فصل ۴

کاربردهای مشتق

همان‌گونه که در فصل قبل ملاحظه شد تفسیر آهنگ تغییر از مشتق ریشه در مسائل فیزیکی و پدیده‌های طبیعی دارد و تعبیر هندسی مشتق رویکردی نظری و انتزاعی را ارائه می‌دهد. دامنه کاربردهای مشتق در هر دو حیطه توسعه یافته است. کاربردهای مشتق در داخل ریاضیات به بررسی رفتار و شناسایی ویژگی‌های تابع‌ها مربوط می‌شود. مدلسازی مسائل زندگی و پدیده‌های طبیعی و حل و بررسی آن‌ها نیز با مفهوم مشتق در رابطه است. نمونه بارزی از این‌گونه پدیده‌ها، پدیدهٔ رشد و زوال می‌باشد که هم در ارتباط با مشتق و هم در رابطه با انتگرال است که در فصل آخر از آن صحبت خواهیم کرد. در این فصل بعضی از کاربردهای مشتق ارائه می‌شوند.

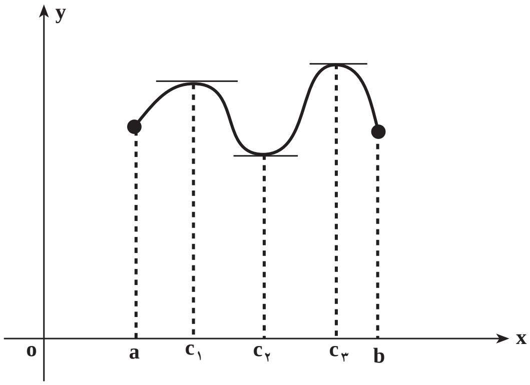
ماکزیمم و می‌نیمم یک تابع

در این بخش نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نمودار یک تابع را تعیین می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که در کدام بازه تابع صعودی است و در چه بازه‌ای تابع نزولی است. با به‌دست آوردن این اطلاعات می‌توانیم منحنی نمایش یک تابع را دقیق‌تر رسم کنیم.

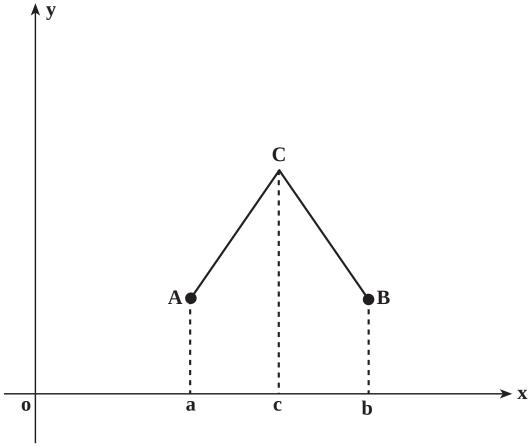
ماکزیمم و می‌نیمم نسبی و مطلق یک تابع : تابع $y = f(x)$ با دامنه $[a , b]$ مفروض است، فرض می‌کنیم (e, g) یک بازه شامل c در دامنه f است به طوری که به ازای هر $f(x) \le f(c), x \in (e, g)$ در این صورت می‌گوییم تابع f در c **ماکزیمم نسبی** است. اگر به ازای هر $x \in (e, g)$ داشته باشیم $f(x) \ge f(c)$ می‌گوییم f در c **می‌نیمم نسبی** است. اگر به ازای هر $x \in [a , b]$ داشته باشیم $f(x) \le f(c)$ می‌گوییم f در بازه $[a , b]$ در نقطه c **ماکزیمم مطلق** است. همچنین اگر به ازای هر $f(x) \ge f(c)$, $x \in [a , b]$ گوییم تابع f در بازه $[a , b]$ در c **می‌نیمم مطلق** است.

ممکن است یک تابع در یک بازه دارای چندین ماکزیمم و می‌نیمم نسبی باشد ولی مقدار ماکزیمم و می‌نیمم مطلق آن در صورت وجود منحصر به‌فرد هستند.

در شکل مقابل منحنی نمایش تابع در c_1، ماکزیمم نسبی است، در c_2 می‌نیمم مطلق است، در c_3 نیز ماکزیمم مطلق است. در این شکل تابع داده شده در این سه نقطه مشتق‌پذیر است، به عبارت دیگر، خطوط مماس بر منحنی در این سه نقطه وجود دارند و با محور xها موازی هستند، در نتیجه شیب خطوط مماس در این سه نقطه صفر است. ممکن است تابعی در $c \in (a,b)$ ماکزیمم یا می‌نیمم باشد ولی در c مشتق‌پذیر نباشد، به شکل مقابل توجّه کنید:



تابع $y = f(x)$ با دامنه $[a, b]$ که منحنی نمایش آن از دو پاره‌خطّ AC و BC تشکیل یافته است را ملاحظه می‌کنیم، این تابع در c ماکزیمم مطلق است ولی تابع در c مشتق‌پذیر نیست. مشتق چپ آن شیب خطّ AC است و مشتق راست آن شیب خط مستقیم BC می‌باشد، بنابراین، مشتق‌های چپ و راست تابع در c یکی نیستند. درنتیجه تابع در c مشتق‌پذیر نیست.



چگونه می‌توان ماکزیمم و می‌نیمم یک تابع را تعیین نمود؟ در قضیه زیر تا حدودی به این پرسش پاسخ داده می‌شود. این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیهٔ ۱ : تابع f(x) با دامنه $[a, b]$ مفروض است، فرض کنیم f در $c \in (a, b)$ ماکزیمم نسبی (می‌نیمم نسبی) است، علاوه بر آن فرض می‌کنیم f در c مشتق‌پذیر باشد، در این صورت $f'(c) = 0$.

با توجّه به قضیهٔ ۱ و آنچه که در بالا گفته شد نقـاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی یـا مطلق یک تابع نقاطی هستند که مقدار مشتق در آن نقاط صفر است، یا مشتق وجود ندارد.

تعریف : تابع f با دامنه $[a, b]$ مفروض است، نقاطی از بازهٔ (a, b) که مشتق f در آن نقاط صفر است یـا نقاطی از این بازه که مشتق f در آن نقاط وجـود ندارد را **نقاط بحرانی** تـابع f می‌نامند.

قضیهٔ زیر یک خاصیّت دیگر توابع پیوسته را بیان می‌کند، از این قضیه برای اثبات قضیه‌های بعدی استفاده می‌کنیم، خود این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیهٔ ۲ : اگر تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، f در این بازه دارای ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق خواهد بود.

با توجّه به این قضیه اگر تابع f بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته باشد آنگاه f در این بازه دارای ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق است. چگونه می‌توان این ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق را به‌دست آورد؟ ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم و مقادیر تابع f را به ازای این نقاط بحرانی محاسبه می‌کنیم، سپس $f(a)$ و $f(b)$ را محاسبه می‌کنیم، در این مقدارها، کوچکترین آن‌ها می‌نیمم مطلق تابع و بزرگترین آن‌ها ماکزیمم مطلق تابع خواهد بود.

مثال۱ : تابع $f(x) = x^{\frac{۸}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}}$ با دامنه $[-۸,۲۷]$ را درنظر بگیرید، ماکزیمم و می‌نیمم مطلق آن را به‌دست آورید.

حل : ابتدا نقاط بحرانی این تابع را به دست می‌آوریم. توجّه داریم که

$$f'(x) = \frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$$

بنابراین، $f'(x) = ۰$ نتیجه می‌دهد

$$\frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}} = ۰$$

و از آنجا $۴x^۲ - ۱ = ۰$ در نتیجه

$$x = \pm\frac{۱}{۲}$$

از $f'(x) = \frac{۸}{۳}x^{\frac{۵}{۳}} - \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$ دیده می‌شود که مشتق تابع در $x = ۰$ وجود ندارد بنابراین، مجموعهٔ نقاط بحرانی تابع عبارت است از $\{-\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲}\}$.

توجه داریم که $f(\frac{۱}{۲}) = f(-\frac{۱}{۲}) = (\frac{۱}{۲})^{\frac{۸}{۳}} - (\frac{۱}{۲})^{\frac{۲}{۳}}$ و از آنجا $f(\frac{۱}{۲}) = f(-\frac{۱}{۲}) = -\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}}$، درضمن $f(۰) = ۰$. حال مقادیر تابع f را در دو نقطه انتهای بازه $[-۸,۲۷]$ محاسبه می‌کنیم، و از آنجا $f(۲۷) = ۶۵۶۱ - ۹ = ۶۵۵۲$ و $f(-۲۸) = ۲۵۲$. بنابراین

$$\min\left\{-\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}}, ۰, ۲۵۲{,}۶۵۵۲\right\} = -\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}} \ , \ \max\left\{-\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}}, ۰, ۲۵۲{,}۶۵۵۲\right\} = ۶۵۵۲$$

یعنی می‌نیمم مطلق این تابع برابر $-\frac{۳}{۴\sqrt[۳]{۴}}$ و ماکزیمم مطلق آن برابر ۶۵۵۲ است.

مثال۲ : ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = x\sqrt{a^۲ - x^۲}$ را، که در آن $-a \le x \le a$ و a مقدار مثبتی است، پیدا کنید.

حل :

$$f'(x) = \sqrt{a^۲ - x^۲} - \frac{x^۲}{\sqrt{a^۲ - x^۲}}$$

از حل معادله $f'(x) = ۰$ نتیجه می‌شود که

$$\sqrt{a^۲ - x^۲} = \frac{x^۲}{\sqrt{a^۲ - x^۲}}$$

بنابراین

$$a^۲ - x^۲ = x^۲ \text{ یا } x^۲ = \frac{a^۲}{۲}$$

پس $x = \pm\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ ، ملاحظه می‌کنیم که تابع مورد بحث در $x = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ ماکزیمم مطلق و در $x = -\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ می‌نیمم مطلق دارد.

مسائل

در مسایل ۱ تا ۵ نقاط بحرانی توابع داده شده را به‌دست آورید.

۱ـ $f(x) = ۲x^۳ - ۹x^۲ + ۱۲x + ۶۰$

۲ـ $g(x) = ۲x^۳ - ۲x^۲ - ۱۶x + ۱$

۳ـ $g(x) = x^{\frac{۶}{۵}} - ۱۲x^{\frac{۱}{۵}}$

۴ـ $f(x) = (x^۳ - ۳x^۲ + ۴)^{\frac{۱}{۳}}$

۵ـ $f(x) = x^{\frac{۷}{۶}} - \frac{۷}{۲}x^{\frac{۲}{۳}} + ۵$

در مسایل ۶ تا ۱۱ مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق توابع مفروض بر بازه داده شده را درصورت وجود محاسبه کنید.

۶ـ $g(x) = x^۴ - ۸x^۲ + ۱۶ \quad ; \quad [-۱,۴]$

۷ـ $f(x) = x^۳ + ۵x - ۴ \quad ; \quad [-۳,-۱]$

۸ــ $f(x)=(x+۱)^{\frac{۲}{۳}}$ ؛ $[-۲,۱]$

۹ــ $f(x)=۱-(x-۳)^{\frac{۲}{۳}}$ ؛ $[-۵,۴]$

۱۰ــ $f(x)=x^{\frac{۷}{۶}}-\frac{۷}{۲}x^{\frac{۲}{۳}}+۵$ ؛ $[۰,۶۴]$

۱۱ــ $f(x)=۲x^۳-۹x^۲+۱۲x+۶۰$ ؛ $[-۲,۳]$

دیدیم که اگر تابع $f(x)$ در نقطه درونی $x=x_۰$ دارای یک ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی (مطلق) باشد و $f'(x_۰)$ موجود باشد آنگاه $f'(x_۰)=۰$، چگونه می‌توان تشخیص داد که تابع $f(x)$ در $x=x_۰$ دارای یک ماکزیمم نسبی است یا یک می‌نیمم نسبی؟ برای پاسخ به این پرسش از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم. قبل از بیان قضیه مربوطه متذکر می‌شویم که اگر تابع f در بازه (a,b) تعریف شده باشد و $x_۰\in(a,b)$ موجود باشد به‌طوری که $f(x_۰)=۰$ و به ازای هر $x\in(a,x_۰)$ داشته باشیم $f(x)>۰$ و به ازای هر $x\in(x_۰,b)$ داشته باشیم $f(x_۰)<۰$ می‌گویند تابع f در $x_۰$ تغییر علامت می‌دهد و از مثبت به منفی می‌رود. اگر به ازای هر $x\in(a,x_۰)$ داشته باشیم $f(x)<۰$ و به ازای هر $x\in(x_۰,b)$ داشته باشیم $f(x)>۰$ باز هم می‌گویند f در $x_۰$ تغییر علامت می‌دهد و از منفی به مثبت می‌رود.

قضیهٔ ۳ (تشخیص ماکزیمم نسبی از می‌نیمم نسبی با استفاده از آزمون مشتق اوّل) :
فرض می‌کنیم تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته و در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد، عدد $x_۰\in(a,b)$ به‌گونه‌ایست که $f'(x_۰)=۰$ و f' در $x_۰$ تغییر علامت می‌دهد و از مثبت به منفی می‌رود آنگاه f در $x_۰$ دارای یک ماکزیمم نسبی است.

چنانکه هنگام عبور از $x_۰$ تابع f' از منفی به مثبت برود به طریق مشابه می‌توان ثابت نمود که f در $x_۰$ دارای یک می‌نیمم نسبی است.

مثال : ماکزیمم و می‌نیمم نسبی تابع $y=\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۵}{۲}x^۲+۶x+۱۰$ را به دست آورید، آیا این تابع ماکزیمم و می‌نیمم مطلق دارد؟ چرا؟

حل : از $y=\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۵}{۲}x^۲+۶x+۱۰$ نتیجه می‌شود $y'=x^۲-۵x+۶$، حال سعی می‌کنیم این y' را به حاصل‌ضرب چند جمله‌ای‌های درجه اوّل یا دوّم تجزیه کنیم، برای این منظور ابتدا ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۵x+۶=۰$ را محاسبه می‌کنیم، این ریشه‌ها عبارتند از $x=۲$ و $x=۳$، بنابراین، $y'=(x-۲)(x-۳)$ حال y' را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$		۲		۳		$+\infty$
$y' = x^2 - 5x + 6$		+	۰	−	۰	+	

با توجّه به این جدول دیده می‌شود که در $x = 2$, y' از مثبت به منفی می‌رود و با توجّه به قضیهٔ قبل در $x = 2$ تابع دارای یک ماکزیمم نسبی است، در $x = 3$, y' از منفی به مثبت می‌رود و به موجب قضیهٔ قبل تابع داده شده در $x = 3$ دارای یک می‌نیمم نسبی است. توجّه داریم که

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10\right) = -\infty$$

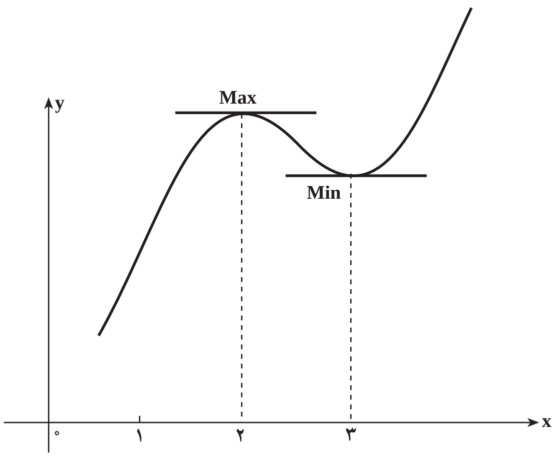
و

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10\right) = +\infty$$

بنابراین، تابع $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10$ ماکزیمم و می‌نیمم مطلق ندارد. جدول تغییرات این تابع به شکل زیر است

x	$-\infty$		۲		۳		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{44}{3}$	↘	$\frac{29}{2}$	↗	$+\infty$

با توجّه به این جدول دیده می‌شود که در بازهٔ $(-\infty, 2)$ داریم $y' > 0$ و با توجه به قضیه‌ای که داشتیم در این بازه تابع صعودی است، در بازهٔ $(2, 3)$ داریم $y' < 0$ و به موجب همان قضیه تابع در این بازه نزولی است. در بازهٔ $(3, +\infty)$ نیز تابع صعودی است. با توجّه به این جدول، منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10$ به شکل مقابل است :



مسائل

در تمرین‌های ۱ تا ۴ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی توابع داده شده را به‌دست آورید.

۱ــ $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 30$

۲ــ $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 10$

۳ــ $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 100$

۴ــ $y = x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 100$

۵ــ در تمرین‌های ۱ تا ۴، آیا توابع داده شده دارای ماکزیمم یا می‌نیمم مطلق هستند؟ چرا؟

۶ــ ثابت کنید تابع $y = x^3$ همواره صعودی است و از آنجا نتیجه بگیرید که این تابع ماکزیمم و می‌نیمم ندارد.

۷ــ در تابع $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 30$ ثابت کنید پاره خطّی که نقاط ماکزیمم و می‌نیمم روی نمودار تابع را به هم وصل می‌کند توسّط منحنی نمایش تابع به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود.

۸ــ ضرایب ثابت a و b را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ در $(2, 3)$ یک ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی داشته باشد.

۹ــ ضرایب a، b و c را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطهٔ $f(x) = ax^2 + bx + c$ در $x = 1$ دارای مقدار ماکزیمم نسبی ۷ باشد و نمودار تابع $y = f(x)$ از نقطهٔ $(2, -2)$ بگذرد.

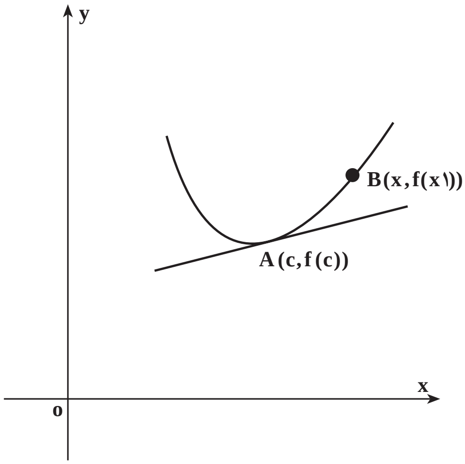
۱۰ــ تابع $f(x) = x^{2n+1}$ مفروض است که در آن n یک عدد صحیح و مثبت است، ثابت کنید که این تابع صعودی است و از آنجا نتیجه بگیرید که ماکزیمم و می‌نیمم نسبی ندارد.

۱۱ــ تابع $y = x^{2n}$ مفروض است که در آن n یک عدد صحیح و مثبت است، ثابت کنید که این تابع در $x = 0$ دارای یک می‌نیمم مطلق است.

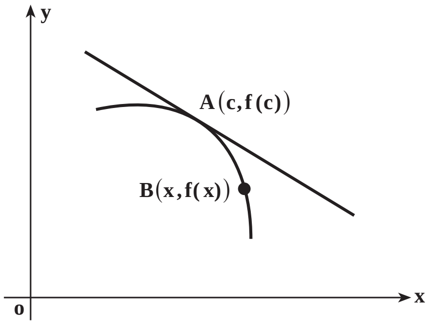
مشتقات مراتب بالاتر

چنانکه تابع $y = f(x)$ مشتق‌پذیر باشد، مشتق مرتبه اوّل آن را با علامت $y' = f'(x)$ نشان می‌دهند. اگر تابع $f'(x)$ نیز مشتق‌پذیر باشد مشتق آن را با $y'' = f''(x)$ نشان می‌دهند، چنانکه تابع $f''(x)$ باز هم مشتق‌پذیر باشد مشتق آن را با $y''' = f'''(x)$ نشان می‌دهند. به‌طور کلّی، مشتق مرتبه nام تابع $y = f(x)$ را با علامت $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ نشان می‌دهند. توجّه داریم که $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$.

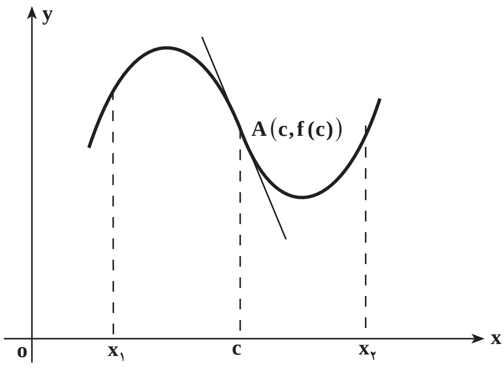
تقعر منحنی و نقاط عطف آن



تعریف ۱ : می‌گویند تقعر منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $A(c, f(c))$ رو به بالاست هرگاه $f'(c)$ موجود باشد و بازه بازی مانند I شامل c یافت شود که به ازای هر $x \neq c$ در I، نقطهٔ $B(x, f(x))$ روی منحنی، بالای خطّ مماس بر منحنی در نقطهٔ $A(c, f(c))$ باشد (شکل مقابل).



تعریف ۲ : می‌گویند تقعر منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $A(c, f(c))$ رو به پایین است هرگاه $f'(c)$ موجود باشد و بازه بازی مانند I شامل c یافت شود که به ازای هر $x \neq c$ در I، نقطهٔ $B(x,f(x))$ روی منحنی، پایین خطّ مماس بر منحنی در نقطهٔ $A(c, f(c))$ باشد (شکل مقابل).



تعریف۳ : می‌گویند نقطهٔ $A(c, f(c))$ یک نقطهٔ عطف منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ است هرگاه خط مماس بر منحنی در نقطه A موجود باشد و دو عدد $x_1 < c$ و $x_2 > c$ موجود باشد به طوری که تقعر منحنی در هر نقطهٔ $B(x, f(x))$، $(x \in (x_1, c))$ با تقعر آن در هر نقطهٔ $C(x, f(x))$، $(x \in (c, x_2))$ متفاوت باشد (شکل مقابل).

فرض می‌کنیم تابعی مانند f روی یک بازه باز شامل c مشتق‌پذیر باشد. آنگاه ثابت می‌کنند :

۱) اگر $f''(c) > 0$ تقعر منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $A(c, f(c))$ رو به بالا است.

۲) اگر $f''(c) < 0$ تقعر منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ در نقطهٔ $A(c, f(c))$ رو به پایین است.

۳) اگر $C(d, f(d))$ یک نقطه عطف منحنی نمایش تابع $y = f(x)$ باشد، آنگاه اگر $f''(d)$ موجود باشد ثابت می‌کنند $f''(d) = ۰$.

بنابراین، طول نقاط عطف نمایش تابع $y = f(x)$ از حلّ معادلهٔ $f''(x) = ۰$ به‌دست می‌آیند، البتّه همه xهایی که از حلّ این معادله به‌دست می‌آیند نشان‌دهنده نقاط عطف منحنی نیستند، آن‌هایی نقاط عطف را نشان می‌دهند که در آنها $f''(x)$ تغییر علامت بدهد.

به عنوان مثال، منحنی نمایش تابع $y = x^۳ + ۲x^۲ + ۳x + ۱۰$ را درنظر می‌گیریم، ملاحظه می‌کنیم که $y' = ۳x^۲ + ۴x + ۳$ و $y'' = ۶x + ۴$ بنابراین، $y'' = ۰$ نتیجه می‌دهد $x = -\frac{۲}{۳}$، ملاحظه می‌کنیم که تابع $y'' = ۶x + ۴$ در نقطهٔ $x = -\frac{۲}{۳}$ تغییر علامت می‌دهد، بنابراین، $x = -\frac{۲}{۳}$ طول نقطهٔ عطف منحنی است. منحنی نمایش تابع $y = (x - ۱)^۴$ را درنظر می‌گیریم، ملاحظه می‌کنیم که $y' = ۴(x-۱)^۳$ و $y'' = ۱۲(x - ۱)^۲$ بنابراین، $y'' = ۰$ نتیجه می‌دهد $x = ۱$ ، در $x = ۱$ تابع $y'' = ۱۲(x - ۱)^۲$ تغییر علامت نمی‌دهد، درنتیجه $x = ۱$ طول نقطهٔ عطف منحنی نیست.

مثال : ثابت کنید نقطه عطف منحنی نمایش تابع $y = x^۳ - ۴x^۲ - ۳x + ۱۰$ مرکز تقارن آن است.

حل : از $y = x^۳ - ۴x^۲ - ۳x + ۱۰$ نتیجه می شود $y' = ۳x^۲ - ۸x - ۳$ و $y'' = ۶x - ۸$. از حلّ معادلهٔ $y'' = ۰$ نتیجه می‌شود $۶x - ۸ = ۰$ و از آنجا $x = \frac{۴}{۳}$ ، چون $y'' = ۶x - ۸$ درجه اوّل است، در $x = \frac{۴}{۳}$ تغییر علامت می‌دهد و از منفی به مثبت می‌رود، بنابراین $x = \frac{۴}{۳}$ طول نقطهٔ عطف منحنی است. با قرار دادن $x = \frac{۴}{۳}$ در معادلهٔ $y = x^۳ - ۴x^۲ - ۳x + ۱۰$ داریم

$$y = (\frac{۴}{۳})^۳ - ۴(\frac{۴}{۳})^۲ - ۳(\frac{۴}{۳}) + ۱۰$$

و از آنجا

$$y = \frac{۳۴}{۲۷}$$

بنابراین، $A(\frac{۴}{۳}, \frac{۳۴}{۲۷})$ نقطهٔ عطف منحنی است. حال مبدأ مختصات را به نقطهٔ $A(\frac{۴}{۳}, \frac{۳۴}{۲۷})$ انتقال می‌دهیم در نتیجه $x = X + \frac{۴}{۳}$ و $y = Y + \frac{۳۴}{۲۷}$ با قرار دادن در معادله منحنی داده شده داریم

$$Y + \frac{۳۴}{۲۷} = (X + \frac{۴}{۳})^۳ - ۴(X + \frac{۴}{۳})^۲ - ۳(x + \frac{۴}{۳}) + ۱۰$$

و از آنجا

$$Y = X^{۳} - \frac{۲۵}{۳}X$$

با تبدیل $X \to -X$ و $Y \to -Y$ این معادله تغییر نمی‌کند، پس مبدأ مختصات جدید با همان نقطهٔ عطف $A(\frac{۴}{۳}, \frac{۳۴}{۲۷})$ مرکز تقارن منحنی نمایش تابع $y = x^{۳} - ۴x^{۲} - ۳x + ۱۰$ است.

مسائل

در مسایل ۱ تا ۵، تعیین کنید که در چه بازه‌ای تقعّر منحنی تابع داده شده رو به بالا است، در چه بازه‌ای تقعر آن رو به پایین است، و نقاط عطف را نیز درصورت وجود به‌دست آورید.

۱ــ $y = ۱۶x^{۴} + ۳۲x^{۳} + ۲۴x^{۲} - ۵x - ۲۰$

۲ــ $y = x^{۴} - ۸x^{۳} + ۲۴x^{۲}$

۳ــ $y = \frac{x}{x^{۲} - ۱}$

۴ــ $y = \frac{۱}{۱۲}x^{۴} + \frac{۱}{۶}x^{۳} - x^{۲}$

۵ــ $y = x^{۳} + ۳x^{۲} - ۳x + ۳$

۶ــ نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی و نقطهٔ عطف منحنی نمایش تابع $y = x^{۳} - ۴x^{۲} - ۳x + ۱۰$ را به‌دست آورید. ثابت کنید که این سه نقطه بر یک استقامت هستند و نقطه عطف وسط پاره‌خطّ واصل بین نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی است.

۷ــ $y = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d$، ضرایب a، b، c و d را چنان تعیین کنید که این تابع در (۳,۰) دارای یک ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی باشد و منحنی نمایش آن در (۱- , ۱) یک نقطهٔ عطف داشته باشد.

۸ــ اگر $y = ax^{۳} + bx^{۲}$، ضرایب ثابت a و b را چنان تعیین کنید که منحنی نمایش این تابع در نقطهٔ (۱,۲) دارای یک نقطهٔ عطف باشد.

۹ــ طول نقاط عطف یک منحنی به معادلهٔ $y = (x^{۲} - ۷x + ۱۴)e^{x}$ را بدست آورید.

رسم نمودار یک تابع

پیش از این با رسم نمودار توابع از طریق نقطه‌یابی و انتقال آشنا شده‌ایم. این روش محدودیت‌های بسیاری دارد و فقط در مورد توابع ساده قابل به‌کار بردن است. علاوه بر این رسم نمودار تابع با این

روش دقت بسیار کمی دارد.

برای توابع مشتق‌پذیر، از طریق مشتق تابع می‌توان بازه‌هایی که تابع در آن‌ها صعودی یا نزولی است، تشخیص داد و می‌توان جاهایی که تابع تغییر جهت می‌دهد و از حالت صعودی به نزولی و از حالت نزولی به صعودی تغییر وضعیت می‌دهد تشخیص داد و با مشتق دوم جهت تقعر نمودار تابع را مشخص کرد و با رسم جدول تغییرات تابع، چگونگی تغییرات تابع را با دقت کافی به‌دست آورد.

برای توابع پیوسته با دامنه IR که مشتق‌پذیری هم دارند، تعیین علامت مشتق تابع و نقاط بحرانی تابع نقش اصلی را در رسم تابع بازی می‌کنند.

مثال : نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 3$ را رسم کنید.

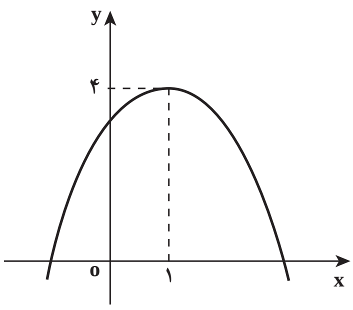
حل : داریم $y' = -2x + 2$. y' در $x = 1$ صفر است و علامت y' و وضعیت صعودی و نزولی این تابع در جدول زیر مشخص شده است.

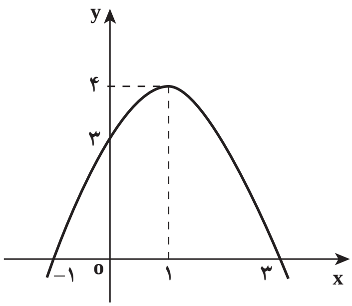
x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		+	۰	−	
y		↗	۴	↘	

برای دقت بیشتر لازم است حد تابع در $+\infty$ و $-\infty$ نیز معلوم گردد. در این مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 + 2x + 3 = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 + 2x + 3 = -\infty$. پس جدول به شکل زیر درمی‌آید.

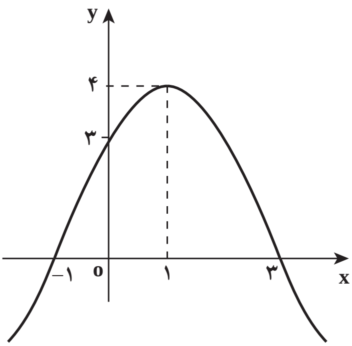
x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		+	۰	−	
y	$-\infty$	↗	۴	↘	$-\infty$

این جدول نشان می‌دهد که با تغییر x از $-\infty$ تا ۱، مقدار تابع از $-\infty$ تا ۴ صعود می‌کند و سپس با تغییر x از ۱ تا $+\infty$، مقدار تابع از ۴ تا $-\infty$ نزول می‌کند.





برای رسم بهتر، می‌توانیم محل تلاقی نمودار را با محور xها و yها به‌دست آوریم. جواب‌های معادله $y=-x^{۲}+۲x+۳=۰$، نشان‌دهنده محل‌های برخورد نمودار با محور xها هستند (چرا؟). جواب‌های این معادله $x=-۱$ و $x=۳$ هستند. به ازای $x=۰$ داریم $y=۳$ که محل برخورد نمودار تابع با محور yها را نشان می‌دهد (چرا؟)



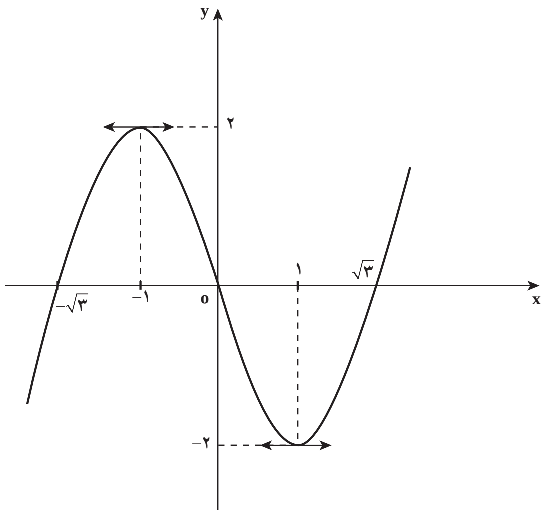
هنوز هم منحنی‌های زیادی هستند که می‌توانند از این نقاط بگذرند و به همین شکل صعود و نزول کنند، مثلاً منحنی مقابل. از کجا مطمئن هستیم که این منحنی نادرست است؟ با بررسی وضعیت تقعر نمودار تابع می‌توان تشخیص داد که کدام نمودار درست است. بنابراین مناسب است که در جدول تغییرات تابع علامت y'' را نیز مشخص کنیم. داریم $y''=-۲$. پس تقعر نمودار تابع همواره به سمت پایین است و نمودار بالایی صحیح نیست. علاوه بر این در هر نقطه از نمودار تابع با محاسبه مقدار y' وضعیت خط مماس را می‌توان تشخیص داد و معلوم می‌شود نمودار تابع در هر نقطه با چه زاویه‌ای نسبت به محور xها در حال تغییر است.

مثال : نمودار تابع $y=x^{۳}-۳x$ را رسم کنید.

حل : داریم $y'=۳x^{۲}-۳$ و $y''=۶x$ و معادله $x^{۳}-۳x=۰$ دارای سه جواب $x=۰$ و $x=\pm\sqrt{۳}$ است و نمودار تابع در سه نقطه محور xها را قطع می‌کند. به ازای $x=۰$ داریم $y=۰$ و نمودار تابع در همین نقطه محور y ها را قطع می‌کند. حد این تابع در $+\infty$، $+\infty$ است و حد این تابع در $-\infty$، $-\infty$ است. جدول تغییرات تابع به شکل زیر است.

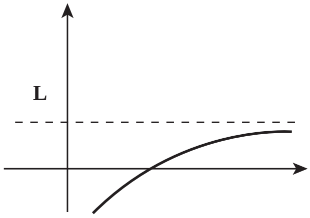
x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
y'		+		+	۰	−		−	۰	+		+	
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۲	↘	۰	↘	-۲	↗	۰	↗	$+\infty$
y''		−		−		−	۰	+		+		+	

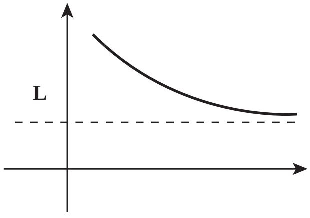
تقعر رو به پایین — عطف — تقعر رو به بالا



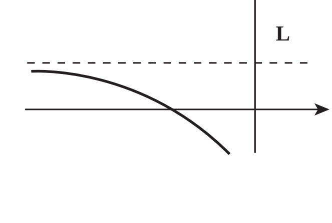
مجانب‌های نمودار توابع

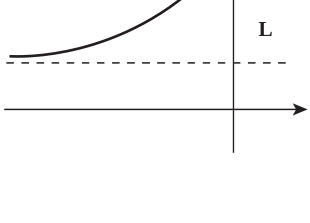
در توابعی که حد آن‌ها در $+\infty$ عددی مانند L شود، نمودار تابع به‌گونه‌ای خواهد شد که در مقادیر بزرگ x به خط افقی $y = L$ نزدیک می‌شود. در این حالت گوییم خط $y = L$ مجانب افقی تابع در $+\infty$ است. شکل‌های زیر نمونه‌ای از مجانب افقی در $+\infty$ است.





به‌طور مشابه اگر حد تابعی در $-\infty$ برابر عدد L شود، نمودار تابع در مقادیر منفی x که از لحاظ قدرمطلق بزرگ هستند، به خط افقی $y = L$ نزدیک می‌شود و در این حالت گوییم خط $y = L$ مجانب افقی نمودار تابع در $-\infty$ است. شکل‌های زیر نمونه‌هایی از مجانب افقی در $-\infty$ است.





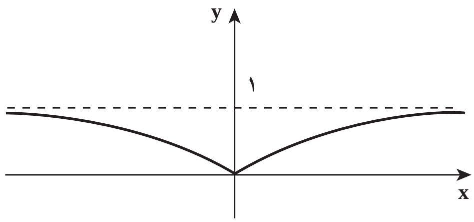
مثال : نمودار تابع $y=\frac{x^۲}{x^۲+۱}$ را رسم کنید.

حل : داریم

$$y'=\frac{۲x(x^۲+۱)-۲x\times x^۲}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۲x}{(x^۲+۱)^۲}$$

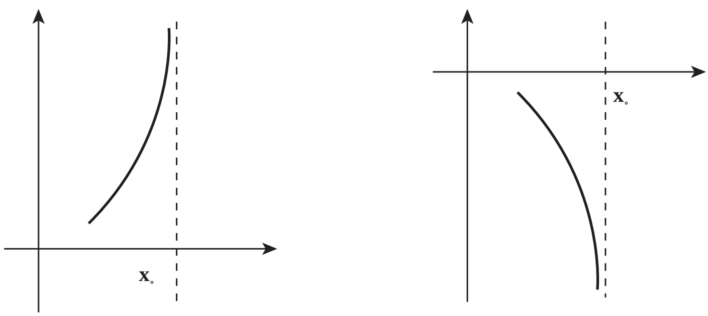
y' در $x=۰$ صفر است و علامت آن همان علامت $۲x$ است. حد این تابع در $\pm\infty$ برابر ۱ است. پس $y=۱$ مجانب افقی آن در $\pm\infty$ است.

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
y′		−	۰	+	
y	۱	↘	۰	↗	۱

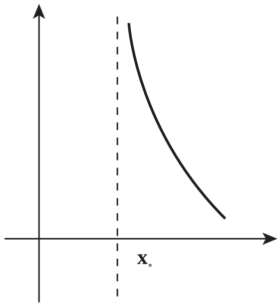


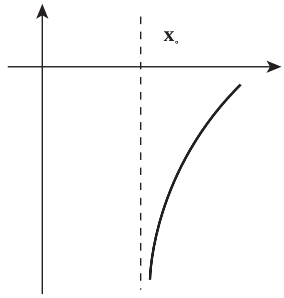
در برخی توابع ممکن است حد چپ تابعی در نقطهٔ $x_۰$ ، $+\infty$ (یا $-\infty$) شود. در این موارد خط عمودی $x=x_۰$ به‌گونه‌ای است که نمودار تابع با نزدیک شدن x به $x_۰$ از چپ، به این خط در مقادیر بزرگ مثبت (یا مقادیر منفی از لحاظ قدرمطلق بزرگ) نزدیک می‌شود.

در این حالت گوییم خط عمودی $x=x_۰$ یک مجانب قائم نمودار تابع است. شکل‌های زیر نمونه‌ای از مجانب قائم در قسمت چپ $x_۰$ را نشان می‌دهد.



در حالتی که حد راست تابع در $x_۰$، $+\infty$ (یا $-\infty$) باشد، مجدداً خط عمودی $x = x_۰$ را یک مجانب قائم نمودار تابع می‌نامند و شکل‌های زیر نمونه‌هایی از این حالت را نشان می‌دهند.





مثال : نمودار تابع $y = \frac{۱}{x^۲ - ۱}$ را رسم کنید.

حل : دامنه این تابع نقاط ±۱ را ندارد و در این نقاط داریم

$$\lim_{x \to ۱^+} \frac{۱}{x^۲ - ۱} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to ۱^-} \frac{۱}{x^۲ - ۱} = -\infty$$

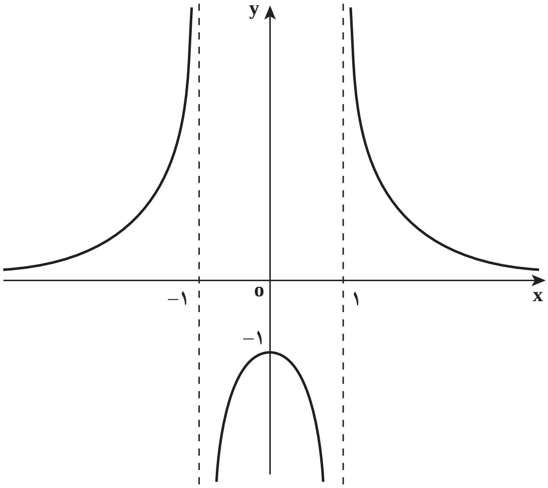
$$\lim_{x \to -۱^+} \frac{۱}{x^۲ - ۱} = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to -۱^-} \frac{۱}{x^۲ - ۱} = +\infty$$

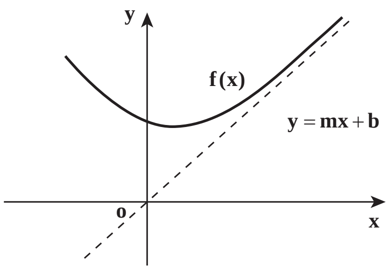
بنابراین خط‌های $x = ۱$ ، $x = -۱$ از مجانب‌های قائم این تابع می‌باشند.

از آن‌جا که $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{۱}{x^۲ - ۱} = ۰$ ، خط $y = ۰$ نیز مجانب افقی تابع در $\pm\infty$ است. $\frac{۱}{x^۲ - ۱}$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، پس نمودار تابع محور xها را قطع نمی‌کند. به ازای $x = ۰$ داریم $y = ۱$، پس نمودار تابع در $y = ۱$ محور yها را قطع می‌کند.

همچنین داریم $y' = \frac{-۲x}{(x^۲ - ۱)^۲}$ ، پس در $x = ۰$, y' صفر می‌شود و علامت آن همان علامت $-۲x$ است. جدول تغییرات این تابع به صورت زیر است.

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		+	‖	+	۰	−	‖	−	
y	۰	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-۱	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	۰





مجانب مایل : در حالت‌هایی که حد تابع $f(x)$ در $+\infty$ یا $-\infty$ برابر بینهایت شود ممکن است بتوان خطی به‌صورت $y = mx + b$ یافت به‌گونه‌ای که مقادیر $f(x)$ و $mx + b$ در $+\infty$ یا $-\infty$ نزدیک هم باشند و نمودار $f(x)$ و خط $y = mx + b$ در $+\infty$ یا $-\infty$ به هم نزدیک شوند، مانند شکل مقابل.

در این حالت خط $y = mx + b$ را یک مجانب مایل نمودار تابع f می‌نامند. به‌طور دقیق‌تر گوییم خط $y = mx + b$ یک مجانب نمودار تابع در $+\infty$ است هرگاه

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + b)) = ۰$$

شکل بالا نشان‌دهنده همین وضعیت می‌باشد. گوییم خط $y = mx + b$ یک مجانب نمودار f در $-\infty$ است هرگاه

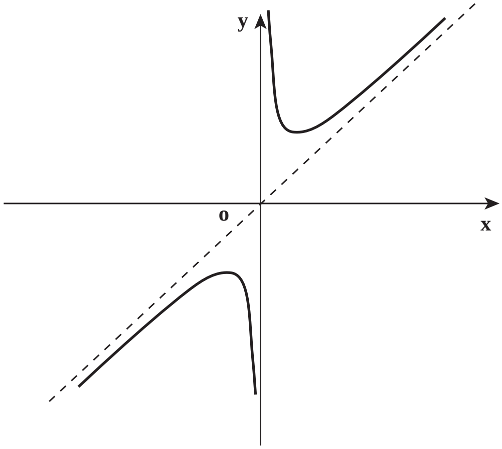
$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (mx + b)) = ۰$$

در حالت $m \neq ۰$ این مجانب‌ها را **مجانب مایل** می‌نامند.

مثال : در تابع $f(x) = \frac{x^۲ + ۱}{x}$ ، خط $x = ۰$ مجانب قائم و خط $y = x$ در $+\infty$ و $-\infty$ مجانب مایل است زیرا

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^۲ + ۱}{x} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{۱}{x} = ۰$$

با رسم جدول تغییرات تابع دیده می‌شود نمودار تابع به شکل زیر است.

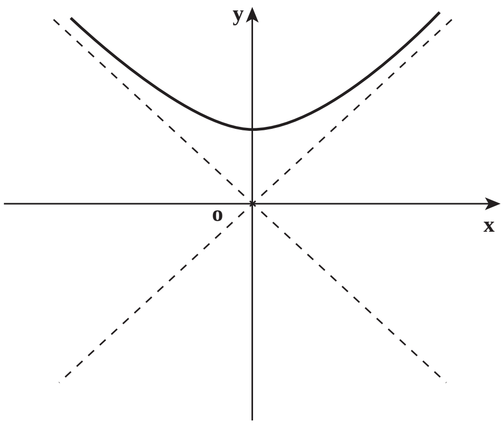


مثال : در تابع $f(x)=\sqrt{۱+x^{۲}}$ ، **خط** $y=x$ در $+\infty$ **مجانب مایل نمودار تـابع است و خـط** $y=-x$ در $-\infty$ **مجانب مایل نمودار تابع است** زیرا

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{۱+x^{۲}}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{۱+x^{۲}}-x)(\sqrt{۱+x^{۲}}+x)}{\sqrt{۱+x^{۲}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}+x}=۰$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{۱+x^{۲}}-(-x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{۱+x^{۲}}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}-x}=۰$$

با رسم جدول تغییرات تابع دیده می‌شود که نمودار تابع به شکل زیر است.



یکی از راه‌های یافتن مجانب مایل نمودار تابع f آن است که با محاسبات جبری، ضابطه $f(x)$ را به صورت $f(x) = g(x) + mx + b$ دربیاوریم به‌گونه‌ای که $g(x)$ تابعی باشد که در $+\infty$ یا $-\infty$ حد صفر داشته باشد.

روشن است که در این حالت شرط $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+b))=0$ خود به خود برقرار می‌شود و $y = mx + b$ یک مجانب مایل نمودار f خواهد بود.

مثال : مجانب‌های مایل تابع $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+2x}{x^2+1}$ را بیابید.

حل : با تقسیم صورت بر مخرج داریم : $f(x)=x+1+\dfrac{x-1}{x^2+1}$

چون $\dfrac{x-1}{x^2+1}$ در $+\infty$ و $-\infty$ حد صفر دارد خط $y = x + 1$ در $+\infty$ و $-\infty$ مجانب مایل نمودار f است.

درحالت کلی برای یافتن مجانب مایل باید عملیات زیر را به‌کار بریم. اگر نمودار f در $+\infty$ دارای خط مجانبی به‌صورت $y = mx + b$ باشد از شرط $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(mx+b))=0$ می‌توان با تقسیم تابع $f(x) - (mx + b)$ بر x نتیجه گرفت $m=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. پس حد $\dfrac{f(x)}{x}$ در $+\infty$ را بررسی می‌کنیم،در صورتی که این حد موجود باشد، ضریب زاویه خط مجانب به‌دست می‌آید. با به دست آمدن m ، حد $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$ را بررسی می‌کنیم، در صورتی که این حد موجود باشد، مقدار b نیز به‌دست می‌آید و خط مجانب مایل موجود خواهد بود. همین عملیات را در $-\infty$ می‌توان انجام داد تا خط مجانب مایل (در صورت وجود) در $-\infty$ به‌دست آید.

مثال : خط مجانب مایل تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^4}}{1+x}$ را (در صورت وجود) در $+\infty$ و $-\infty$ به‌دست آورید.

حل : حد $\dfrac{f(x)}{x}$ را در $+\infty$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^4}}{(1+x)x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1+x^4}{(1+x)^2x^2}}=1$$

پس ضریب زاویه خط مجانب مایل در $+\infty$ (در صورت وجود) برابر ۱ است.

حد $f(x) - x$ را در $+\infty$ بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۱+x^۴}}{۱+x} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۱+x^۴} - x - x^۲}{۱+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{۱+x^۴ - (x+x^۲)^۲}{(۱+x)(\sqrt{۱+x^۴} + x + x^۲)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۱ - x^۲ - ۲x^۳}{(۱+x)(\sqrt{۱+x^۴} + x + x^۲)} = -۱$$

پس خط $y = x - ۱$ مجانب مایل این تابع در $+\infty$ است.

این حدگیری‌ها در $-\infty$ نیز دقیقاً مانند بالا هستند و خط $y = x - ۱$ مجانب مایل این تابع در $-\infty$ نیز می‌باشد.

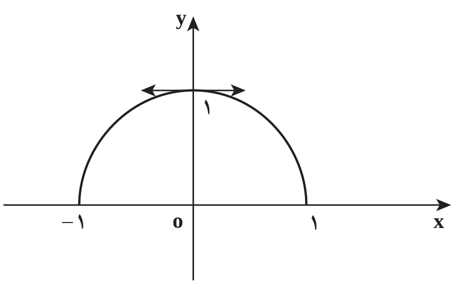
در توابعی که دامنه آن‌ها تمام IR نباشد، ابتدا لازم است به دامنه آن‌ها دقت شود و جدول تغییرات فقط در محدوده دامنه تابع رسم شود.

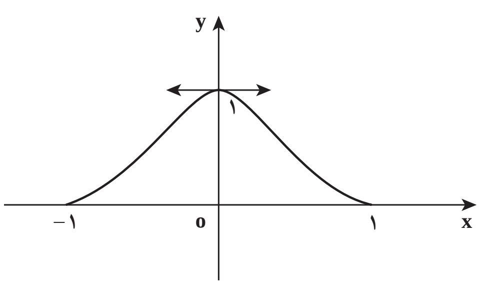
مثال : نمودار تابع $y = \sqrt{۱ - x^۲}$ را رسم کنید.

حل : دامنه این تابع بازه $[-۱,۱]$ است. در این حالت بحثی درباره مجانب افقی وجود ندارد زیرا حد تابع در $\pm\infty$ معنا ندارد. این تابع دارای حد $+\infty$ یا $-\infty$ در هیچ نقطه‌ای نیست پس مجانب قائم ندارد. مقدار y به ازای $x = \pm۱$ صفر می شود که نشان می‌دهد نمودار تابع در این نقاط محور xها را قطع می‌کند. به ازای $x = ۰$ داریم $y = ۱$، پس نمودار تابع در $y = ۱$ محور yها را قطع می‌کند. داریم $y' = \frac{-x}{\sqrt{۱ - x^۲}}$ و به ازای $x = ۰$ ، y' صفر می شود و علامت y' همان علامت $-x$ است. جدول تغییرات تابع به شکل زیر است

x	-۱		۰		۱
y'		+	۰	−	
y	۰	↗	۱	↘	۰

شکل تابع می‌تواند به صورت‌های زیر باشد :

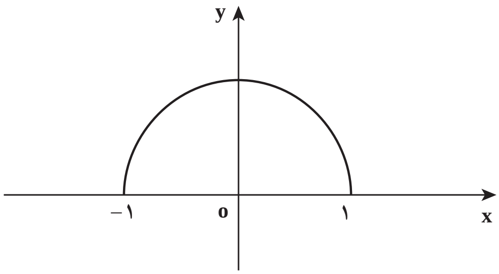




برای تشخیص بهتر شکل تابع لازم است بدانیم، نمودار تابع با چه زاویه‌ای از نقطهٔ -1 خارج و به نقطهٔ ۱ وارد می‌شود (زاویه خط مماس با محور xها) و جهت تقعر منحنی چگونه است. y' در ±1 تعریف نشده است ولی حد y' در ±1 مقادیر $\pm\infty$ دارد که نشان می‌دهد خط مماس بر نمودار تابع در این نقاط عمودی است. پس نمودار تابع به‌طور عمودی از این نقاط خارج یا به آن داخل می‌شود. همچنین

$$y'' = \frac{-1\times\sqrt{1-x^2} + x\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$

یعنی y'' همواره منفی است و جهت تقعر روبه پایین است. بنابراین شکل صحیح به صورت زیر باید باشد.



به آسانی می‌توانید تحقیق کنید که نمودار این تابع دقیقاً یک نیم‌دایره به شعاع ۱ است. فاصله نقاط نمودار این تابع را تا مبدأ حساب کنید.

با توجه به این مثال‌ها، می‌توان روش رسم نمودار یک تابع را به شکل زیر خلاصه کرد :

۱) دامنه تابع را مشخص کنید.

۲) اگر حد تابع در $\pm\infty$ معنا دارد، آن را حساب کنید تا رفتار تابع در $+\infty$ و $-\infty$ مشخص شود و (در صورت وجود) مجانب‌های افقی و مایل تعیین شوند.

۳) در صورت وجود، نقاطی که حد چپ یا راست تابع در این نقاط $+\infty$ یا $-\infty$ است مشخص شوند، تا مجانب‌های قائم نمودار تابع تعیین شوند.

۴) نقاط برخورد نمودار تابع با محور xها و محور yها تعیین شوند.

۵) y' در نقاط مشتق‌پذیری محاسبه شود و تعیین علامت شود و نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تعیین شوند.

۶) y'' در صورت امکان محاسبه شود و تعیین علامت شود و نقاط عطف در صورت وجود

تعیین شوند.

۷) اطلاعات به‌دست آمده از بندهای قبل را در جدول تغییرات تابع وارد می‌کنیم تا بازه‌هایی که تابع صعودی یا نزولی است مشخص شود و معلوم شود تابع از چه نقاطی به چه نقاطی صعود یا نزول می‌کند و در چه نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم می‌شود.

۸) نمودار تابع طبق جدول رسم شود و در نقاطی که ابهام دارد که با چه زاویه‌ای وارد یا خارج می‌شود، مقدار y' در این نقاط محاسبه شوند.

به چند مثال زیر توجّه کنید :

مثال ۱ : نمودار نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x}{x^{۲}-۱}$ را رسم کنید.

حل : خطوط مستقیم به معادلات $x=۱$ ، $x=-۱$ و $y=۰$ مجانب‌های منحنی نمایش این تابع هستند. (چرا؟) حال با مشتق‌گیری از تابع $y=\frac{x}{x^{۲}-۱}$ داریم $y'=\frac{x^{۲}-۱-۲x^{۲}}{(x^{۲}-۱)^{۲}}$ و از آنجا $y'=\frac{-x^{۲}-۱}{(x^{۲}-۱)^{۲}}$ بنابراین، همواره $y'<۰$ و درنتیجه تابع همواره نزولی است. برای به‌دست آوردن تقعر منحنی y'' را محاسبه می‌کنیم، با مشتق‌گیری از طرفین رابطهٔ

$$y'=\frac{-x^{۲}-۱}{(x^{۲}-۱)^{۲}}$$

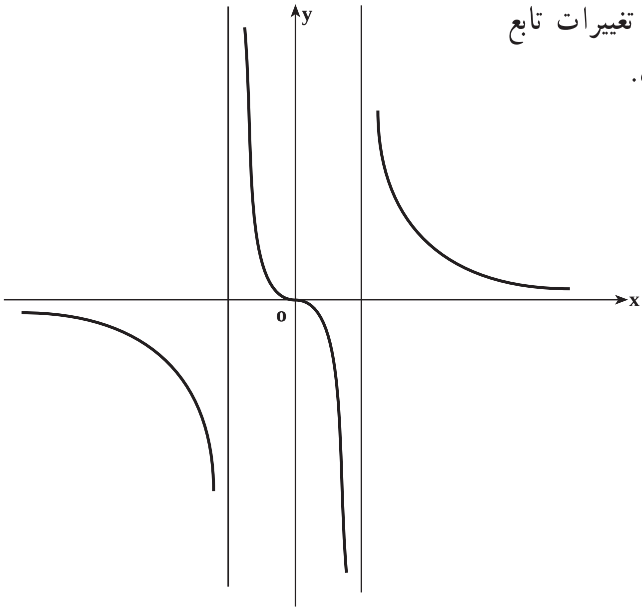
داریم

$$y''=\frac{۲x(x^{۲}-۱)(x^{۲}+۳)}{(x^{۲}-۱)^{۴}}$$

چون $\frac{۲(x^{۲}+۳)}{(x^{۲}-۱)^{۴}}>۰$ ، y'' با $x(x^{۲}-۱)$ هم علامت است. جدول تغییرات تابع را به شکل زیر تنظیم می‌کنیم :

x	$-\infty$ … -۱	-۱ … ۰	۰ … ۱	۱ … $+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	$-$
y	$۰ \searrow -\infty$	$+\infty \searrow ۰$	$۰ \searrow -\infty$	$+\infty \searrow ۰$
y''	$-$	$+$	$-$	$+$
	تقعر رو به پایین	تقعر رو به بالا	تقعر رو به پایین	تقعر رو به بالا

بنابراین، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x}{x^۲-۱}$ به شکل مقابل است.



با تبدیل $x \to -x$ و $y \to -y$ معادلهٔ $y=\frac{x}{x^۲-۱}$ تغییر نمی‌کند، پس مبدأ مختصات مرکز تقارن آن است.

مثال ۲ : منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{۱}{۱+x^۲}$ را رسم کنید.

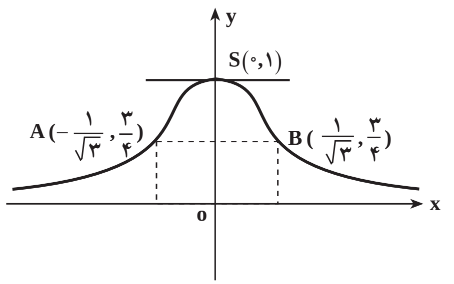
حل : ملاحظه می‌کنیم که $\frac{۱}{۱+x^۲}>۰$ در نتیجه $y>۰$ بنابراین، همه نقاط منحنی در بالای محور xها واقع هستند. با مشتق‌گیری از طرفین رابطهٔ $y=\frac{۱}{۱+x^۲}$ داریم $y'=\frac{-۲x}{(۱+x^۲)^۲}$ ، $y'=۰$ نتیجه می‌دهد $x=۰$. با تبدیل $x \to -x$ معادلهٔ $y=\frac{۱}{۱+x^۲}$ تغییر نمی‌کند و محور yها محور تقارن منحنی نمایش آن است. ملاحظه می‌کنیم $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{۱+x^۲}=۰$ بنابراین، خط $y=۰$ (محور xها) مجانب افقی منحنی است. چون $x^۲\geq ۰$ ، $y=\frac{۱}{۱+x^۲}\leq ۱$ در نتیجه $۰<y\leq ۱$، بنابراین، منحنی نمایش تابع بین دو خطّ $y=۰$ و $y=۱$ واقع است. با مشتق‌گیری از طرفین رابطهٔ $y'=\frac{-۲x}{(x^۲-۱)^۲}$ داریم

$$y''=\frac{(۱+x^۲)(-۲x^۲-۲+۸x^۲)}{(۱+x^۲)^۴}$$

درنتیجه $y''=\dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$ ، $y''=0$ نتیجه می‌دهد $6x^2-2=0$ و از آنجا $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ، چون $(1+x^2)^3>0$ ، y'' با $6x^2-2$ هم علامت است. جدول تغییرات تابع به شکل زیر است :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$-$		$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0
y''		$+$		$-$		$-$		$+$	
		تقعر رو به بالا		تقعر رو به پایین				تقعر رو به بالا	

بنابراین، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ به شکل زیر است.



در $x=0$ ، y' تغییر علامت می‌دهد و از مثبت به منفی می‌رود بنابراین، $S(0,1)$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع است. ملاحظه می‌کنیم که به ازای $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ و $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ، $y''=0$ و در این نقاط y'' تغییر علامت می‌دهد، بنابراین، $A(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{3}{4})$ و $B(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{3}{4})$ نقاط عطف منحنی هستند.

مثال ۳ : منحنی نمایش تابع $y=\dfrac{2x+3}{3x+5}$ را رسم کنید.

حل : ابتدا مجانب‌های این منحنی را به دست می‌آوریم، توجّه داریم که

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+3}{3x+5}=\frac{2}{3}$$

بنابراین، خط $y=\dfrac{2}{3}$ مجانب افقی است. ریشه مخرج کسر عبارت است از $x=-\dfrac{5}{3}$

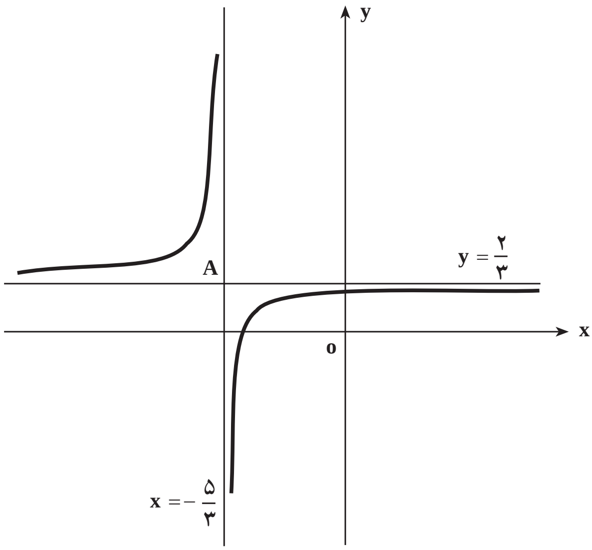
بنابراین،

$$\lim_{x\to -\frac{۵}{۳}} \frac{۲x+۳}{۳x+۵} = \pm\infty$$

درنتیجه خط $x=-\frac{۵}{۳}$ مجانب قائم است. حال از طرفین $y=\frac{۲x+۳}{۳x+۵}$ نسبت به x مشتق می‌گیریم $y'=\frac{۱}{(۳x+۵)^{۲}}$ و از آنجا $y'=\frac{۱}{(۳x+۵)^{۲}}$ بنابراین، $y'>۰$ درنتیجه تابع صعودی است. با توجّه به $y''=\frac{-۶(۳x+۵)}{(۳x+۵)^{۴}}$ ملاحظه می‌شود که y'' چون مخرج این کسر $(۳x+۵)^{۴}>۰$، y'' با $-۶(۳x+۵)$ هم علامت است. حال جدول تغییرات این تابع را به شکل زیر تنظیم می‌کنیم :

x	$-\infty$		$-\frac{۵}{۳}$		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	$\frac{۲}{۳}$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$\frac{۲}{۳}$
y''	+	+	||	−	−
		تقعر رو به بالا		تقعر رو به پایین	

بنابراین، منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{۲x+۳}{۳x+۵}$ به شکل زیر است :



در این شکل $A(-\frac{۵}{۳},\frac{۲}{۳})$ محل تلاقی مجانب‌های منحنی می‌باشد. چنان که مبدأ مختصات را به نقطهٔ $A(-\frac{۵}{۳},\frac{۲}{۳})$ انتقال دهیم به‌سادگی می‌توان تحقیق نمود که محل تلاقی دو مجانب یعنی همان نقطهٔ $A(-\frac{۵}{۳},\frac{۲}{۳})$ مرکز تقارن منحنی است.

تابع $y=\frac{۲x+۳}{۳x+۵}$ را یک تابع هموگرافیک می‌نامند. صورت کلی توابع هموگرافیک به شکل $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ می‌باشد که در آن ضرایب a، b، c و d اعداد ثابت هستند و a و c توأماً صفر نیستند.

مسائل

منحنی نمایش توابع زیر را رسم کنید.

۱ـ $y=x^۳+۴x^۲-۳x+۱۰$

۲ـ $y=x^۴+x^۲+۱$

۳ـ $y=\frac{۲x-۳}{۳x-۵}$

۴ـ $y=\frac{x}{x^۲+۱}$

۵ـ $y=\frac{x^۲}{x-۱}$

۶ـ $y=\sqrt{x^۲-۱}$

۷ـ $y=\frac{x^۲}{\sqrt{x-۱}}$