

# هندسه تحلیلی و جبر



پل میرزاالحین بر روی رودخانه زنجان رود



منحنی مسیر حرکت بسیاری از اشیاء را به کمک یک معادله درجه دوم می‌توان نمایش داد. با دقت در محیط پیرامون خود، پدیده‌هایی را بیابید که با توابع درجه ۲ مرتبط باشند.

هندسه تحلیلی

درس اول

معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

درس دوم

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

درس سوم

## درس اول

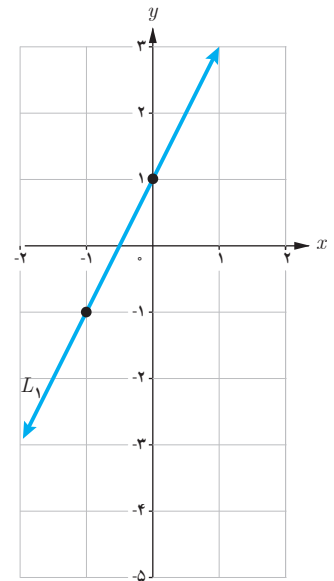
## هندسه تحلیلی

## یادآوری و تکمیل معادله خط

در بسیاری از پدیده‌های جهان، رابطه خطی بین متغیرها به چشم می‌خورد. بنابراین مطالعه تابع‌های خطی اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند. در سال‌های قبل با مطالبی در این زمینه آشنا شدیم. در این فصل نکات دیگری را در این باره، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

## کار در کلاس

۱ می‌دانیم از هر دو نقطه متمایز، تنها یک خط عبور می‌کند؛ بنابراین:  
 الف) با داشتن مختصات ..... نقطه از یک خط باید بتوان معادله آن را به دست آورد.  
 ب) با داشتن معادله یک خط می‌توان با مشخص کردن ..... نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کرد.



۲ نمودار خطوط با معادلات زیر را در دستگاه مختصات مشخص شده، رسم کنید:

$x$	-۱	۰
$y$	-۱	۱

الف)  $L_1: y = 2x + 1$

ب)  $L_2: y = 2x - 3$

پ)  $L_3: y = 1$

ت)  $L_4: x = -2$

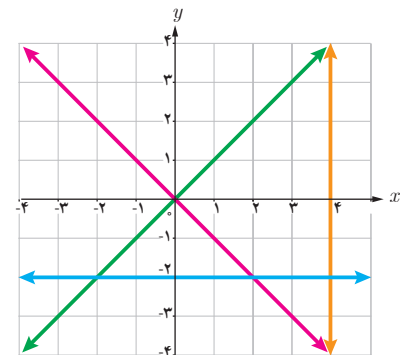
ث)  $L_5: x + 2y = 2$

۳ معادله هر یک از خط‌های نمایش داده شده روی شکل را بنویسید.

۴ الف) توجه داریم که شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی .....؛ به عبارت دیگر شیب خط گذرا از دو نقطه غیر هم‌طول  $A$  و  $B$  برابر است با

$$m_{AB} = \frac{\dots\dots\dots}{x_B - x_A}$$

ب) شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای ..... برابر باشند.



۵ الف) از پایه نهم به خاطر داریم که هرگاه خط  $L$  محور  $y$  ها را در نقطه‌ای با عرض  $h$  قطع کند، آن گاه  $h$ ، ..... خط  $L$  نامیده می‌شود.

ب) در سؤال ۲، شیب و عرض از مبدأ هر یک از پنج خط ذکر شده را بنویسید. در این سؤال کدام دو خط با هم موازی اند؟

۶ الف) خط با شیب  $m$  و عرض از مبدأ  $h$  معادله‌ای به صورت  $y = \dots\dots\dots$  دارد.

ب) می‌خواهیم معادله خط  $L$ ، گذرا از دو نقطه  $A(0, 7)$  و  $B(3, 1)$  را بنویسیم. برای این کار، ابتدا شیب خط را محاسبه می‌کنیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 7}{3 - 0} = -2$$

شیب خط

معادله خط:  $y = -2x + h$

روی خط  $L$  واقع است  $B(3, 1)$ :  $1 = -2(3) + h \Rightarrow h = 7$

البته اگر به مختصات نقطه  $A(0, 7)$  از خط  $L$  دقت کنیم، بدون محاسبه متوجه می‌شویم که عرض از مبدأ این خط  $h = 7$  است. پس:

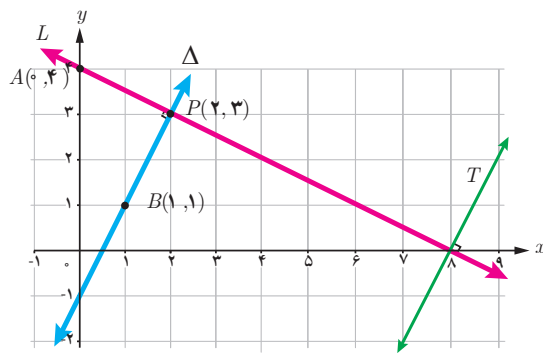
معادله خط  $L$ :  $y = -2x + 7$

ب) معادله خط گذرنده از نقطه  $P(2, -1)$  را بنویسید؛ به طوری که با خط  $y = 3x - 4$  موازی باشد.

فعالیت

۱ دو خط  $L$  و  $\Delta$  را عمود بر هم رسم کرده‌ایم. به شیب‌های این دو خط

توجه می‌کنیم:



شیب خط  $L$  گذرا از نقاط  $A$  و  $P$ :  $m = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{3 - 4}{2 - 0} = -\frac{1}{2}$

شیب خط  $\Delta$  گذرا از نقاط  $B$  و  $P$ :  $m' = \dots\dots\dots$

۲ حاصل ضرب شیب‌های دو خط را به دست می‌آوریم:  $mm' = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\dots\dots\dots\right) = \dots\dots\dots$

می‌بینیم که شیب‌ها، قرینه معکوس یکدیگرند.

۳ اگر خط دلخواه دیگری مثل  $T$  عمود بر  $L$  را در نظر بگیریم، این خط حتماً با خط  $\Delta$  موازی است؛ پس شیب خط  $T$  برابر عدد

..... خواهد بود. بنابراین می‌توان گفت شیب هر خط عمود بر  $L$  برابر قرینه معکوس شیب خط  $L$  خواهد بود. این مطلب در حالت

کلی درست است؛ یعنی

دو خط غیر موازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل ضرب شیب‌های آنها برابر  $(-1)$  باشد؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط  $m$  و  $m'$  باشد، آنگاه شرط عمود بودن آنها آن است که  $mm' = -1$ . به عبارت دیگر شیب هر کدام، قرینه معکوس شیب دیگری باشد.

۱- راه‌های اثبات مختلفی برای این مطلب وجود دارد که یکی از آنها به کمک قضیه فیثاغورس است.

## کار در کلاس



بالا دست سد امام زاده اسماعیل (ع) قم

۱ در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند. (موازی، عمود یا متقاطع غیر عمود؟)

الف) $L: y = 5x - 2$	$T: y = \frac{-1}{5}x + 3$
ب) $L: y = \frac{1}{3}x + 7$	$T: x - 2y = 1$
پ) $L: 2x - 3y + 3 = 0$	$T: 3x + 2y = 0$
ت) $L: x = 1$	$T: y = -3$
ث) $L: y = 3x + 1$	$T: x = 3y - 1$

۲ خط  $L$  به معادله  $2y - 3x = 1$  و خط  $T$  با عرض از مبدأ ۵ به معادله  $y = mx + 5$  را در نظر بگیرید.

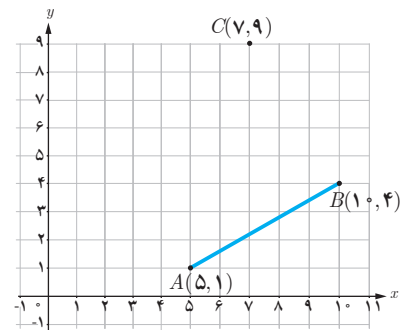
الف)  $m$ ، را طوری بیابید که خط  $T$  با خط  $L$  موازی باشد.  
ب) به ازای چه مقداری از  $m$ ، دو خط بر یکدیگر عمودند؟

۳ مربع  $ABCD$  در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است، به طوری که  $A(5, 1)$  و  $B(10, 4)$  دو رأس مجاور آن هستند.  
الف) شیب ضلع  $AB$  را بنویسید.

ب) شیب ضلع  $AD$  را حساب کنید و معادله این ضلع را بنویسید.

پ) اگر بدانیم نقطه  $C(7, 9)$  رأس سوم مربع است، مختصات رأس  $D$  را بیابید.

ت) مربع را به طور کامل رسم کنید.



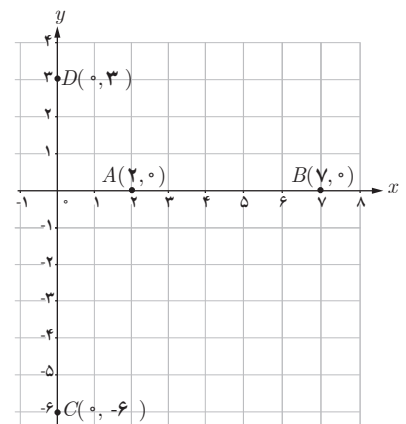
## فاصله دو نقطه

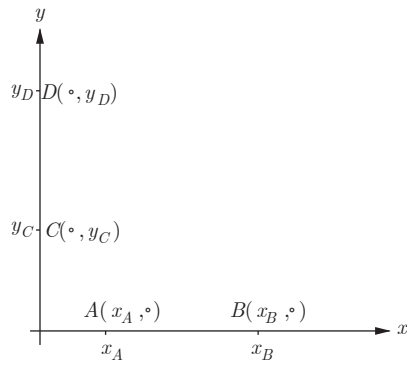
## فعالیت

شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف) فاصله دو نقطه  $A$  و  $B$  که برابر طول پاره خط  $AB$  است، برابر ۵ است. چه رابطه‌ای بین این عدد با  $x_A$  و  $x_B$  وجود دارد؟

ب) فاصله دو نقطه  $C$  و  $D$  را برحسب عرض آنها بیان کنید.





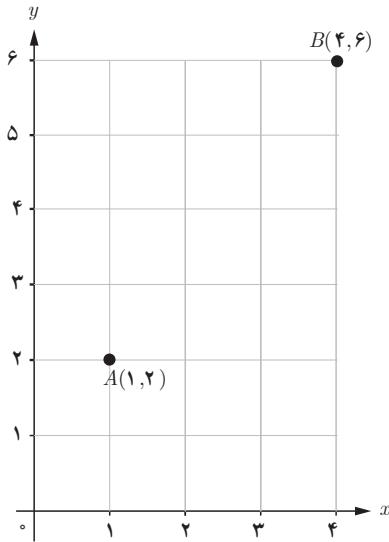
پ) در شکل مقابل، فاصله نقاط  $A$  و  $B$  را برحسب طول آنها و فاصله دو نقطه  $C$  و  $D$  را برحسب عرض آنها به دست آورید.

$$AB =$$

$$CD =$$

در حالت کلی می توان گفت :

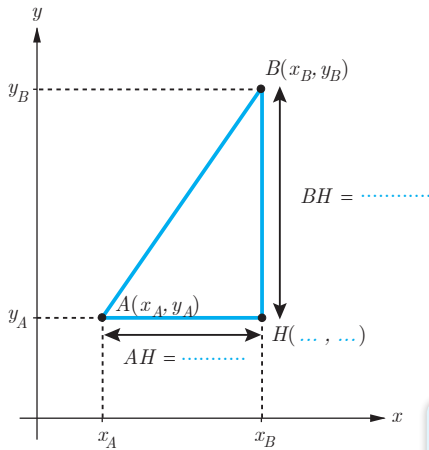
۱- اگر  $A$  و  $B$  دو نقطه هم عرض در صفحه باشند، آن گاه  $AB = |x_A - x_B|$   
 ۲- اگر  $C$  و  $D$  دو نقطه هم طول در صفحه باشند، آن گاه  $CD = |y_C - y_D|$



فعالیت

- ۱ در شکل مقابل فاصله دو نقطه  $A$  و  $B$  را با خط کش به دست آورید.
- ۲ بدون استفاده از خط کش، طول پاره خط  $AB$  را به دست آورید. برای این کار از چه رابطه ای استفاده می کنید؟

۳ در شکل مقابل :



- الف) مختصات نقطه  $H$  را بنویسید.  
 ب) طول پاره خط های  $AH$  و  $BH$  را مشخص کنید و روی شکل بنویسید.  
 پ) طول  $AB$  را به کمک قضیه فیثاغورس به دست آورید.

با توجه به فعالیت قبل می توان گفت :

فاصله دو نقطه  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  برابر است با  $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

## کار در کلاس

۱ نقاط  $A(2,0)$ ،  $B(5,4)$  و  $C(-2,3)$  را در نظر بگیرید و آنها را روی دستگاه مختصات مشخص کنید.

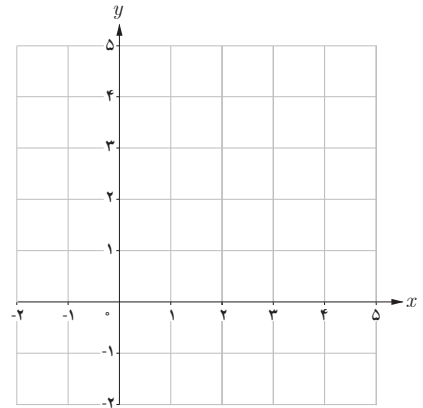
الف) محیط مثلث  $ABC$  را با محاسبه طول اضلاع آن به دست آورید.

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2 - 5)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$AC = \dots\dots$$

$$BC = \dots\dots$$

$$\text{محیط: } P = \dots\dots$$



ب)  $ABC$  چه نوع مثلثی است؟

پ) به دو روش نشان دهید  $ABC$  یک مثلث قائم الزاویه است. سپس مساحت آن را حساب کنید.

۲ در یکی از جاده‌های کشور تصادفی رخ داده است که مختصات نقطه تصادف روی نقشه مرکز امداد به صورت  $P(50, 30)$  است. پایگاه‌های امداد هوایی که به محل تصادف نزدیک‌اند، در نقاط  $A(10, -20)$  و  $B(80, 90)$  واقع‌اند. شما کدام پایگاه را برای اعزام بالگرد امداد به محل حادثه پیشنهاد می‌کنید؟ (اعداد بر حسب کیلومتر هستند).



۳ الف) فاصله نقطه  $N(-6, 8)$  تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

ب) فاصله نقطه  $E(x_E, y_E)$  تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

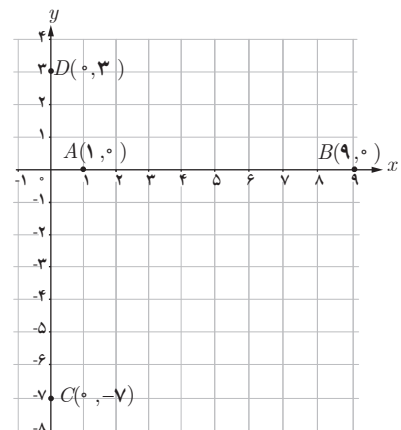
## مختصات نقطه وسط پاره خط

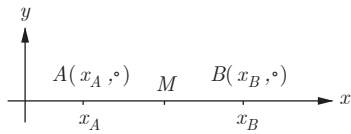
## فعالیت

این شکل را در نظر بگیرید.

الف) نقطه وسط پاره خط  $AB$  را  $M$  بنامید.  $M$  را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.

ب) نقطه وسط پاره خط  $CD$  را  $N$  بنامید و  $N$  را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.



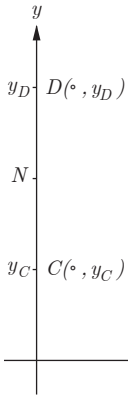


پ) مطابق شکل،  $A$  و  $B$  دو نقطه دلخواه روی محور  $x$  هستند. اگر  $M$  وسط  $AB$  باشد، طول نقطه  $M$  را به دست آورید.

$$AB \text{ وسط } M \Rightarrow AM = MB$$

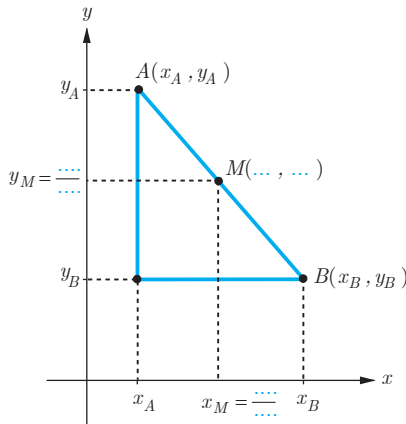
$$\Rightarrow x_M - x_A = \dots\dots\dots$$

$$\Rightarrow 2x_M = \dots\dots\dots \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{\dots\dots}$$



ت) در شکل مقابل،  $C$  و  $D$  دو نقطه دلخواه روی محور  $y$  هستند. اگر  $N$  وسط  $CD$  باشد، عرض نقطه  $N$  را بیابید.

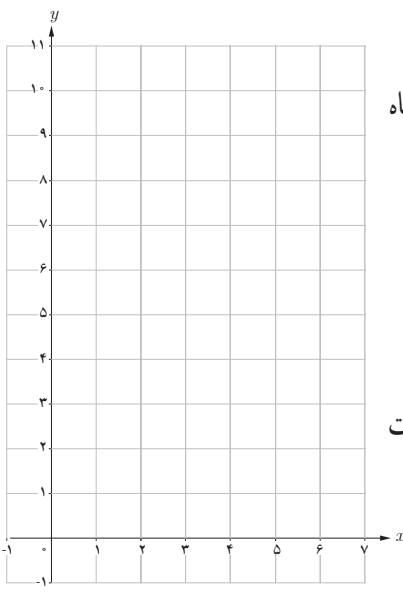
$$CD \text{ وسط } N \Rightarrow \dots\dots\dots \Rightarrow y_N = \frac{\dots\dots}{2}$$



ث) اگر  $A$  و  $B$  دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات باشند و  $M$  نقطه وسط  $AB$ ، آنگاه با توجه به شکل مقابل می توان نشان داد:

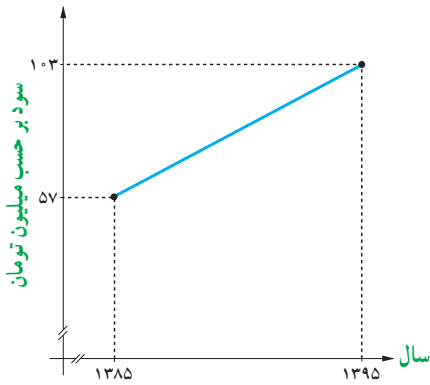
مختصات نقطه وسط پاره خط  $AB$  عبارت است از  $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ .

کار در کلاس



- ۱) مثلث با رأس‌های  $A(1, 9)$ ،  $B(3, 1)$  و  $C(7, 11)$  را در نظر بگیرید و آن را در دستگاه مختصات مقابل مشخص کنید.
  - الف) مختصات  $M$ ، نقطه وسط ضلع  $BC$  را مشخص کنید.
  - ب) طول میانه  $AM$  را محاسبه کنید.
  - پ) معادله میانه  $AM$  را به دست آورید.

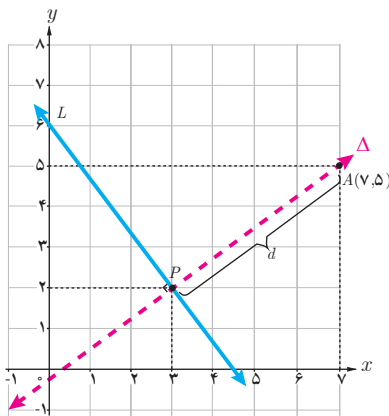
- ۲) الف) نقطه  $N(5, -4)$  وسط پاره خط واصل بین دو نقطه  $A$  و  $B(7, -2)$  است. مختصات نقطه  $A$  را بیابید.
  - ب) قرینه نقطه  $C(1, 2)$  نسبت به نقطه  $M(-1, 4)$  را به دست آورید.
  - پ) قرینه نقطه  $P(\alpha, \beta)$  نسبت به مبدأ مختصات را به دست آورید.



- ۳ سود سالانه یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته است. به کمک رابطه نقطه وسط پاره خط، به سؤالات زیر پاسخ دهید:
- الف) میانگین سود سالانه این شرکت در دهه مورد نظر چقدر بوده است؟
- ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه، با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟
- پ) اگر سود سالانه در طول یک دهه آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه شرکت چقدر باشد؟

### فاصله نقطه از خط

اگر  $A$  نقطه ای خارج خط  $L$  باشد، فاصله نقطه  $A$  تا خط  $L$  برابر است با طول پاره خطی که از  $A$  عمود بر  $L$  رسم می شود. در اینجا می خواهیم با داشتن مختصات نقطه  $A$  و معادله خط  $L$  این فاصله را محاسبه کنیم.



مثال: فاصله نقطه  $A(7,5)$  را از خط  $L$  به معادله  $4x + 3y = 18$  به دست آورید.

حل: چون شیب خط  $L$  برابر  $-\frac{4}{3}$  است، پس هر خط عمود بر آن دارای شیب  $\frac{3}{4}$  خواهد بود. معادله خط  $\Delta$  گذرنده از  $A$  و عمود بر  $L$  را می نویسیم.

$$\Delta: y = \frac{3}{4}x + h$$

$$\text{است روی } \Delta \text{ نقطه } A(7,5): 5 = \frac{3}{4}(7) + h \Rightarrow h = \frac{-1}{4}$$

$$\Delta \text{ معادله: } y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta: 3x - 4y = 1$$

اگر معادله دو خط  $L$  و  $\Delta$  را به صورت یک دستگاه معادلات خطی در نظر بگیریم، از حل آن مختصات نقطه  $P$ ، محل برخورد دو خط به دست می آید.

$$L: \begin{cases} 4x + 3y = 18 \\ \Delta: \begin{cases} 3x - 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 2 \Rightarrow P(3, 2)$$

طول پاره خط  $AP$  جواب مسئله است.

$$AP = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{(7 - 3)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

با به کارگیری مراحل حل این مثال در حالت کلی می توان ثابت کرد:

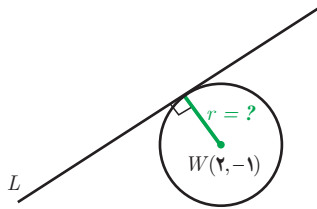
فاصله نقطه  $A(x_0, y_0)$  از خط به معادله  $ax + by + c = 0$  برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

حال مثال قبل را به کمک این رابطه حل می کنیم؛ یعنی فاصله  $A(7,5)$  را از خط به معادله  $4x + 3y - 18 = 0$  به دست می آوریم:

$$d = \frac{|4(7) + 3(5) - 18|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|25|}{5} = 5$$





۱ فاصله نقطه  $P(7, -4)$  را از هر یک از خطوط با معادله‌های زیر به دست آورید :

الف)  $L: 2x + y = 5$       ب)  $T: x = 5$       پ)  $\Delta: y = 0$

۲ خط  $L: 3x - 4y = 0$  بر دایره‌ای به مرکز  $W(2, -1)$  مماس است. شعاع دایره را بیابید. (راهنمایی: خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است).

تمرین

۱ وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

$L: 2x - y = 1$        $T: y = 2x - 3$        $\Delta: x + 2y = 0$

۲ دو نقطه  $A(14, 3)$  و  $B(10, -13)$  را در نظر بگیرید. فاصله مبدأ مختصات را از وسط پاره خط  $AB$  به دست آورید.

۳ نشان دهید مثلث با رأس‌های  $A(1, 2)$ ,  $B(2, 5)$  و  $C(4, 1)$  یک مثلث متساوی الساقین قائم‌الزاویه است.

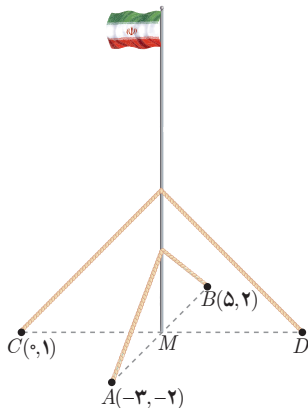
۴ دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط  $A(2, -2)$  و  $B(6, 4)$  هستند.

الف) اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب) آیا نقطه  $C(7, 3)$  بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

۵ نقاط  $A(2, 3)$ ,  $B(-1, 0)$  و  $C(1, -2)$  سه رأس از مستطیل  $ABCD$  هستند.

مختصات رأس چهارم آن را بیابید. (با دانستن این مطلب که در هر مستطیل، قطرهای آن منصف یکدیگرند، آیا می‌توانید راه حل کوتاه‌تری برای مسئله ارائه کنید؟)

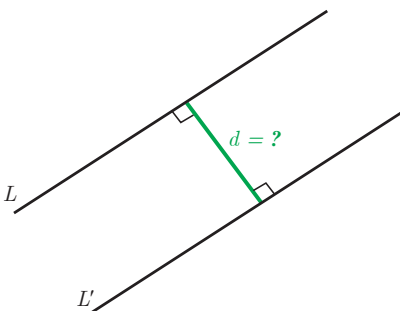


۶ یک میله پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است؛ به طوری که فاصله هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا پای میله. مختصات نقطه  $D$  را به دست آورید.

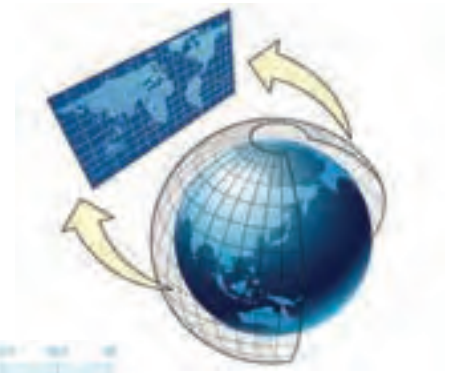
۷ یکی از اضلاع مربعی بر خط  $L: y = 2x - 1$  واقع است. اگر یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

۸ الف) نشان دهید دو خط با معادلات  $5x - 12y + 8 = 0$  و  $-10x + 24y + 10 = 0$  یکدیگر موازی‌اند.

ب) فاصله این دو خط را محاسبه کنید. (راهنمایی: یک نقطه دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله آن را از خط دیگر به دست آورید).



۹ طول جغرافیایی تبریز تقریباً ۴۶ درجه شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود ۳۸ درجه شمالی است. برای راحتی، می‌توانیم موقعیت این شهر را به‌طور خلاصه، به صورت (۴۶, ۳۸) نشان دهیم. این اطلاعات دربارهٔ چابهار به صورت (۶۱, ۲۵) است. با فرض اینکه مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی برابر ۱۱۰ کیلومتر باشد، مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ تقریبی این دو شهر.



آیا تاکنون به رابطهٔ طول و عرض جغرافیایی با دستگاه مختصات فکر کرده‌اید؟ در دستگاه مختصات مقابل، کدام محور نظیر طول جغرافیایی است؟



موزهٔ فاجار تبریز

## معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

## روش تغییر متغیر برای حل معادله

در پایه دهم روش‌های مختلفی را برای حل معادله درجه ۲ آموختیم. یکی از دلایل اهمیت این معادلات آن است که معادلات دیگری نیز وجود دارند که قابل تبدیل به معادله درجه دوم اند؛ مانند معادلات گویا و گنگ که درس سوم به آنها اختصاص یافته است. در اینجا با روش تغییر متغیر برای حل دسته خاصی از معادله‌ها آشنا می‌شویم که یک شیوه کارآمد برای حل انواع معادله است.

مثال: معادله مقابل را حل کنید.

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

حل: با وجود آنکه این معادله از نوع درجه ۴ است، می‌توان آن را به روش معادله درجه دوم حل کرد. برای این کار به جای عبارت  $x^2$ ، متغیر (مجهول) جدیدی مثل  $u$  قرار می‌دهیم. به این کار تغییر متغیر می‌گوییم.

$$x^2 = u \Rightarrow u^2 - 10u + 9 = 0$$

این معادله را به روش کلی و همچنین به روش تجزیه حل می‌کنیم:

(روش تجزیه)

$$(u-1)(u-9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ u=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases}$$

(روش کلی)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-10)^2 - 4(1)(9) = 64$$

$$u = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ u=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases}$$

کار در کلاس

معادله‌های مقابل را حل کنید.

الف)  $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

ب)  $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

## مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲

گاهی به جای مقدار دقیق ریشه‌های یک معادله درجه ۲، تنها مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها اهمیت دارد که در این صورت بدون حل

۱- در این کتاب روش تغییر متغیر فقط برای معادلات دو مجذور به کار می‌رود.

معادله می توان این مقادیر را به دست آورد. معمولاً مجموع دو ریشه را با  $S$  و حاصل ضرب آنها را با  $P$  نمایش می دهیم؛ یعنی اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله باشند:  $\alpha + \beta = S$  و  $\alpha\beta = P$ .

**فعالیت**

می دانیم که معادله درجه دوم در حالت کلی به صورت مقابل است:  $(1) \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

۱ می خواهیم بررسی کنیم که چگونه می توان بدون حل این معادله درباره وجود و تعداد جواب های حقیقی آن اظهار نظر کرد.  
الف) در این معادله اگر ضرایب  $a$  و  $c$  هم علامت نباشند، درباره علامت  $\Delta$  چه می توان گفت؟  
ب) اگر  $a$  و  $c$  هم علامت نباشند، آنگاه معادله (۱) دارای ..... ریشه حقیقی متمایز است.

۲ معادله مقابل را در نظر می گیریم:  $3x^2 + 5x - 1 = 0$   
الف) توضیح دهید که چرا این معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.  
ب) آیا بین ضرایب معادله و مجموع ریشه ها ( $S$ ) رابطه ای وجود دارد؟ برای پاسخ به این سؤال، معادله را حل می کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = \dots\dots\dots$$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dots\dots\dots \\ \beta &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

$$S = \alpha + \beta = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

ملاحظه می شود که:  $S = -\frac{b}{a}$ .

پ) درستی نتیجه فوق را در معادله زیر هم بررسی می کنیم:

$$3x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x(3x - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dots\dots\dots \\ \beta = \dots\dots\dots \end{cases}$$

$$S = \alpha + \beta = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \frac{7}{3} = -\frac{b}{a}$$

ت) درستی نتیجه بالا را در حالت کلی ثابت می کنیم. فرض کنیم برای معادله (۱)، مقدار  $\Delta$  مثبت باشد. پس معادله دو ریشه حقیقی متمایز مثل  $\alpha$  و  $\beta$  دارد:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \beta &= \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

ث) با مفروضات قسمت قبل، ثابت کنید:  $P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$

$$P = \alpha \cdot \beta = \left( \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \right) = \dots\dots\dots$$

۱- S حرف اول Sum به معنای مجموع و P حرف اول Product به معنای حاصل ضرب است.

با توجه به این فعالیت می توان گفت :

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله  $ax^2+bx+c=0$  ( $a \neq 0$ ) باشند، آنگاه :

$$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad \alpha \cdot \beta = P = \frac{c}{a}$$

کار در کلاس

در معادله  $2x^2+x+5=0$  بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه ها را به دست آورید.

تشکیل معادله درجه ۲ با استفاده از  $S$  و  $P$

گاهی برای حل یک مسئله، لازم است برای آن معادله ای بنویسیم و سپس آن معادله را حل کنیم. در برخی موارد، این معادله درجه ۲ خواهد بود. مثلاً می خواهیم با مجموع و حاصل ضرب دو عدد، معادله درجه دومی بسازیم که آن دو عدد ریشه های معادله باشند. برای این کار فرض می کنیم آن دو عدد (ریشه های معادله)،  $\alpha$  و  $\beta$  باشند. معادله مورد نظر را می توان به شکل زیر نوشت :

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-Sx+P=0$$

بنابراین نشان دادیم که :

معادله درجه دومی که مجموع ریشه های آن  $S$  و حاصل ضرب ریشه های آن  $P$  باشد، به صورت  $x^2-Sx+P=0$  است.

کار در کلاس

۱ دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها  $1/5$ - و حاصل ضربشان  $7$ - باشد.

۲ آیا مستطیلی با محیط  $11 \text{ cm}$  و مساحت  $6 \text{ cm}^2$  وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، طول و عرض آن را مشخص کنید.

حل : اگر ابعاد مستطیل را  $\alpha$  و  $\beta$  بنامیم، داریم :

$$\begin{aligned} \text{محیط} = 11 &\Rightarrow 2(\alpha+\beta) = 11 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{11}{2} \Rightarrow \beta = \frac{11}{2} - \alpha \\ \text{مساحت} = 6 &\Rightarrow \alpha \cdot \beta = 6 \Rightarrow \alpha(\frac{11}{2} - \alpha) = 6 \end{aligned}$$



الف) معادله بالا را ساده کنید و از حل آن  $\alpha$  و  $\beta$  را به دست آورید.

ب) با استفاده از  $S$  و  $P$  و تشکیل یک معادله درجه دوم، این مسئله را حل کنید.

۳ معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$  و  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$  باشند.

**ماکزیم و مینیم سهمی**

سهمی با ضابطه  $y = ax^2 + bx + c$  را در نظر می‌گیریم. از سال گذشته می‌دانیم که طول رأس این سهمی  $x = -\frac{b}{2a}$  است.

الف) اگر  $a > 0$ ، آنگاه دهانه سهمی رو به بالاست و به ازای  $x = -\frac{b}{2a}$  کمترین (مینیم) مقدار سهمی به دست می‌آید.

ب) اگر  $a < 0$ ، آنگاه دهانه سهمی رو به پایین است و به ازای  $x = -\frac{b}{2a}$  بیشترین (ماکزیم) مقدار سهمی حاصل می‌شود.

مثال: ماکزیم یا مینیم تابع با ضابطه  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$  را در صورت وجود به دست آورید.

حل: چون  $a = -1$  منفی است، پس دهانه سهمی رو به پایین است و این سهمی ماکزیم دارد. این تابع به ازای  $x = -\frac{b}{2a} = 1$  بیشترین مقدار خود را خواهد داشت که برابر است با  $f(1) = 4$ .

تذکر: همچنان که در شکل دیده می‌شود، در این مثال نقطه  $(1, 4)$  رأس سهمی و نقطه ماکزیم آن است. در این حالت منظور از مقدار ماکزیم سهمی، عرض این نقطه، یعنی ۴ است.

مثال: یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۴m باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

حل: با توجه به شکل داریم:  $3x + 2y = 4 \Rightarrow y = 2 - \frac{3}{2}x$   
 از آنجا که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $x$  برابر  $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$  است (چرا؟)، می‌توان نوشت:

$$S = x \cdot y + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

به جای  $y$  معادل آن را بر حسب  $x$  قرار می‌دهیم.

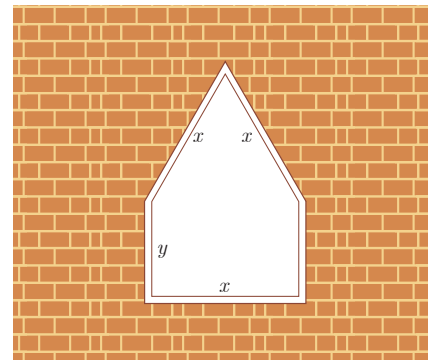
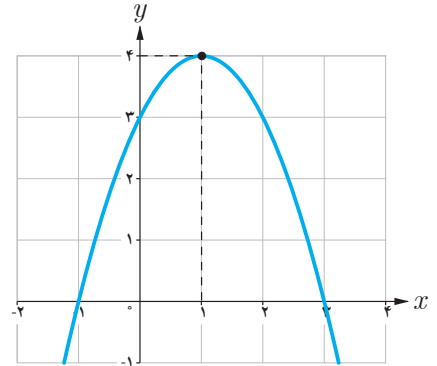
$$S = x(2 - \frac{3}{2}x) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$S = \frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2 + 2x$$

این تابع دارای ماکزیم است (چرا؟) و بیشترین مقدار آن به ازای  $x = -\frac{b}{2a}$  حاصل می‌شود.

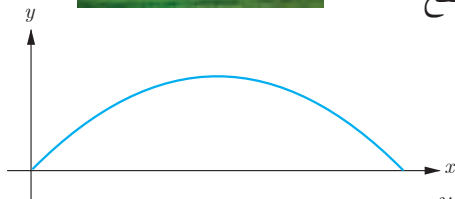
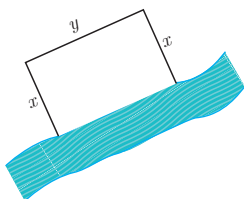
$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{\frac{6-\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{6-\sqrt{3}} \approx 0.94(m)$$

$$y = 2 - \frac{3}{2}x = 2 - \frac{3}{2}(0.94) \approx 0.59(m)$$





رودخانه قزل اوزن



۱ تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم و کدام یک مینیمم دارند. سپس مقدار ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

الف)  $g(x) = -(x+1)^2 + 3$

ب)  $h(x) = x^2 - 4x + 9$

۲ قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینه نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

### صفرهای تابع درجه ۲

همان‌گونه که می‌دانیم، نمودار هر تابع درجه دوم، یک سهمی است. به عنوان مثال فرض کنیم فوتبالیستی تویی را با زاویه ۴۵° نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیه ۲۰ m/s شوت کند. معادله مسیر حرکت این توپ، یک تابع درجه دو با ضابطه  $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$  است که نمودار آن مانند شکل مقابل است. در این رابطه  $x$  مسافت افقی طی شده و  $y$  ارتفاع توپ از سطح زمین است.

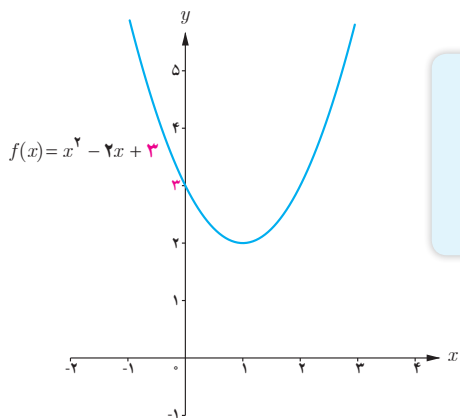
الف) حداکثر ارتفاع توپ را به دست آورید.

ب) به نظر شما حداکثر مسافت افقی طی شده توسط توپ چقدر است؟

برای آنکه طول نقاط برخورد نمودار این تابع با محور  $x$ ‌ها را به دست آوریم، باید قرار دهیم  $y=0$ .

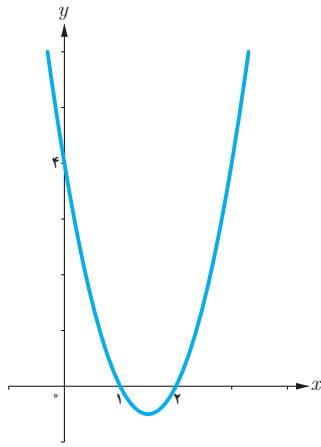
$$y = 0 \Rightarrow x\left(\frac{-1}{4}x + 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

این نقاط را روی نمودار نشان دهید و توضیح دهید که این اعداد از نظر فیزیکی چه معنایی می‌دهند؟



نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند  $f$  با محور  $x$ ‌ها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادله  $f(x) = 0$  هستند. به عبارت دیگر، در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است.

همچنین عرض نقطه برخورد نمودار هر تابع مثل  $f$  با محور  $y$ ‌ها، همان  $f(0)$  است. به عبارت دیگر در تابع درجه ۲ با ضابطه  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، عدد ثابت  $c$  نشان‌دهنده محل برخورد نمودار آن با محور  $y$ ‌هاست. به عنوان مثال، به شکل مقابل توجه کنید.



مثال: معادله سهمی مقابل را بنویسید.

حل: با توجه به شکل دیده می‌شود که نمودار تابع، محور افقی را در نقاطی با طول‌های ۱ و ۲ قطع کرده است. پس ضابطه آن به صورت زیر است:

$$y = a(x-1)(x-2)$$

با توجه به نمودار، مقدار  $a$  را به دست می‌آوریم.

$$\Rightarrow 4 = a(0-1)(0-2) \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow y = 2(x-1)(x-2) \Rightarrow y = 2x^2 - 6x + 4$$

کار در کلاس

۱ همچنان که از سال قبل می‌دانیم، تعداد صفرهای تابع درجه دوم  $y = ax^2 + bx + c$  را به کمک علامت  $\Delta$  می‌توان تشخیص داد. همچنین رو به بالا بودن یا رو به پائین بودن دهانه سهمی از روی علامت  $a$  مشخص می‌شود. جدول زیر را کامل کنید.

$\Delta$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

۲ دربارهٔ تابع درجه دوم  $f$ ، برای تشخیص علامت ریشه‌های احتمالی معادله  $f(x) = 0$  می‌توانیم از علامت  $S$  و  $P$  کمک بگیریم. در هر یک از موارد زیر، مانند قسمت الف عمل کنید.

الف)  $y = x^2 + 6x + 5$

ب)  $y = x^2 + 4x - 5$

معادله  $y = 0$  دو ریشه حقیقی متمایز دارد  $\Rightarrow \Delta = 16 > 0$

ریشه‌ها هم علامت‌اند  $\Rightarrow P = \frac{c}{a} = 5 > 0$

هر دو ریشه منفی‌اند  $\Rightarrow S = -\frac{b}{a} = -6 < 0$

پ)  $y = 3x^2 - 7x + 1$

ت)  $y = -x^2 + 2x - 1$



۳ هرگاه نمودار تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک آن علامت ضرایب  $a$ ،  $b$  و  $c$  را مشخص کنیم. به عنوان مثال نمودار تابع  $f$  از مجموعه توابع داده شده زیر را در نظر می‌گیریم:

– دهانه سهمی رو به بالاست؛ پس  $a$  مثبت است.

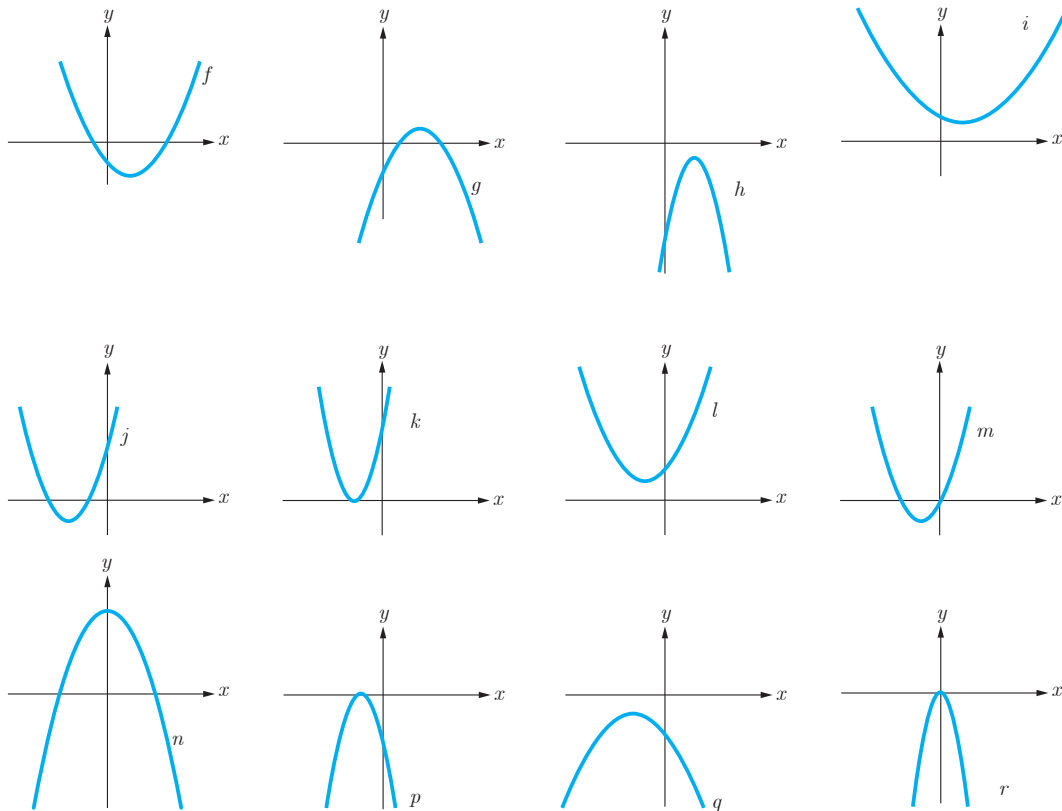
– نمودار تابع  $f$  محور  $y$ ها را در قسمت منفی‌ها قطع کرده است؛ پس  $c$  منفی است.

– رأس سهمی در ربع چهارم قرار گرفته که در آن مقادیر  $x$  مثبت‌اند؛ پس:

$$\frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow b < 0$$

توجه داریم که باتوجه به نمودار، مجموع دو ریشه عددی مثبت است (چرا؟) و از این مطلب هم می‌توان منفی بودن علامت  $b$  را نتیجه گرفت.

خلاصه این اطلاعات در جدول بعد آمده است. جدول را کامل کنید.



ویژگی \ تابع	$f$	$g$	$h$	$i$	$j$	$k$	$l$	$m$	$n$	$p$	$q$	$r$
علامت $a$	+							+			-	
$b$	-							+			-	
$c$	-							o			-	
تعداد ریشه‌ها	دو							دو			فاقد ریشه	
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت							یکی منفی یکی صفر			ریشه ندارد	

۱ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف)  $x^2 - 8x + 8 = 0$

ب)  $4x^6 + 1 = 5x^3$

۲ معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن  $1 - \sqrt{2}$  و  $1 + \sqrt{2}$  باشد.

۳ مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع با ضابطه‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$

ب)  $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

۴ راکتی که به طور عمودی روبه بالا شلیک شده،  $t$  ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع  $h$  متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادله آن به صورت

$$h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$$

الف) چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب) ارتفاع نقطه اوج را بیابید.

پ) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین بازمی‌گردد؟

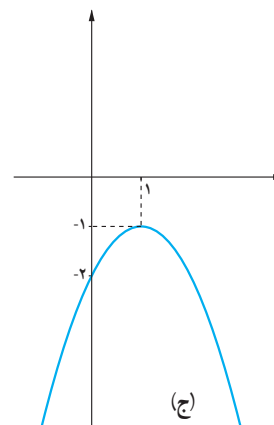
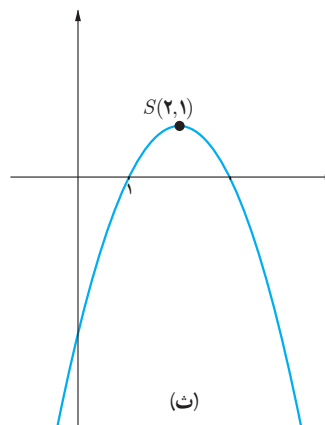
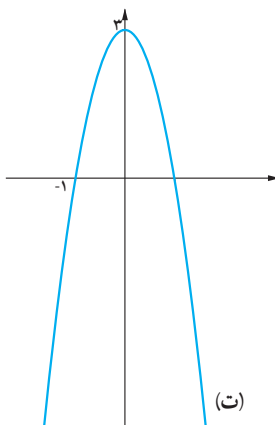
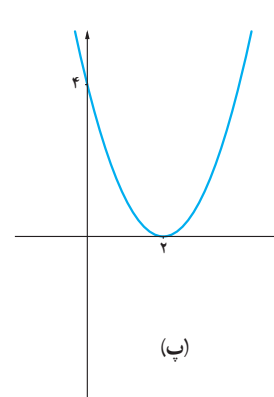
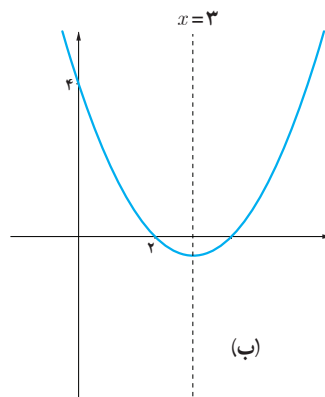
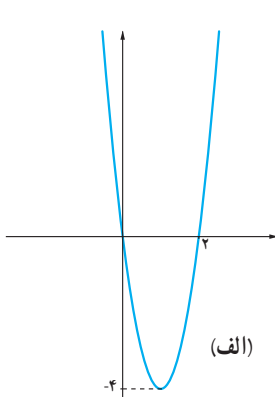
۵ استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است.

اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که:

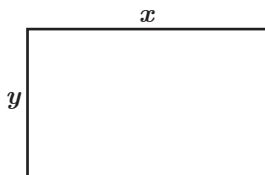
الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

۶ معادله سهمی‌های زیر را بنویسید.



معادلات گویا



در برخی از اجزای بدن انسان، در بعضی گیاهان و همچنین در پاره‌ای از بناها و آثار هنری رد پای عدد طلایی مشاهده می‌شود. تحقیقی در این زمینه انجام دهید و گزارش آن را در کلاس ارائه کنید.



ارگ تاریخی بم



صفحه‌ای از کتاب ریاضی دوم دبستان

مستطیل طلایی، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب  $x$  و  $y$  باشند داشته باشیم:  $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$ . نسبت طول به عرض این مستطیل را نسبت طلایی می‌گویند. مثال: عرض مستطیل را  $y=1$  در نظر می‌گیریم تا مقدار نسبت طلایی را محاسبه کنیم:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

با ضرب دو طرف این معادله در  $x$  می‌توان آن را از حالت کسری خارج کرد (یا به طور معادل در اینجا حاصل ضرب طرفین را مساوی حاصل ضرب وسطین قرار می‌دهیم):

$$x^2 = x+1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5, \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

غیر قابل قبول

عدد  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  به عدد طلایی معروف است که مقدار تقریبی آن  $1/618$  می‌باشد؛ این عدد از دوران باستان مورد توجه بوده است.

از کلاس اول ابتدایی که با معادلاتی به شکل  $\square + 2 = 5$  مواجه شدیم، تقریباً همیشه درگیر حل معادله بوده‌ایم! گاهی به معادلاتی مانند  $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$  برمی‌خوریم که در آنها مجهول در مخرج یک عبارت گویا (کسری با صورت و مخرج چند جمله‌ای) قرار دارد. چنین معادلاتی را معادلات گویا می‌نامیم. همان‌طور که دیدیم:

برای حل یک معادله گویا می‌توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج‌ها، در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک م م) مخرج‌ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود. جواب‌های به دست آمده نباید مخرج کسرها را صفر کنند و این جواب‌ها باید در معادله اولیه صدق کنند.

۱ معادله مقابل را حل کنید.

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x} \quad (1)$$

الف) ابتدا در صورت امکان مخرج کسرها را به حاصل ضرب عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x(x-1)} \quad (2)$$

ب) در مخرج‌ها سه نوع عامل اول متمایز وجود دارد  $x$ ،  $(x+1)$  و  $(x-1)$  که بزرگ‌ترین توان هر کدام از آنها برابر  $\dots\dots$  است؛ پس کم‌مخرج‌ها عبارت است از  $\dots\dots\dots$ .پ) طرفین معادله (۲) را در  $x(x-1)(x+1)$  ضرب می‌کنیم تا معادله از شکل کسری خارج شود.

$$x(x-1)(x+1) \left[ \frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{x+1} \right] = x(x-1)(x+1) \left[ \frac{2-x}{x(x-1)} \right] \Rightarrow 2x^2 + 2x(x-1) = (x+1)(2-x)$$

ت) پس از ساده کردن، معادله  $5x^2 - 3x - 2 = 0$  حاصل می‌شود.ث) برای معادله درجه دوم اخیر، مقدار  $\Delta$  را به دست آورید و معادله را حل کنید. آیا هر دو جواب به دست آمده مورد قبول اند؟ چرا؟

۲ خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت  $v$  کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت متوسط قطار  $10 \text{ km/h}$  کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب است محاسبه طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار.

الف) توضیح دهید، چرا زمان رفت از رابطه  $\frac{60}{v}$  به دست می‌آید؟ب) عبارتی بر حسب  $v$  بنویسید که زمان برگشت را نشان دهد.پ) توضیح دهید که چرا معادله  $\frac{60}{v-10} = \frac{60}{v} + \frac{1}{2}$  برقرار است.

ت) طرفین این معادله را در کم‌مخرج‌ها ضرب کنید تا به یک معادله درجه دوم تبدیل شود.

ث) از حل معادله حاصل، سرعت قطار در مسیر رفت را بیابید و به کمک آن زمان رفت و زمان برگشت قطار را به دست آورید.



۱ معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب‌های به دست آمده مورد قبول هستند؟

الف)  $\frac{3}{x^2} - 12 = 0$

ب)  $\frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k^2 + 2k}$

پ)  $\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$

۲ دبیر ریاضی آرمان هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می‌کند. پس از ۵ هفته، آرمان جمعاً ۳۶ امتیاز کسب کرده بود؛ یعنی میانگین امتیاز هر آزمون او در پنج هفته اول به صورت زیر بود :

$$\frac{36}{5} = 7 \frac{1}{5}$$

او از هفته ششم به بعد در تمام آزمون‌ها امتیاز ۹ را کسب کرد؛ به طوری که میانگین امتیاز کل آزمون‌هایش برابر ۸ شد. می‌خواهیم بدانیم از هفته ششم به بعد، آرمان در چند آزمون متوالی نمره ۹ گرفته است. برای حل مسئله می‌توان به روش زیر عمل کرد :

الف) اگر تعداد آزمون‌ها از هفته ششم به بعد برابر  $n$  باشد، مجموع امتیازات او در این مدت  $9n$  خواهد شد. عبارتی کسری بر حسب  $n$  بنویسید که نشان‌دهنده میانگین امتیاز تمام آزمون‌های ریاضی هفتگی آرمان باشد.

$$\frac{9n + \dots}{5 + \dots}$$

ب) کسر مربوط به قسمت الف را برابر ۸ قرار دهید و  $n$  را بیابید. سپس جواب به دست آمده را امتحان کنید.

مثال : اگر دو ماشین چمن زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟  
حل : ماشین سریع‌تر را  $A$  و دیگری را  $B$  می‌نامیم. فرض کنیم مدت زمانی باشد که ماشین  $A$  به تنهایی قادر است کل کار را انجام دهد. جدول زیر را کامل کنید.

ماشین	زمان انجام کل کار	مقداری از کار که در ۱ ساعت قابل انجام است.
$A$	$t$	$\frac{1}{t}$
$B$	$2t$	.....
$A$ و $B$ با هم	.....	$\frac{1}{4}$

با توجه به جدول، معادله زیر را می‌توان نوشت :

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{2t} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{2t} = \frac{1}{4} \Rightarrow t = 6 \text{ زمان ماشین } A$$

$$\Rightarrow 2t = 12 \text{ زمان ماشین } B$$

## معادلات رادیکالی

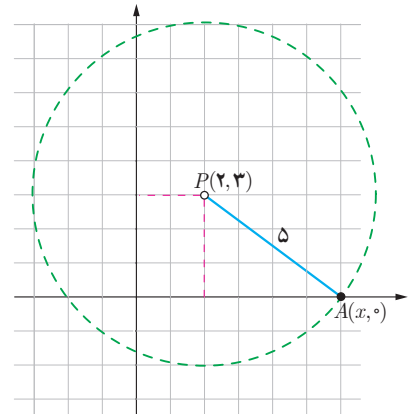
فرض کنید بخواهیم نقطه‌ای را روی محور  $x$ ‌ها بیابیم که فاصله آن از نقطه  $P(2, 3)$  برابر ۵ باشد. مسئله چند جواب دارد؟

برای این کار فرض می‌کنیم مختصات نقطه مورد نظر به صورت  $A(x, 0)$  باشد. مقدار  $x$  را به دست می‌آوریم.

$$AP = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (0 - 3)^2}$$

$$AP = 5 \Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + 9} = 5 \quad (3)$$

معادلاتی مانند (۳) که در آن عبارت رادیکالی شامل مجهول وجود دارد، یک معادله رادیکالی نامیده می‌شود<sup>۱</sup>.



برای حل یک معادله رادیکالی می‌توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه‌جا کرد که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب‌های حاصل در معادله اولیه صدق می‌کنند.

برای حل معادله (۳) در بالا، اگر طرفین تساوی را به توان دو برسانیم، خواهیم داشت:

$$(x - 2)^2 + 9 = 25$$

$$(x - 2)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} (x - 2) = 4 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow A(6, 0) \\ (x - 2) = -4 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow B(-2, 0) \end{cases}$$

**تذکر:** عبارت رادیکالی معادله (۳) همواره با معناست؛ چون در آن، حاصل زیر رادیکال همواره مثبت است. در این حالت می‌گوییم دامنه متغیر برابر  $\mathbb{R}$  است و می‌توانیم بنویسیم  $D = (-\infty, +\infty)$ .

**مثال:** در معادله  $2\sqrt{x} = \sqrt{3x - 3}$ ، دامنه متغیر به صورت  $D = [1, +\infty)$  است (چرا؟). با به توان رساندن دو طرف معادله داریم:

$$4x = 3x - 3 \Rightarrow x = -3 \quad (\text{غیر قابل قبول})$$

چون جواب به دست آمده خارج از دامنه متغیر است، قابل قبول نیست. شایان ذکر است که جواب‌های درون دامنه نیز به شرطی مورد قبول اند که در معادله اصلی صدق کنند.

۱- در این کتاب، تنها معادلات رادیکالی با فرجه ۲ مورد بحث قرار می‌گیرند.

۱ معادلات زیر را مانند نمونه حل کنید. آیا تمام جواب‌های حاصل، قابل قبول اند؟

الف)  $2\sqrt{2t-1} - t = 1$

$$2\sqrt{2t-1} = t+1$$

$$\Rightarrow 4(2t-1) = (t+1)^2$$

$$\Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=5 \end{cases}$$

ب)  $2x = 1 - \sqrt{2-x}$

$$\sqrt{2-x} = 1 - 2x$$

$$\Rightarrow 2-x = 1 + 4x^2 - 4x$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\Delta = 25, x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2(4)} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x = \frac{-1}{4} \end{cases}$$

غیر قابل قبول

پ)  $\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1$

ت)  $\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0$

ث)  $2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$

۲ بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه حقیقی اند؟

الف)  $\sqrt{t} + 2 = 0$

ب)  $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$

پ)  $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$

تمرین

۱ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 5$

ب)  $\frac{1^\circ}{r} - \frac{15}{2} = \frac{2^\circ}{3r} - 5$

پ)  $\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3}$

ت)  $\sqrt{t+4} = 3$

ث)  $k = \sqrt{6k-8}$

ج)  $x + \sqrt{x} = 6$

ج)  $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$

ح)  $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$

۲ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از حروفچینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟



قلعه بهستان — ماد نشان زنجان

۳ اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع  $5^\circ$  متر سقوط آزاد کند، پس از  $t$  ثانیه

در ارتفاع  $h$  متری از سطح زمین قرار خواهد داشت؛ به طوری که  $t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}}$ .

این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

۴ الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟

ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۵ معادله‌ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه‌های آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.