فصل

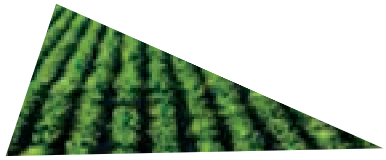
۲ هندسه

سی و سه پل، اصفهان

انسان از بدو تولد ناگزیر به آشنایی با فضای هندسی و شکل‌های هندسی است و هندسه در طول تاریخ مشکل‌گشای او در جهت حل مسائل محیط پیرامونی‌اش بوده‌است. ساخت پل‌ها نمونه‌ای بارز از کارایی هندسه در زندگی روزمرهٔ انسان است.

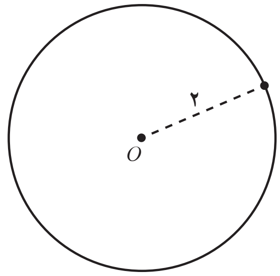
درس اوّل

ترسیم‌های هندسی

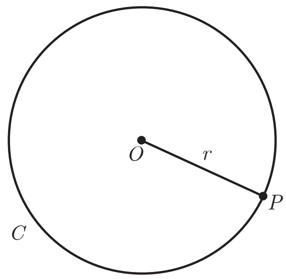


انسان از دیرباز برای حل بسیاری از مسائل خود از ترسیم‌های هندسی کمک گرفته است. فرض کنید بخواهیم زمینی مثلث شکل را تنها با کشیدن یک دیوار مستقیم به دو قسمت هم‌مساحت تقسیم نماییم. چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟

فعالیت



۱ یک نقطهٔ ثابت در صفحه، مانند O را درنظر بگیرید و تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ثابت ۲ سانتی‌متر از آن هستند درنظر بگیرید. این نقاط چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟

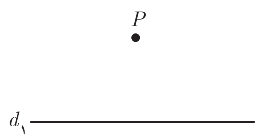


۲ یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر بکشید و یک نقطهٔ دلخواه روی آن درنظر بگیرید. فاصلهٔ این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟

نتیجه : دایرهٔ $C(O,r)$ (بخوانید دایرهٔ C به مرکز O و به شعاع r) را درنظر بگیرید. هر نقطه که از نقطهٔ O به فاصلهٔ r باشد .... دایره قرار دارد و هر نقطه که .... دایره قرار دارد از نقطهٔ O به فاصلهٔ r است.

۳ مانند آنچه برای نقاط روی دایره انجام داده شد، یک‌بار برای نقاط داخل دایره و یک‌بار برای نقاط بیرون دایره نتایج مشابهی به‌دست آورید.

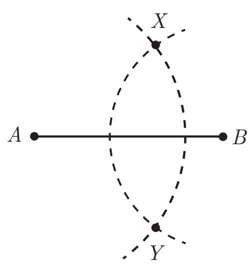
۴ خطی مانند d درنظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از خط d هستند مشخص کنید. این نقاط چه شکلی یا شکل‌هایی را تشکیل می‌دهند؟



۵ نقطهٔ P به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط d_1 قرار دارد.

الف) تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ P هستند، مشخص کنید.

ب) نقاطی از خط d_1 را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ P هستند، مشخص کنید.

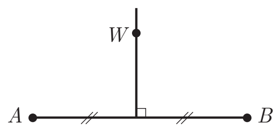


۶ نقاط A و B را به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی‌متر یک کمان رسم کنید و سپس به مرکز B و به شعاع ۳ سانتی‌متر کمانی دیگر رسم کنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کند.

الف) اندازهٔ اضلاع مثلث‌های AXB و AYB را مشخص کنید.

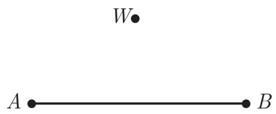
ب) توضیح دهید که چگونه می‌توانید مثلثی به طول ضلع‌های داده شدهٔ ۴ و ۵ و ۷ رسم کنید.

برخی خواص عمود منصف و ترسیم آن



۱ــ در شکل مقابل پاره خط AB و عمودمنصف آن مشخص شده‌اند. نقطه‌ای دلخواه مانند W روی عمودمنصف AB درنظر بگیرید و نشان دهید W از دوسرِ AB به یک فاصله است.

نتیجهٔ ۱ : هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط ....



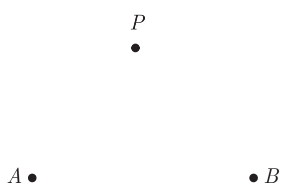
۲ــ پاره‌خط AB و نقطهٔ W مانند شکل مقابل به‌گونه‌ای قرار دارند که W از دوسر AB به‌یک فاصله است (یعنی $AW=BW$). نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.

(راهنمایی : از W به A و B و به وسط AB وصل کنید و با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.)

نتیجهٔ ۲ : هر نقطه که از دوسر یک پاره‌خط به فاصلهٔ یکسان باشد ....

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد از .... و هر نقطه که از .... روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

فعالیت

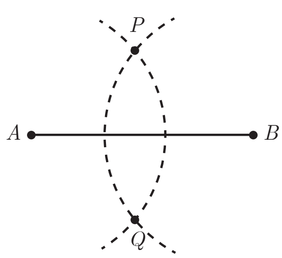


۱ نقطهٔ P در صفحه مشخص شده است. چند خط می‌توانید رسم کنید که از نقطهٔ P عبور نمایند؟

۲ دو نقطهٔ A و B در صفحه مشخص شده‌اند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطهٔ A و B عبور نمایند؟

۳ به‌نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن باید مشخص شده باشد؟

رسم عمود منصف یک پاره‌خط داده شده



می‌خواهیم عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم.

۱ــ دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار به مرکز نقطهٔ A و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز B کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند P و Q قطع کنند.

۲ــ آیا نقاط P و Q نقاطی متعلق به عمودمنصف AB هستند؟ چرا؟

۳ــ آیا با داشتن نقاط P و Q می‌توان عمودمنصف AB را مشخص کرد؟ چرا؟

۴ــ حال عمودمنصف AB را رسم کنید.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

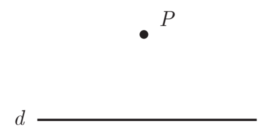
خط d و نقطهٔ M روی آن مانند شکل مشخص شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱ــ به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d بیابید که $AM=MB$ باشد.

۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

۳ــ عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d .... و از نقطهٔ ....

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن



خط d و نقطهٔ P مانند شکل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

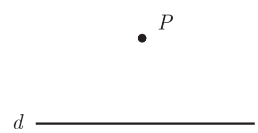
۱ــ به کمک پرگار نقاطی مانند A و B را بر خط d به‌گونه‌ای بیابید که از نقطهٔ P به یک فاصله باشند.

۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

۳ــ آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطهٔ P می‌گذرد؟ چرا؟

عمودمنصف پاره‌خط AB بر خط d .... و از نقطهٔ ....

رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه‌ای غیر واقع بر آن



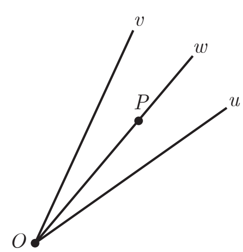
خط d و نقطهٔ P مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و با خط d موازی باشد.

۱ــ خط d_1 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۲ــ خط d_2 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

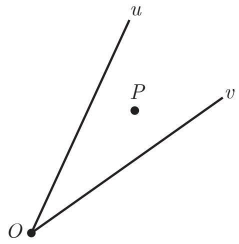
۳ــ خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب درنظر بگیرید)

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن



۱ــ در شکل مقابل نیم‌خط Ow نیمساز زاویهٔ vOu است. فرض کنید P یک نقطهٔ دلخواه روی Ow باشد. ثابت کنید فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ vOu یکسان است. (یعنی اگر از نقطهٔ P عمودهایی بر Ov و Ou رسم کنیم، طول آنها باهم برابر است.)

نتیجه۱ : هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه ....

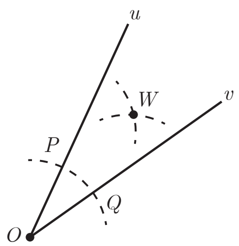


۲ــ در شکل مقابل فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ vOu یکسان است. نشان دهید که نقطهٔ P روی نیمساز زاویه قرار دارد.

(**راهنمایی** : پاره‌خط OP را و دو عمود از نقطهٔ P بر Ou و Ov رسم کنید و با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دهید OP همان نیمساز زاویهٔ uOvاست.)

نتیجه ۲ : هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصلهٔ یکسان باشد، روی ....

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : هر نقطه که روی .... یک زاویه قرار داشته باشد، از .... و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی .... آن زاویه قرار دارد.



۳ــ رسم نیمساز یک زاویه

الف) زاویهٔ uOv را درنظر بگیرید. به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم‌خط‌های Ou و Ov را در نقاطی مانند P و Q قطع کند.

ــ طول پاره‌خط‌های OP و OQ نسبت به هم چگونه‌اند؟

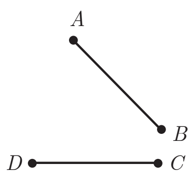
ب) دهانهٔ پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره‌خط PQ باز کنید و یک بار به مرکز P و بار دیگر به مرکز Q کمانی رسم کنید تا دو کمان مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع کنند. طول پاره‌خط‌های PW و QW نسبت به هم چگونه‌اند؟

پ) پاره‌خط‌های WP، WO و WQ را رسم کنید. دو مثلث OPW و OQW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ــ اندازهٔ زاویه‌های POW و QOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ــ پاره‌خط OW .... زاویهٔ uOv است.

تمرین



۱ الف) دو پاره‌خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطهٔ D و C نیز به یک فاصله باشد.

ب) نقطهٔ موردنظر در قسمت (الف) را O می‌نامیم. اگر نقطهٔ O روی عمود منصفِ پاره‌خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رأس‌های چهارضلعی $ABCD$ نسبت به دایرهٔ G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۲ مثلثی دلخواه رسم کنید و آن‌را ABC بنامید. عمودمنصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

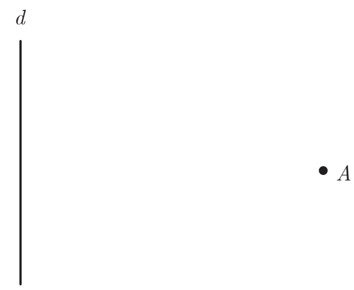
۳ مثلثی دلخواه رسم کنید و آن‌را ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویهٔ این مثلث را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آنها را O بنامید. از نقطهٔ O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۴ فرض کنید نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

الف) مثلثی متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعدهٔ آن بر خط d منطبق باشد.

ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد.

پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن $8cm^2$ باشد.



آبشار شوی خوزستان

درس دوم

استدلال و قضیهٔ تالس

نسبت و تناسب

در پایه‌های قبل با دو مفهوم نسبت و تناسب و برخی خواص ابتدایی آنها آشنا شده‌اید. می‌دانیم که هر دو **نسبت** مساوی یک **تناسب** تشکیل می‌دهند.

می‌دانیم که اگر یک مقدار ثابت را با دوطرف یک تساوی جمع و یا تفریق کنیم، تساوی دوباره برقرار خواهد بود. همچنین اگر دوطرف یک تساوی را در یک مقدار ضرب کنیم یا به یک مقدار غیرصفر تقسیم نماییم، تساوی برقرار می‌ماند. با توجه به این مطلب هریک از خواص زیر را به راحتی می‌توان ثابت کرد.

کار در کلاس

۱ با فرض اینکه تمام مخرج‌ها مخالف صفرند و با توجه به نکات گفته شده در بالا هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$ (طرفین وسطین)

ب) $ad=bc\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (تبدیل حاصل‌ضرب به تناسب)

پ) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (معکوس کردن تناسب)

ت) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{d}{b}\\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}\end{cases}$ (تعویض جای طرفین با وسطین)

ث) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \begin{cases}\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}\end{cases}$ (ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)

راهنمایی : در قسمت (ث) برای اثبات اولین تناسب به دو طرف تساوی عدد ۱ را اضافه کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس نمایید، سپس به دو طرف عدد ۱ را اضافه کنید.

ج) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \begin{cases}\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\\ \frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}\end{cases}$ (تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)

راهنمایی : در قسمت (ج) برای اثبات اولین تناسب از دو طرف تساوی عدد ۱ را کم کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس کرده، سپس از دوطرف عدد ۱ را کم کنید.

۲ با توجه به خواص اثبات شده در ۱ موارد زیر را کامل کنید.

الف) $\frac{۵}{۱۴}=\frac{۱۵}{۴۲} \Rightarrow ۵\times \_\_\_ = ۱۵\times \_\_\_$

ب) $۳\times ۴۰ = ۱۲\times ۱۰ \Rightarrow \frac{۳}{\_\_\_}=\frac{۱۲}{\_\_\_}$

پ) $\frac{۷}{۱۰}=\frac{۲۱}{۳۰} \Rightarrow \frac{۱۰}{۷} = \_\_\_$

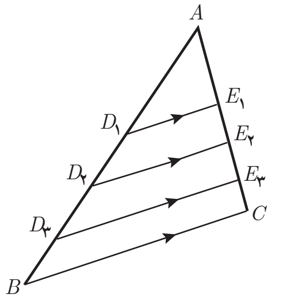
ت) $\frac{۶}{۱۱}=\frac{۱۸}{۳۳} \Rightarrow \frac{۶}{۱۸} = \_\_\_ \quad , \quad \frac{۳۳}{۱۱} = \_\_\_$

ث) $\frac{۴}{۱۴}=\frac{۱۰}{۳۵} \Rightarrow \frac{۱۸}{۱۴} = \_\_\_ \quad , \quad \frac{۴}{۱۸} = \_\_\_$

ج) $\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱۰}{۲۴} \Rightarrow \frac{-۷}{۱۲} = \_\_\_ \quad , \quad \frac{۵}{-۷} = \_\_\_$

سد باغکل ــ شهرستان خوانسار ــ استان اصفهان

استدلال، قضیهٔ تالس و تعمیم آن



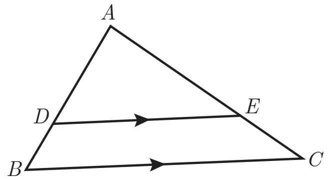
در شکل مقابل داریم : $D_1E_1 || BC$ و $D_2E_2 || BC$ و $D_3E_3 || BC$. این اطلاعات را می‌توان به این صورت نشان داد : $D_iE_i || BC$ برای $1 \leq i \leq 3$

ــ اندازهٔ پاره‌خط‌های زیر را با خط‌کش مشخص کرده و در کسرها جایگزین کنید و نسبت‌های برابر در ستون‌های متمایز را مشخص نمایید.

$$\frac{AE_1}{E_1C} \qquad \frac{AD_1}{D_1B}$$

$$\frac{AE_3}{E_3C} \qquad \frac{AD_2}{D_2B}$$

$$\frac{AE_2}{E_2C} \qquad \frac{AD_3}{D_3B}$$



ــ اگر پاره‌خط DE مانند شکل روبه‌رو موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، حدس می‌زنید نسبت کدام پاره‌خط‌ها با هم برابر باشند؟

ـــــ = ـــــ

آیا می‌توان نتیجه گرفت اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود، همواره تساوی مشابه بالا برقرار است؟

در سال‌های قبل دیدید که نمی‌توان به درست بودن نتیجه‌ای که بر اساس مشاهدهٔ چند مورد به‌دست آمده باشد، مطمئن بود.

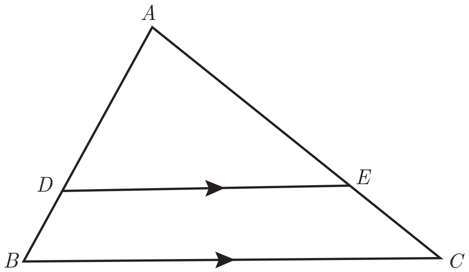
> این نوع از استدلال که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود؛ یعنی «از جزء به کل می‌رسیم»، **استدلال استقرایی** نامیده می‌شود.

> **استدلال استنتاجی**، استدلالی است که بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، بیان می‌شود.

در ریاضیاتی که تاکنون خوانده‌اید، با مواردی از استدلال‌های استنتاجی مواجه شده‌اید. در ادامه با استدلال استنتاجی، نتیجه‌ای را که با استدلال استقرایی به‌دست آوردیم، ثابت خواهیم کرد.

قضیهٔ تالس

فعالیت



فرض کنید مانند شکل مقابل پاره‌خط DE موازی ضلع BC باشد.

می‌خواهیم نشان دهیم : $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

۱ از نقطهٔ D به C و از E به B وصل کنید. مساحت‌های مثلث‌های DEC و DEB که آنها را با S_{DEC} و S_{DEB} نشان می‌دهیم، با هم برابرند. چرا؟

۲ از نقطهٔ E به ضلع AB عمود کنید و پای عمود را $H_۱$ بنامید. سپس از D به ضلع AC عمود کنید و پای عمود را $H_۲$ بنامید.

۳ $$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{\frac{۱}{۲}EH_۱\times AD}{\frac{۱}{۲}EH_۱\times DB}=\frac{AD}{DB}$$

۴ $$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}=\frac{\frac{۱}{۲}DH_۲\times AE}{\frac{۱}{۲}DH_۲\times EC}=\frac{AE}{EC}$$

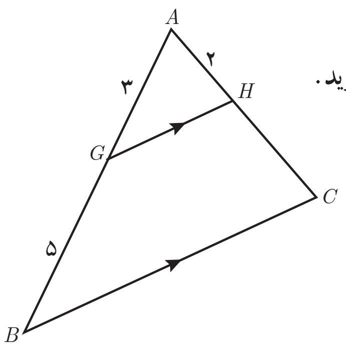
۵ از (۱) و (۳) و (۴) نتیجه می‌شود $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$. چرا؟

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به‌دست می‌آیند، **قضیه** نامیده می‌شوند.

نتیجهٔ بالا قضیه‌ای از تالس[۱] است. همان‌گونه که مشاهده کردید، رابطهٔ بین طول‌های پاره‌خط‌هایی را که توسط خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، بر دو ضلع دیگر آن مثلث به‌وجود می‌آید، بیان می‌کند.

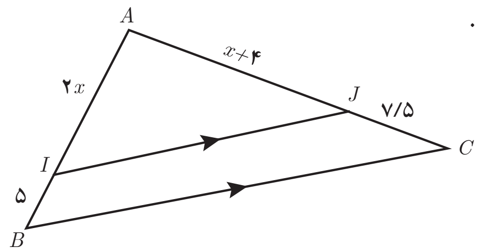
کار در کلاس

۱ در شکل پاره‌خط‌های GH و BC موازی‌اند. اندازهٔ پاره‌خط‌های AC و HC را به دست آورید.



۱ــ فیلسوف و ریاضی‌دان که حدود ۶۲۳ سال قبل از میلاد در نواحی غرب ترکیهٔ امروزی به دنیا آمد. اثبات بسیاری از قضایای مهم هندسی را به او نسبت داده‌اند.

۲ با تشکیل یک معادله، مقدار x و اندازهٔ پاره‌خط‌های AI و AJ را به دست آورید.



تعمیم قضیهٔ تالس

فعالیت

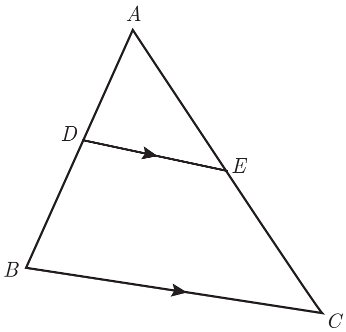
۱ در شکل مقابل $DE \parallel BC$.

الف) تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید.

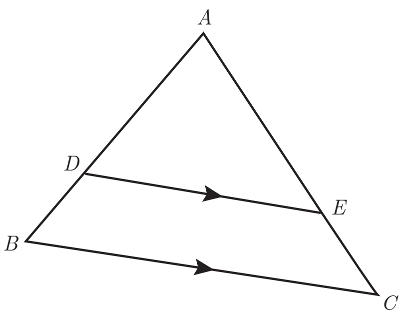
ب) به کمک ترکیب نسبت در مخرج تناسب $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

پ) به کمک تفضیل نسبت در صورت از تناسب به‌دست آمده در (ب) تناسب $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

توجه کنید که تناسب‌های به‌دست آمده در (ب) و (ج) صورت‌های دیگر قضیهٔ تالس‌اند.

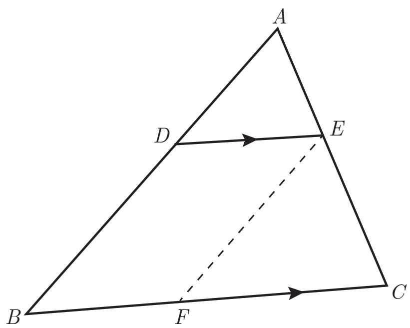


۲ در مثلث ABC پاره‌خط DE موازی ضلع BC است. ابتدا تناسبِ قضیهٔ تالس را بنویسید. سپس با توجه به ویژگی‌های تناسب و تکمیل تساوی‌های زیر، تناسب‌های دیگری را از قضیهٔ تالس نتیجه بگیرید.



$$\frac{AD}{DB}=\dots\dots \Rightarrow \begin{cases} \frac{DB}{DA}=\dots\dots \quad \frac{BD}{BA}=\dots\dots \quad \frac{AB}{BD}=\dots\dots \\ \frac{AD}{AB}=\dots\dots \quad \frac{AB}{AD}=\dots\dots \end{cases}$$

۳



الف) در شکل پاره‌خط‌های DE و BC موازی‌اند. با توجه به قضیهٔ تالس داریم: $\frac{AD}{AB}=\dots\dots$

ب) پاره‌خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم. بنابراین داریم: $\frac{BF}{BC}=\dots\dots$

پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{\quad}{AC}=\frac{\quad}{BC}$

ت) چهارضلعی $DEFB$ چه نوع چهارضلعی‌ای است؟

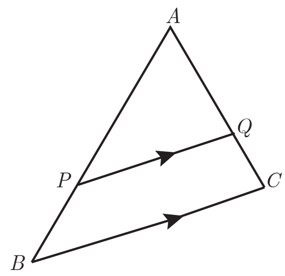
پاره‌خط BF با کدام پاره‌خط برابر است؟ $BF=$

ث) با توجه به قسمت‌های (ج) و (د) داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{\quad}{AC}=\frac{\quad}{BC}$

این رابطه تعمیم قضیهٔ تالس است.

کار در کلاس

در شکل پاره‌خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.



الف) $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}=\frac{PQ}{BC}$

ب) $\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}$

پ) $\frac{PB}{AP}=\frac{QC}{AC}$

ت) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}=\frac{PQ}{BC}$

ث) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}$

ج) $\frac{AB}{AP}=\frac{AC}{AQ}=\frac{BC}{PQ}$

اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا کنیم، آنچه حاصل می‌شود، «عکس قضیه» است. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

در مثال‌های زیر قضیه و عکس آن آمده است.

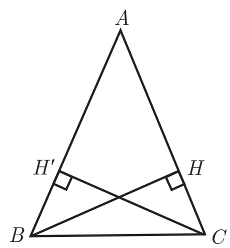
مثال ۱ :

قضیه : اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه : اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال ۲ :

قضیه : اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.



فرض: $AB=AC$

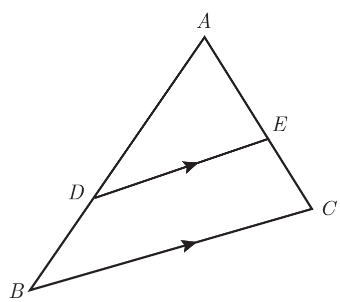
حکم: $BH=CH'$

عکس قضیه : اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH=CH'$

حکم: $AB=AC$

مثال ۳ : در قضیهٔ تالس فرض و حکم به صورت زیر است.



فرض: $DE \parallel BC$

حکم: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

با توجه به آنچه گفته شد، فرض و حکم عکس قضیهٔ تالس را بنویسید.

فرض :

حکم :

به عبارت دیگر عکس قضیه تالس می‌گوید هرگاه پاره‌خط DE مانند شکل پاره‌خط‌های AB و AC را به گونه‌ای قطع کرده باشد که داشته باشیم $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ ، در این صورت پاره‌خط DE موازی پاره‌خط BC است. به نظر شما عکس قضیه تالس درست است یا نه؟ کمی بعد به بررسی این مسئله خواهیم پرداخت.

معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض با حکم جابه‌جا می‌شود و قسمت‌هایی از فرض ممکن است هم در قضیه و هم درعکس آن ثابت باشند؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC هم در خود قضیه و هم در عکس آن جزء مفروضات است.

برهان خلف

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی از آن استفاده می‌شود، **برهان غیرمستقیم** یا **برهان خلف** است. در برهان خلف به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجهٔ غیرممکن می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

مسئله: (فرض) $A \Rightarrow$ (حکم) B

اثبات به روش برهان خلف :

A درست و B نادرست $\underbrace{\Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow}_{\text{استدلال، منطق و حقایق}}$

① A درست نیست

② تناقض منطقی

پس نتیجه می‌گیریم حکم B درست است، زیرا در صورت نادرستی B طبق استدلال فوق به یکی از نتایج ۱ یا ۲ می‌رسیم که هیچ‌کدام نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

مثال : اگر $n\in \mathbb{N}$ و n^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه n نیز عددی فرد است.

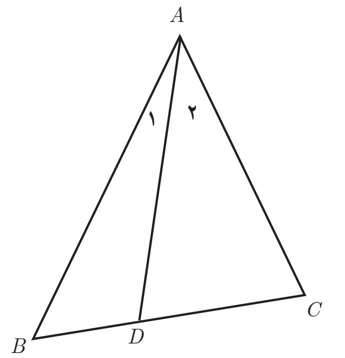
حل :

با استفاده از برهان خلف فرض کنیم حکم مسئله نادرست باشد؛ یعنی n عددی فرد نباشد؛ بنابراین n عددی زوج خواهد بود و می‌توان

نوشت $n=2k$ به‌طوری که k یک عدد طبیعی باشد.

بنابراین $n^2=4k^2=2(2k^2)$ که عددی زوج است و با فرض مسئله در تناقض است؛ لذا از ابتدا n نمی‌توانست عددی زوج باشد.

مثال : فرض کنیم AD نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq DC$ باشد، آن‌گاه $AB \neq AC$.



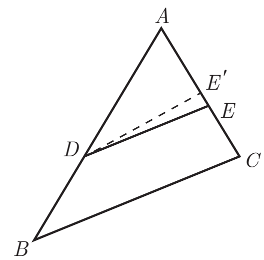
حل :

با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد.

بنابراین داریم $AB = AC$ (فرض خلف) در این صورت خواهیم داشت $\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ACD}$ (چرا؟). از این هم‌نهشتی نتیجه خواهد شد $BD = DC$ است، که با فرض مسئله در تناقض است. لذا از ابتدا فرض $AB = AC$ نادرست بوده است، بنابراین $AB \neq AC$ است.

حال می‌خواهیم با استفاده از برهان خلف درستی عکس قضیهٔ تالس را ثابت کنیم.

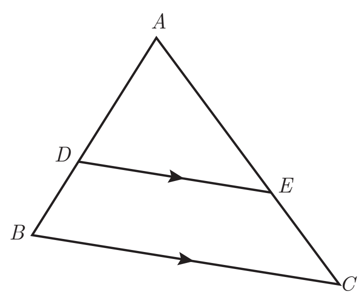
عکس قضیهٔ تالس : مانند شکل مقابل در مثلث ABC، اگر $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$، آن‌گاه $DE \| BC$.



اثبات : با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم مسئله غلط باشد؛ یعنی $DE \nparallel BC$.
لذا از نقطهٔ D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه‌ای مانند E' قطع کند. طبق قضیهٔ تالس داریم $\frac{AD}{DB}=\frac{AE'}{E'C}$ و از مقایسه با فرض مسئله خواهیم داشت $\frac{AE}{EC}=\frac{AE'}{E'C}$.
حال با ترکیب نسبت در مخرج داریم $\frac{AE'}{AC}=\frac{AE}{AC}$ و در نتیجه $AE = AE'$. این یعنی نقطهٔ E بر E' منطبق است و لذا DE' همان DE است و این یک تناقض است، زیرا $DE' \| BC$ و $DE \nparallel BC$ است. بنابراین از ابتدا فرضِ غلط بودن حکم نادرست بوده است و حکم نمی‌تواند غلط باشد، یعنی $DE \| BC$ است.

قضیه‌های دو شرطی

همان‌گونه که دیدیم، قضیهٔ تالس و عکس آن هر دو درست‌اند؛ بنابراین برای مثلثی مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ در شکل مقابل می‌توان هر دوی آنها را به‌صورت زیر بیان کرد :



اگر $DE \| BC$، آن‌گاه $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$ و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را قضیه‌های **دو شرطی** می‌نامیم. قضیه‌های دو شرطی را با نماد $\Leftrightarrow$[1]

۱ــ این نماد نشان دهندهٔ آن است که هر کدام از طرفین می‌توانند طرف دیگر را نتیجه دهند؛ لذا یا هر دو طرف درست‌اند و یا هر دو طرف نادرست‌اند.

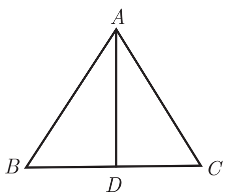
(که اگر و تنها اگرخوانده می‌شود) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

فرض کنیم ABC یک مثلث و نقاط D و E به ترتیب روی AB و AC باشند. در این صورت

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Leftrightarrow DE \| BC .$$

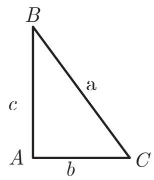
در ادامه مثال‌هایی از قضایای دو شرطی ملاحظه خواهید کرد.

مثال : در یک مثلث دو ضلع برابرند؛ اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌رو به آنها باهم برابر باشند.



مثال : در مثلث متساوی‌الاضلاع یک پاره‌خط نیمساز است؛ اگر و تنها اگر میانه باشد.

کار در کلاس

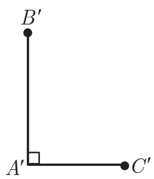


با توجه به قضیهٔ فیثاغورس اگر زاویهٔ A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^۲ = b^۲ + c^۲$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید.

ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیهٔ فیثاغورس نیز درست است.

۱ــ فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ بین اندازهٔ اضلاع آن برقرار است.



۲ــ پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که $\hat{A}'=۹۰^\circ$ و $A'C'=AC$ و $A'B'=AB$ است.

۳ــ با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازه پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C'=BC$.

۴ــ توضیح دهید چرا $A\overset{\Delta}{B}C \cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$ و نتیجه بگیرید $\hat{A}=۹۰^\circ$.

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان کنید.

مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که در پایه‌های قبل نیز تا حدودی با آن آشنا شده‌اید، استدلال با **مثال نقض** است. اگر فردی ادعا کند که «همهٔ اعداد فرد، اول‌اند»، این یک حکم کلی دربارهٔ تمام اعداد فرد است و ارائه عدد ۹ به عنوان عددی که فرد و غیر اول است، برای رد این ادعا کافی است. به چنین مثالی که برای رد یک حکم کلی استفاده می‌شود، مثال نقض می‌گوییم.

به عنوان مثالی دیگر؛ فرض کنیم فردی ادعا کند که «هیچ فرد ایرانی‌ای تا به حال مدال

فیلدز[1] نگرفته است». در این صورت شما برای رد ادعای او چه می‌توانید بگویید؟ اگر شما حتی یک فرد ایرانی را که مدال فیلدز گرفته است، برای او مثال بزنید، در این صورت ادعای او باطل شده است و در واقع شما با استفاده از یک مثال نقض، ادعای او را باطل کرده‌اید.

با دقت در ادعای مطرح شده خواهیم دید که کلمهٔ «هیچ» در این حکم باعث می‌شود که این ادعا یک حکم کلی برای تمام اعضای یک مجموعه (که در اینجا مجموعهٔ افراد ایرانی است) باشد. بنابراین در این مورد نیز آوردن یک مثال نقض کافی است تا آن حکم رد شود و به عبارتی غلط بودن آن حکم اثبات گردد.

در ادامه نمونه‌هایی از حکم‌های کلی آمده‌اند.

الف) همهٔ اعداد اول فردند. (حکم کلی دربارهٔ تمام اعداد اول)

ب) «در هر مستطیل اندازهٔ قطرها باهم برابر است.» (حکم کلی دربارهٔ تمام مستطیل‌ها)

پ) «به ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت n^2+n+41 عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم «الف» چه حدسی می‌زنید؟ چگونه می‌توانید حدس خود را ثابت کنید؟

می‌دانیم که ۲ یک عدد اول و زوج است. بنابراین حکم کلی «الف» با ارائهٔ همین مثال نقض رد می‌شود. دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم‌های «ب» و «پ» چه حدس‌هایی می‌زنید؟ آیا می‌توانید برای آنها مثال نقض بیاورید و آنها را باطل کنید؟

اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض ارائه کنیم، دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در این حالت درستی حکم را باید پذیرفت؟

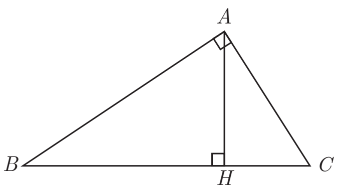
برای قسمت (ب) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش این حکم کافی نیست و باید توجه کرد که «**برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید آن را اثبات کنیم**».

دربارهٔ گزینهٔ (پ) چه می‌توان گفت؟

اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی بر ما مشخص نباشد و برای رد آن، مثال نقض نیز نتوانیم ارائه دهیم، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه‌ای گرفت.

تمرین

۱ در شکل مقابل مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت به‌دست آمده برای مساحت مثلث، یک تناسب به‌دست‌آورید.



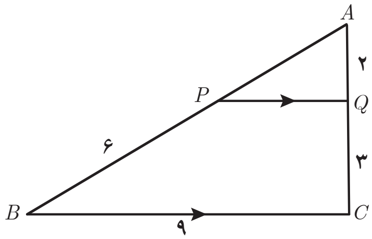
۱ــ مدال یا نشان فیلدز (Fields medal) جایزه‌ای است که به ابتکار ریاضی‌دان کانادایی جان چارلز فیلدز هر چهار سال یک‌بار به ریاضی‌دانان جوان (کمتر از چهل سال) که کار ارزنده‌ای در ریاضی انجام داده باشند تعلق می‌گیرد. از آنجا که در رشتهٔ ریاضی جایزهٔ نوبل اهدا نمی‌شود، این جایزه را «نوبل ریاضیات» می‌خوانند. در سال ۲۰۱۴ نشان فیلدز به ریاضی‌دان ایرانی خانم **مریم میرزاخانی** تعلق گرفت. گفتنی است که میرزاخانی اولین زنی در دنیاست که موفق به گرفتن این نشان شده‌است. البته با تأسف تمام موقع تدوین کتاب خبر درگذشت ایشان، جهان علم و جامعهٔ ایرانی را سخت متأثر ساخت، روانش شاد

۲ در هر مورد، مقدار عددی نسبت $\frac{a}{b}$ را به‌دست آورید.

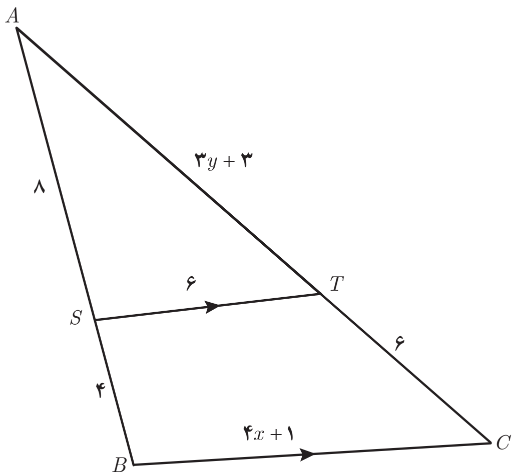
الف) $\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b}$ ب) $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b}$

۳ ثابت کنید در هر مثلث پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

۴ در شکل مقابل $PQ \| BC$ است. طول پاره‌خط‌های AP و PQ را به‌دست آورید.

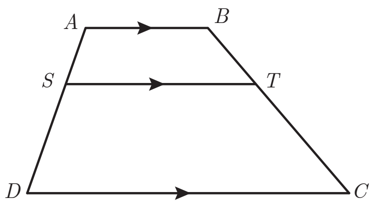


۵ در شکل مقابل $ST \| BC$ است. مقادیر x و y را به‌دست آورید.



۶ در ذوزنقه مقابل $AB \| ST \| DC$ است. ثابت کنید : $\frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$

(**راهنمایی** : یکی از قطرها را رسم کنید.)



۷ در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آنچه را داده شده است، بنویسید.

الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

ب) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو موازی باشند، در این‌صورت زوایای مقابل با هم برابرند.

پ) اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در این‌صورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.

ت) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، «ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ‌تر» کوچک‌تر است از «ضلع مقابل به ارتفاع کوچک‌تر».

(**راهنمایی** : شکل بکشید و به زبان ریاضی بنویسید)

۸ با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.

۹ هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) هیچ عدد اولِ بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد.

ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

پ) در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع از اندازهٔ هر ارتفاع بزرگ‌تر است.

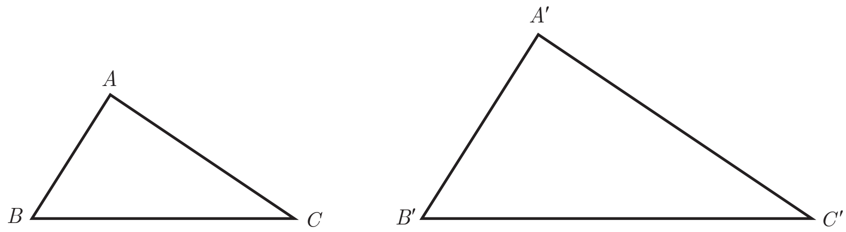
ت) در هر مثلث میانه و عمودمنصف متناظر به هر ضلع برهم منطبق‌اند.

درس سوم

تشابه مثلث‌ها

در پایهٔ نهم با مفهوم تشابه آشنا شدید. با توجه به مفهوم تشابه، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند؛ هرگاه زوایای متناظر باهم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد؛ یعنی

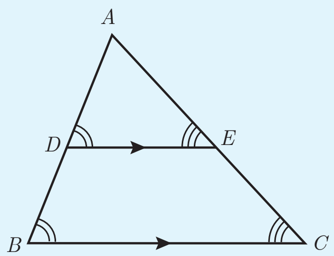
$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}=\hat{A}' \text{ و } \hat{B}=\hat{B}' \text{ و } \hat{C}=\hat{C}' \\ \text{و} \\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'} \end{cases}$$



در این‌صورت نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث را نسبت تشابه دو مثلث می‌نامیم. مثلاً اگر $\frac{AB}{A'B'}=\frac{۲}{۳}$ باشد، می‌گوییم مثلث ABC با مثلث $A'B'C'$ با نسبت تشابه $\frac{۲}{۳}$، متشابه است. در این‌صورت مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{۳}{۲}$، متشابه خواهد بود.

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این‌صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.



اثبات :

۱ــ داریم $\hat{E}=\hat{C}$ و $\hat{D}=\hat{B}$ (چرا؟)

بنابراین زاویه‌های دو مثلث نظیر به نظیر باهم برابرند.

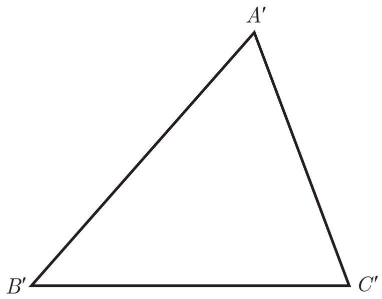
۲ــ با توجه به قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{AD}{\cdots}=\frac{\cdots}{AC}=\frac{DE}{\cdots}$$

۳ــ با توجه به (۱) و (۲) و تعریف تشابه داریم :

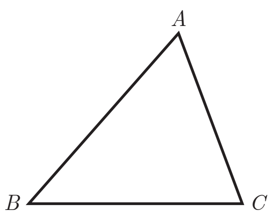
$$\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

با استفاده از قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها می‌توان سه قضیهٔ بعد را که حالت‌های تشابه دو مثلث را بیان می‌کنند، اثبات کرد. از آنجا که اثبات این قضیه‌ها مدنظر نیست، در ادامه تنها صورت آنها بیان شده است.



قضیه ۱ : هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\hat{A}=\hat{A}' \text{ و } \hat{B}=\hat{B}' \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C')$$



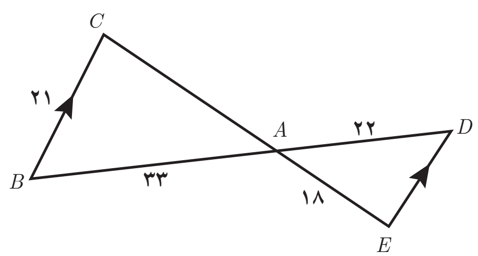
قضیه ۲ : هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آنها برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\left(\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}, \hat{A}=\hat{A}' \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'\right)$$

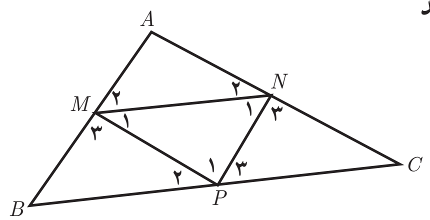
قضیه ۳ : هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$$

کار در کلاس



۱ درشکل مقابل $BC \| DE$.
اندازهٔ پاره خط‌های DE و CA را به دست آورید.



۲ اگر نقاط P و N و M مطابق شکل وسط‌های اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید مثلث‌های ABC و MNP متشابه‌اند.

حل :

الف) $MN \| BC$ و $NP \| AB$ و $MP \| AC$ چرا؟

ب) بنابراین $\hat{M}_۱ = \hat{P}_۲ = \hat{C}$ و $\hat{N}_۱ = \hat{P}_۳ = \hat{B}$ (چرا؟)

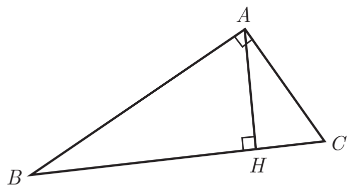
از (ب) دربارهٔ مثلث‌های مورد نظر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۳ اگر سه مثلث ABC و $A'B'C'$ و $A''B''C''$ به گونه‌ای باشند که $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'} \sim \overset{\Delta}{A''B''C''}$ ، دربارهٔ دو مثلث ABC و $A''B''C''$ چه می‌توان گفت؟ چرا؟

برخی روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:

فعالیت

فرض کنید مثلث ABC مانند شکل یک مثلث قائم‌الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد.



۱ نشان دهید دو زاویه از مثلث AHC با دو زاویه از مثلث ABC برابرند و نتیجه بگیرید :

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHC}$$

۲ نشان دهید دو زاویهٔ مثلث AHB با دو زاویه از مثلث ABC برابر است و نتیجه بگیرید :

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHB}$$

۳ از (۱) و(۲) دربارهٔ مثلث های AHC و AHB چه نتیجه‌ای می گیرید؟

نتیجه : در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آورد که این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

۴ $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{AH}{\cdots} = \frac{AC}{\cdots} = \frac{HC}{\cdots} \Rightarrow AC^{۲} = \cdots \times \cdots$

۵ $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHB} \Rightarrow \frac{AH}{\cdots} = \frac{AB}{\cdots} = \frac{HB}{\cdots} \Rightarrow AB^{۲} = \cdots \times \cdots$

۶ $\overset{\Delta}{AHB} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \frac{AH}{\cdots} = \frac{AC}{\cdots} = \frac{HC}{\cdots} \Rightarrow AH^{۲} = \cdots \times \cdots$

۷ با جمع طرفین روابط ۴ و ۵ رابطهٔ فیثاغورس را برای مثلث ABC نتیجه بگیرید.

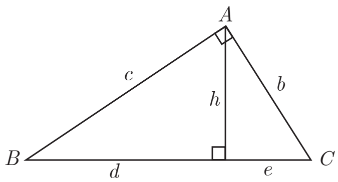
$BC^{۲} = \cdots\cdots + \cdots\cdots$

۸ مساحت مثلث ABC را به دو طریق محاسبه و با توجه به آن تساوی زیر را کامل کنید.

$AB \times \cdots\cdots = AH \times \cdots\cdots$

کار در کلاس

درمثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل در هر مورد سعی کنید با ساده‌ترین روش مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



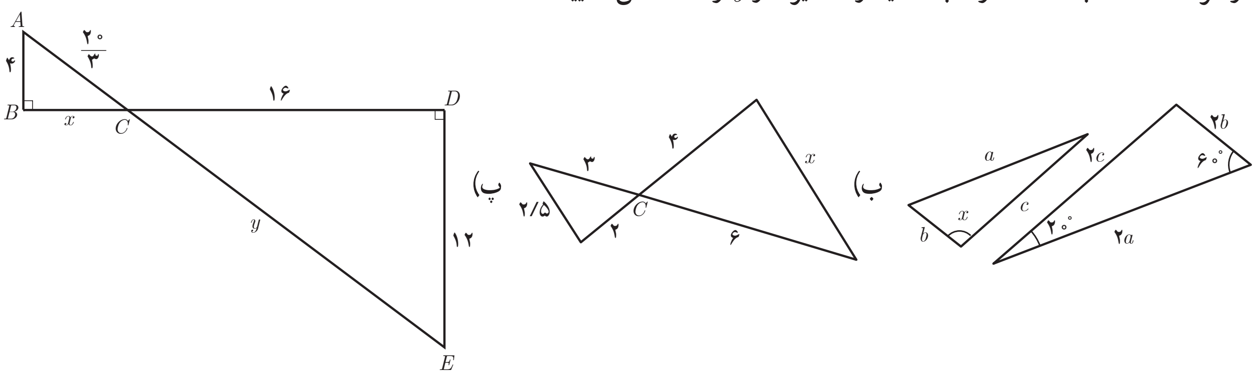
۱ h=۵ d=۷ e=?

۲ d=۵ e=۳ b=? c=?

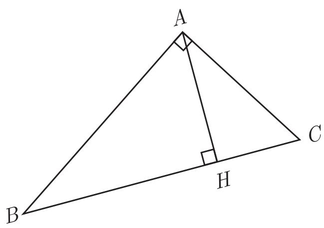
۳ c=۸ b=۶ h=?

تمرین

۱ در هر قسمت تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و مقادیر x و y را مشخص نمایید.



۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو در هر حالت، اندازه پاره‌خط خواسته شده را به‌دست آورید.



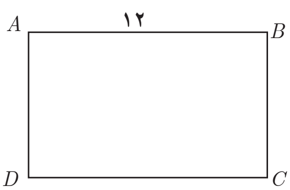
الف) BC=۱۰ و BH = ۹ و AH = ? و AB= ? و AC = ?

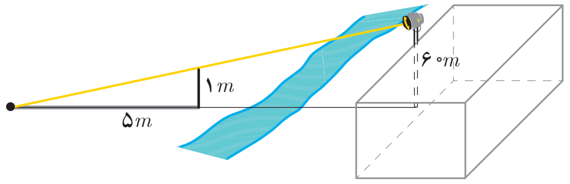
ب) AC=۵ و CH = ۲ و BC = ? و AH= ? و AB = ?

پ) AB = ۸ و AC = ۶ و BC = ? و AH= ?

ت) AB =۱۲ و AH = ۶ و BH = ? و BC= ? و AC = ?

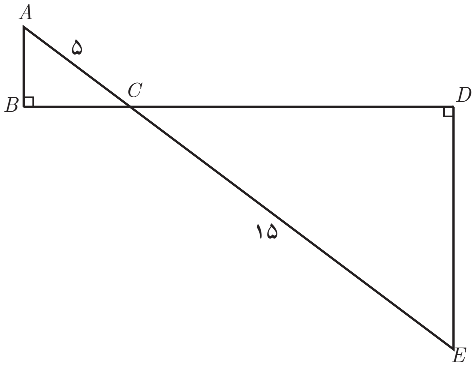
۳ شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطهٔ A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم، طول BH برابر ۱۱ است. اندازهٔ عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازهٔ عرض مستطیل را محاسبه کنید.





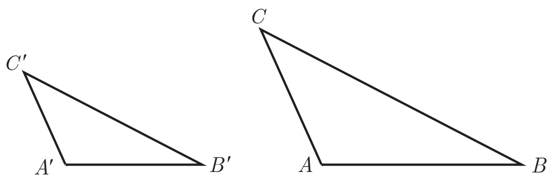
۴ بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می‌خواهد فاصلهٔ خود را تا پایهٔ نورافکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول یک متر را روی زمین قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که طول سایهٔ چوب برابر ۵ متر است. فاصلهٔ این مرد تا پای نورافکن چقدر است؟

۵ در شکل مقابل دو مثلث قائم‌الزاویه مشاهده می‌کنید. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آنها را به‌دست آورید.



۶ دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ را با نسبت تشابه K در نظر بگیرید؛ به گونه‌ای که $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=K$ باشد. حال ارتفاع‌های AH و $A'H'$ را در دو مثلث رسم کنید.

الف) ثابت کنید مثلث‌های AHB و $A'H'B'$ متشابه‌اند.



ب) نسبت $\frac{AH}{A'H'}$ را به‌دست آورید.

پ) نسبت مساحت‌های $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}$ را محاسبه کنید.

ت) نسبت محیط‌های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را به‌دست آورید.