

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx \quad (1)$$

عبارت $c_1 f + c_2 g$ را اصطلاحاً یک ترکیب خطی از f و g می‌نامیم.

رابطه (۱) را با رابطه مشابه در خصوص سیگماها مقایسه کنید.

$$\sum_{i=1}^n (c_1 a_i + c_2 b_i) = c_1 \sum_{i=1}^n a_i + c_2 \sum_{i=1}^n b_i \quad (2)$$

اثبات (۱) نیز اساساً بر اساس مفهوم انتگرال و خواص مشابه برای Σ انجام می‌شود.

$$\int_0^1 (x^3 + 4x^2) dx = \int_0^1 x^3 dx + 4 \int_0^1 x^2 dx \quad \text{❖ مثال:}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{3} = \frac{19}{12}$$

زیرا قبلاً ملاحظه کرده‌ایم که $\int_0^1 x^3 = \frac{1}{4}$ ، $\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}$.

❖ **قضیه ۴:** فرض کنیم f, g توابعی انتگرال پذیر و برای هر $a \leq x \leq b$

$$f(x) \leq g(x)$$

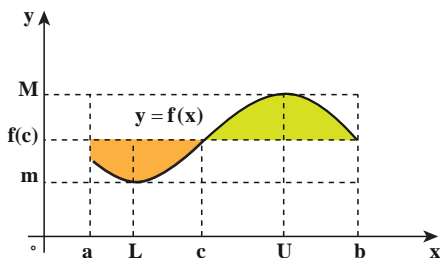
$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad \text{در این صورت}$$

قضیه زیر که به کمک قضیه مقدار میانی اثبات می‌گردد، قضیه مقدار میانگین در انتگرال‌ها نامیده می‌شود.

❖ **قضیه ۵:** (قضیه مقدار میانگین در انتگرال‌ها) هرگاه f بر $[a, b]$ تابعی پیوسته باشد، نقطه‌ای

مانند c از این بازه هست به قسمی که

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(c)$$



شکل ۴-۱۲- مقدار انتگرال برابر مساحت مستطیلی به ارتفاع $f(c)$ و قاعده $b-a$

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \quad \blacklozenge \text{برهان: می دانیم:}$$

که در آن M و m به ترتیب ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع f بر $[a, b]$ هستند.
(قضیه ۲) چون f پیوسته است، بنابر قضیه مقدار میانی فصل ۲، هر مقدار بین ماکزیمم و مینیمم

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c) \quad \text{خود را در نقطه‌ای مانند } c \in [a, b] \text{ می‌گیرد، یعنی:}$$

و یا

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$$

۴-۵- قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

همچنان که در فصل ۳ خوانده‌ایم، هرگاه تابع مشتق‌پذیر F بر بازه $[a, b]$ چنان باشد که $F'(x) = f(x)$ ، F را یک پادمشتق و یا یک تابع اولیه تابع f می‌نامیم. در این بخش سعی مان این است تا ارتباطی بین دو مفهوم انتگرال معین، که در بخش پیشین تعریف گردید، و مفهوم پادمشتق برقرار سازیم. چنان که قبلاً نیز گفته‌ایم، خواهیم دید که این ارتباط به نحوی چشمگیر محاسبه بسیاری از انتگرال‌های معین را میسر می‌سازد. این ارتباط که در واقع ارتباطی بین مفهوم‌های مشتق و انتگرال معین برقرار می‌کند، به طرز شایسته به عنوان قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نامگذاری شده است.

قضیه ۶: (قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال) فرض کنیم تابع f بر بازه I که شامل نقطه a است پیوسته باشد، در این صورت احکام ذیل برقرارند.

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{الف) هرگاه تابع } F \text{ را بر } I \text{ با ضابطه:}$$

تعریف کنیم آنگاه تابع F مشتق‌پذیر است و $F'(x) = f(x)$ ، یعنی F یک تابع اولیه f می‌باشد؛

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x) \quad \text{به عبارت دیگر:}$$

اگر I در یک طرف یا دو طرف بسته باشد، در هر نقطه انتهایی مضمول بازه، مشتق یک طرفه (مشتق راست، مشتق چپ) منظور می شود.

ب) هرگاه G تابع اولیه دیگری برای f باشد، به طوری که $G'(x)=f(x)$ ، آنگاه برای هر دو نقطه از

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) \quad , (a < b), b \text{ و } a \text{ مانند } I$$

❖ **برهان:** با استفاده از تعریف مشتق، مشتق F را محاسبه می کنیم:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \quad \text{بنا بر قضیه ۳}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} h \cdot f(c)$$

که در آن $c=c(h)$ به h بستگی داشته اما بین x و $x+h$ می باشد (قضیه ۵) بنابراین:

$$F'(x) = \lim_{c \rightarrow x} f(c)$$

$$= f(x)$$

زیرا وقتی $h \rightarrow 0, c \rightarrow x$ و f پیوسته می باشد.

ب) چون $G'(x)=f(x)$ ، $F(x)=G(x)+C$ ، برای هر $x \in I$ که در آن C مقدار ثابتی است. از

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) = G(x) + C \quad \text{این رو}$$

$$= G(a) + C \quad \text{اکنون فرض کنیم } x=a, \text{ پس}$$

یعنی $C = -G(a)$. بار دیگر، فرض می کنیم $x=b$ ؛ به دست می آوریم.

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) + C = G(b) - G(a)$$

البته می توانیم t را با x (و یا با هر متغیر دلخواه دیگری) در سمت چپ تساوی فوق تعویض

کنیم.

نکته: هر دو قسمت قضیه اساسی را باید به خوبی به خاطر داشت. قسمت الف به شما می گوید

که چگونه می توان از یک انتگرال نسبت به حد بالایی آن مشتق گیری کرد. قسمت ب) راه محاسبه

یک انتگرال معین را به دست می‌دهد مشروط بر آنکه بتوان یک تابع اولیه برای تابع تحت انتگرال گیری پیدا کرد.

نماد محاسباتی: برای آنکه محاسبه انتگرال‌های معین را با استفاده از قضیه اساسی تسهیل

کنیم نماد محاسباتی زیر را معرفی می‌کنیم.

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

بنابراین اگر $F(x)$ را با نماد $\int f(x) dx$ نشان دهیم.

$$\int_a^b f(x) dx = \left(\int f(x) dx \right) \Big|_a^b$$

$\int f(x) dx$ را **انتگرال نامعین** یا اختصاراً **انتگرال f** نیز می‌نامیم. هر تابع اولیه را که برای

محاسبه انتگرال معین به کار گیریم تأثیری در مقدار انتگرال معین نخواهد داشت زیرا مقدار ثابت در محاسبه حذف خواهد شد.

زیرا فرض کنیم به جای $F(x)$ از $G(x)=F(x)+C$ استفاده کنیم:

$$(F(x) + C) \Big|_a^b = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

$$= F(x) \Big|_a^b$$

پس از هر تابع اولیه برای محاسبه انتگرال معین می‌توان استفاده کرد.

به چند مثال ذیل توجه کنید. آیا قبل از آنکه حل آنها را ملاحظه کنید می‌توانید خودتان به حل

آنها بپردازید، کوشش کنید!

❖ **مثال:** انتگرال‌های معین زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_a^b x^2 dx$ ب) $\int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 2) dx$

حل: 

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_a^b = \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{3} a^3$$

الف)

$$= \frac{a^3}{3}$$

$$= \frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3} \right) = x^2$$

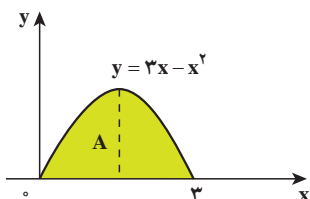
زیرا

ب) $\int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 2) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 2x \right) \Big|_{-1}^2$

$$= \left(\frac{1}{3} (8) - \frac{3}{2} (4) + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} (-1) - \frac{3}{2} (1) + (-2) \right)$$

$$= \frac{9}{2}$$

❖ **مثال:** مساحت ناحیه‌ای از صفحه‌ای که تحت نمودار تابع $y=3x-x^2$ بوده و در نقاط تقاطع با محور x ها به این محور محدود می‌باشد محاسبه کنید.



حل: ابتدا لازم است نقاط تقاطع منحنی نمودار تابع را با محور x ها مشخص کنیم

$$0 = 3x - x^2 = x(3 - x)$$

ریشه‌های این معادله $x=3$ و $x=0$ می‌باشند (شکل فوق). پس مساحت ناحیه مورد تقاضا برابر

$$A = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^3 \quad \text{است با:}$$

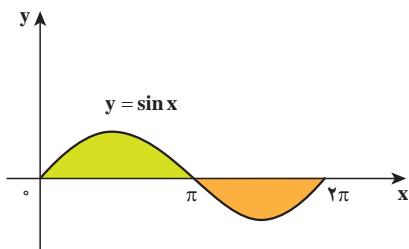
$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} - (0 - 0)$$

$$= \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

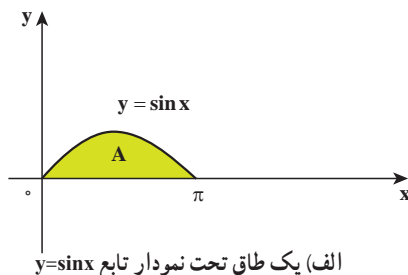
واحد سطح



الف) مساحت یک طاق تحت $y=\sin x$ را محاسبه کنید. (شکل زیر)
ب) در شکل (ب) مساحت ناحیه A را با استفاده از انتگرال به دست آورید.



شکل (ب)



الف) یک طاق تحت نمودار تابع $y=\sin x$

آیا حدس می‌زدید که مساحت یک طاق برابر ۲ واحد سطح باشد؟

توجه دارید که در حالی که انتگرال معین یک عدد است، مساحت یک کمیت هندسی است که به طور ضمنی با واحدهای اندازه‌گیری مربوط می‌شود، هرگاه واحدهای اندازه محورهای x و y بر حسب متر باشد، واحد سطح مساحت مربوطه بر حسب متر مربع خواهد بود. در صورتی که واحد محورهای x و y مشخص نباشد، اندازه مساحت ناحیه را می‌بایست به صورت واحد سطح بیان کرد.

ج) مساحت ناحیه R را که بالای خط $y=1$ و تحت نمودار $y = \frac{5}{x^2+1}$ می‌باشد به دست آورید. (شکل زیر)

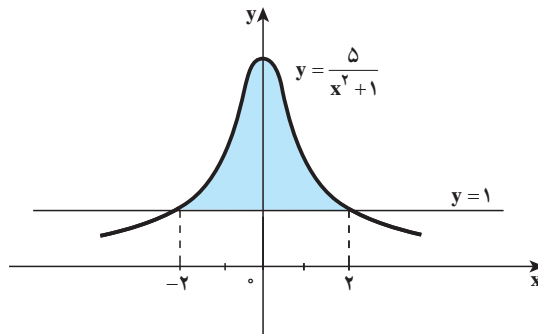
راهنمایی: ناحیه R مورد بحث در شکل زیر هاشور زده شده است. برای آنکه نقاط تقاطع

$$y = \frac{5}{x^2+1} \text{ و } y=1 \text{ را بیابیم باید معادله زیر را حل کنیم.}$$

$$y = \frac{5}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1 = 5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

پس $x^2+1=5$ یا $x^2=4$ ، در نتیجه طول نقاط تقاطع $x = \pm 2$ می‌باشد.

مساحت ناحیه R برابر است با مساحت زیر نمودار تابع



شکل ناحیه مورد محاسبه و به صورت رنگی مشخص شده است.

$y = \frac{5}{x^2+1}$ و محدود به محور x ها و خطوط به معادله‌های $x=2$ و $x=-2$ منهای مساحت مستطیل به طول ۴ و عرض ۱. اکنون معادله مساحت را بر حسب انتگرال نوشته و به محاسبه آن پردازید.

هرگاه جواب $4 - A = \tan^{-1}(2)$ (واحد سطح) را به دست آورده باشید، کاملاً موفق شده‌اید.

نکته: توجه دارید که با استفاده از تقارن تابع (تابع زوج) می‌توانید حد پایین را صفر گرفته و ضریب ۲ را در انتگرال لحاظ کنید؛ قطعاً کار با صفر در محاسبه انتگرال معین ساده‌تر است از کار با -2 .

❖ مثال: مقدار میانگین تابع $f(x) = e^{-x} + \cos x$ را بر بازه $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ به دست آورید.

حل: طبق تعریف، عمل می‌کنیم 

$$\bar{f} = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{-x} + \cos x) dx$$


$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{\pi} (-e^{-x} + \sin x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi} (-1 + 0 + e^{\frac{\pi}{2}} + 1) = \frac{1}{\pi} e^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

یک پرسش مهم

چون $\frac{d}{dx} (\ln |x|) = \frac{1}{x}$ برای $x \neq 0$ ، آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \ln |x| \Big|_{-1}^1 = 0 - 0 = 0$$

به قضیه اساسی یک بار دیگر توجه کنید و رفتار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در بازه $[-1, 1]$ در نظر بگیرید. پاسخ خود را با دلیل منطقی با دبیر خود مطرح کنید.

مثال: مشتق توابع زیر را به دست آورید. 

$$G(x) = x^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\Delta x} e^{-t^2} dt \quad (\text{ب}) \quad F(x) = \int_x^3 e^{-t^2} dt \quad (\text{الف})$$

حل: 

$$F(x) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^x e^{-t^2} dt$$

الف) داریم

$$F'(x) = -e^{-x^2}$$

طبق قضیه اساسی

$$\begin{aligned} G'(x) &= 2x \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\Delta x} e^{-t^2} dt + x^2 \frac{d}{dx} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\Delta x} e^{-t^2} dt \\ &= 2x \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\Delta x} e^{-t^2} dt + x^2 (e^{-(\Delta x)^2}) \times \Delta \end{aligned}$$

ب) بنابر قاعده زنجیری داریم

$$= 2x \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\Delta x} e^{-t^2} dt + \Delta x^2 e^{-2\Delta x^2}$$

مسائل

انتگرال‌های معین ۱-۹ را محاسبه کنید:

۱- $\int_1^2 x^3 dx$

۲- $\int_0^4 \sqrt{x} dx$

۳- $\int_0^{\pi} (1 + \sin t) dt$

۴- $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x}$

۵- $\int_{-1}^1 (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}) dx$

۶- $\int_1^2 (\frac{2}{x^3} - \frac{x^3}{2}) dx$

۷- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

۸- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx$

۹- $\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx$

بعضی انتگرال‌های مقدماتی: چنانچه ملاحظه کرده‌ایم انتگرال معین را به ساده‌ترین شکل

ممکن می‌توان محاسبه کرد مشروط بر آنکه بتوانیم تابع اولیه (انتگرال نامعین) تابع تحت علامت انتگرال را محاسبه کنیم. در آنالیز مقدماتی روش‌هایی برای محاسبه انتگرال‌ها ارائه می‌گردد. معهذاً باید اذعان کرد که عمل انتگرال‌گیری برخلاف مشتق‌گیری، همیشه کار آسانی نمی‌باشد، این امر از آنجا ناشی می‌شود که می‌توان به آسانی توابعی عرضه کرد که برای آنها نتوان تابع اولیه‌ای پیدا کرد. برای مثال

می‌توانیم از تابع $f(x) = e^{x^2}$ نام ببریم که نمی‌توان تابعی مانند F پیدا کرد به قسمی که $F'(x) = f(x)$ در اینجا برای تسهیل بیشتر کار، تابع اولیه برخی از توابع را عرضه می‌کنیم. از این به بعد از تابع اولیه به عنوان انتگرال نامعین یا به طور خلاصه انتگرال نام برده و از علامت انتگرال (S کشیده) ولی بدون حدود بالا و پایین برای انتگرال استفاده می‌کنیم و با فرض اینکه C عدد ثابتی است داریم:

$$۱- \int 1 dx = x + c$$

$$۲- \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$$

$$۳- \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + c$$

$$۴- \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$$

$$۵- \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$۶- \int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c, r \neq -1$$

$$۷- \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$۸- \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$$

$$۹- \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$$

$$۱۰- \int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax| + c$$

$$۱۱- \int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln |\sin ax| + c$$

$$۱۲- \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$



اکنون با استفاده از خواص خطی انتگرال و جدول انتگرال فوق بسیاری از انتگرال‌ها

را می‌توانید محاسبه کنید. برای نمونه انتگرال‌های $\int (x^5 - 3x + e^{3x} - 3) dx$ و

$\int (\sin 3x - \cos 2x) dx$ را محاسبه کنید.

درستی تساوی‌های فوق را در جدول انتگرال‌ها با مشتق‌گیری از طرف دوم محقق سازید.

مسائل

۱- پرسش‌های مفهومی

الف) معنی انتگرال نامعین $\int f(x)dx$ را توضیح دهید.

ب) کدام یک از گزینه‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

۱- انتگرال نامعین یک عدد و انتگرال معین یک تابع است.

۲- انتگرال نامعین یک تابع و انتگرال معین یک عدد است.

۳- انتگرال معین و انتگرال نامعین فرقی با هم ندارند و تفاوت آنها فقط در یک عدد ثابت

است.

۴- برای محاسبه انتگرال معین، در بیشتر موارد، از انتگرال نامعین استفاده می‌کنیم. مجوز

این کار در قضیه ... آمده است.

ج) فرض کنیم f تابعی انتگرال‌پذیر بر بازه $[a, b]$ باشد، میانگین آن، یعنی

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

را تفسیر هندسی کنید.

د) فرض کنیم تابع f بر بازه $[a, b]$ تعریف شده و جزء در تعداد متناهی نقطه از این بازه در سایر

نقاط آن پیوسته باشد. چنین تابعی را یک تابع **قطعه‌ای پیوسته** می‌نامند. (حد چپ و راست تابع f در

نقاط ناپیوستگی موجود باشد) آیا f بر $[a, b]$ انتگرال‌ناپذیر است؟ در صورتی که جوابتان مثبت است،

مقدار انتگرال f را توضیح دهید.

۲- انتگرال‌های معین زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \tan x) dx$ ب)

الف) $\int_0^1 x^2 \sqrt{x} dx$

ت) $\int_0^1 |3x - 1| dx$

ب) $\int_0^1 |\sqrt{x} - 1| dx$

۳- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{2x^2} dx \quad \text{ب)} \quad \int \sin^4 x \cos^2 x dx \quad \text{الف)}$$

$$\int \frac{1 + e^{2x}}{e^x} dx \quad \text{ت)} \quad \int \sqrt{(1 - \sqrt{x})^2 + 4\sqrt{x}} dx \quad \text{پ)}$$

۴- مقدار میانگین تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ را بر بازه $[0, \pi]$ حساب کنید.
 ۵- انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{ب)} \quad \int \frac{(x+2)^3}{x} dx \quad \text{الف)}$$

۶- با مشتق‌گیری از طرف دوم تساوی‌های زیر درستی آنها را محقق کنید.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c \quad a > 0 \quad \text{الف)}$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c \quad a > 0 \quad \text{ب)}$$

۷- مساحت سطح محصور بین منحنی $f(x) = \frac{2 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ و محور x ها و خطوط $x=0$ و

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \text{را حساب کنید.}$$

۸- مساحت سطح محصور بین منحنی‌های $y^2 = 4x$ و $x^2 = 4y$ را حساب کنید.

۹- مساحت سطح محصور بین منحنی تابع $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2}$ و خطوط $y=x$ و $x=3$ و $x=k > 3$ را

بر حسب k حساب کرده و سپس حد این مساحت را وقتی $k \rightarrow +\infty$ به دست آورید.

۱۰- حاصل $\int_0^1 \sin^{-1}(x) dx$ را به دست آورید. (از نمودار $y = \sin^{-1} x$ در بازه $[0, 1]$ و نمودار

$y = \sin x$ در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ کمک بگیرید)



ملاحظه کردیم که در تعریف انتگرال معین افراز بازه انتگرال‌گیری و عبارت‌های $\int m_i \Delta x_i$ و یا $M_i \Delta x_i$ نقش اساسی داشتند. وقتی تعداد نقاط افراز زیاد و زیادتر می‌شود

Δx_i کوچک و کوچک‌تر می‌گردد زیرا $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. بنابراین هر یک از m_i یا M_i را

می‌توان با عرض هر نقطه در بازه جزء $[x_{i-1}, x_i]$ مانند $f(x_i)$ تقریب کرد. در نتیجه مثلاً $\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$

به صورت $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$ در خواهد آمد. از طرف دیگر وقتی n به ∞ میل می‌کند $\Delta x_i \rightarrow 0$

پس سیگمای مورد بحث ما که در حد به $\int_a^b f(x) dx$ میل می‌کند. شامل تعداد بسیار زیاد جمله به صورت $f(x_i) \Delta x_i$ است که در آنها Δx_i فوق‌العاده کوچک‌اند (زیرا حد آنها صفر است). اما عرض‌ها یعنی $f(x_i) \Delta x_i$ ها محدودند پس $f(x_i) \Delta x_i$ نیز فوق‌العاده کوچک‌اند. ریاضیدانانی که در آغاز انتگرال را کشف کردند. بدان، بدین گونه می‌نگریستند:

مجموعی با بی‌نهایت جمله از جملات بی‌نهایت کوچک: در واقع نیوتن و لایبنیتز که هر دو واضعان حساب مشتقات و حساب انتگرال (حسابان) به شمار می‌روند، این حساب را با حساب بی‌نهایت کوچک‌ها و عبارت‌هایی از این دست سامان دادند.

به دلیل مشکلات و نابسامانی‌هایی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال با مفاهیم بی‌نهایت کوچک‌ها بروز کرد، ریاضیدانان بعد از نیوتن و لایبنیتز کوشیدند تا این نابسامانی‌ها را از آنالیز بزدایند. سرانجام پس از حدود یکصد سال از کشف حساب دیفرانسیل و انتگرال، ریاضیدان آلمانی به نام کارل وایراشتراس توانست حسابان را به شکل امروزی با استفاده از مفهوم حد سامان دهد.

درواقع خیلی پیش از نیوتن و لایبنیتز حدود سال ۱۰۴۱ میلادی ابن‌الهیتم (Ibn al-Haitam) یک ریاضیدان مسلمان به کشف حساب بی‌نهایت کوچک‌ها نایل شده بود و متعاقب وی ابوسهل کوهی و ثابت بن قره در مطالعه و بررسی‌های مربوط به محاسبه حجم سهموی با انتگرال $\int_a^t t^4 dt$ درگیر شدند.

مراجع

- ۱- زنگنه؛ حمیدرضا؛ نادری؛ امیر؛ حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع یک متغیره انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان
- ۲- مدقالچی، علیرضا؛ آنالیز ریاضی ۱، انتشارات دانشگاه پیام نور تهران
۱۳۸۶
- ۳- جیمز استوارت، حساب دیفرانسیل و انتگرال، انتشارات فاطمی چاپ اول
۱۳۸۸
- ۴- رولاند ای لارسن، رابرت بی هوستلر، حساب دیفرانسیل و انتگرال جلد اول، ترجمه - علی اکبر عالم زاده - نشر اتحاد
- ۵- سیاوش شهشهانی، حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد اول) انتشارات فاطمی چاپ اول ۱۳۸۶
- 6- Adams, Robert A. Calculus, A complete Course, Pearson Education Canada Inc, Toronto, 2003
- 7- Anton, Howard; Bivens, Irl; Davis, Stephen; Calculus, 9th edition, Wiley (Asia) Pte Ltd, 2010.

