فصل ۲

دنباله‌های اعداد

«ریاضی ملکه‌ی علوم است» کارل فِردِریک گوس[۱]

۲ـ۱ـ دنباله‌ها

اولین فعّالیتی که کودک را با ماهیت اعداد آشنا می‌کند، **شمارش** است. مجموعه‌ی اعداد طبیعی N که از ۱ آغاز می‌شود و یکی یکی افزوده می‌گردد، مثالی از یک **دنباله‌ی عددی** است و هریک از این اعداد یک **جمله** از دنباله‌ی‌اعداد طبیعی نامیده می‌شوند. به بیانی دیگر، برای ساختن دنباله‌ای از اعداد طبیعی، به هر جمله یکی اضافه می‌کنیم تا جمله‌ی بعدی به‌دست آید. چنین دنباله‌هایی می‌توانند از هر عدد طبیعی شروع شوند وتا بی‌نهایت ادامه یابند.

*دنباله‌ی عددی آرایشی از اعداد است که هر عدد یا جمله‌ی آن با یک **قانون یکسان** به دنبال جمله‌ی قبلی می‌آید.*[۲]

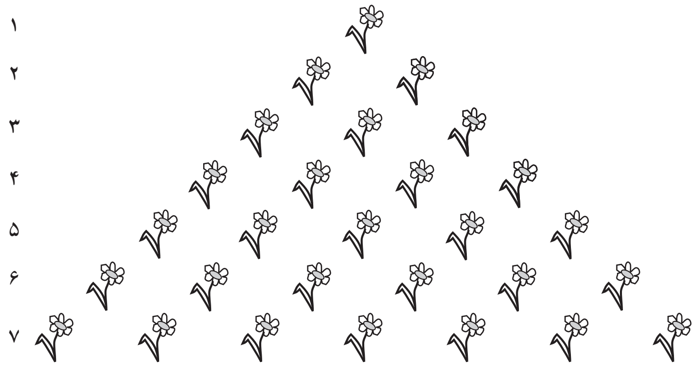
۱ـ Karl Friedrich Gauss

۲ـ این تعریف دسته‌ی خاصی از دنباله‌های اعداد را در بر می‌گیرد.

در مثال‌های زیر، به بررسی راه‌های مختلف پیدا کردن مجموع اعداد طبیعی می‌پردازیم :

فعالیت ۲ــ۱

چند گل برای ساختن شکل زیر لازم است؟



شکل ۱

یکی از راه‌های پاسخ به سؤال فوق، یافتن تعداد گل‌های موجود در هر ردیف است که درسمت چپ نوشته شده است، یعنی : ۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷

راه دیگر از تصویر زیر حدس زده می‌شود :

شکل ۲

در شکل ۲ ؛ تعداد ردیف‌ها ۷ و تعداد گل‌ها در هر ردیف ۸ است.

تمرین ۱ : ویژگی شکل ۲ را مشخص کنید و سپس راه میان‌بری برای تعیین تعداد گل‌ها در شکل ۲ پیدا کنید.

تمرین ۲: با توجّه به شکل ۲، راه میان‌بری برای تعیین تعداد گل‌ها در شکل ۱ پیدا کنید. چه رابطه‌ای بین مجموع گل‌های شکل ۲ و مجموع گل‌های شکل ۱ وجود دارد؟

با دقّت در تمرین‌های ۱ و ۲، متوجّه شدیم که مجموع تعداد گل‌ها در ردیف‌های اوّل و آخر مساوی است با تعداد گل‌ها در ردیف‌های دوّم و ماقبل آخر و به‌همین ترتیب تا آخر، یعنی در شکل ۲، تعداد گل‌ها در هر ردیف برابر است با

۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
۱+	۲+	۳+	۴+	۵+	۶+	۷+
۸	۸	۸	۸	۸	۸	۸

اگر به شکل ۲ دقیق‌تر نگاه کنید، متوازی‌الاضلاعی را می‌بینید که قاعده‌ی آن ۸، یعنی مجموع ردیف‌های اوّل و آخر و ارتفاع آن ۷، یعنی تعداد ردیف‌ها است. حال جواب تمرین ۱ را با مساحت متوازی الاضلاع مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تمرین ۳: دوباره به شکل ۱ نگاه کنید! این شکل ذوزنقه‌ای است که طول قاعده‌ی بالایی آن ۱ (هر گل یک واحد) و طول قاعده‌ی پایینی آن ۷ است. مجدداً جواب تمرین ۲ را با مساحت ذوزنقه مقایسه کنید و نتیجه را یادداشت کنید.

۲ــ۲ــ تاریخچه‌ی یک کشف کوچک[1] یا یک نبوغ بزرگ!

داستانی درباره‌ی گوس که از بزرگ‌ترین نوابغ و ریاضیدان‌های معروف دنیا (۱۸۵۵ــ۱۷۷۷) است نقل می‌کنند[2] که بسیار جالب است. ماجرا از این قرار بوده است که وقتی گوس در دبستان درس می‌خواند روزی معلّم از آن‌ها خواست که اعداد ۱ تا ۱۰۰ را پشت سر هم بنویسند و جمع کنند. قبل از این‌که همکلاسی‌های گوس عددنویسی را به‌پایان ببرند، او مجموع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به‌دست آورد و به معلّمش نشان داد! معلّم برآشفت و فکر کرد که گوس قصد اذیّت کردن او را دارد. با این حال، براثر پافشاری گوس، معلم او به جمع اعداد متوالی از ۱ تا ۱۰۰ پرداخت و پس از صرف مدّت زمانی طولانی به نتیجه‌ای رسید که گوس کودک در چند دقیقه رسیده بود. حدس‌های متعددی درباره‌ی راه حل گوس زده می‌شود. **واقعاً گوس مسأله را چگونه حل کرده بود؟**

۱ــ خلاقیّت ریاضی اثر جورج پولیا.

۲ــ برگردان‌های مختلفی از داستان گوس در منابع تاریخ ریاضی وجود دارد.

نمودار زیر[۱] چند شیوه‌ی مختلف به‌دست آوردن مجموع اعداد متوالی از ۱ تا ۱۰۰ را نشان می‌دهد :

A	B	C	D
۱	۱	۱	۱
۲	~~۲~~	۲	۲
۳	~~۳~~	~~۳~~	۳
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	۵۰	۵۰
.	.	.	۵۱
.	.	۶۵	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	۹۸	~~۹۸~~	۹۸
.	۹۹	۹۹	۹۹
۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰

در ستون A ، طریق به‌دست آوردن مجموع، نوشتن عددها به ترتیب از آغاز و جمع آن‌ها است، یعنی همان شیوه‌ای که در ابتدا برای جمع کردن تعداد گل‌های شکل ۱ به‌کار بردیم.

در ستون B ، جمع اعداد با شروع از انتها یعنی ۱۰۰ به‌ترتیب نزولی

شیوه‌ی به‌دست آوردن مجموع در ستون C ، جمع‌کردن این اعداد بدون هیچ ترتیب خاصی است.

ستون D از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. زیرا رابطه‌ی جالبی بین اعداد ابتدایی و انتهایی دیده می‌شود. این همان راه میان‌بُری است که در تمرین ۲ پیدا کردید. مجموع هردو عددی که به یک فاصله از دو انتها باشند، مجموع معیّنی می‌دهند، یعنی

$$۱+۱۰۰=۲+۹۹=۳+۹۸=\cdots=۵۰+۵۱=۱۰۱$$

و چون مجموعاً ۵۰ جفت از این اعداد داریم، درنتیجه مجموع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ برابر است با

$$۵۰\times۱۰۱=۵۰۵۰$$

دوباره به تمرین ۲ دقّت کنید! در آن تمرین، تعداد گل‌های شکل ۱ را با توجّه به شکل ۲ به‌دست آوردید. درواقع، تعداد گل‌های شکل ۲ در هر ردیف برابر مجموع گل‌های ردیف‌های اوّل و آخر بود

۱ــ به نقل از جرج پولیا، ۱۹۶۲

و چون مجموعاً ۷ ردیف گل داشتیم، درنتیجه مجموع گل‌های شکل ۱ نصف گل‌های شکل ۲ یعنی $\frac{۷}{۲}\times۸$ بود. به بیانی دیگر

$$\text{مجموع گل‌های شکل ۱} = \frac{\text{تعداد ردیف‌ها}}{۲}\text{(تعداد گل‌های ردیف اول + تعداد گل‌های ردیف آخر)}$$

که این همان روش پیدا کردن مساحت ذوزنقه‌ای است که قاعده‌ی کوچک آن ۱، قاعده‌ی بزرگ آن ۷ و بلندی یا ارتفاع آن ۷ یعنی تعداد ردیف‌ها است :

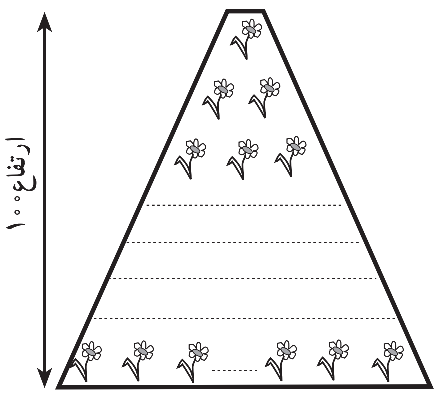
$$\text{مجموع گل‌های شکل ۱} = \frac{\text{ارتفاع}}{۲}\text{(قاعده‌ی کوچک + قاعده‌ی بزرگ)}$$

در مسأله‌ی گوس نیز، ۱۰۱ مجموع عددهای ابتدا و انتها و ۵۰ نصف تعداد آن‌ها بود پس

$$S=\text{مجموع اعداد از ۱ تا ۱۰۰} = \frac{\text{تعداد عددها}}{۲}\text{(عدد ابتدا + عدد انتها)}$$ [1]

$$=\frac{۱۰۰}{۲}(۱+۱۰۰)$$

به یاد چه می‌افتید؟ همان‌طورکه قبلاً هم دیدید، مجموع فوق یادآور مساحت ذوزنقه‌ای است که ارتفاع آن ۱۰۰ و قاعده‌های آن ۱ و ۱۰۰ است.



حال همین مسأله را اساس کار قرار می‌دهیم و به تعمیم آن می‌پردازیم .به جای عدد خاص ۱۰۰، عدد طبیعی n را درنظر می‌گیریم. در واقع با کمک گرفتن از تجربه‌ی گوس، می‌خواهیم

۱ــ S حرف اول Sum به معنی مجموع است.

مجموع اولین n عدد طبیعی را پیدا کنیم.

برای این کار، از همان شیوه‌ای که در ستون D به‌کار بردیم دوباره استفاده می‌کنیم ؛ یعنی پیدا کردن جفت مرتب‌هایی از اعداد ابتدایی و انتهایی (اعدادی که به فاصله‌ی معینی از ابتدا و انتها قرار گرفته‌اند) که مجموع معینی دارند.

به همان شیوه‌ای که در شکل ۲ داشتیم، مجموع S را دوباره می‌نویسیم مشروط بر این که در سطر دوّم، ترتیب جمله‌ها برعکس، یعنی از بزرگ به کوچک نوشته شوند. (حتماً به یاد می‌آورید که در شکل ۲ ردیف گل‌ها را برعکس چیدیم.)

$$S=۱+۲+۳+\cdots+(n-۲)+(n-۱)+n$$

$$S=n+(n-۱)+(n-۲)+\cdots+۳+۲+۱$$

از جمع دو سطر بالا نتیجه می‌گیریم که

$$۲S=\underbrace{(۱+n)+(۱+n)+(۱+n)+\cdots+(۱+n)+(۱+n)+(۱+n)}_{n \text{ بار}}$$

چون تعداد جمله‌ها n تا بود پس

$$۲S=n(۱+n)$$

یا

$$\boxed{S=\frac{n(۱+n)}{۲}} \qquad (*)$$

یعنی :

$$\boxed{S=\frac{\text{(جمله‌ی آخر + جمله‌ی اوّل) تعداد جمله‌ها}}{۲}}$$

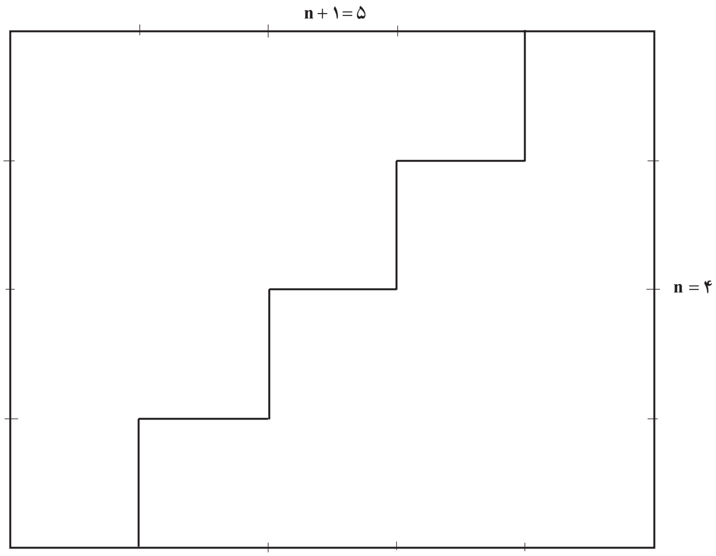
فعالیت ۲ــ۲

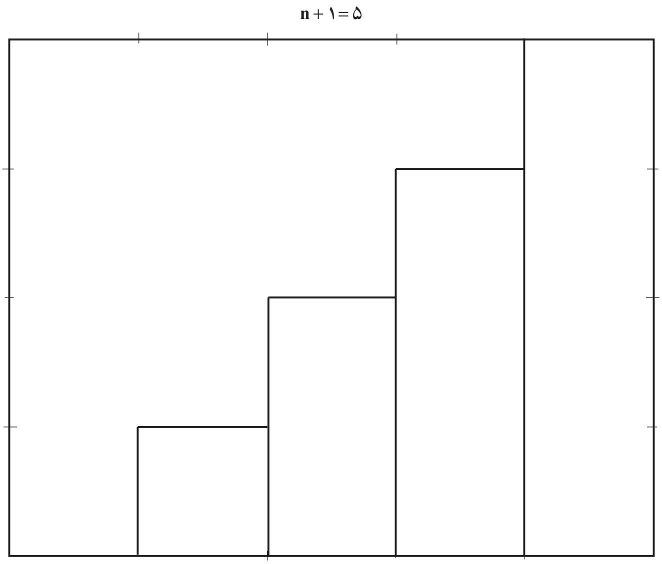
برای نشان دادن مجموع $۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ مستطیلی را درنظر می‌گیریم که یک ضلع آن n و ضلع دیگرش $n+۱$ باشد. حال با خطی پلکانی، مستطیل را به دو قسمت مساوی تقسیم

می‌کنیم : مساحت هر قسمت برابر است با $۱+۲+۳+ \quad +n$. چرا؟ به آن فکر کنید! مساحت تمام مستطیل چقدر است؟ درست حدس زدید! با توجّه به طول و عرض مستطیل، مساحت آن $n(n+۱)$ و مساحت نصف آن $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است. بنابراین

$$۱+۲+۳+ \quad +n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

شکل زیر با فرض $n=۴$ رسم شده است.





۲ــ۳ــ دنباله‌ی حسابی

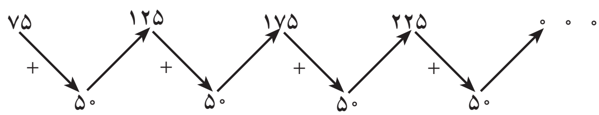
مادر بزرگ گلاره تصمیم گرفت به تمام نوه‌های خود عیدی بدهد. به این ترتیب که به کوچکترین آن‌ها ۳ سکه ۲۵ تومانی و به بچه‌های دیگر به ترتیب سن ۲ سکه بیشتر از نفر قبلی بدهد. درضمن هیچ کدام از بچه‌ها هم‌سن نبودند. می خواهیم مجموع پول‌هایی که مادر بزرگ گلاره به نوه‌های خود داده است و مقدار عیدی نفر پانزدهم را به‌دست آوریم. دنباله‌ی زیر نشان‌دهنده‌ی عیدی‌های دریافتی از مادر بزرگ است:

۷۵ , ۱۲۵ , ۱۷۵ , ۲۲۵ , ۲۷۵ , , ۴۲۵ ,

این دنباله نمونه‌ای از یک **دنباله‌ی حسابی** است.

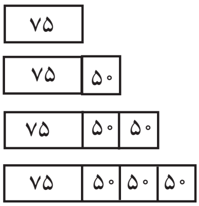
هر جمله از یک دنباله‌ی حسابی از افزودن ***یک مقدار ثابت*** *به جمله‌ی قبلی به‌دست می‌آید. به این مقدار ثابت* ***قدر نسبت*** *می گوییم.*

دنباله‌ی عیدی‌ها شبیه دنباله‌ی اعداد طبیعی است، با این تفاوت که هر جمله‌ی آن با افزودن عدد ۵۰ به جمله‌ی قبلی به‌دست می‌آید. با این حال، این دنباله حالت تعمیم یافته‌ای از مثال ردیف‌های گل و اعداد از ۱ تا ۱۰۰ است که با آن‌ها آشنا شدیم. در دو مثال قبلی، اولین جمله‌ی دنباله‌ها (اولین ردیف گل‌ها) عدد ۱ بود و به‌ترتیب در سطرها (ردیف‌های) بعدی یک گُل افزوده شد، یعنی اختلاف هر دو جمله در آن‌ها دقیقاً ۱بود، امّا در این دنباله، جمله‌ی اوّل ۷۵ است و جمله‌ها به ترتیب ۵۰ تا ۵۰ تا زیاد شده‌اند، یعنی اختلاف هر دو جمله در این دنباله دقیقاً ۵۰ است.



تمرین ۴: مجموع پول‌هایی که مادر بزرگ به ۱۵ نفر از نوه‌های خود داده است چه‌قدر است؟

در فعّالیت ۲ــ۱، پیدا کردن تعداد گل‌ها در هر ردیف ساده بود، زیرا گل‌های هر ردیف یکی یکی اضافه می‌شدند و صدمین جمله در دنباله‌ی اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ همان صد است. اگر فرض کنیم مادر بزرگ ۱۰۰ نوه داشته باشد پیدا کردن مقدار پرداختی مادر بزرگ به این صد نوه به این وضوح نیست و اگر روشی برای به‌دست آوردن آن‌ها نداشته باشیم، صد بار جمع کردن این اعداد کار وقت‌گیری است! پس دوباره جمله‌های این دنباله را به‌طریقی دیگر می‌نویسیم تا روش مناسب را پیدا کنیم :



تمرین ۵: جمله‌های پنجم تا دهم را حدس بزنید و سپس با ادامه‌ی نمودار حدس خود را آزمایش کنید.

می‌توانیم این جمله‌ها را به‌صورت زیر بنویسیم :

جمله اوّل $= ۷۵ + ۰ \times ۵۰,$

جمله دوّم $= ۷۵ + ۱ \times ۵۰,$

جمله سوّم $= ۷۵ + ۲ \times ۵۰,$

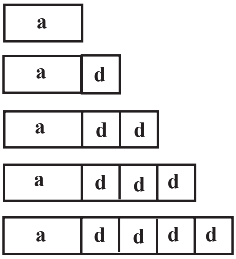
جمله چهارم $= ۷۵ + ۳ \times ۵۰,$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، کم کم روش مناسب را پیدا می‌کنیم زیرا بین شماره (ترتیب) جمله‌ها و تعداد ۵۰ تومانی‌های افزوده شده رابطه‌ای دیده می‌شود یعنی در هر جمله، تعداد ۵۰ تومانی‌های اضافه شده یکی کمتر از شماره‌ی جمله است. با این اطلاعات، می‌توانیم پرداختی مادربزرگ به n اُمین نوه‌ی خود را حدس بزنیم :

جمله n اُم $= ۷۵ + (n - ۱) \times ۵۰$

اگر به جای جمله‌ی اوّل که ۷۵ است حرف a و به جای ۵۰ حرف d[1] (اختلاف هر دوجمله) را قرار دهیم، آن وقت دنباله‌ی حسابی را در حالت کلّی نشان داده‌ایم! یا به بیان دیگر نمایش یک دنباله‌ی

۱ــ d اولین حرف کلمه‌ی difference به‌معنای فاصله یا اختلاف ثابت هر دو جمله‌ی متوالی است.



حسابی با جمله‌ی اوّل a و قدرنسبت d چنین است :

$$a, a+d, a+۲d, a+۳d, \ldots, a+(n-۱)d, \ldots$$

یعنی nاُمین جمله‌ی این دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی

$$a+(n-۱)d$$

به‌دست می‌آید و این راه میان‌بری است که ما را از محاسبات کسل‌کننده بی‌نیاز می‌کند.

برای محاسبه‌ی مجموع این جمله‌ها چه می‌توان کرد؟

به نمودار بالا توجّه کنید. آن‌را تا nاُمین جمله ادامه می‌دهیم و بعد به دنبال مجموع nجمله می‌گردیم. می‌بینیم که جمله‌ی اوّل به تعداد جمله‌ها تکرار شده است، یعنی این مجموع شامل n تا a است. از طرف دیگر جملات d ، ۲d ، ۳d ، ...d(n−۱) نیز وجود دارند که بخشی از مجموع ما را تشکیل می‌دهند، درنتیجه

$$\text{مجموع جمله‌ها} = S = na + ۱d + ۲d + ۳d + \quad + (n-۱)d$$

اگر به جمله‌های بعد از na توجّه کنید همگی در d مشترک هستند و می‌توانیم برای سهولت کار از d فاکتور بگیریم

$$S = na + [۱+۲+۳+\ldots+(n-۱)]d \qquad (۱)$$

ضریب d مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۱− n است و با استفاده از رابطه‌ی (*) دربند ۲ ــ ۲ می‌توان آن را به این صورت نوشت

$$S_۱ = \frac{\text{(جمله‌ی آخر + جمله‌ی‌اوّل) تعداد جمله‌ها}}{۲}, \qquad (۲)$$

یا

$$S_۱ = \frac{(n-۱)[۱+(n-۱)]}{۲},$$

یا

$$\boxed{S_۱ = \frac{(n-۱)n}{۲}}$$

این مجموع را در رابطه‌ی (۱) به جای ضریب d قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم

$$S = na + \left(\frac{(n-۱)n}{۲}\right)d$$

آیا می‌توانیم این رابطه را به‌صورت رابطه‌ی (۲) دربیاوریم؟ یعنی آیا مجموع n جمله‌ی اوّل یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اوّل a و قدر نسبت d نیز همان **نصف تعداد جملات** × **مجموع جمله‌های اول و آخر** می‌شود؟

معمولاً در ساده کردن عبارت‌ها، علاوه‌بر عوامل مشترک، از عوامل مشکل آفرین از جمله کسرها نیز تا حد امکان فاکتور می‌گیریم تا رابطه‌ی به‌دست آمده به‌ساده‌ترین شکل ممکن درآید. در این مورد هم چنین می‌کنیم

$$S = \frac{n}{۲}[۲a + (n-۱)d] \qquad (۳)$$

این رابطه به رابطه‌ی (۲) بسیار نزدیک است. قبلاً دیده بودیم که جمله‌ی nاُم یک دنباله‌ی حسابی $a+(n-۱)d$ است. با کمی دقّت در (۳) متوجّه می‌شویم که اگر $۲a$ را به‌صورت $a+a$ بنویسیم، درواقع (۲) را به‌دست آورده‌ایم

$$S = \overbrace{\frac{n}{۲}}^{\text{تعداد جمله‌ها}}[\underbrace{a}_{\text{جمله‌ی اوّل}} + \underbrace{a+(n-۱)d}_{\text{جمله‌ی آخر}}] \ ,$$

یعنی

$$S = \frac{\text{تعداد جمله‌ها (جمله‌ی اوّل + جمله‌ی آخر)}}{۲}$$

$$S = \frac{n}{۲}(a + l^{۱})$$

اگر دوباره به مسأله‌ی گوس و جمع تعداد گل‌ها بازگردیم، می‌بینیم که آن‌ها حالت‌های خاصّی ازدنباله‌های حسابی بودند که در آن‌ها d ، یعنی قدر نسبت، عدد ۱ و جمله‌ی اوّل نیز ۱ بود. با این حال همگی ماهیت یکسان دارند و مجموع چنین دنباله هایی با رابطه‌ی یکسانی به‌دست می‌آیند.

۱ـ l اول کلمه‌ی last است.

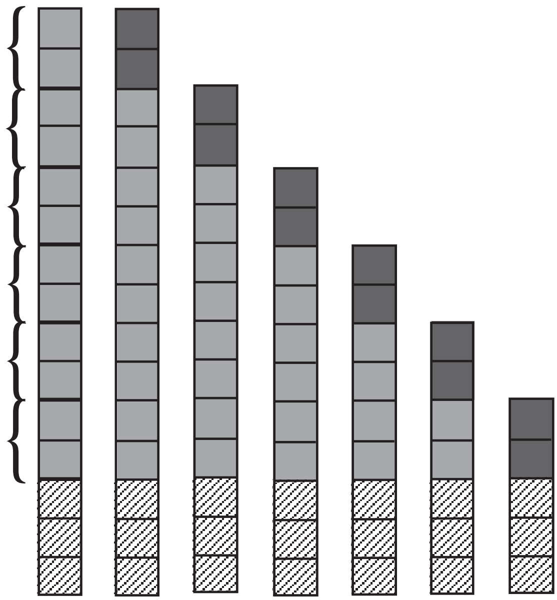
تمرین ۶: با توجّه به روشی که گوس، مجموع n جمله‌ی اوّل دنباله‌ی طبیعی را به‌دست آورد، مجموع n جمله‌ی اوّل دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت d و جمله‌ی اوّل a را به‌دست آورید. سپس نتیجه را با رابطه‌ی (۲) مقایسه کنید.

اینجا با دنباله‌های حسابی افزایشی آشنا شدیم، یعنی دنباله‌هایی که قدر نسبت آن‌ها مثبت بود و هر جمله از جمله‌ی قبلی بیشتر می‌شد. امّا همیشه چنین نیست و گاهی جمله‌های دنباله‌ی حسابی به‌میزان ثابتی کاهش می‌یابند. به مثال زیر توجّه کنید :

مثال: خواهر گلاره ۱۵ سکّه‌ی ۲۵ تومانی دارد و می‌خواهد به هریک از بچّه‌های کوچک‌تر از خود در فامیل دو سکّه عیدی بدهد و سه سکه را نیز برای خودش نگه دارد. وضعیّت موجودی خواهر گلاره قبل و بعد از دادن عیدی، دنباله‌ی حسابی زیر را می‌سازند

۳۷۵ ,۳۲۵ , ۲۷۵ , ۲۲۵, ۱۷۵, ۱۲۵, ۷۵

همان‌طورکه مشاهده می‌کنید، قدر نسبت این دنباله، عدد ۵۰− است و نمودار آن به‌صورت زیر است :



*در دنباله‌ی حسابی، اگر مقدار ثابت، **مثبت** باشد، جمله‌های دنباله به‌اندازه‌ی ثابتی افزایش می‌یابند و اگر مقدار ثابت، **منفی** باشد، جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی کاهش می‌یابند.*

تمرین

۱ــ جاهای خالی را در دنباله‌های حسابی زیر پر کنید :

الف) ۱۰ □ ۵۰

ب) ۱۰ □ □ ۵۰

پ) ۱۰ □ □ □ ۵۰

ت) ۱۰ □ □ □ □ ۵۰

ث) ۱۰ □ □ □ □ □ ۵۰

۲ــ کدامیک از دنباله‌های زیر حسابی هستند؟ آن‌ها را معلوم کرده و قدر نسبت آن‌ها را پیدا کنید.

الف) ۴, ۲۴, ۴۴, ۶۴, ۸۴, ...

ب) ۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, ...

پ) ۵, ۵, ۵, ۵, ۵,...

ت) ۱۰, ۱۰۰, ۱۰۰۰, ۱۰۰۰۰, ۱۰۰,۰۰۰, ...

ث) ۲۰, ۲۱, ۲۳, ۲۶, ۳۰,...,...

ج) ۱۵, ۱۴, ۱۳, ۱۲, ۱۱, ...

۳ــ مجموع ۱۵ جمله‌ی اوّل دنباله‌های حسابی تمرین ۲ را حساب کنید .

۴ــ دنباله حسابی روبرو را درنظر بگیرید : ۱ ,۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ...
و هر جمله آن را در ۲ ضرب کنید. دنباله‌ی ۲,۱۰ , ۱۸, ۲۶, ۳۴, ...
به‌دست می‌آید.

الف) آیا دنباله‌ی حاصل نیز یک دنباله‌ی حسابی است؟

ب) اگر جمله‌های دنباله‌ی حسابی را در یک عدد ضرب کنیم، آیا دنباله‌ی حاصل همیشه دنباله‌ی حسابی خواهد شد؟ چرا؟

۵ ــ مجموع ۵۰ جمله‌ی اوّل یک دنباله‌ی حسابی ۲۰۰ و مجموع ۵۰ جمله‌ی بعدی آن ۲۷۰۰ است، جمله‌ی اوّل این دنباله را پیدا کنید.

۶ــ در فعّالیت ۱، ردیف صفر را به گل‌ها اضافه کنید : یعنی در ردیف صفر هیچ گلی نباشد و در ردیف ۱ یک گل و به همین ترتیب تا در ردیف ۷ که هفت گل قرار می‌گیرد. این‌بار ترتیب چیدن گل‌ها چه شکلی می‌سازد؟ تعداد گل‌ها را با توجه به مساحت این شکل

به‌دست آورید.

۷ ــ مجموع[1] ۵ جمله‌ی اوّل یک دنباله‌ی حسابی ۱۰۰ و مجموع سه جمله‌ی بزرگ‌تر هفت برابر مجموع دو جمله‌ی کوچک‌تر است. جمله‌های این دنباله را پیدا کنید. (قدر نسبت مثبت فرض شود)

۲ــ۴ــ دنباله‌ی هندسی

فعّالیت ۲ــ۳

نیما به دنبال شغل مناسبی می‌گشت تا بتواند هم هزینه‌ی تحصیل خود را تأمین کند و هم مهارت‌های شغلی خود را بالا ببرد، در ضمن فرصت کافی برای درس خواندن داشته باشد، او در صفحه‌ی نیازمندی‌های روزنامه، چشمش به یک آگهی درباره‌ی شغل مورد علاقه‌اش افتاد که نوشته بود: «به یک جوان وظیفه شناس و ماهر در زمینه‌ی مورد نظر نیازمندیم. برای کار خوب دستمزد خوب می‌دهیم. روز اوّل به شما یک ریال و سپس تا پایان ماه، هر روز دستمزد شما را دوبرابر می‌کنیم. متقاضیان با در دست داشتن مدارک و یک معرفی‌نامه‌ی معتبر به آدرس ... مراجعه نمایند.»

نیما اوّل از دستمزدِ وعده داده شده خنده‌اش گرفت! امّا پس از چند لحظه از روی کنجکاوی و به عنوان سرگرمی، تصمیم گرفت درآمد یک ماه را محاسبه نماید. ما هم به همراه نیما، به بررسی راه‌های مختلف محاسبه‌ی دستمزدهای روزانه و درآمد ماهانه‌ی وعده داده شده می‌پردازیم تا با تأکید پیشنهاد ردّ یا قبول این شغل را به او بدهیم!

شاید طبیعی‌ترین راهی که به ذهن برسد، دوبرابر کردن دستمزد روز قبل برای به دست آوردن دستمزد روز بعد و ادامه آن تا ۲۹ ، ۳۰ یا ۳۱ روز (تعداد روزهای ماه‌های مختلف سال) باشد[2]، آیا صرف وقت برای چنین کار یکنواختی معقول به نظر می‌رسد؟ شاید بتوانیم چاره‌ای بیندیشیم و راه میان‌بری برای انجام این محاسبات پیدا کنیم. در تلاش برای یافتن این راه میان‌بُر، با قدرت و ظرافت ریاضی بیشتر آشنا می‌شویم، زیرا در هر دو صورت (قبول یا ردّ پیشنهاد) از وقتی که صرف کرده‌ایم پشیمان نخواهیم شد، چرا که با ساختار مسأله بیشتر آشنا شده‌ایم. در واقع این آگهی بهانه‌ای برای ما

۱ــ برگرفته از پولیا، ۱۹۶۲ که اصل مسأله از پاپیروس رایند در مصر باستان گرفته شده است.

۲ــ می‌توانید از ماشین‌حساب استفاده کنید.

خواهد شد تا چیزهای جدیدتری یاد بگیریم.

اگر کسی شغلی به شما پیشنهاد کند که دستمزد روز اول آن یک ریال باشد و سپس تا پایان ماه این دستمزد هر روز دوبرابر شود، آیا شغل را می‌پذیرید یا رد می‌کنید؟

برای یافتن پاسخ این سؤال می‌توانیم جدولی تهیه کنیم و دستمزدهای روزانه را در آن یادداشت کنیم. الگویی برای ادامه‌ی کار پیدا نماییم و مجبور نباشیم که وقت زیادی را صرف آن کنیم.

(جدول ۱)

روزهای ماه	دستمزد روزانه
۱	۱
۲	$۱\times۲=۲$
۳	$۲\times۲=۴$
۴	$۴\times۲=۸$
۵	$۸\times۲=۱۶$
۶	$۱۶\times۲=۳۲$

قبل از آن‌که جدول را ادامه دهیم به بررسی آن می‌پردازیم، شاید الگوی مناسبی پیدا کنیم و با دنبال کردن آن، از ادامه‌ی این کار بی‌نیاز شویم.

با دقّت در جدول (۱)، متوجّه می‌شویم که دستمزدهای روزانه در ستون دوّم توان‌های ۲ هستند و رابطه‌ای نیز بین روزهای ماه و توان‌های ۲ در ردیف نظیر آن‌ها در آن ستون وجود دارد. بنابراین جدول (۲) را تشکیل می‌دهیم.

(جدول ۲)

روزهای ماه	دستمزد روزانه
۱	$۱=۲^{۰}$
۲	$۲=۲^{۱}$
۳	$۴=۲^{۲}$
۴	$۸=۲^{۳}$
۵	$۱۶=۲^{۴}$
۶	$۳۲=۲^{۵}$

تمرین ۷: دستمزد روز دهم را از روی جدول حدس بزنید. سپس با ادامه‌ی جدول، حدس خود را به آزمایش بگذارید. بعد از اطمینان از درستی حدس خود، دستمزد روزهای بیست و نهم، سی‌اُم و سی‌و یکم را پیدا کنید.

حالا که دستمزدهای روزهای بیست و نهم، سی‌اُم و سی‌یکم را هم به‌دست آوردیم، می‌توانیم عدد دلخواه n کوچک‌تر یا مساوی ۳۱ را به عنوان نماینده‌ی روز انتخاب کنیم و رابطه‌ی به‌دست آمده از جدول (۲) را دوباره بنویسیم، که جدول (۳) به‌دست می‌آید.
با دقّت در جدول (۳) حدس ما به یقین تبدیل شد و مطمئن شدیم که دستمزد هر روز از رابطه‌ی «**۲ به توان یکی کمتر از آن روز**» به‌دست می‌آید. با ادامه‌ی جدول، دستمزد روز nاُم (n عددی طبیعی) را پیش‌بینی می‌کنیم، که در جدول (۴) آمده است.

(جدول ۳)

روز = n		دستمزد روزانه
اول	۱	$۲^{n-۱} = ۲^{۱-۱} = ۲^{۰}$
دوم	۲	$۲^{n-۱} = ۲^{۲-۱} = ۲^{۱}$
سوم	۳	$۲^{n-۱} = ۲^{۳-۱} = ۲^{۲}$
چهارم	۴	$۲^{n-۱} = ۲^{۴-۱} = ۲^{۳}$
پنجم	۵	$۲^{n-۱} = ۲^{۵-۱} = ۲^{۴}$
ششم	۶	$۲^{n-۱} = ۲^{۶-۱} = ۲^{۵}$

این مسأله را به صورت نموداری نیز می‌توان نشان داد.
دیده می‌شود که با دانستن آخرین رابطه‌ی جدول (۴)، یعنی دستمزد nاُمین روز، می‌توانیم دستمزد هر روزی را که بخواهیم، به‌دست آوریم

(جدول ۴)

روز	n	دستمزد روزانه
روز اول	۱	$۲^{۰}$
روز دوم	۲	$۲^{۱}$
روز سوم	۳	$۲^{۲}$
روز چهارم	۴	$۲^{۳}$
روز یازدهم	۱۱	$۲^{۱۱-۱} = ۲^{۱۰}$
روز بیست و نهم	۲۹	$۲^{۲۹-۱} = ۲^{۲۸}$
روز سی‌اُم	۳۰	$۲^{۳۰-۱} = ۲^{۲۹}$
روز سی‌و یکم	۳۱	$۲^{۳۱-۱} = ۲^{۳۰}$

نکته‌ی جالب اینجاست که با مشاهده‌ی دستمزدهای روزهای مختلف، رابطه‌ی (۱) را نتیجه گرفتیم و حالا با استفاده از این نتیجه‌ی کلی، می‌توانیم بدون انجام محاسبات قبلی، دستمزد روزانه را پیدا کنیم. این همان قوت و ظرافت ریاضی بود که به دنبالش می‌گشتیم!

$$۲^{n-۱} = \text{دستمزد } n\text{اُمین روز} \qquad (۱)$$

تمرین ۸: رابطه‌ی بین مراحل مختلف فعالیّت (۲ــ۳) و نتیجه‌گیری نهایی را با استقرای تجربی و استدلال استنتاجی بررسی کنید.

تمرین ۹: مقدار تقریبی دستمزد روزهای سی‌ام و سی و یکم را برحسب ریال و تومان به‌دست آورید. آیا می‌توانید در تصمیم‌گیری به نیما کمک کنید یا هنوز به دلایل بیشتری نیازمندید؟

فعالیت ۲ــ۴

درفعالیت۲ــ۳، دستمزد روزانه‌ی شغل پیشنهادی در آگهی روزنامه را بررسی کردیم. با این حال، هنوز از درآمد ماهانه اطّلاع درستی در دست نداریم. پس با تکمیل جدول (۱) صفحه‌ی ۳۲، به مطالعه‌ی درآمدها می‌پردازیم تا شاید الگوی مناسبی برای تعیین درآمد در nاُمین روز بیابیم.

با دقت در جدول (۵)، امکان وجود رابطه‌ای بین n و درآمد تاپایان روز nاُم را بررسی می‌کنیم :

(جدول ۵)

روز	n	دستمزد روز nاُم	درآمد تاپایان روز nاُم(مجموع دستمزدها)
روز اول	۱	$۲^{۰} = ۱$	۱
روز دوم	۲	$۲^{۱} = ۲$	۱+۲=۳
روز سوم	۳	$۲^{۲} = ۴$	۱+۲+۴=۷
روز چهارم	۴	$۲^{۳} = ۸$	۱+۲+۴+۸=۱۵
روز پنجم	۵	$۲^{۴} = ۱۶$	۱+۲+۴+۸+۱۶=۳۱
روز ششم	۶	$۲^{۵} = ۳۲$	۱+۲+۴+۸+۱۶+۳۲=۶۳

با توجه به جدول (۶) می‌توانیم رابطه‌ی عمومی پیدا کردن مجموع دستمزدها (درآمد ماهانه) را پیش‌بینی کنیم :

(۲) $\qquad$ درآمد ماهانه $= ۲^n - ۱$

(جدول ۶)

روز	n	دستمزد روز n اُم	درآمد تاپایان روز nاُم(مجموع دستمزدها)
روز اول	۱	$۲^{۱-۱} = ۲^۰ = ۱$	$۲^۱ - ۱ = ۱$
روز دوم	۲	$۲^{۲-۱} = ۲ = ۲^۱$	$۲^۲ - ۱ = ۳ = ۱+۲$
روز سوم	۳	$۲^{۳-۱} = ۲^۲ = ۴$	$۲^۳ - ۱ = ۷ = ۱+۲+۴$
روز چهارم	۴	$۲^{۴-۱} = ۲^۳ = ۸$	$۲^۴ - ۱ = ۱۵ = ۱+۲+۴+۸$
روز پنجم	۵	$۲^{۵-۱} = ۲^۴ = ۱۶$	$۲^۵ - ۱ = ۳۱ = ۱+۲+۴+۸+۱۶$
روز ششم	۶	$۲^{۶-۱} = ۲^۵ = ۳۲$	$۲^۶ - ۱ = ۶۳ = ۳۲ + ۱+۲+۴+۸+۱۶$
روز سی‌اُم	۳۰	$۲^{۳۰-۱}$	$۲^{۳۰} - ۱$

تمرین ۱۰: درآمد تقریبی را در روز سی‌ام و سی‌و یکم به‌دست آورید و با دلیل، به نیما تصمیم قاطع خود را در مورد قبول یا رد شغل پیشنهادی بگویید!

جدول (۶) به ما کمک کرد که میان‌بُر بزنیم و بدون جمع کردن و تنها با استفاده از رابطه‌ی (۲)، مجموع دستمزدهای روزانه را به‌دست آوریم.

تمرین ۱۱: آیا از رابطه‌ی (۲) می‌توانیم نتیجه بگیریم که

درآمد تا پایان روز nاُم = (۲× دستمزد روز nاُم) −۱

درستی نتیجه را با توجّه به جدول (۶) و رابطه‌ی (۲) بررسی کنید.

اگر دستمزد هر روز را یک جمله بنامیم و آن‌ها را در یک سطر بنویسیم، می‌بینیم که افزایش آن‌ها نسبت ثابتی دارد، یعنی هر جمله با دو برابر کردن جمله قبلی به‌دست می‌آید

۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲، ۶۴، ...

این جمله‌ها (اعداد) دنباله‌ی توان‌های ۲ را تشکیل می‌دهند.

حال می‌خواهیم از روش پیدا کردن دستمزدها در فعالیّت‌های قبلی استفاده کنیم و مسأله را تعمیم دهیم. به همین دلیل، به جای دستمزد پیشنهادی «یک ریال» برای روز اوّل مقدار a و به جای

«دوبرابر شدن»، r [۱] برابر شدن با شرط r بزرگ‌تر از یک و به جای ۳۰ روز، n روز را درنظر می‌گیریم. تغییر آگهی استخدام چنین خواهد بود *«اگر کسی به شما شغلی پیشنهاد کند که دستمزد روز اوّل آن a باشد و این دستمزد بدون توقّف هر روز r برابر شود، آیا پیشنهاد استخدام را برای n روز می‌پذیرید یا رد می‌کنید؟»*

با درنظر گرفتن این تغییرات، جدول (۴) را دوباره‌سازی می‌کنیم (جدول ۷).

(جدول ۷)

روز	n	دستمزد روزانه a ، نسبت افزایش r
جمله‌ی اول	۱	$ar^0 = a$
جمله‌ی دوم	۲	$ar = ar^1$
جمله‌ی سوم	۳	$(ar)r = ar^2$
جمله‌ی چهارم	۴	$(ar^2)r = ar^3$
جمله‌ی پنجم	۵	$(ar^3)r = ar^4$
جمله‌ی n اُم	n	ar^{n-1}

به جمله nاُم، **جمله‌ی عمومی** گفته می‌شود و آن را با t نمایش می‌دهند

جمله عمومی : $t = ar^{n-1}$

دستمزدهای جدول (۷) را به ترتیب روزها در یک سطر می‌نویسیم :

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \quad , ar^{29}, \quad , ar^{n-1}$$

این جمله‌ها تشکیل یک دنباله‌ی هندسی می‌دهند و نسبت بین هر دو جمله‌ی متوالی غیرصفر یعنی r، که ثابت است را **قدر نسبت** می‌گویند. (a ۰)

*هر جمله از یک دنباله‌ی هندسی از ضرب جمله‌ی قبلی در **یک مقدار ثابت** به‌دست می‌آید. با فرض مثبت بودن جمله‌ی اول، اگر مقدار ثابت بزرگتر از یک باشد **دنباله افزایشی** و اگر مقدار ثابت کوچکتر از یک باشد، **دنباله کاهشی** خواهد بود.*

۱ــ r اوّل کلمه‌ی ratio به‌معنی نسبت است. در کتاب‌های قدیمی، به جای r از q که اوّل کلمه‌ی لاتین quitient است استفاده می‌کردند.

همان‌طور که در جدول (۶) دیدیم، برای به‌دست آوردن کل درآمد در پایان هر روز، مجموع دستمزدهای روز اوّل تا آن روز را محاسبه کردیم. همان روند را ادامه می‌دهیم و راه میان‌بُری برای پیدا کردن مجموع n جمله‌ی اوّل یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a و مقدار ثابت r جستجو می‌کنیم :

(۳) $a + ar + ar^{۲} + ar^{۳} + \quad + ar^{n-۲} + ar^{n-۱} =$ مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی

فعالیت ۲ــ ۵

هر دو شیوه‌ای را که برای به‌دست آوردن مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی اتخاذ کردید، در مورد پیدا کردن مجموع n جمله اوّل یک دنباله‌ی هندسی نیز به کار ببرید. آیا به نتیجه‌ای رسیدید؟ آیا آن شیوه‌ها را توانستید به عنوان یک روش در این مورد هم به‌کار ببرید یا خیر؟ نتیجه به‌دست آمده را بررسی کنید.

همان‌طور که در مورد پیدا کردن n جمله‌ی اوّل دنباله‌ی حسابی ملاحظه کردید، سعی ما بر این بود که تا حد امکان، تعداد مجهول‌ها را کم بکنیم و رابطه‌ای پیدا کنیم که اجزای کمتر و کلیت بیشتری داشته باشد. با دقّت در رابطه‌ی (۳) می‌بینیم که اگر رابطه‌ی (۴) را از ضرب r در (۳) نتیجه بگیریم، بسیاری از جمله‌های رابطه‌ی اخیر با (۳) مشابه هستند

$$S_n = a + ar + ar^{۲} + ar^{۳} + \ldots + ar^{n-۲} + ar^{n-۱}$$

$$S_n r = ar + ar^{۲} + ar^{۳} + ar^{۴} + \ldots + ar^{n-۱} + ar^{n} \qquad (۴)$$

با کم‌کردن (۳) از (۴) **جمله‌های** مشابه حذف می‌شوند و آن‌چه که باقی می‌ماند چنین است

$$S_n r - S_n = ar^{n} - a \qquad (۵)$$

چون مجهول ما، S_n ، یعنی مجموع n جمله‌ی اوّل یک دنباله‌ی هندسی بود، در نتیجه با فاکتورگیری از عامل مشترک S_n و a در دو سمت رابطه‌ی (۵)، مقدار S_n را به‌دست می‌آوریم

$$S_n(r-۱) = a(r^{n} - ۱)$$

یا

$$\boxed{S_n = \frac{a(r^{n}-۱)}{r-۱}} \quad \text{یا} \quad \boxed{S_n = \frac{a(۱-r^{n})}{۱-r}} \qquad (۶)$$

تمرین ۱۲: مجموع ۵۰ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۴ و قدر نسبت ۳ را به‌دست آورید.

تمرین ۱۳: با توجّه به اینکه جمله‌ی عمومی یا جمله‌ی nاُم یک دنباله‌ی هندسی برابر است با ar^{n-1}، رابطه‌ی (۶) را برحسب جمله‌ی عمومی بنویسید.

فعالیت ۲ــ۶

الف ــ قدر نسبت این دنباله‌ی هندسی ...، ۴،۴،۴،۴ را پیدا کنید؛

ب ــ با استفاده از رابطه‌ی (۶) سعی کنید مجموع n جمله‌ی اوّل این دنباله را به‌دست آورید. به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

همان‌طور که در فعالیت ۴ دیدید، اگر قدر نسبت یک دنباله‌ی هندسی یک باشد، رابطه‌ی (۶) به صورت کسر $\frac{0}{0}$[1] درمی‌آید، در نتیجه لازم است که رابطه‌ی (۶) را محدود به دنباله‌های هندسی با قدر نسبت ۱ r بکنیم

$$\boxed{S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \;;\quad r \quad 1} \qquad (7)$$

تمرین ۱۴: چگونگی رابطه (۷) را برای حالتی که r بزرگتر از صفر و کوچکتر از یک است بررسی کنید. اگر تعداد جمله‌های دنباله‌ی هندسی بیشتر و بیشتر شود، چه تغییراتی در مجموع فوق پیش می‌آید؟ درباره‌ی آن فکر کنید!

فعالیت ۲ــ۷

مدّت ۷۰ سال طول می‌کشد تا تعداد اتم‌های تجزیه شده‌ی اورانیوم ۲۳۲ به نصف برسد و

۱ــ کسر $\frac{0}{0}$ تعریف نشده است.

دوباره ۷۰ سال دیگر طول می‌کشد تا نیمی از اتم‌های باقی مانده، یعنی نیمی از نصف تجزیه شوند و این روند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند. فرض کنید که نمونه‌ای از این نوع اورانیوم شامل ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ اتم در سال ۱۰۰۰ میلادی بوده است. در نتیجه، مقدار باقی‌مانده‌ی اورانیوم در پایان هر هفتاد سال که آن را یک **دوره‌ی زمانی** می‌نامیم، به نصف مقدار قبلی کاهش می‌یابد

$$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \quad , \quad ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰\times\frac{۱}{۲}, \ (۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰\times\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۲} \text{ و } ...$$

با دقّت در سطر بالا، متوجّه می‌شویم که این اعداد نمایشگر یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اوّل $a=۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰$ و قدر نسبت $r=\frac{۱}{۲}$ هستند. مقدار اورانیوم باقی‌مانده در سال‌های ۱۰۷۰، ۱۱۴۰، ۱۲۱۰، ۱۲۸۰ و ۱۳۵۰ یعنی در یک، دو، سه، چهار و پنج دوره‌ی زمانی را محاسبه می‌کنیم:

(جدول ۸)

مرتبه‌ی جمله	سال میلادی	تعداد دوره‌های زمانی	مقدار اورانیوم باقی‌مانده	نتیجه
جمله‌ی اول	۱۰۰۰	۰×۷۰	۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰	۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰
جمله‌ی دوم	۱۰۷۰	۱×۷۰	$۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰\times\frac{۱}{۲}$	۵۰۰,۰۰۰,۰۰۰
جمله‌ی سوم	۱۱۴۰	۲×۷۰	$(۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰\times\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۲}$	۲۵۰,۰۰۰,۰۰۰
جمله‌ی چهارم	۱۲۱۰	۳×۷۰	$(۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۲}$	۱۲۵,۰۰۰,۰۰۰
جمله‌ی پنجم	۱۲۸۰	۴×۷۰	$(۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۲}$	۶۲,۵۰۰,۰۰۰
جمله‌ی ششم	۱۳۵۰	۵×۷۰	$(۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۲}$	۳۱,۲۵۰,۰۰۰

در جدول فوق، مشاهده می‌کنیم که

الف) مقدار اورانیوم باقی‌مانده به سرعت روبه زوال می‌رود؛

ب) بین دوره‌های زمانی، تعداد ضریب‌های $r=\frac{۱}{۲}$ و مرتبه‌ی جمله‌های این تصاعد هندسی رابطه‌ای برقرار است؛

با توجّه به مشاهده‌ی فوق، جدول (۸) را دوباره می‌نویسیم که جدول (۹) حاصل می‌شود.

(جدول ۹)

سال	تعداد دوره‌های زمانی	مقدار اورانیوم باقیمانده	مرتبه‌ی جمله‌های دنباله
۱۰۰۰	۰	$1{,}000{,}000{,}000\times(\frac{1}{2})^{0}$	جمله‌ی اول
۱۰۷۰	۱	$1{,}000{,}000{,}000\times(\frac{1}{2})^{1}$	جمله‌ی دوم
۱۱۴۰	۲	$1{,}000{,}000{,}000\times(\frac{1}{2})^{2}$	جمله‌ی سوم
۱۲۱۰	۳	$1{,}000{,}000{,}000\times(\frac{1}{2})^{3}$	جمله‌ی چهارم
۱۲۸۰	۴	$1{,}000{,}000{,}000\times(\frac{1}{2})^{4}$	جمله‌ی پنجم
۱۳۵۰	۵	$1{,}000{,}000{,}000\times(\frac{1}{2})^{5}$	جمله‌ی ششم

تمرین۱۵: مقدار اورانیوم باقیمانده در سال‌های ۱۷۰۰ و ۱۹۸۰ را اوّل حدس بزنید و سپس محاسبه کنید.

شاید از خود بپرسید که چه زمانی مقدار اورانیوم به صفر نزدیک می‌شود؟ برای یافتن پاسخ، جدول (۹) را ادامه می‌دهیم که نتایج در جدول ۱۰ ثبت شده است.

(جدول ۱۰)

سال	تعداد دوره‌های زمانی	مقدار اورانیوم باقیمانده	مرتبه‌ی جمله‌های دنباله
۱۰۰۰	۰	$1{,}000{,}000{,}000\times(\frac{1}{2})^{0}$	جمله‌ی اول
۱۰۷۰	۱	$1{,}000{,}000{,}000\times(\frac{1}{2})^{1}$	جمله‌ی دوم
۱۱۴۰	۲	$1{,}000{,}000{,}000\times(\frac{1}{2})^{2}$	جمله‌ی سوم
۱۲۱۰	۳	$1{,}000{,}000{,}000\times(\frac{1}{2})^{3}$	جمله‌ی چهارم
۱۲۸۰	۴	$1{,}000{,}000{,}000\times(\frac{1}{2})^{4}$	جمله‌ی پنجم
۱۳۵۰	۵	$1{,}000{,}000{,}000\times(\frac{1}{2})^{5}$	جمله‌ی ششم
۱۹۸۰	۱۴	$1{,}000{,}000{,}000\times(\frac{1}{2})^{14}$	جمله‌ی پانزدهم
	$n-1$	$1{,}000{,}000{,}000\times(\frac{1}{2})^{n-1}$	جمله‌ی n اُم
	n	$1{,}000{,}000{,}000\times(\frac{1}{2})^{n}$	جمله‌ی $(n+1)$ اُم

همان‌طور که در تمرین ۱۵ دیدید، هرقدر تعداد دوره‌های زمانی (n) بیشتر می‌شود، مقدار $(\frac{۱}{۲})^n$ و مقدار باقیمانده‌ی اورانیوم کم‌کم به صفر نزدیک شود.

تمرین ۱۶: به کمک ماشین حساب، مقدار اورانیوم باقیمانده را برای nهای بزرگتر از ۱۴ و کوچکتر از ۲۰ به‌دست آورید (n عدد طبیعی است) و نتیجه را گزارش کنید. سپس تا آنجایی که می‌توانید، پیش بروید و سالی که مقدار اورانیوم باقی‌مانده بسیار نزدیک به صفرمی‌شود را پیدا کنید.

همان‌طور که در تمرین ۱۴ حدس زدید، با افزایش تعداد دوره‌های زمانی، مقدار اورانیوم کم‌و کمتر می‌شود. پس از گذشت ۳۰۰ دوره‌ی زمانی (۲۱۰۰۰=۷۰×۳۰۰) یعنی در سال ۲۲۰۰۰ میلادی، مقدار اورانیوم را حساب می‌کنیم

$$\text{جمله‌ی سیصدویکم} = ar^{۳۰۰} = ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \times (\frac{۱}{۲})^{۳۰۰} = ۴/۹۰۹ \times ۱۰^{-۸۲}$$

می‌بینیم که این مقدار خیلی نزدیک به صفر است. اگر محاسبه را ادامه دهیم، جمله‌ی سیصدو بیست و نهم یعنی $۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \times (\frac{۱}{۲})^{۳۲۸}$ را ماشین حساب صفر نشان می‌دهد.

الف ــ در یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت بزرگ‌تر از صفر و کوچک‌تر از یک، هرقدرتعداد جمله‌ها (n) بیشتر و بیشتر شود، جمله‌ی nاُم (a_n) به صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شود. به زبان نمادین، اگر تعداد جمله‌ها یعنی n به سمت بی‌نهایت میل کند، حد a_n صفر می‌شود (از نماد ∞ برای نشان دادن بی‌نهایت استفاده می‌شود و Limit به معنای حد است.)

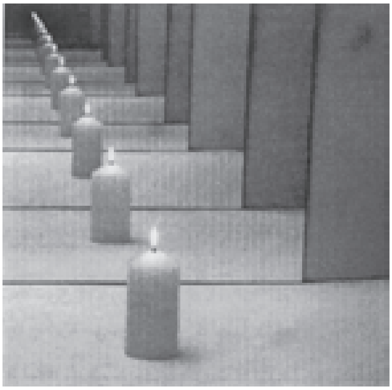
$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$$

ب ــ در فعالیّت ۱، دیدیم که چون مقدار قدر نسبت بزرگ‌تر از یک بود ($r = ۲ > ۱$) درنتیجه $r < r^۲ < r^۳ < ...$ ، امّا در فعالیّت ۲ چون قدر نسبت کوچک‌تر از یک بود ($۰ < r = \frac{۱}{۲} < ۱$)، در نتیجه $r > r^۲ > r^۳ > ...$. با بیشتر شدن n، r^n کوچک و کوچک‌تر می‌شود و به صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. به زبان نمادین، حد r^n وقتی که n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند برابر صفر می‌شود

$$\lim_{n\to\infty} r^n = ۰$$

تمرین ۱۷ ــ مجموع یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اوّل a و قدر نسبت $0 < r < 1$ را بررسی کنید.

فعالیت ۲ــ ۸



به سوی بی‌نهایت[۳] :باطل‌نمای زنون نیاز به پیدایش یک نظریه برای فرایندهای نامتناهی داشت. همچنین نظریه‌ی چنین فرایندی، نیوتن ولایب نیتز را به سوی کشف حسابان راهبری کرد.

شاید داستان باطل‌نمای[۱] زنون را شنیده باشید! ماجرا از این قرار است که در زمان‌های دور، دونده‌ای قصد پیمودن یک مسیر را داشته است. زنون مسأله را چنین می‌دید که دونده در مرحله‌ی اوّل نصف مسافت را می‌پیماید، سپس نصف مسافت باقی‌مانده ــ یعنی نصفِ نصف مسافت ــ را می‌دود، بعداً نصفِ نصفِ نصفِ مسافت را طی می‌کند و به همین ترتیب تا به پایان مسیر برسد. با کمی دقّت، متوجه می‌شویم که مسافت‌های طی شده در هر مرحله، یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $r = \frac{1}{2}$ و جمله‌ی اوّل $a = \frac{1}{2}$ تشکیل می‌دهند

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\ ,\ (\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}\ ,\ (\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}\ ,\ \dots$$

در آن زمان، زنون به دلیل عدم آشنایی با نتایجی که در فعالیّت ۲ــ۷ به آن رسیدیم، دچار یک سردرگمی شده بود. علّت این بود که از یک طرف، توانایی محاسبه‌ی مجموع یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت مثبت و کوچک‌تر از یک، که تعداد جمله‌های آن روبه افزایش دائمی (تا بی‌نهایت) بودند را نداشت، یعنی نمی‌توانست به وسیله‌ی نمادها و ابزار ریاضی نشان دهد که مجموع مسافت‌های

۱ــ Zeno’s paradox

پیموده شده توسط دونده، بالاخره او را به انتهای مسیر می‌رساند! از طرف دیگر، در دنیای واقعی می‌دید که دونده بالاخره مسیر را تمام و کمال طی می‌کند و این‌جا بود که زنون این داستان را «باطل‌نما» نامید و جامعه‌ی ریاضی مدت‌ها دچار بحرانی بود که این باطل‌نما به‌وجود آورده بود.

با توجه به نتایجی که به‌دست آورده‌ایم، مجموع جمله‌های دنباله‌ی هندسی فوق را دوباره بررسی می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\ ,\ (\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۲}\ ,\ (\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})\times\frac{۱}{۲}\ ,\ \ldots$$

دنباله‌ی فوق را به دو طریق زیر بازنویسی می‌کنیم

الف) $\frac{۱}{۲}\ ,\ (\frac{۱}{۲})^{۲}\ ,\ (\frac{۱}{۲})^{۳}\ ,\ (\frac{۱}{۲})^{۴}\ ,\ \ldots$

ب) $\frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{۱}{۲^{۲}}\ ,\ \frac{۱}{۲^{۳}}\ ,\ \frac{۱}{۲^{۴}}\ ,\ \ldots$

تمرین ۱۸: با توجّه به رابطه‌ی (۶) مجموع n جمله‌ی اوّل یک دنباله‌ی هندسی یعنی S_n را در قسمت (ب) حساب کنید.

تمرین ۱۹: با توجّه به نتیجه‌ی تمرین ۱۶، بررسی کنید که با افزایش تعداد nها تا بی‌نهایت، وضعیّت $(\frac{۱}{۲})^n$ چگونه می‌شود؟ مقدار S_n چه‌قدر می‌شود؟ نتیجه‌ی کار را یادداشت کنید.

نتیجه‌گیری‌های شما را می‌توان به صورت حد مجموع این دنباله نوشت

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = ۱}$$

در حالت کلی، حد مجموع یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $۰ < r < ۱$ و جمله‌ی اوّل a، با توجّه به نتایج به دست آمده چنین است:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a(۱-r^n)}{۱-r}$$

یا

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{۱-r}}$$

مسائل

۱ــ کدام‌یک از دنباله‌های زیر هندسی هستند؟ قدر نسبت را برای دنباله‌های هندسی پیدا کنید :

الف) ... ۲۵ ۱۶ ۹ ۴ ۱

ب) ... ۳۵ ۲۸ ۲۱ ۱۴ ۷

پ) ... ۳/۷۵ ۷/۵ ۱۵ ۳۰ ۶۰

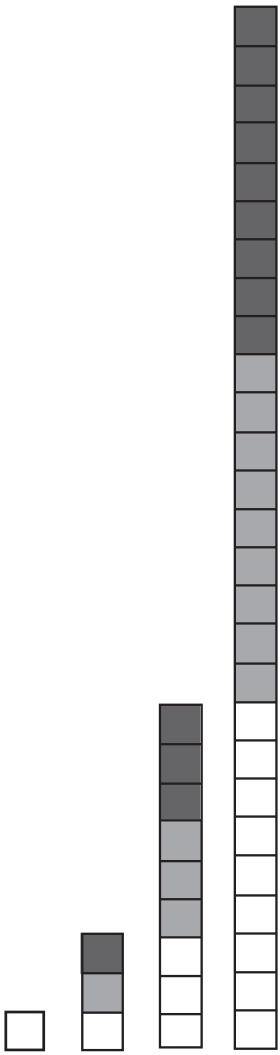
۲ــ نمودار سمت چپ، چهار جمله‌ی اوّل یک دنباله‌ی هندسی را نشان می‌دهد

الف) جمله‌ها را مشخص کنید ؛

ب) قدر نسبت را پیدا کنید ؛

پ) سه جمله‌ی بعدی را به‌دست آورید ؛

ت) مجموع ۱۲ جمله‌ی اول آن را محاسبه کنید.



۳ــ جاهای خالی را در دنباله‌های هندسی زیر پرکنید :

الف) ۴ , ۲۰ , □ , ۵۰۰ , □

ب) □ , □ , ۶۳ , ۱۸۹

پ) ۱ , □ , ۱۰۰۰۰۰۰

ت) ۱ , □ , □ , ۱۰۰۰۰۰۰

ث) ۱ , □ , ۶۴

ج) ۱ , □ , □ , ۶۴

چ) ۱ , □ , ۶۴۰۰۰۰۰۰

ح) ۱ , □ , □ , ۶۴۰۰۰۰۰۰

۴ــ اگر هر جمله‌ی دنباله‌ی هندسی

۱, ۳, ۹, ۲۷, ...

۴ واحد بیشتر شود، دنباله‌ی به‌وجود آمده چنین خواهد بود :

۵, ۷, ۱۳, ۳۱, ...

الف) آیا دنباله‌ی به‌دست آمده نیز یک دنباله‌ی هندسی است؟

ب) اگر هر جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی افزایش یکسانی داشته باشد، آیا دنباله‌ی جدید می‌تواند یک دنباله‌ی هندسی باشد؟

۵ ــ اگر هر جمله‌ی دنباله‌ی هندسی

۱, ۳, ۹, ۲۷, ...

در عدد ۴ ضرب شود، حاصل چنین خواهد بود :

۴, ۱۲, ۳۶, ۱۰۸, ...

الف) آیا دنباله‌ی به‌دست‌آمده یک دنباله‌ی هندسی است؟

ب) اگر هر جمله‌ی یک دنباله‌ی هندسی در عدد ثابتی ضرب شود، آیا دنباله‌ی به‌دست‌آمده همیشه یک دنباله‌ی هندسی است؟

۶ــ یک دنباله‌ی هندسی دارای چهار جمله است : مجموع جمله‌های اول و دوم۴ و مجموع دو جمله‌ی آخر۳۶ است. جمله‌های این دنباله را بیابید.

۲ ــ ۵ ــ دنباله‌ی مربعی

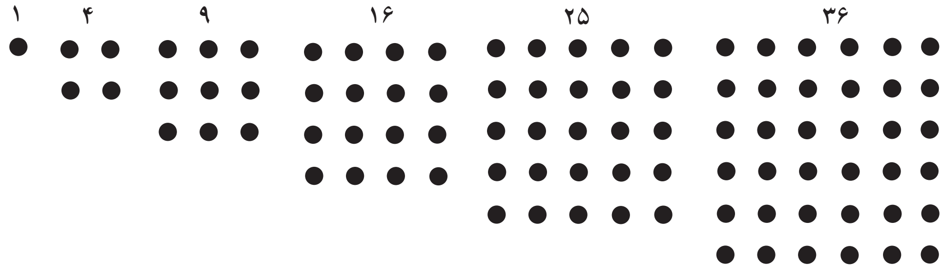
در میان لوحه‌های گِلی و سفالی که به‌وسیله‌ی بابِلیان در ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد مسیح ساخته شده‌اند، دنباله‌های اعداد دیده می‌شوند. اضافه بر لوحه‌هایی که شامل دنباله‌های حسابی و هندسی هستند، یک لوحه یافت شده است که ۶۰ جمله‌ی اوّل دنباله‌ی زیر را نشان می‌دهد

۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, ۴۹,

همان‌طور که می‌بینید، جمله‌های دنباله‌ی فوق از ضرب هر عدد طبیعی متوالی در خودش به‌وجود آمده است و به همین دلیل به آن **دنباله‌ی مربعی** می‌گویند. دنباله‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر هم بازنویسی کرد

$۱^۲, \quad ۲^۲, \quad ۳^۲, \quad ۴^۲, \quad ۵^۲, \quad ۶^۲, \quad ۷^۲, \quad \ldots$

در حدود ۶۰۰ سال قبل از میلاد مسیح، ریاضیدان‌های یونانی غالباً از نقطه‌ها برای نمایش هندسی اعداد استفاده می‌کردند :



در واقع، شکل‌های بالا دلیل نام‌گذاری اعداد مربعی هستند.

> اعداد مربعی اعدادی هستند که می‌توان آن‌ها را در یک آرایه‌ی[1] مربعی شکل نمایش داد.

اگر به شکل‌ها دقّت کنید، می‌بینید که طول ضلع‌های مربع‌هایی که به ترتیب از ۴، ۹، ۱۶، ۲۵و ۳۶ نقطه تشکیل شده‌اند به ترتیب ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، یعنی ریشه‌ی[2] مربع‌های فوق هستند. دنباله‌ی مربع‌ها رابطه‌ی جالبی با دنباله‌ی حسابی اعداد فرد دارد. در واقع، مجموع اعداد فرد متوالی که از یک شروع می‌شوند، اعداد مربعی هستند

$۱ = ۱ = ۱^۲$

۱ـ array　　　　۲ـ root

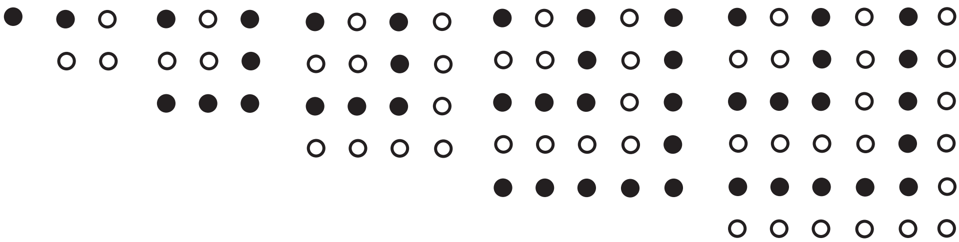
$$۱+۳=۴=۲^{۲}$$

$$۱+۳+۵=۹=۳^{۲}$$

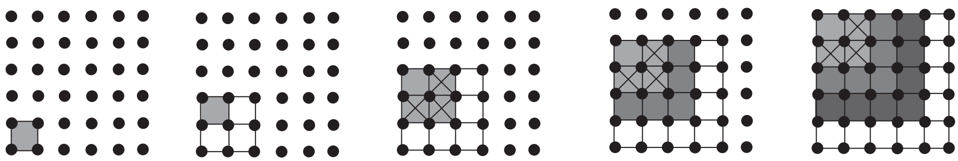
$$۱+۳+۵+۷=۱۶=۴^{۲}$$

$$۱+۳+۵+۷+۹=۲۵=۵^{۲}$$

اساس این رابطه در شکل‌های زیر دیده می‌شود :



آرایه‌ی این الگوها به دو صورت عددی و هندسی، به بهتر دیدن روابط موجود در الگوها کمک می‌کند. به شکل دیگری از آرایه فوق توجّه کنید :



فعالیت ۲ــ۹

مربع‌هایی با ضلع‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را درنظر بگیرید. آنگاه محیط‌ها و مساحت‌های آن‌ها را به ترتیب و جداگانه یادداشت کنید. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، محیط‌ها و مساحت‌ها، هریک تشکیل یک دنباله‌ی عددی می‌دهند :

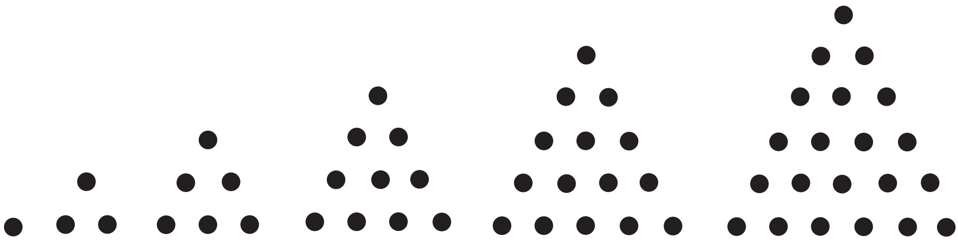
الف) نوع دنباله‌ها را مشخص کنید ؛

ب) اگر طول ضلع مربعی دوبرابر شود، محیط آن چه تغییری می‌کند؟

پ) اگر طول ضلع مربعی دوبرابر شود، مساحت آن چه تغییری می‌کند؟

۲ـ۶ ـ دنباله‌ی مثلثی

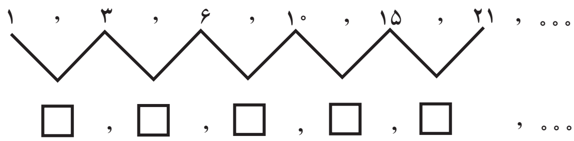
اعداد دنباله‌ی ...,۱۵,۱۰,۶,۳,۱ **مثلثی** نامیده شوند زیرا آن‌ها نماینده‌ی تعداد نقطه‌ها در یک آرایه‌ی مثلثی هستند :



فعالیت۲ـ۱۰

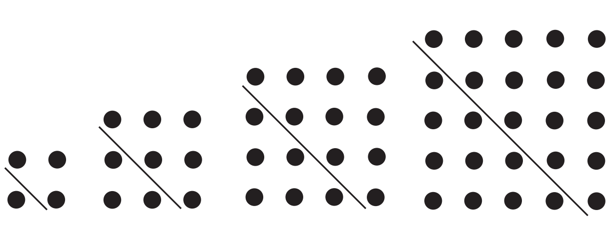
الف) شش جمله‌ی دنباله‌ی مثلثی بالا را عیناً یادداشت کنید. سپس پنج جمله‌ی بعدی این دنباله را با نقطه‌ها نشان دهید ؛

ب) هر جفت از جمله‌های متوالی این دنباله را باهم جمع کنید تا یک دنباله‌ی جدید ساخته شود. به نمونه‌ی زیر توجه کنید :



ویژگی دنباله‌ی نتیجه شده چیست؟

شکل زیر جواب شما را به تصویر می‌کشد :

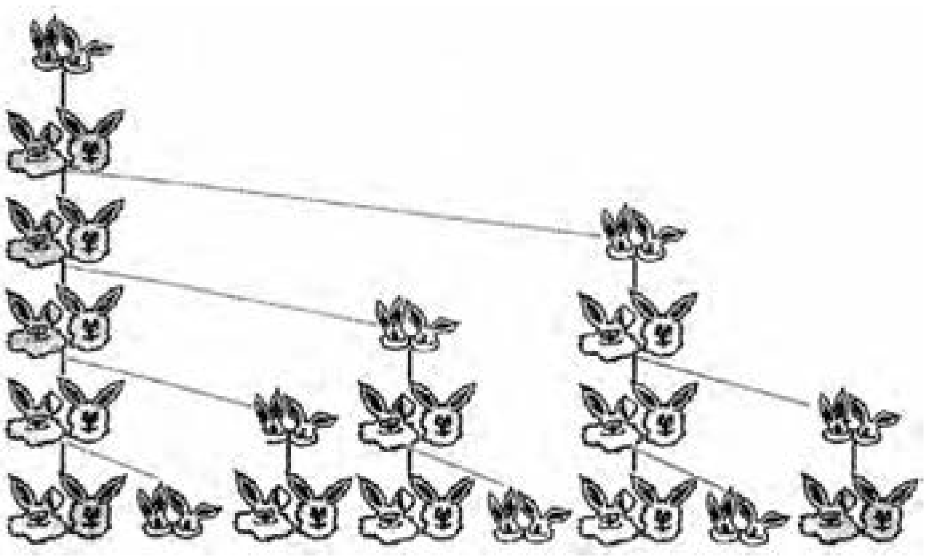


تمرین ۲۰: توان‌های ۳، ۴، الی آخرِ اعداد طبیعی، هریک تشکیل یک دنباله‌ی عددی می‌دهند که همگی در نوع خود جالب هستند. شما به عنوان تمرین دنباله‌ی عددی اعداد طبیعی مکعبی را بنویسید. آنگاه آن را با دنباله‌ی مساحت‌ها و محیط‌های مربع‌هایی با اضلاع متفاوت مقایسه کنید و نتیجه را یادداشت نمایید.

۲ــ۷ــ دنباله‌ی فیبوناتچی

یک جفت خرگوش نر و ماده‌ی یک ماهه، برای تولید مثل بسیار جوان هستند. اما فرض کنید که این جفت خرگوش در ماه دوم تولد خود و ماه‌های پس از آن، هر ماه یک جفت خرگوش نر و ماده به دنیا بیاورند. اگر هر جفت خرگوش متولد شده به همین روال تولید مثل کند و اگر هیچ‌کدام از خرگوش‌ها نمیرند، در شروع هر ماه چند جفت خرگوش وجود خواهد داشت؟ شکل زیر تعداد جفت خرگوش‌ها را در شش ماهه‌ی اول نشان می‌دهد:

فیبوناتچی



فعالیت ۲ــ۱۱

الف) جدول زیر با توجه به شکل تنظیم شده است. باقی جدول را کامل کنید ؛

ماه	جفت خرگوش‌های نوزاد	جفت خرگوش‌های بزرگ	مجموع جفت خرگوش‌ها
اول	۱	۰	۱
دوم	۰	۱	۱
سوم	☐	☐	☐
چهارم	☐	☐	☐
پنجم	☐	☐	☐
ششم	☐	☐	☐

ب) رابطه‌ی بین مجموع جفت خرگوش‌ها و جفت خرگوش‌های بزرگ و نوزاد را بنویسید.

پ) چه رابطه‌ای بین تعداد جفت خرگوش‌های بزرگ در یک ماه و تعداد کل جفت خرگوش‌ها درماه قبلی وجود دارد؟

همان‌طور که مشاهده کردید، تعداد جفت خرگوش‌ها طی شش ماه، دنباله‌ی زیر را تشکیل می‌دهند :

۱ , ۱ , ۲ , ۳ , ۵ , ۸

با کمی دقت می‌بینیم که جمله‌ی سوم مجموع دو جمله‌ی اول و دوم، جمله چهارم مجموع جمله‌ی دوم و سوم و الی آخر است. دنباله‌ی بالا را ادامه می‌دهیم :

۱ , ۱ , ۲ , ۳ , ۵ , ۸ ,۱۳, ۲۱, ۳۴, ...

این دنباله منسوب به فیبوناتچی[۱] ریاضیدان معروف ایتالیایی قرن سیزدهم میلادی است.

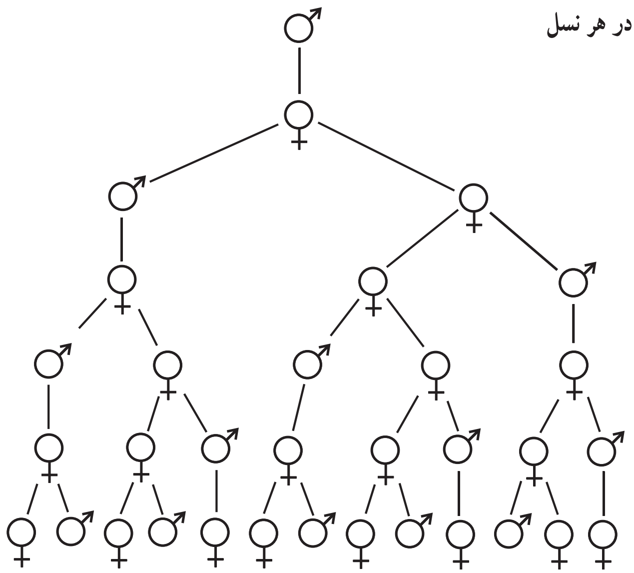
*دنباله‌ی فیبوناتچی یک دنباله عددی است که دو جمله‌ی اول آن ۱ و هر جمله‌ی پس از آن‌ها مجموع دو جمله‌ی قبل است. به زبان نمادین، برای **n** های بزرگ‌تر یا مساوی دو*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

۱ــ Fibonacci

دنباله‌ی فیبوناتچی به طور اعجاب‌آوری در پدیده‌های طبیعی و مصنوعی ظاهر می‌شود. چگونگی تکثیر خرگوش‌ها در طبیعت مثال جالبی از دنباله‌های فیبوناتچی است. چگونگی زاد وولد زنبور عسل نر هم برطبق قانون‌مندی این دنباله است. همان‌طور که می‌دانید، زنبور عسل نر تنها یک والد (مادر) دارد در حالی که زنبور عسل ماده، هم پدر و هم مادر دارد. در نتیجه شجره‌ی زنبور عسل نر الگوی عجیبی دارد. با این حال، تعداد زنبورها در نسل‌های متوالی تشکیل یک دنباله‌ی فیبوناتچی می‌دهند.[1]

نسل قبل — **تعداد زنبورها در هر نسل**



اوّل ۱
دوّم ۲
سوّم ۳
چهارم ۵
پنجم ۸
ششم ۱۳

تمرین۲۱: جمله‌های دنباله‌ی فیبوناتچی دو در میان بر دو بخش‌پذیر است :

۱ ,۱ ,۲ ,۳ ,۵ ,۸ ,۱۳ ,۲۱ ,۳۴ ,۵۵ ,۸۹ ,۱۴۴ ,۲۳۳ ,۳۷۷,

۶۱۰ ,۹۸۷ ,۱۵۹۷ ,۲۵۸۴ ,۴۱۸۱ ,۶۷۶۵ ,۱۰۹۴۶,

کدامین جمله‌ها بر اعداد زیر بخش‌پذیرند؟

الف) سه ؛

ب) پنج ؛

پ) هشت ؛

ت) سیزده ؛

ث) به نظر شما، کدامین جمله‌ها بر پنجاه و پنج بخش‌پذیر هستند؟

۱ــ ♂ علامت زنبور عسل نر و ♀ علامت زنبور عسل ماده است.

دنباله‌ی فیبوناتچی خواصّ جالبی دارد. به مجموع متوالی هشت جمله‌ی اول این دنباله توجّه کنید:

(جدول ۱۱)

مجموع جمله‌ها	حاصل‌جمع
۱+۱	=۲
۱+۱+۲	=۴
۱+۱+۲+۳	=۷
۱+۱+۲+۳+۵	=۱۲
۱+۱+۲+۳+۵+۸	=۲۰
۱+۱+۲+۳+۵+۸+۱۳	=۳۳
۱+۱+۲+۳+۵+۸+۱۳+۲۱	=۵۴

برای پیدا کردن الگو به بررسی دقیق جدول می‌پردازیم تا ما را در پیدا کردن مجموع n جمله، بدون نیاز به محاسبه‌ی تکراری بالا، یاری کند. به همین منظور، جدول فوق را بازنویسی می‌کنیم و توسعه می‌دهیم تا شاید الگوی مناسب را پیدا کنیم (جدول ۱۲).

(جدول ۱۲)

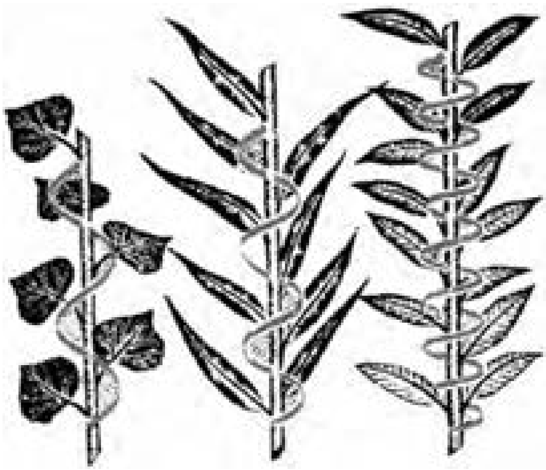
مجموع جمله‌ها	حاصل‌جمع	الگوی پیشنهادی
۱+۱	۲	۲×۱+(۱−۱)
۱+۱+۲	۴	۲×۲+(۱−۱)
۱+۱+۲+۳	۷	۲×۳+(۲−۱)
۱+۱+۲+۳+۵	۱۲	۲×۵+(۳−۱)
۱+۱+۲+۳+۵+۸	۲۰	۲×۸+(۵−۱)
۱+۱+۲+۳+۵+۸+۱۳	۳۳	۲×۱۳+(۸−۱)
۱+۱+۲+۳+۵+۸+۱۳+۲۱	۵۴	۲×۲۱+(۱۳−۱)

با توجّه به الگوی بالا و بدون محاسبه، مجموع ۱۲ جمله‌ی اول دنباله‌ی فیبوناتچی را حدس بزنید. سپس حدس خود را با محاسبه‌ی مجموع جمله‌ها به آزمایش بگذارید. آیا الگوی پیشنهادی تعمیم‌پذیر است؟

با توجه به الگوی فوق، مجموع n جمله‌ی اوّل دنباله‌ی فیبوناتچی را برای ۱ . n حدس می‌زنیم :

مجموع n جمله‌ی اوّل دنباله‌ی فیبوناتچی = ۲ × (جمله‌ی n اُم) + [جمله‌ی (۱ − n) اُم − ۱]

در این بخش، با جلوه‌هایی از نظم طبیعت در رابطه با رشد پدیده‌های طبیعی آشنا شدیم. دنباله‌ی فیبوناتچی ابزاری برای بیشتر شناختن قانونمندی بعضی از الگوهای رشد در طبیعت به ما می‌دهد. به عنوان مثال، ترتیب قرار گرفتن برگ‌های بسیاری از درختان بر روی ساقه‌هایشان به طرز جالبی با دنباله‌ی فیبوناتچی در رابطه هستند.



۲ــ ۸ ــ نسبت طلایی

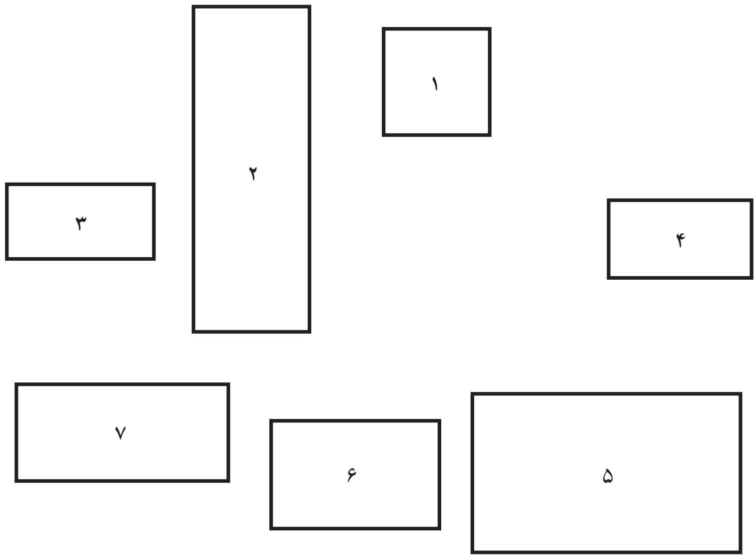
فعالیت ۲ــ۱۲

الف) به مستطیل‌های موجود نگاه کنید :

۵	۴	۳	۲	۱

کدام‌یک به چشم شما خوشایندتر می‌آید؟

ب) حال به مستطیل‌های زیر نگاه کنید :



کدام‌یک به نظر متناسب‌تر می‌آید؟

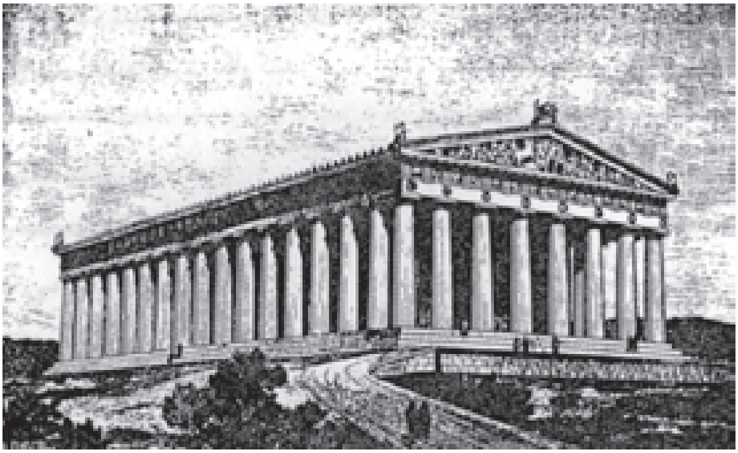
پ) ابعاد تمام مستطیل‌ها را در قسمت‌های (الف) و (ب) تا نزدیک‌ترین میلی‌متر ممکن اندازه بگیرید.

ت) نسبت طول به عرض هریک از مستطیل‌ها را پیدا کنید و نتیجه را یادداشت کنید.

ث) چه رابطه‌ای بین خوشایندترین مستطیل‌ها در قسمت‌های قبل و نسبت به دست آمده می‌بینید؟

همان‌طور که در فعالیت ۲ـ۱۲ دیدید، نسبت طول به عرض مستطیل ۳ در قسمت (الف) و مستطیل ۵ در قسمت (ب) مساوی و تقریباً برابر با ۱/۶۱۸ است. هنرمندان یونان قدیم احساس می‌کردند که مستطیل‌هایی با این نسبت ابعاد، به چشم خوشایندتر هستند و به همین دلیل، در خلق آثار هنری معروفی از جمله ساختمان پارتنون[1] در آتن و مجسمه معروف آپولو[2] در بلودِیر[3]، از این نسبت استفاده شده است. به این نسبت، **نسبت طلایی**[4] می‌گویند.

۱ــ Parthenon
۲ــ Apollo
۳ــ Belvedere
۴ــ Golden ratio



فعالیت ۲ــ۱۳

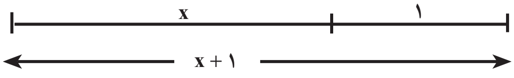
دنباله‌ی فیبوناتچی را تا ۲۰ جمله‌ی اول آن بنویسید و به کمک ماشین حساب نسبت بین هر دو جمله را در جدولی یادداشت کنید. آیا نظمی در نسبت‌های به‌دست آمده مشاهده کردید؟ نتیجه‌ی مشاهدات خود را توضیح دهید.

هم‌چنان که در فعالیت ۲ــ۱۳ دیدید، هرچه مرتبه‌ی جمله‌های دنباله‌ی فیبوناتچی بالاتر می‌رود، نسبت بین دو جمله‌ی دنباله به عدد ۱/۶۱۸ نزدیک و نزدیکتر می‌شود که این همان نسبت طلایی است. در حالت کلی، اگر جمله‌ی nاُم دنباله‌ی فیبوناتچی را با F_n نمایش دهیم، مشاهده می‌کنیم که با افزایش n، نسبت هر دو جمله‌ی متوالی دنباله‌ی فیبوناتچی یعنی

$$\frac{F_{n+۱}}{F_n}$$

به نسبت طلایی یعنی ۱/۶۱۸، نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود. اقلیدس در کتاب پنجم اصول به این نسبت اشاره کرده است.

نسبت طلایی را از تقسیم یک پاره‌خط به دو قسمت به روش دیگری به‌دست می‌آوریم به‌طوری که نسبت طول تمام خط به قسمت بلندتر برابر با نسبت قسمت بلندتر به قسمت کوتاه‌تر می‌شود.



تساوی فوق را می‌توانیم به صورت جبری نیز نمایش دهیم :

$$\frac{\text{طول قسمت بلندتر}}{\text{طول قسمت کوتاه‌تر}} = \frac{\text{طول تمام پاره‌خط}}{\text{طول قسمت بلندتر}}$$

با توجّه به نمودار ۱، مقادیر نسبت‌های فوق را جایگزین می‌کنیم

$$\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{۱},$$

رابطه‌ی فوق را برای x حل می‌کنیم

$$x^۲ = x+۱,$$

یا

$$x^۲ - x - ۱ = ۰$$

ریشه‌ی مثبت معادله برابر است با

$$\boxed{x=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}}$$

مقدار تقریبی این عدد گنگ، همان نسبت طلایی است که تقریباً برابر با ۱/۶۱۸است.

یکی دیگر از نمایش‌های جالب توجّه نسبت طلایی، کسری است که برای همیشه تکرار می‌شود :

$$۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{\ddots}}}$$

هنرمندان ایرانی نیز از نسبت طلایی در هنرهای سنّتی از جمله خط نستعلیق و خط شکسته نستعلیق[۱] استفاده کرده‌اند. شما نیز در آفرینش کارهای هنری خود، این نسبت را فراموش نکنید!

مسائل

۱ــ به الگوی زیر توجّه کنید :

$$۱^۲+۱^۲=۲=۱\times۲$$

$$۱^۲+۱^۲+۲^۲=۶=۲\times۳$$

۱ــ «جوهره و ساختار هندسی خط نستعلیق»، نوشته‌ی جواد بختیاری

$$۱^۲ + ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ = ۱۵ = ۳ \times ۵$$

$$۱^۲ + ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۵^۲ = ۴۰ = ۵ \times ۸$$

الف) دو سطر بعدی الگوی بالا را بنویسید ؛

ب) با استفاده از الگوی فوق، مجموع مربع‌های ده جمله‌ی اوّل دنباله‌ی فیبوناتچی را بدون محاسبه حدس بزنید.

۲ــ الگوی زیر را درنظر بگیرید :

$$۱^۳ + ۲^۳ - ۱^۳ = ۸$$

$$۲^۳ + ۳^۳ - ۱^۳ = ۳۴$$

$$۳^۳ + ۵^۳ - ۲^۳ = \boxed{}$$

$$۵^۳ + ۸^۳ - ۳^۳ = \boxed{}$$

الف) جاهای خالی را در الگوی بالا پُر کنید ؛

ب) دوسطر بعدی الگو را بنویسید ؛

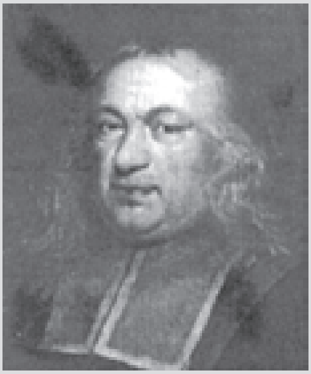
پ) متوجّه چه نظمی شدید؟ توضیح دهید.

مجله‌ی ریاضی

یکی از مشهورترین مسائل حل نشده‌ی ریاضی، آخرین قضیه‌ی فرما[1] بوده است. این قضیه درباره‌ی معادله‌ای به شکل $x^n + y^n = z^n$ است که در آن x ، y ، z و n اعداد طبیعی با فرض $o \neq xyz$ هستند. مثال‌های زیر نمونه‌هایی از چنین معادله‌ای هستند :

$$۳^۲ + ۴^۲ = ۵^۲ \quad , \quad ۵^۲ + ۱۲^۲ = ۱۳^۲ \quad , \quad ۲۰^۲ + ۲۱^۲ = ۲۹^۲$$

پی‌یرفرما، ریاضیدان معروف فرانسوی در قرن هفدهم میلادی، در حاشیه‌ی یکی از کتاب‌هایش یادداشتی نوشت حاکی از این که معادله‌هایی به این شکل فقط برای ۲ و ۱ = n دارای جواب هستند. فرما در یادداشت‌هایش یادآور شد که برای این قضیه اثباتی کشف کرده است امّا حاشیه‌ی کتاب باریک است و جای نوشتن اثبات را ندارد! طی سالیان متمادی، ریاضیدان‌های برجسته‌ای برای اثبات این قضیه تلاش کرده‌اند. هرچندوقت یک بار، جامعه‌ی ریاضی امیدوار از حل این مسأله، نتایجی را اعلام می‌کرد ولی پس از مدت کوتاهی، متوجّه نارسا بودن اثبات می‌شد. بالاخره، در سال ۱۹۹۴، آندره‌وایلز[2] استاد ریاضی دانشگاه پرینستون آمریکا موفق به ارائه‌ی اثبات درست و کامل این قضیه شد و این تلاش ۳۰۰ ساله به نتیجه رسید.



۱ــ Fermat’s last theorem

۲ــ Andrew Wiles