بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات تکمیلی

ویژهٔ مدارس استعدادهای درخشان

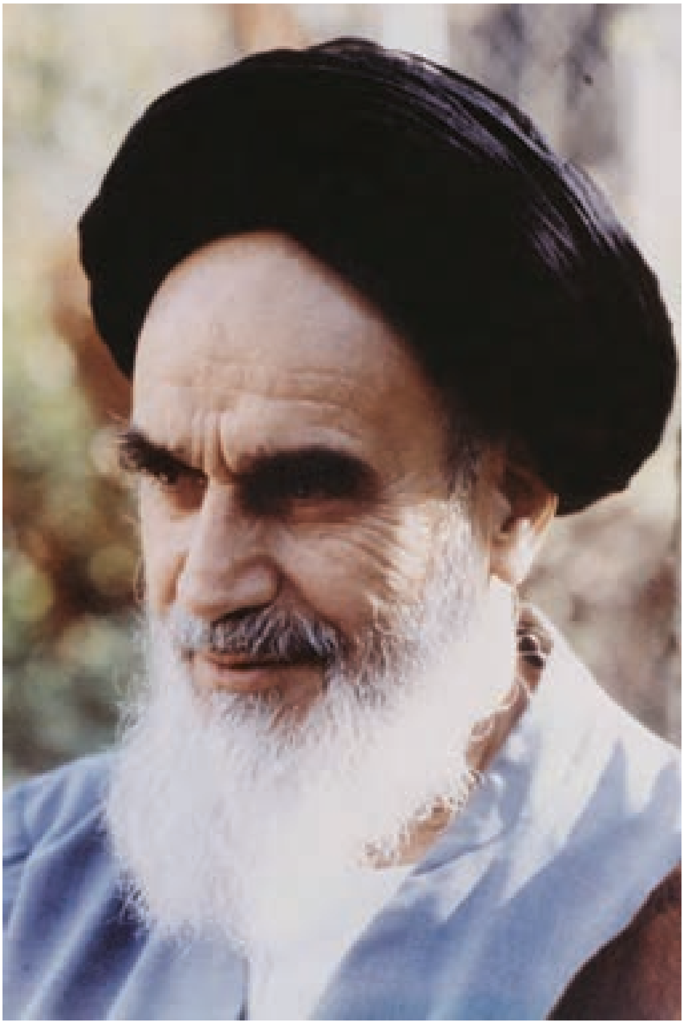
پایهٔ نهم دورهٔ اوّل متوسطه

۱۳۹۶

این کتاب، به منظور فراهم کردن مواد آموزشی تکمیلی مورد نیاز مدارس استعدادهای درخشان، توسط مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان و دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری طراحی و تألیف شده است.

نام کتاب:	**ریاضیات تکمیلی ویژهٔ مدارس استعدادهای درخشان پایهٔ نهم دورهٔ اوّل متوسطه ــ ۱۳۳/۱**
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:	**محمود امانی طهرانی، محمد نستوه، کورش امیری‌نیا، سیده‌طاهره آقامیری، رضا گلشن مهرجردی، عباسعلی مظفری و ناصر جعفری (اعضای شورای برنامه‌ریزی) محمدحسین احمدی، نرگس اخلاقی‌نیا، عبدالرضا زارع‌شحنه، سعید صدری و علی قصاب (اعضای گروه تألیف) واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی‌و متوسطه نظری (نظارت) ــ کاظم زارع (ویراستار علمی)، سید اکبرمیرجعفری (ویراستار ادبی)**
شناسه افزوده آماده‌سازی:	**لیدا نیک‌روش (مدیر امور فنی و چاپ) ــ سعید صدری (نگاشتارگر [طراح گرافیک]، طراح جلد و صفحه‌آرا)ــ محمدحسین احمدی (طراح پشت جلد) ــ محمدحسین احمدی (امورآماده‌سازی)**
نشانی سازمان:	**تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ــ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی) تلفن: ۹ــ۸۸۸۳۱۱۶۱ ، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶ ، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹ وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir**
ناشر:	**شرکت افست: تهران ــ کیلومتر۴ جادهٔ آبعلی، پلاک ۸، تلفن: ۷۷۳۳۹۰۹۳، دورنگار: ۷۷۳۳۹۰۹۷، صندوق پستی: ۴۹۷۹ــ ۱۱۱۵۵**
چاپخانه:	**شرکت افست «سهامی عام»**
سال انتشار و نوبت چاپ:	**چاپ دوم ۱۳۹۶**

شابک ۸-۲۶۷۹-۰۵-۹۶۴-۹۷۸ ISBN 978-964-05-2679-8



بنیان‌گذار کبیر جمهوری اسلامی، حضرت امام خمینی (رحمةالله علیه)

ما در شرایط جنگ و محاصره توانسته‌ایم آن همه هنرآفرینی و اختراعات و پیشرفت‌ها داشته باشیم. ان‌شاءالله در شرایط بهتر، زمینهٔ کافی برای رشد استعداد و تحقیقات را در همهٔ امور فراهم می‌سازیم. مبارزهٔ علمی برای جوانان زنده کردن روح جستجو و کشف واقعیت‌ها و حقیقت‌هاست.

به نام خداوند جان آفرین

پیشگفتار

ریاضیات (که در زبان پارسی قدیم «اِنگارِش» خوانده می شد) را بیشتر دانش بررسی کمّیتها، ساختارها، فضا و دگرگونی تعریف می‌کنند.

دیدگاه دیگری ریاضی را دانشی می‌داند که در آن با استدلال منطقی از اصول و تعریف‌ها به نتایج دقیق و جدیدی می‌رسیم. با اینکه ریاضیات از علوم طبیعی به شمار نمی‌رود، ولی ساختارهای ویژه‌ای که ریاضی‌دانان می‌پژوهند بیشتر از دانش‌های طبیعی به‌ویژه فیزیک سرچشمه می‌گیرند و در فضایی جدا از طبیعت و محض‌گونه (مجرد) گسترش پیدا می‌کنند، به‌طوری‌که علوم طبیعی برای حل مسائل خود به ریاضی باز می‌گردند تا جوابشان را با آن مقایسه و بررسی کنند.

علوم طبیعی، مهندسی، اقتصاد و پزشکی بسیار به ریاضیات تکیه دارد ولی ریاضی‌دانان گاه به دلایل صرفاً ریاضی (و نه کاربردی) به تعریف و بررسی برخی ساختارها می‌پردازند.

سخنی با معلم

این کتاب که در راستای اجرای سیاست غنی‌سازی برنامهٔ درسی مدارس استعدادهای درخشان و مطابق با اصل یکپارچگی و فراگیری برنامهٔ درسی ملی جمهوری اسلامی ایران تولید شده است، به تعمیق بخش هایی از کتاب درسی ریاضی پایه نهم می‌پردازد. این کتاب حاصل فرایندی مطالعاتی با بیش از چندین سال است؛ با این همه تیزبینی صاحب‌نظران در هنگام تدریس در نقد منصفانهٔ این کتاب بسیار ضروری است، زیرا بی‌نقصی این کتاب هیچ‌گاه در تصور نبوده است!

فصل‌های کتاب متناظر با کتاب درسی ریاضی است و مشخصاً دبیر ریاضی مجرب خواهد فهمید که تدریس هر بخش را چه زمانی آغاز کند. با این همه کلید واژه‌های بخش‌های کتاب به صورت فهرست‌وار بدین شرح است:

۱. تمرین‌های این کتاب با پیش‌فرض استعداد برتر و نیاز مخاطبین نگاشته شده است. یک معلم خلاق می تواند مخاطبین خود را در هنگام تدریس با بخشی از تمرین‌ها به چالش مفهومی بکشد. تفکر دربارهٔ

همهٔ تمرین‌ها در سال آموزشی واجب تلقی می شود، و این امر شاید در تضاد با معرفی کتاب‌های دیگر باشد. خلاقیت خود را با تدریس «این کتاب» به تصویر بکشید!

۲. دیر زمانی است که مقولهٔ کارگاه بازی در فرایند تدریس نقش آفرینی می‌کند و کتاب پیش رو نیز متناسب با موضوع، با کارگاه‌های آموزشی غنی شده است. توصیه می‌شود زمانی یک یا دو جلسه‌ای برای اجرای هریک از آنها در نظر بگیرید؛ و مکانی که می‌تواند فضایی به جز فضای مرسوم کلاسی باشد را به این امر اختصاص دهید.

۳. تغییرات فرهنگ آموزشی نیز مد نظر قرار گرفته اند. برای تغییر نسل، باید نخست دیدگاه خود را تغییر مناسب داد. برای این منظور باب بخشی به نام گفتگو در این کتاب گشوده شده است، تا عیاری برای سنگ محک نقد نظام تفکر تدریس معلمین در اختیار قرار داده شود. این گفتگوها آیینه‌ای است برای نمود ساخت ارزش‌های رو به رشد، تا یک معلم نهاد ایستایی و پویایی خود را مشاهده کند.

۴. شمارهٔ برخی از مسائل کتاب با رنگ صورتی مشخص شده‌اند. این رنگ برای اعلام نیاز زمان بیشتری برای تفکر است. معلم باید در هنگام حل این مسائل زمان شایسته‌ای برای تفهیم روش حل و توصیف ایده‌ها و راهکارهای آن ارائه دهد؛ تا در طول یک سال آموزشی دانش آموزان منفعل، در کنار صدها مسئلهٔ مهارتی، با حل چند مسئلهٔ چالش برانگیز هم آشنا گردند.

۵. شمارهٔ برخی از مسائل کتاب با رنگ سبز مشخص شده‌اند. این رنگ نشان دهندهٔ یک برنامهٔ مطالعاتی است که در فرهنگ عامه به نام پروژه شناخته می‌شود. به زبان تمثیل اگر حل مسئلهٔ ریاضی را به بازچینش درست یک نقاشی قطعه‌قطعه شده تشبیه کنیم، انجام یک پروژه به مثابهٔ کشیدن یک نقاشی خلاقانه با موضوع داده شده است. این هر دو ضروری است؛ زیرا پر واضح است که آحاد اندیشمندان باید بتوانند کاری از جنس حلّ مسئله را به‌خوبی انجام دهند، در حالی‌که نخبگان و سرآمدان باید به خلق آثار خلاقانه و ماندگار بپردازند.

۶. برخی از مسائل کتاب با رنگ زرد مشخص شده‌اند. این مسائل به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا بتوانند خودشان طراح مسئله باشند.

سخنی با دانش‌آموز

این کتاب شامل نگاه عمیق‌تری به کتاب درسی ریاضی پایهٔ نهم است، که شامل مسائل بسیاری است که بعضی ساده‌تر و برخی پیچیده‌تر هستند. توصیه می‌کنیم که دربارهٔ مسائل کتاب به اندازهٔ کافی فکر کنید و سریع به دنبال پرسیدن جواب از دیگران نباشید! زیرا در این صورت بسیار کم از این کتاب بهره خواهید برد. سعی کنید که فکر کنید و اگر ذهن بازیگوشی دارید، سعی کنید خود را به فکر کردن وادار کنید. همچنین خوب است که مطالب پیشگفتار و سخنی با معلم این کتاب را بخوانید تا با انواع مسائل و شیوهٔ به کارگیری این کتاب آشنا(تر) شوید.

فهرست مطالب

این صفحه خالی است!

فصل ۱

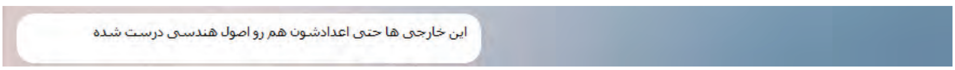
مجموعه‌ها

یکی از ایده‌های مهم برای کار کردن با اعضای یک مجموعه، تقسیم آن مجموعه به زیرمجموعه‌های مجزاست. برای مثال می‌توان اعداد طبیعی را به دو زیرمجموعهٔ اعداد زوج و فرد تقسیم کرد. البته این نوع تقسیم‌بندی به غیر از ریاضیات در جاهای دیگر نیز کاربرد دارد.

یک گروه اجتماعی مجازی

مدتی بود که معلم ریاضی برای بالا بردن بازدهی کلاس و نشاط بیشتر، یک گروه اجتماعی مجازی درست کرده بود و تقریباً همهٔ دانش‌آموزان کلاس عضوش بودند. در یک سرشب معمولی، تالار گفت‌وگو طبق معمول داغ بود. معلم هم هر چند دقیقه یک‌بار نظر مفیدی می‌داد تا اینکه یکی از دانش‌آموزان متن زیر را فرستاد:

بعد از این بلافاصله تقریباً همه به تشویق و نظر دادن پرداختند، و جالب این بود که بعد از کمتر از نیم ساعت معلوم شد که این عکس به گروه‌ها و کانال‌های دیگر راه پیدا کرده و بیش از چند هزار بار مورد بازدید قرار گرفته است. در این بین یکی از دانش آموزان نظر داد که:



به دنبال آن نظرات دیگر آمد و آمد تا آنجا که نتیجهٔ بحث به اینجا رسید:

تا ساعتی بحث ادامه پیدا کرد، تا اینکه طبق قانون همیشگی گروه، در رأس ساعت ده شب، همه آف شدند. چیزی که در بین استیکرهای تشویق، تعجب و نظرات برای دقایقی نادیده گرفته شد، عدم حضور معلم ریاضی بود!

فردای آن روز معلم ریاضی سر کلاس آمد. او آرام آمد و روی صندلی نشست؛ او مثل همیشه خوش‌وبِش نکرد؛ مثل همیشه لبخند نداشت؛ حتی مثل همیشه تکالیف را ندید! او و در نتیجه کل کلاس ساکتِ ساکت بودند. بالاخره جسورترین و معتبرترین دانش آموز کلاس پرسید:

دانش‌آموز: ببخشید می توانم چیزی بپرسم؟

معلم با اشاره سر اجازه داد، و از آنجایی که با ادب بود در ادامه گفت: بله.

دانش‌آموز: اتفاقی افتاده آقا؟

معلم: نه... . چیز جدیدی نیست! منتها من تازه آن را فهمیدم.

کلاس در سکوت فرو رفت.

دانش‌آموز: یکی از ما کاری کرده که شما ناراحت شدید؟

معلم فقط نگاه کرد.

دانش‌آموز: دیروز شما در گروه بودید و به یک باره از شما خبری نشد. امروز هم سکوت‌تان کاملاً نشان می‌دهد که چیزی شده است. احتمالاً ما کاری کرده‌ایم.

معلم باز هم نگاه کرد و پاسخی نداد، اما سرش را به نشانهٔ تأسف تکان داد. او بدون اینکه به فرد خاصی نگاه کند رو به جمعیت کلاس سکوتش را شکست.

معلم: وقتی یکی از شما مطلب چرندی می‌گذارد، و بقیه بدون فکر و تحلیل می‌پذیرند و حتی تشویقش می‌کنند، من با خود فکر می‌کنم که اگر قرار نیست ریاضیاتی که می‌خوانید شعور شما را بالاتر ببرد و به شما فکر کردن بیاموزد، پس به چه درد می‌خورد؟ عقل هم خوب چیزی است.

معرفی مجموعه

۱. تعدادی از دانش‌آموزان «علامهٔ حلّی» و «فرزانگان» را به اردوی راهیان نور برده‌اند. تعداد دانش‌آموزانی که از «علامهٔ حلّی» در اردو شرکت کرده‌اند، برابر است با تعداد دانش‌آموزانی که از «فرزانگان» در اردو شرکت نکرده‌اند. تعداد دانش‌آموزانی که در اردو شرکت کرده‌اند بیشتر است یا تعداد دانش‌آموزان فرزانگان؟

۲. کدام‌یک بیانگر مجموعهٔ تهی است؟

الف) Φ ب) $\{\}$ ج) $\varnothing$ د) $\{0\}$

هـ) 0 و) ϕ ز) $[\,]$ ح) $\{\varnothing\}$

۳. کدام‌یک از عبارت‌های زیر یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

الف) اعداد اول بین ۲۴ تا ۲۸

ب) اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱۸

ج) دو عدد که حاصل‌ضرب آنها برابر ۴ باشد.

د) سه عدد طبیعی متمایز که مجموع آنها برابر ۷ باشد.

هـ) چهار عدد طبیعی متمایز که مجموع آنها برابر ۱۲ باشد.

مجموعه‌های برابر و زیرمجموعه

۱. اگر $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$، آنگاه کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) $\{a\} \subseteq A$ ب) $\{a\} \in A$ ج) $\{a, b\} \subseteq A$ د) $\{b\} \in A$

۲. اگر $b = a$ و $d = c$، آنگاه مجموعهٔ $\Big\{\{a\}, \{a, b\}, \{\{a, b, c\}, a\}\Big\}$ با کدام‌یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

الف) $\Big\{\{a, b\}, \{a, a\}, \{\{a, c\}, b, a\}\Big\}$ ب) $\Big\{\{a\}, \{a, b\}, \{\{a, c\}, a\}\Big\}$

ج) $\Big\{\{a\}, \{\{a, d\}, b\}\Big\}$ د) $\Big\{\{a, d\}, \{\{a\}, c\}\Big\}$

۳. اگر دو مجموعهٔ $\{۳, \{z - ۱, y + ۱\}, \{z\}\}$ و $\{\{۲, ۱\}, \{y + ۱\}, x + ۱\}$ برابر باشند، آنگاه مقدار $x + y + z$ را به‌دست آورید.

- باتوجه‌به تعریف «زنجیر» که در زیر آمده است، به پرسش‌های ۴ و ۵ پاسخ دهید.

زنجیر

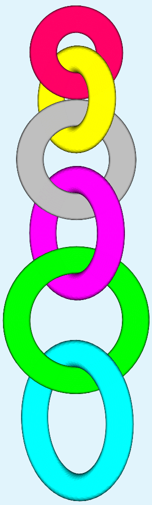
اگر A یک مجموعه باشد، به زیرمجموعه‌هایی از A که بین هر دوتای آنها رابطهٔ زیرمجموعه $(\subseteq)$ برقرار باشد، یک «زنجیر» می‌گویند.

برای مثال، اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، سه زیرمجموعهٔ زیر، یک زنجیر سه‌تایی از زیرمجموعه‌های A ساخته‌اند.

$$\{۱\}, \{۱, ۳, ۴\}, \{۱, ۳\}$$

زیرا:

$$\{۱, ۳\} \subseteq \{۱, ۳, ۴\}, \ \{۱\} \subseteq \{۱, ۳, ۴\}, \ \{۱\} \subseteq \{۱, ۳\}.$$



۴. فرض کنید $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. سه زیرمجموعه از X مثال بزنید که به‌همراه دو زیرمجموعهٔ $\{a\}$ و $\{a, e\}$ یک زنجیر تشکیل دهند.

۵. فرض کنید $M = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$. دو زیرمجموعهٔ $\{۱\}$ و $\{۱, ۳, ۵, ۷\}$ از مجموعهٔ M را در نظر بگیرید. حداکثر چند زیرمجموعهٔ دیگر از M به همراه این دو زیرمجموعه، تشکیل یک زنجیر می‌دهند؟

- باتوجه‌به تعریف «پادزنجیر» که در زیر آمده است، به پرسش‌های ۶ و ۷ پاسخ دهید.

پادزنجیر

اگر A یک مجموعه باشد، به زیرمجموعه‌هایی از A که هیچ‌کدام زیرمجموعه دیگری نباشند، پادزنجیر می‌گویند. برای مثال اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$، سه زیرمجموعه زیر، یک پادزنجیر سه‌تایی می‌سازند.

$$\{۱\},\ \{۲, ۳\},\ \{۲, ۴\}.$$

۶. اگر $X = \{a, b, c, d, e, f\}$، آنگاه شش زیرمجموعه از X به زیرمجموعه‌های زیر اضافه کنید تا یک پادزنجیر هشت‌تایی ساخته شود.

$$\{a\},\ \{b\}.$$

۷. اگر $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$، آنگاه حداکثر با چند زیرمجموعهٔ A می‌توان یک پادزنجیر ساخت؟ آن را بسازید.

۸. دو زیرمجموعه از اعداد طبیعی چهار رقمی داریم. مجموعهٔ A شامل اعدادی است که حاصل‌ضرب ارقامشان برابر ۲۵ باشد و مجموعهٔ B شامل اعدادی است که حاصل‌ضرب ارقامشان برابر ۲۷ باشد. نسبت تعداد عضوهای مجموعهٔ A به تعداد عضوهای مجموعهٔ B را به‌دست آورید.

۹. فرض کنید A مجموعهٔ اعداد دورقمی باشد. اگر B زیرمجموعه‌ای از A باشد که عضوهای آن به‌صورت $۵k$ باشند و $k \in A$، آنگاه B چند عضو دارد؟ حاصل‌جمع اعضای B چیست؟

۱۰. اگر مجموعهٔ سه‌عضوی $\{x, y, z\}$ زیرمجموعهٔ اعداد طبیعی باشد و $xyz = ۱۳۹۴$، آنگاه چند مجموعهٔ $\{x, y, z\}$ وجود دارد؟

● باتوجه‌به تعریف «جمع و ضرب دونه‌به‌دونه» که در زیر آمده است به پرسش‌های ۱۱، ۱۲، ۱۳ و ۱۴ پاسخ دهید.

جمع و ضرب دونه‌به‌دونه

برای دو زیرمجموعهٔ A و B از اعداد صحیح،

- «جمع دونه‌به‌دونه» ($\oplus$)، یعنی جمع زدن تک‌تکِ اعضای مجموعهٔ A با تک‌تکِ اعضای مجموعهٔ B.
- «ضرب دونه‌به‌دونه» ($\otimes$)، یعنی ضرب کردن تک‌تکِ اعضای مجموعهٔ A در تک‌تکِ اعضای مجموعهٔ B.

برای مثال، اگر $A=\{۱,۴\}$ و $B=\{۷,۸,۹\}$، آنگاه:

$$A\oplus B=\{۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲,۱۳\},\quad A\otimes B=\{۷,۸,۹,۲۸,۳۲,۳۶\}.$$

۱۱. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\{۱,-۲,۳\}\oplus\{۲,۳,-۱\}$

ب) $\{۱,-۲,۳\}\otimes\{۲,۳,-۱\}$

۱۲. اگر x عددی صحیح باشد، آنگاه عبارت زیر با چه اعدادی می‌تواند برابر باشد؟ برای هریک مثال بیاورید.

$$n\big(\{۱,-۱,x\}\otimes\{۱,۰,-۱\}\big)$$

۱۳. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $n\big(\{۱,۲,x\}\oplus\{۱,۰,-۱\}\big)=۴$

ب) $\dfrac{n\big(\{۱,x\}\otimes\{x,۱\}\big)}{n\big(\{۱,x\}\big)}=۱$

ج) $\{x,۲,۴\}\oplus\{۰,x\}=\{-x,x,۰,۱,-۱\}\otimes\{-x\}$

۱۴. اگر $n(A)=۳$ و $n(B)=۵$، آنگاه حداقل و حداکثر مقدار هریک از قسمت‌های زیر چه اعدادی می‌توانند باشند؟ برای هریک مثال بیاورید.

الف) $n(A\oplus B)$

ب) $n(A\otimes B)$

۱۵. فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$.

الف) همهٔ زیرمجموعه‌های دو عضوی A را بنویسید.

ب) همهٔ زیرمجموعه‌های سه عضوی A را بنویسید.

ج) هفت مجموعه از قسمت «ب» چنان انتخاب کنید که هر مجموعهٔ قسمت «الف» زیرمجموعهٔ دقیقاً یکی از این هفت مجموعه باشد. پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

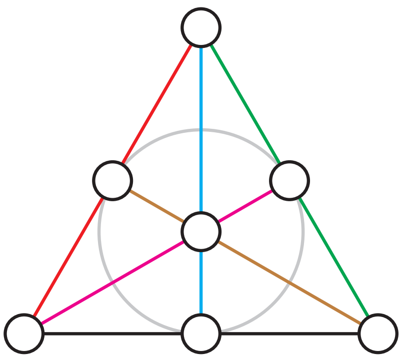
د) هفت زیرمجموعهٔ به‌دست آمده در قسمت «ج» را از مجموعه‌های قسمت «ب» حذف کنید و از مجموعه‌های باقی‌مانده، هفت زیرمجموعهٔ دیگر بیابید که هر مجموعهٔ قسمت «الف» زیرمجموعهٔ دقیقاً یکی از این هفت مجموعه باشد.

هـ) هریک از اعضای مجموعهٔ A به چند مجموعهٔ قسمت «ج» تعلق دارد؟

و) چهارده مجموعهٔ به‌دست آمده در قسمت‌های «ج» و «د» را از مجموعه‌های قسمت «ب» حذف کنید. آیا می‌توانید هفت مجموعه از مجموعه‌های باقی‌مانده چنان انتخاب کنید که هر مجموعهٔ قسمت «الف» زیرمجموعهٔ دقیقاً یکی از این هفت مجموعه باشد؟

ز) آیا مسئلهٔ زیر جوابی متفاوت از جواب‌های قسمت «ج» دارد؟

زیرمجموعه‌هایی از قسمت «ب» چنان انتخاب کنید که هر مجموعهٔ قسمت «الف» زیرمجموعهٔ دقیقاً یکی از این مجموعه‌ها باشد.

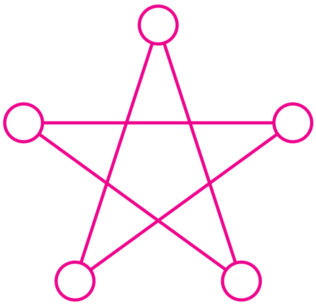
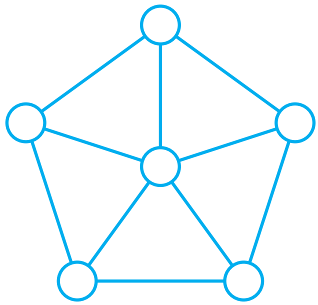


۱۶. مجموعهٔ زیر را در نظر بگیرید.

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

الف) هشت زیرمجموعهٔ سه عضوی از V چنان انتخاب کنید که هر زیرمجموعهٔ دو عضوی V یا زیرمجموعهٔ دقیقاً دوتا از این هشت مجموعه باشد یا زیرمجموعهٔ هیچ‌کدام از این هشت مجموعه نباشد.

ب) ده مجموعه از زیرمجموعه‌های سه عضوی V چنان انتخاب کنید که هر زیرمجموعهٔ دو عضوی V زیرمجموعهٔ دقیقاً دوتا از این ده مجموعه باشد.

۱۷. پروژه. مسئلهٔ دختران مدرسهٔ کرکمن.[1] در سال ۱۸۵۰ میلادی، آقای کرکمن می‌خواست پانزده دانش‌آموزش را هر روز هفته به گروه‌های سه نفره تقسیم کند. از طرفی او می‌خواست هر دانش‌آموز با هریک از دانش‌آموزان دیگر، دقیقاً یک‌بار هم‌گروه باشد. با چنین شرایطی، آقای کرکمن با چه روشی باید جدول زیر را پر می‌کرد؟

روزهای هفته / گروه‌ها	شنبه	یک‌شنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه
گروه ۱							
گروه ۲							
گروه ۳							
گروه ۴							
گروه ۵							

[1] Kirkman's schoolgirl problem

نمایش مجموعه با نمادهای ریاضی

۱. اعضای مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\{x \mid x \in \mathbb{N}\}$

ب) $\{x \mid (x-۵) \in \mathbb{N}\}$

ج) $\{x \mid (x-۵) \in \mathbb{N}, \frac{x}{۲} \in \mathbb{N}\}$

د) $\{x+۴ \mid (x-۵) \in \mathbb{N}, \frac{x}{۲} \in \mathbb{N}\}$

۲. اعضای مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\{x \mid x \in \mathbb{Z}\}$

ب) $\{x \mid \frac{x}{۳} \in \mathbb{Z}\}$

ج) $\{x \mid \frac{x}{۳} \in \mathbb{Z}, x \geqslant -۸\}$

د) $\{\sqrt{x+۷} \mid \frac{x}{۳} \in \mathbb{Z}, x \geqslant -۸\}$

۳. از ستون سمت چپ به ستون سمت راست وصل کنید.

- $\{-۶, -۴, -۲, ۰, ۲, ۴, ۶, \dots\}$
- $\{\dots, -۵, -۳, -۱, ۱, ۳, ۵, \dots\}$
- $\{-۴, -۲, ۰, ۲, ۴, \dots\}$
- $\{-۲, ۱, ۱۰, ۲۵, ۴۶, \dots\}$
- $\{۲, ۵, ۱۰, ۱۷, ۲۶, \dots\}$
- $\{۴, \frac{۹}{۲}, ۵, \frac{۱۱}{۲}, \dots\}$

- $\{۲x-۱ \mid x \in \mathbb{Z}\}$
- $\{x^۲+۱ \mid x \in \mathbb{N}\}$
- $\{۳x^۲-۲ \mid x \in \mathbb{Z}\}$
- $\{۲x \mid (x+۴) \in \mathbb{N}\}$
- $\{x \mid ۲x \in \mathbb{Z}, x \geqslant ۴\}$
- $\{x \mid (x+۶) \in \mathbb{E}, x > -۶\}$

۴. اعضای مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\{\frac{x}{۲} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{N}, x^۲ < ۱۰۰\}$

ب) $\{x^۲-۳ \mid -۴ < x < ۴, x \in \mathbb{Z}\}$

۵. کدام‌یک از عبارت‌های زیر یک مجموعه را مشخص می‌کنند؟

الف) $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x^۲+۱=۰\}$

ب) $\{x \mid x \in \mathbb{Z},\ ۵x+۲=۵-۲x\}$

ج) $\{x \mid x \in \mathbb{N},\ x(x-۱)+۱=x^۲-x+۱\}$

۶. در هر دایره عدد صحیح مناسب قرار دهید.

الف) $\{۳x - ۱ \mid x \in \mathbb{Z}, x \geqslant -۲\} = \{-۷, -۴, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \dots\}$

ب) $\{۲x + \bigcirc \mid x \in \mathbb{Z}, x \geqslant ۴\} = \{-۵, \bigcirc, -۱, ۱, \bigcirc, \bigcirc, \dots\}$

ج) $\{\bigcirc x + ۲ \mid x \in \mathbb{Z}, x \geqslant \bigcirc\} = \{۸, \bigcirc, ۱۴, ۱۷, \bigcirc, \bigcirc, \dots\}$

د) $\{\bigcirc x + \bigcirc \mid x \in \mathbb{Z}, x \geqslant ۱\} = \{\bigcirc, ۱۱, ۱۵, \bigcirc, \bigcirc, \dots\}$

۷. اگر $A = \{-۲۲, -۱۷, -۱۲, -۷, \dots\}$، آنگاه کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) $A = \{x + ۵ \mid x \in \mathbb{Z}, x \geqslant -۲۷\}$

ب) $A = \{۵x + ۳ \mid x \in \mathbb{Z}, x \geqslant -۵\}$

۸. مجموعه‌های برابر را مشخص کنید.

الف) $\{۴x + ۲ \mid x \in \mathbb{Z}\}$

ب) $\{۲x \mid x \in \mathbb{Z}\}$

ج) $\{۴x + ۱۲ \mid x \in \mathbb{Z}\}$

د) $\{۴x + ۶ \mid x \in \mathbb{Z}\}$

ه) $\{۴x \mid x \in \mathbb{Z}\}$

و) $\{۲x + ۱۲۳۴۵۶۷۸ \mid x \in \mathbb{Z}\}$

۹. اعضای مجموعهٔ $\{x \mid x^۲ \in \mathbb{Z}, -۵ < x < ۵\}$ را مشخص کنید.

۱۰. اگر $M = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x < ۱۰\}$ و $A = \{\sqrt{a} \mid a \in M\}$، آنگاه A چند عضو صحیح دارد؟

۱۱. اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد یک رقمی و $B = \{ab \mid \{a, b\} \subseteq A, a \neq b\}$، آنگاه مجموعهٔ B را با اعضای آن مشخص کنید.

۱۲. می‌دانیم $A = \{۳x + n \mid x \in \mathbb{Z}\}$ و $-۲۳ \in A$. اگر $\{a, b\} \subseteq A$، آنگاه $a + b$ به چند تا از مجموعه‌های زیر، می‌تواند تعلق داشته باشد؟

الف) $\{۱۳۹۵, ۱۴۳۸, ۲۰۱۷\}$

ب) $\{۱۳۵۷, ۱۳۸۸, ۱۳۳۲\}$

۱۳. فرض کنید k یک عدد ثابت است و $A = \{x^۲ + k \mid x \in \mathbb{Z}, -۳ \leqslant x < k\}$. اگر $\{۶, ۹\} \subseteq A$، آنگاه مجموعهٔ A را با اعضای آن مشخص کنید.

• در تعدادی از تمرین‌های این کتاب، از تعریف «حاصل‌ضرب دو مجموعه» که در زیر آمده، استفاده شده است.

حاصل‌ضرب دو مجموعه

حاصل‌ضرب دو مجموعهٔ A و B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \times B = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x \in A,\ y \in B \right\}.$$

برای مثال، اگر $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{k, t\}$، آنگاه:

$$A \times B = \left\{ \begin{bmatrix} ۱ \\ k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ \\ k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳ \\ k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳ \\ t \end{bmatrix} \right\},$$

$$B \times A = \left\{ \begin{bmatrix} k \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ ۳ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ ۳ \end{bmatrix} \right\}.$$

۱۴. اگر $A = \{x^۲ \mid x \in \mathbb{N}, x \leqslant ۳\}$ و $B = \{۲x \mid x \in \mathbb{N}, x \leqslant ۴\}$، آنگاه مجموعهٔ $A \times B$ را با اعضای آن مشخص کنید.

۱۵. اگر $A \times B = \left\{ \begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۵ \\ -۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۵ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۵ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۷ \\ -۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۷ \\ ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۷ \\ ۱ \end{bmatrix} \right\}$، آنگاه کدام‌یک از مجموعه‌های زیر A و کدام‌یک B است؟

الف) $\{۲x + ۳ \mid x \in \mathbb{Z}, -۱ < x \leqslant ۲\}$

ب) $\{x \mid x^۳ - x = ۰\}$

ج) $\{x + ۱ \mid \frac{x}{۲} \in \mathbb{Z}, ۰ < x < ۸\}$

د) $\{x \mid -۱ \leqslant x \leqslant ۱\}$

۱۶. اگر $A = \{x \mid x^۲ \in \mathbb{N}\}$، $B = \{x^۲ \mid x \in \mathbb{N}\}$ و $C = \{x^۲ \mid x^۲ \in \mathbb{N}\}$، آنگاه مجموعهٔ $\left\{ \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۶ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱۶ \\ ۴ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۹ \\ ۳ \end{bmatrix} \right\}$، زیرمجموعهٔ کدام مجموعهٔ زیر است؟

الف) $C \times A$

ب) $B \times C$

ج) $A \times C$

د) $B \times B$

اجتماع، اشتراک و تفاضلِ مجموعه‌ها

۱. اگر $A = \{۴, ۵, a\}$، $B = \{۱, b, ۵, ۷\}$ و $A \cup B = \{۵, ۷, ۱, ۲, ۶, c\}$، آنگاه مقدار $a + b + c$ را به‌دست آورید.

۲. اجتماع دو مجموعهٔ A و B، ۲۵ عضو دارد. به مجموعهٔ A، ۱۰ عضو جدید اضافه کرده‌ایم؛ به اشتراک آنها ۹ عضو اضافه شده است. اجتماع مجموعهٔ B و مجموعهٔ جدید حاصل از A چند عضو دارد؟

۳. الف) چند مجموعهٔ A در رابطه‌های $A \cap X = A$ و $A \cup X = \{۱, ۲\}$ صدق می‌کند؟

ب) چند مجموعهٔ X در رابطه‌های $A \cup X = A$ و $A \cap X = \{۱, ۲\}$ صدق می‌کند؟

۴. حاصل عبارت‌های زیر را با نمادهای ریاضی نمایش دهید.

الف) $\{۲x \mid x \in \mathbb{N}\} \cup \{۲x - ۱ \mid x \in \mathbb{N}\}$ ب) $\{۵x \mid x \in \mathbb{N}\} \cap \{۴x \mid x \in \mathbb{N}\}$

ج) $\{۴x - ۲ \mid x \in \mathbb{N}\} \cup \{۴x \mid x \in \mathbb{N}\}$

د) $\{۳x - ۱ \mid x \in \mathbb{N}\} \cap \{۳x + ۲ \mid x \in \mathbb{N}\}$

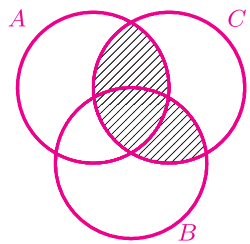
۵. در هر قسمت، مجموعه A را تعیین کنید به‌طوری‌که مجموع اعضای A برابر ۱۸ باشد.

الف) $A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\},\ B = \{۲, ۳, ۴, ۵\}$

ب) $A \cup B = \{۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\},\ B = \{۲, ۳, ۵, ۷\}$

ج) $A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\},\ A \cap B = \{۲, ۴\}$

۶. کدام‌یک از عبارت‌های زیر، قسمت هاشور خوردهٔ شکل را نشان می‌دهند؟



الف) $A \cap (B \cup C)$

ب) $A \cup (B \cup C)$

ج) $(A \cap B) \cup C$

د) $(A \cup B) \cap C$

۷. اگر $A = \{۲x - ۱ \mid x \in \mathbb{N}, x < ۱۱\}$، $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, -۱۱ < x < ۱۱\}$ و $C = \{۳x \mid x \in \mathbb{N}\}$، آنگاه در کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، حاصل‌جمع همهٔ اعضاء بر ۳ بخش‌پذیر است؟

الف) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ ب) $(A \cap C) \cup B$

● در تعدادی از تمرین‌های این کتاب، از تعریف «اِفراز یک مجموعه» که در زیر آمده، استفاده شده است.

اِفراز یک مجموعه

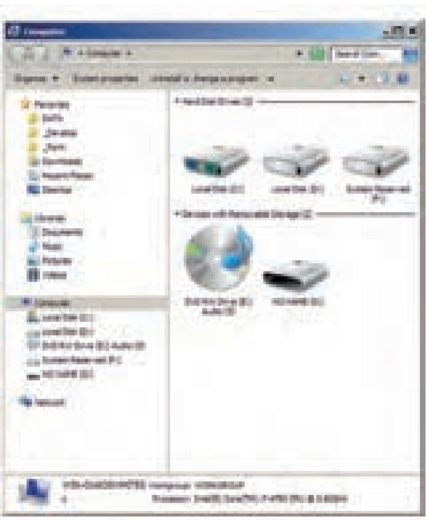
اگر همهٔ اعضای یک مجموعه، به یک یا چند زیرمجموعهٔ ناتهی جدا از هم تقسیم شوند، آن مجموعه اِفراز شده است.

برای مثال، مجموعه $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ را در نظر بگیرید. در زیر، این مجموعه را در قسمت «الف» به یک «قطعه»، در قسمت «ب» به دو قطعه و در قسمت «ج» به سه قطعه اِفراز کرده‌ایم.

الف) $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ ب) $\{۱, ۲\}, \{۳, ۴, ۵\}$

ج) $\{۲\}, \{۱, ۳\}, \{۴, ۵\}$

۸. در هریک از شکل‌های زیر چه چیزی اِفراز شده است؟ تصویر سمت راست، یک قطعه از مجموعه‌ای است که به ۳۱ قطعه اِفراز شده است. آن مجموعه چیست؟



۹. چرا هیچ‌یک از قسمت‌های زیر، یک اِفراز از مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ را نشان نمی‌دهند؟

الف) $\{۱, ۲\}, \{۲, ۳\}, \{۴, ۵\}$

ب) $\{۱, ۲\}, \{۳, ۵\}$

۱۰. الف) تمام پنج اِفراز مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳\}$ را بنویسید.

ب) تمام پانزده اِفراز مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ را بنویسید.

۱۱. قطعهٔ $\{۱, ۲\}$ به چند اِفراز از مجموعهٔ $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ تعلق دارد؟ همهٔ آنها را بنویسید.

۱۲. مجموعهٔ $\{۱, ۲\}$ زیرمجموعهٔ قطعه‌های چندتا از اِفرازهای مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ است؟ همهٔ آنها را بنویسید.

۱۳. هریک از مجموعه‌های $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ چند اِفراز دارند؟

۱۴. در زیر، چهار جفت مجموعهٔ برابر وجود دارد. آنها را مشخص کنید.

الف) $\{۳x + ۱ \mid x \in \mathbb{N}, \frac{x+۱}{۴} \notin \mathbb{N}\}$

ب) $\{۴x + ۲ \mid x \in \mathbb{N}, \frac{x+۱}{۳} \notin \mathbb{N}\}$

ج) $\{۱۲x - ۴ \mid x \in \mathbb{N}\}$

د) $\{۴x + ۲ \mid x \in \mathbb{W}, \frac{x}{۳} \notin \mathbb{N}\}$

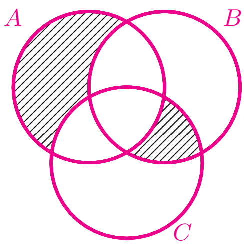
هـ) $\{۶x + ۲ \mid x \in \mathbb{N}\} - \{۴x - ۲ \mid x \in \mathbb{N}\}$

و) $\{۳x + ۱ \mid x \in \mathbb{N}\} - \{۴x + ۲ \mid x \in \mathbb{N}\}$

ز) $\{۴x - ۲ \mid x \in \mathbb{N}\} - \{۶x + ۲ \mid x \in \mathbb{N}\}$

ح) $\{۴x + ۲ \mid x \in \mathbb{N}\} - \{۳x + ۱ \mid x \in \mathbb{N}\}$

۱۵. اگر $A = \{\sqrt{۲}, \sqrt{۳}, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$، $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, ۳ \leqslant x \leqslant ۸\}$ و $C = \{x \mid x^۲ \in \mathbb{Z}, -۲ \leqslant x \leqslant ۲\}$، آنگاه چه اعدادی در ناحیه‌های هاشور خوردهٔ شکل زیر قرار دارند؟

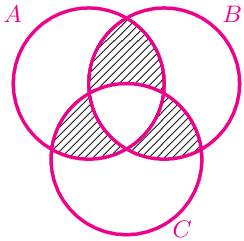


۱۶. کدام‌یک از عبارت‌های زیر ناحیهٔ هاشور خورده را نشان می‌دهند؟

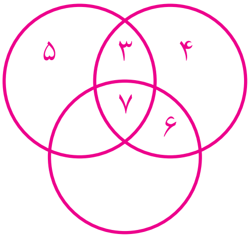
الف) $((A \cap B) - C) \cup ((A \cap C) - B) \cup ((B \cap C) - A)$

ب) $((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) - (A \cap B \cap C)$

ج) $(A \cup B \cup C) - \Big((A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C)) \cup (C - (A \cup B))\Big)$



۱۷. مجموعه‌های پنج عضوی A، B و C زیرمجموعه‌های عددهای طبیعی یک رقمی هستند. باتوجه‌به اطلاعات داده شده، اعضای این سه مجموعه را بیابید. این تمرین چند جواب دارد؟



$A = \{۱, ۲, ۵, \ldots, \ldots\}$

$\cdots = \{۴, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots\}$

$\cdots = \{۲, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots\}$

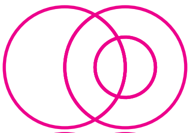
$n(A \cap B) = ۳$

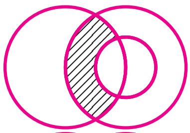
$n(A \cap C) = ۲$

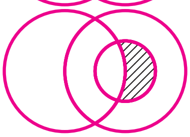
$n(C - B) = ۳$

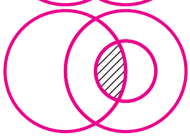
$۸ \in B$

۱۸. در هریک از شکل‌های زیر، دایره‌ها بیانگر مجموعه‌های A، B و C هستند. کدام‌یک می‌تواند $(A - B) \cap C$ باشد؟

الف) 

ب) 

ج) 

د) 

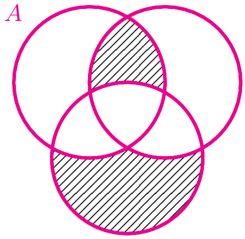
۱۹. اجتماع دو مجموعهٔ A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ به‌ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هریک از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعهٔ اشتراک آنها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعهٔ جدید، چندتا است؟

۲۰. A، B و C سه مجموعهٔ ناتهی هستند. درستی هریک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

الف) بی‌شمار مثال برای A، B و C وجود دارد که $A-(B\cup C) = (A-B)\cup(A-C)$.

ب) بی‌شمار مثال برای A، B و C وجود دارد که $A-(B\cup C) \neq (A-B)\cup(A-C)$.

۲۱. اگر $A = \{\sqrt{x} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{Z}, x < ۱۰۰۰\}$، $B = \{x + ۱۷ \mid x \in \mathbb{N}, x \leqslant ۲۰\}$، $C = \{۲۰, ۲۱, ۲۲, \ldots, ۳۰\}$ و شکل زیر نمودار ون سه مجموعهٔ A، B و C باشد، آنگاه ناحیهٔ سایه خوردهٔ شکل زیر حداکثر چند عضو دارد؟



۲۲. برای سه مجموعهٔ دلخواه A، B و C، درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید. درستی تساوی‌ها را با استفاده از نمودار ون نشان دهید و برای عبارت‌های نادرست یک مثال بیاورید که درستی آنها را نقض کند.

الف) $(B \cap C) - A = (B - A) \cap (C - A)$

ب) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

۲۳. اگر $A \cap B = \varnothing$ و $A \cap C = \varnothing$، آنگاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

الف) $B \cap C \neq \varnothing$

ب) $B \cap C = \varnothing$

ج) $A \cap (B \cup C) = \varnothing$

د) $A \cap (B - C) \neq \varnothing$

۲۴. فرض کنید $۱۳۹۴ \in B$. اگر ۱۳۹۴ را به مجموعهٔ A اضافه کنیم، A تغییر نمی‌کند. کدام‌یک از رابطه‌های زیر همواره درست است؟

الف) $B \subseteq A$

ب) $A - B = \varnothing$

ج) $A \cap B \neq \varnothing$

د) $A - B \neq \varnothing$

۲۵. یک روز در هنگام نوشیدن قهوه در باشگاه مسافران بین کهکشان‌ها، «ایونِ تیخی»، عضو برجستهٔ این باشگاه گفت: «پیاده شدن در سیارهٔ «گسیود» خیلی مشکل بود، اما وقتی روی سطح سیاره فرود آمدم، از اینکه تصمیم به دیدن آنجا گرفته بودم پشیمان شدم. در آنجا موجوداتی عجیب زندگی می‌کردند. بیش از ۱۰۰۰ نفر از ساکنان سیاره به پیشوازم آمدند. ۸۱۱ نفر از آنها «یک‌چشم» داشتند! ۷۵۲ نفر آنها «موماری» بودند؛ یعنی روی سرشان به جای مو، مار رشد کرده بود! ۴۱۸ نفر از آنها «پاماهی» بودند؛ یعنی به‌جای پاهایشان یک دم ماهی داشتند. ۵۷۰ نفرشان، هم یک‌چشم بودند و هم موماری. ۳۵۶ نفرشان، هم یک‌چشم بودند و هم پاماهی. ۳۴۸ نفرشان، هم موماری بودند و هم پاماهی. سرانجام، ۲۹۷ نفر از این عجیب‌الخلقه‌ها، هم یک‌چشم بودند، هم موماری و هم پاماهی. بزرگترین آنها به طرف من آمد و گفت»؛ در این هنگام استاد «تارانتوف» که به داستان مسافرت ایونِ تیخی گوش می‌کرد، با صدای بلند گفت: «من می‌دانم که در آن سیاره، چند نفر فقط یک‌چشم هستند؛ چند نفر فقط موماری هستند و چند نفر فقط پاماهی.»

الف) تارانتوف از چه راهی تعداد آن موجودات عجیب‌الخلقه را پیدا کرده بود؟

ب) دست‌کم چند نفر به پیشواز آمده بودند؟

بی‌شمارش

در هیچ‌یک از مسائل این بخش، هدفْ شمارش تعداد اعضای مجموعه‌های داده شده نیست. صرفاً می‌خواهیم بدون شمردنِ تعداد اعضای مجموعه‌ها، آنها را با یکدیگر مقایسه کنیم.

۱. اعضای مجموعهٔ S همهٔ اعداد چهار رقمی هستند که رقم‌های آنها ۴ یا ۶ است. تعداد اعضای مجموعهٔ S با تعداد اعضای کدام‌یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

الف) فرض کنید هر خانهٔ یک جدول ۲ × ۲ با یکی از دو رنگ آبی یا قرمز رنگ شده است. اعضای مجموعهٔ B همهٔ حالت‌های رنگ‌آمیزی این جدول هستند.

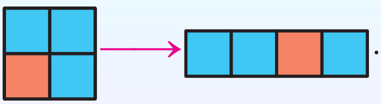
ب) اعضای مجموعهٔ A همهٔ حالت‌های ممکن در پرتاب همزمان چهار سکه هستند.

ج) اعضای مجموعهٔ C همهٔ حالت‌های ممکن چهار بار پرتاب یک سکه هستند.

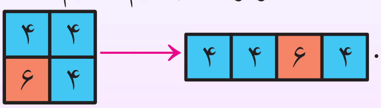
وحیده، صبا و دریا، این مسئله را به‌صورت زیر حل کرده‌اند. درستی راه‌حل هریک را بررسی کنید.

راه‌حل وحیده

هر حالت از رنگ‌آمیزی جدول ۲ × ۲ را به یک جدول ۴ × ۱ تبدیل می‌کنیم. برای مثال:



اکنون اگر رنگ آبی را ۴ و رنگ قرمز را ۶ بنامیم، داریم:



حال جدول ۴ × ۱ بالا را عدد ۴۴۶۴ در نظر می‌گیریم. در نتیجه $n(B) = n(S)$.

راه‌حل صبا

فرض کنید پشت و روی سکه‌ها اعداد ۴ و ۶ نوشته شده باشد. بنابراین یکی از حالت‌های پرتاب این چهار سکه به‌صورت زیر است.

۴ ۶ ۴ ۴

حالت پرتاب بالا را عدد ۴۶۴۴ در نظر می‌گیریم. پس $n(A) = n(S)$.

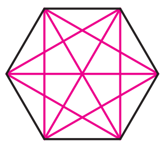
راه‌حل دریا

چهار جایگاه زیر را در نظر بگیرید.

ــــــ	ــــــ	ــــــ	ــــــ
یکان	دهگان	صدگان	هزارگان

پشت و روی سکه اعداد ۴ و ۶ را بنویسید. عدد رو شده در پرتاب‌های اول، دوم، سوم و چهارم را به‌ترتیب در جایگاه‌های یکان، دهگان، صدگان و هزارگان بالا بنویسید. بنابراین $n(C) = n(S)$.

۲. مجموعهٔ S شامل همهٔ قطرهای یک شش‌ضلعی است. تعداد اعضای مجموعهٔ S با تعداد اعضای کدام‌یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟



الف) کشوری شش شهر دارد که بین هر دوتا از آن شهرها یک خط هوایی وجود دارد. مجموعهٔ A شامل همهٔ خطوط هوایی بین این شهرهاست.

ب) شش تیم والیبال در یک گروه هستند که هر تیم باید با همهٔ تیم‌های دیگرِ گروه، یک‌بار بازی کند. هریک از اعضای مجموعهٔ B نشان‌دهندهٔ یکی از بازی‌های این گروه است.

۳. می‌خواهیم با سه تکه پارچهٔ هم‌عرض، پرچمی با سه رنگ متفاوت بدوزیم که در آن سه تکه افقی دوخته شوند. می‌توانیم پارچهٔ بالا را یکی از رنگ‌های سبز، آبی، قهوه‌ای یا مشکی، پارچهٔ میانی را یکی از رنگ‌های سفید، صورتی یا بنفش و پارچهٔ پایینی را یکی از رنگ‌های قرمز یا زرد انتخاب کنیم. اگر همهٔ حالت‌هایی را که می‌توان با شرایط گفته شده پرچم دوخت، مجموعهٔ S بنامیم، تعداد اعضای مجموعهٔ S با تعداد اعضای کدام‌یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

الف) اعضای مجموعهٔ A، همهٔ اعداد سه‌رقمی هستند که یکان، دهگان و صدگان آنها به‌ترتیب از مجموعه‌های $\{۱, ۲, ۳\}$، $\{۴, ۵\}$ و $\{۶, ۷, ۸, ۹\}$ انتخاب شده باشند.

ب) هریک از اعضای مجموعهٔ B حالتی را نشان می‌دهد که یک نفر بتواند از ۲ شلوار، ۴ پیراهن و ۳ کت متفاوت، یک تیپ بزند!

ج) دو فنجان، سه نعلبکی و چهار قاشق چایخوری، همگی متمایز، در فروشگاهی وجود دارد. اعضای مجموعهٔ C همهٔ حالت‌هایی را نشان می‌دهند که می‌توان از میان این لوازم، دو قلم کالا با نام‌های متفاوت خرید.

۴. تعداد اعضای کدام مجموعه‌ها باهم برابرند؟

الف) مجموعهٔ A شامل همهٔ اعداد چهار رقمی است که با رقم‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ نوشته می‌شوند و رقم تکراری ندارند.

ب) مجموعهٔ B همهٔ اعداد چهار رقمی است که از جابه‌جایی رقم‌های ۸, ۶, ۳, ۳ ساخته می‌شوند.

ج) مجموعهٔ C همهٔ کلماتی است که از جابه‌جایی حروف M, A, T, H ساخته می‌شوند.

د) مجموعهٔ D شامل همهٔ حالت‌های ایستادن عرفان، الیاس، پوریا و کیان در یک صف است.

۵. جفت مجموعه‌هایی را که تعداد اعضای آنها برابر است، مشخص کنید.

الف) اعضای مجموعهٔ A همهٔ اعداد سه رقمی هستند که با رقم‌های ۱ و ۲ نوشته می‌شوند.

ب) اعضای مجموعهٔ B همهٔ اعداد دو رقمی هستند که با رقم‌های ۱، ۲ و ۳ نوشته می‌شوند. (تکرار رقم‌ها مجاز است.)

ج) از شهر x به شهر y سه جاده وجود دارد. از شهر y به شهر z نیز سه جاده وجود دارد. مجموعهٔ C همهٔ مسیرهای ممکن را که می‌توان از x به z رفت، نشان می‌دهد.

د) اعضای مجموعهٔ D همهٔ حالت‌های ممکن سه‌بار پرتاب یک سکه هستند.

برای هر جفت مجموعه‌های بالا که مشخص کرده‌اید، مجموعهٔ دیگری مثال بزنید که تعداد اعضای آن مجموعه با تعداد اعضای مجموعه‌های آن جفت برابر باشد.

۶. جفت مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آنها باهم برابر است را مشخص کنید.

الف) آشپزی باید شش غذای کباب‌کوبیده، شیش‌لیک[۱]، قرمه‌سبزی، لوبیاپلو، عدس‌پلو و باقالی‌پلوباگوشت را برای شش مشتری ارسال کند. اعضای مجموعهٔ A همهٔ حالت‌هایی هستند که آشپز می‌تواند این شش غذا را به هریک از سه پیک‌موتوری که دارد، بسپارد. (آشپز می‌تواند هر شش غذا را به یک پیک بسپرد!)

ب) مجموعهٔ B همهٔ اعداد ۳ رقمی است که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ ساخته می‌شوند. (تکرار ارقام مجاز است.)

ج) مجموعهٔ C همهٔ اعداد ۶ رقمی است که با ارقام ۱، ۲ و ۳ ساخته می‌شوند.

د) مجموعهٔ D همهٔ حالت‌هایی است که بتوان سه توپ متمایز را در شش جعبهٔ متمایز قرار داد.

برای هر جفت مجموعه‌های بالا که مشخص کرده‌اید، مجموعهٔ دیگری مثال بزنید که تعداد اعضای آن مجموعه با تعداد اعضای مجموعه‌های آن جفت برابر باشد.

- در تعدادی از تمرین‌های این بخش، از تعریف دو عدد هم‌رقم که در زیر آمده، استفاده شده است.

دو عدد هم‌رقم

دو عدد را هم‌رقم می‌نامیم هرگاه مجموعهٔ رقم‌های دو عدد برابر باشند.

برای مثال، اعداد ۱۲ و ۲۱ هم‌رقم هستند. چون مجموعهٔ رقم‌های ۱۲ مجموعهٔ $\{۱, ۲\}$ و مجموعهٔ رقم‌های ۲۱ مجموعهٔ $\{۲, ۱\}$ است و $\{۲, ۱\} = \{۱, ۲\}$.

[۱] «شیش» در ترکیِ قفقازی همان «سیخ» فارسی است و «لیک» هم علامت نسبت است؛ بنابراین «شیش‌لیک» یعنی «سیخی» و منظور البته کباب سیخی است، در مقابل کباب تابه‌ای و دیگی و غیره.

۷. همهٔ اعداد سه رقمی را که با ۱۲۳ هم‌رقم هستند، بیابید.

۸. ده عدد سه رقمی مثال بزنید که رقم‌های آنها متفاوت باشند و با ۱۲۳ هم‌رقم نباشند.

۹. مجموعهٔ S شامل همهٔ اعداد دو رقمی با رقم‌های متفاوت است که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ نوشته می‌شوند.

الف) همهٔ اعضای مجموعهٔ S را طوری در یک جدول بچینید که اعداد هر ستون هم‌رقم باشند.

ب) همهٔ زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ را در یک ردیف بنویسید و آنها را با اعداد جدول قسمت «الف» مقایسه کنید.

۱۰. عباس با رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ همهٔ عددهای دورقمی را که رقم تکراری ندارند، نوشته است. اگر اعدادی را که عباس نوشته است، مجموعهٔ A بنامیم، آنگاه کدام عبارت دربارهٔ $n(A)$ درست است؟

الف) $n(A)$ برابر است با تعداد کلمات دوحرفی که با حروف a، b، c، d و e می‌توان ساخت به‌طوری‌که در کلمات حرف تکراری وجود نداشته باشد.

ب) $n(A)$ دو برابر تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعهٔ $\{۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\}$ است.

ج) $n(A)$ برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$.

د) $n(A)$ برابر است با تعداد حالت‌هایی که می‌توان از ۵ لنگه جوراب شبیه به‌هم، یک جفت جوراب را انتخاب کرد.

۱۱. مجموعهٔ S شامل همهٔ اعداد سه رقمی با رقم‌های متفاوت است که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ نوشته می‌شوند.

الف) همهٔ اعضای مجموعهٔ S را طوری در یک جدول بچینید که اعداد هر ستون باهم هم‌رقم باشند.

ب) همهٔ زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ را در یک ردیف بنویسید و آنها را با اعداد جدول قسمت «الف» مقایسه کنید.

۱۲. فرض کنید اعضای مجموعهٔ A همهٔ حالت‌هایی را نشان دهد که از پنج خانم، سه نفر برای شرکت در مسابقه‌ای انتخاب شده باشند و مجموعهٔ B همهٔ حالت‌هایی باشد که سه آقا می‌توانند در یک صف، پشت‌سرهم بایستند. با ذکر دلیل، مشخص کنید کدام‌یک از جمله‌های زیر درست هستند.

الف) $n(A)$ برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی یک مجموعهٔ پنج عضوی.

ب) $n(B)$ برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی یک مجموعهٔ سه عضوی.

ج) تعداد اعداد سه رقمی که رقم تکراری ندارند و هر سه رقم آنها فرد هستند برابر است با

$$n(A) \times n(B).$$

۱۳. فرض کنید مجموعهٔ A شامل همهٔ اعداد طبیعی بزرگتر از ۹ باشد که رقم‌های آنها از چپ به راست افزایشی هستند. برای مثال، رقم‌های اعداد ۵۸ و ۱۲۵۷ از چپ به راست افزایشی است ولی رقم‌های اعداد ۴۳ و ۱۴۵۸۸ از چپ به راست افزایشی نیست. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) مجموعهٔ A بی‌شمار عضو دارد.

ب) اگر $M = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های M برابر است با

$$n(A) + ۱۰.$$

مجموعه و احتمال

۱. تعداد اعضای کدام‌یک از مجموعه‌های زیر باهم برابر است؟

الف) همهٔ حالت‌های ممکن در پرتاب دو سکه

ب) $\{۰, ۱\} \times \{۰, ۱\}$

ج) همهٔ حالت‌های ممکن فرزندان خانواده‌ای که دو فرزند دارند.

د) همهٔ حالت‌های ممکن که می‌توان دو کارت از بین چهار کارتی که روی آنها اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ نوشته شده است، انتخاب کرد.

۲. در هریک از عبارت‌های زیر، همهٔ حالت‌های ممکن را به‌صورت حاصل‌ضرب دو مجموعه نمایش دهید.

الف) دو بار پرتاب یک سکه

ب) پرتاب دو تاس شش‌وجهی

ج) دو خانواده که هریک یک فرزند دارند.

د) پرتاب دو تاس که یکی دوازده‌وجهی و دیگری بیست‌وجهی باشد.

۳. کدام پیشامد معادل $\{۲, ۳, ۵\} \times \{۲, ۳, ۵\}$ است؟

الف) پیشامد اینکه در پرتاب دو تاس، هر دو تاس عدد اول باشد.

ب) پیشامد اینکه در پرتاب دو تاس، حداقل یک تاس عدد اول باشد.

ج) پیشامد اینکه در پرتاب دو تاس مجموع دو عدد رو شده کمتر از ۱۱ باشد.

د) پیشامد اینکه در پرتاب دو تاس مجموع اعداد ظاهر شده، عددی بین ۳ و ۱۱ باشد.

۴. سکه‌ای را چهار بار پرتاب کرده‌ایم.

الف) همهٔ حالت‌های ممکن را بنویسید.

ب) احتمال اینکه بار سوم رو آمده باشد، چقدر است؟

۵. سکه‌ای را چهار بار پرتاب کرده‌ایم. می‌دانیم بار دوم رو آمده است.

الف) همهٔ حالت‌های ممکن را بنویسید.

ب) احتمال اینکه دقیقاً دوبار رو آمده باشد، چقدر است؟

۶. سکه‌ای را چهار بار پرتاب کرده‌ایم. می‌دانیم حداقل دو بار رو آمده است.

الف) همهٔ حالت‌های ممکن را بنویسید.

ب) احتمال اینکه دقیقاً سه بار رو آمده باشد، چقدر است؟

۷. فرزند دوم خانوادهٔ رجبی در راه است. اگر فرزند اول این خانواده پسر باشد، احتمال اینکه فرزند دوم دختر باشد، چقدر است؟

۸. عاطفه در یک مسابقهٔ تلویزیونی شرکت کرده بود. در مرحلهٔ آخر، مجری از یکی از تماشاچیان پرسید: «شما چند فرزند دارید؟» تماشاچی پاسخ داد: «دو فرزند که یکی کلاس نهم است و دیگری کلاس هفتم». مجری گفت: «لطفاً جنسیت یکی از فرزندان خود را بگویید.» تماشاچی گفت: «پسر». سپس مجری به عاطفه گفت که اگر جنسیت فرزند دیگر خانواده را درست حدس بزند، یک میلیارد تومان جایزهٔ مسابقه را می‌برد. عاطفه چند دقیقه وقت خواست و مجری رو به دوربین گفت: «بعد از چند پیام بازرگانی، با ادامهٔ برنامه در خدمتتان خواهیم بود.»

الف) در اصفهان، معصومه از پای تلویزیون بلند شد و سراغ رایانه‌اش رفت. او فرزند دختر و پسر را به‌ترتیب اعداد ۱ و ۲ در نظر گرفت. سپس برنامه‌ای نوشت که به‌طور تصادفی از بین اعداد ۱ و ۲، دو عدد چاپ کند. برای مثال، اگر رایانه اعداد ۱, ۱ را چاپ کند یعنی هر دو فرزند، دختر هستند. معصومه این برنامه را ابتدا صد بار، سپس هزار بار،

بعد ده‌هزار بار و در نهایت صدهزار بار اجرا کرد و نتایج به‌دست آمده را در یک جدول به‌صورت زیر نوشت.

اجرای برنامه	چاپ شدن ۱, ۱	چاپ شدن ۱, ۲	چاپ شدن ۲, ۱	چاپ شدن ۲, ۲
۱۰۰ بار	۱۸ بار	۲۰ بار	۳۴ بار	۲۸ بار
۱۰۰۰ بار	۲۶۴ بار	۲۳۹ بار	۲۴۷ بار	۲۵۰ بار
۱۰۰۰۰ بار	۲۵۱۹ بار	۲۵۰۵ بار	۲۴۹۳ بار	۲۴۸۳ بار
۱۰۰۰۰۰ بار	۲۴۶۱۷ بار	۲۵۱۰۰ بار	۲۵۰۹۶ بار	۲۵۱۱۷ بار

معصومه با خودش گفت که چون یکی از بچه‌های تماشاچی، پسر است پس حالت ۱, ۱ به درد نمی‌خورد! بنابراین باتوجه‌به جدول بالا، شانس انتخاب ۲, ۲ (شانس پسر بودن فرزند دیگر) و شانس انتخاب ۱, ۲ یا ۲, ۱ (شانس دختر بودن فرزند دیگر)، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

اجرای برنامه	شانس انتخاب ۲, ۲	شانس انتخاب ۱, ۲ یا ۲, ۱
۱۰۰ بار	$\frac{۲۸}{۲۸+۳۴+۲۰} \simeq ۰/۳۴۱۴$	$\frac{۳۴+۲۰}{۲۸+۳۴+۲۰} \simeq ۰/۶۵۸۵$
۱۰۰۰ بار	$\frac{۲۵۰}{۲۵۰+۲۴۷+۲۳۹} \simeq ۰/۳۳۹۶$	$\frac{۲۴۷+۲۳۹}{۲۵۰+۲۴۷+۲۳۹} \simeq ۰/۶۶۰۳$
۱۰۰۰۰ بار	$\frac{۲۴۸۳}{۲۴۸۳+۲۴۹۳+۲۵۰۵} \simeq ۰/۳۳۱۹$	$\frac{۲۴۹۳+۲۵۰۵}{۲۴۸۳+۲۴۹۳+۲۵۰۵} \simeq ۰/۶۶۸۰$
۱۰۰۰۰۰ بار	$\frac{۲۵۱۱۷}{۲۵۱۱۷+۲۵۰۹۶+۲۵۱۰۰} \simeq ۰/۳۳۳۵$	$\frac{۲۵۰۹۶+۲۵۱۰۰}{۲۵۱۱۷+۲۵۰۹۶+۲۵۱۰۰} \simeq ۰/۶۶۶۴$

چون با زیاد شدن تعداد دفعات آزمایش تصادفی، شانس اینکه ۲, ۲ انتخاب شود به عدد $\frac{۱}{۳}$ نزدیک می‌شود، پس احتمال اینکه فرزند دیگر پسر باشد برابر $\frac{۱}{۳}$ است. از طرفی چون با زیاد شدن تعداد دفعات آزمایش تصادفی، شانس اینکه ۱, ۲ یا ۲, ۱ انتخاب شود به عدد $\frac{۲}{۳}$ نزدیک می‌شود، پس احتمال اینکه فرزند دیگر دختر باشد برابر $\frac{۲}{۳}$ است. بنابراین اگر عاطفه به مجری بگوید که فرزند دیگر دختر است، احتمال برنده شدنش دو برابر وقتی است که بگوید فرزند دیگر پسر است.

دربارهٔ درستی استدلال معصومه با هم‌کلاسی‌هایتان بحث کنید.

ب) در شیراز، دو خواهر دربارهٔ شانس برنده شدن عاطفه، در بحث با یکدیگر، استدلال‌هایی به‌صورت زیر آوردند.

استدلال خواهر بزرگتر

این خانواده یک فرزند دیگر دارد. این فرزند یا دختر است یا پسر. پس فرزند دیگر به احتمال $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ پسر و به احتمال $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ دختر است. پس فرقی ندارد که عاطفه بگوید پسر یا دختر.

استدلال خواهر کوچکتر

اگر همهٔ حالت‌های ممکن را براساس $\left[\begin{smallmatrix}\text{فرزند بزرگتر}\\ \text{فرزند کوچکتر}\end{smallmatrix}\right]$ در نظر بگیریم و ابتدا فرض کنیم که تماشاچی نمی‌گفت یکی از فرزندانش پسر است، همهٔ حالت‌های ممکنِ داشتنِ دو فرزند، به‌صورت زیر بود:

$$\begin{smallmatrix}\text{فرزند بزرگتر}\\ \text{فرزند کوچکتر}\end{smallmatrix}\left[\begin{smallmatrix}\text{پسر}\\ \text{پسر}\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\text{پسر}\\ \text{دختر}\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\text{دختر}\\ \text{پسر}\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\text{دختر}\\ \text{دختر}\end{smallmatrix}\right]$$

اما چون تماشاچی گفته که یکی از فرزندانش پسر است، پس در واقع سه حالت از چهار حالت بالا، همهٔ حالت‌های ممکن مسئله است. بنابراین اگر مجموعهٔ S همهٔ حالت‌های ممکن، A پیشامد پسر بودن فرزند دیگر و B پیشامد دختر بودن فرزند دیگر باشند، داریم:

$$S = \left\{\left[\begin{smallmatrix}\text{پسر}\\ \text{پسر}\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\text{پسر}\\ \text{دختر}\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\text{دختر}\\ \text{پسر}\end{smallmatrix}\right]\right\},$$

$$A = \left\{\left[\begin{smallmatrix}\text{پسر}\\ \text{پسر}\end{smallmatrix}\right]\right\}, \quad B = \left\{\left[\begin{smallmatrix}\text{پسر}\\ \text{دختر}\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}\text{دختر}\\ \text{پسر}\end{smallmatrix}\right]\right\}.$$

در نتیجه:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{۱}}{\text{۳}}, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\text{۲}}{\text{۳}}.$$

پس بهتر است عاطفه بگوید که فرزند دیگر دختر است.

چرا استدلال خواهر بزرگتر نادرست و استدلال خواهر کوچکتر درست است؟

ج) در نیشابور، دکتر کُندُری و مهندس مسعودی در «عطاری طیّرانی»، مشغول خرید و دیدن مسابقه بودند. دکتر کُندُری به مهندس مسعودی و آقای طیّرانی گفت: «بیایید همهٔ حالت‌های ممکن را بر اساس $\begin{bmatrix}\text{جنسیتی که تماشاچی گفت.}\\\text{فرزند دیگر}\end{bmatrix}$ در نظر بگیریم.» این سه نفر با استدلال‌های زیر، با یکدیگر بحث کردند.

استدلال دکتر کُندُری

قبل از اینکه تماشاچی جنسیت یکی از فرزندانش را اعلام کند، همهٔ حالت‌های ممکن این‌گونه بود:

$$\begin{bmatrix}\text{دختر}\\\text{دختر}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\text{دختر}\\\text{پسر}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\text{پسر}\\\text{دختر}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\text{پسر}\\\text{پسر}\end{bmatrix}.$$

چون تماشاچی گفت که یکی از فرزندانش پسر است پس دو حالت $\begin{bmatrix}\text{پسر}\\\text{پسر}\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}\text{پسر}\\\text{دختر}\end{bmatrix}$، همهٔ حالت‌های ممکن مسئله است. بنابراین شانس عاطفه در بردن یک میلیارد تومان، پنجاه‌پنجاه است.

استدلال آقای طیّرانی

بر اساس $\begin{bmatrix}\text{جنسیتی که تماشاچی گفت.}\\\text{فرزند دیگر}\end{bmatrix}$، همهٔ حالت‌های ممکن مسئله این‌گونه خواهد بود:

$$\begin{bmatrix}\text{پسر کوچکتر}\\\text{دختر بزرگتر}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\text{پسر بزرگتر}\\\text{دختر کوچکتر}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\text{پسر}\\\text{پسر}\end{bmatrix}\quad\begin{matrix}\text{جنسیتی که تماشاچی گفت.}\\\text{فرزند دیگر}\end{matrix}$$

پس اگر عاطفه بگوید فرزند دیگر دختر است، شانس برنده شدنش دو برابر وقتی است که بگوید فرزند دیگر پسر است.

استدلال مهندس مسعودی

قبل از اینکه تماشاچی گفته باشد یکی از فرزندانش پسر است، همهٔ حالت‌های ممکن این‌گونه می‌باشد:

$\begin{bmatrix}\text{دختر کوچکتر}\\\text{دختر بزرگتر}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\text{دختر بزرگتر}\\\text{دختر کوچکتر}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\text{دختر}\\\text{پسر}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\text{پسر}\\\text{دختر}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\text{پسر کوچکتر}\\\text{پسر بزرگتر}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\text{پسر بزرگتر}\\\text{پسر کوچکتر}\end{bmatrix}.$

چون فرزندِ با جنسیت معلوم، پسر است پس سه حالت $\begin{bmatrix}\text{پسر اول}\\\text{پسر دوم}\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}\text{پسر دوم}\\\text{پسر اول}\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}\text{پسر}\\\text{دختر}\end{bmatrix}$، همهٔ حالت‌های ممکن مسئله هستند. بنابراین اگر عاطفه بگوید فرزند دیگر پسر است، شانس برنده شدنش دو برابر وقتی است که بگوید فرزند دیگر دختر می‌باشد.

دربارهٔ درستی یا نادرستی استدلال‌های بالا، با هم‌کلاسی‌هایتان گفت‌وگو کنید.

۹. الف) پژمان سکه‌ای را دوبار پرتاب کرده است. اگر سکه بار اول رو آمده باشد، احتمال اینکه بار دوم پشت آمده باشد، چقدر است؟

ب) منیژه سکه‌ای را دوبار پرتاب کرده است. اگر بدانیم سکه یک‌بار رو آمده است، احتمال اینکه بار دیگر نیز رو آمده باشد، چقدر است؟

ترتیب ابجد

الف، ب، ج، د. احتمالاً این ترتیب از حروف الفبا را دیده‌اید. آیا تا به حال پرسیده‌اید: این دیگر چه ترتیبی است؟

در میان شاعران ایرانی نوعی عدد نویسی بر اساس حرف‌های الفبا معمول است که به آن «حساب جمله‌ها» یا «ماده تاریخ» می‌گویند. در این شیوه، ترتیب حروف الفبا به شکل زیر است:

اَبجَد هَوَز حُطی کَلِمَن سَعفَص قُرِشَت ثَخَذ ضَظَغ.

البته هیچ یک از این کلمات معنای خاصی ندارند! رابطهٔ حرف‌ها با اعداد به شکل زیر است:

الف	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ی	ک	ل	م	ن	س	ع
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰

هر عدد به حرفی که در بالای آن نوشته شده مربوط است. هریک از حروف دیگر به شکل زیر به یک عدد مربوط‌اند:

ف	ص	ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ
۸۰	۹۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۸۰۰	۹۰۰	۱۰۰۰

با استفاده از اعداد و حروف بالا، می‌توان یک عدد را با یک جمله یا یک عبارت بیان کرد.

برای مثال، حافظ، تاریخ کشته شدن شاه شیخ ابواسحاق شیرازی را در بیتِ:

بلبل و سرو و سمن و یاسمن و لاله و گل　　　هست تاریخ وفات شه مُشکین کاکُل

آورده است. با حساب جمله‌ها داریم:

بلبل = ۶۴　　　سرو = ۲۶۶　　　سمن = ۱۵۰

یاسمن = ۱۶۱　　　لاله = ۶۶　　　گل = ۵۰

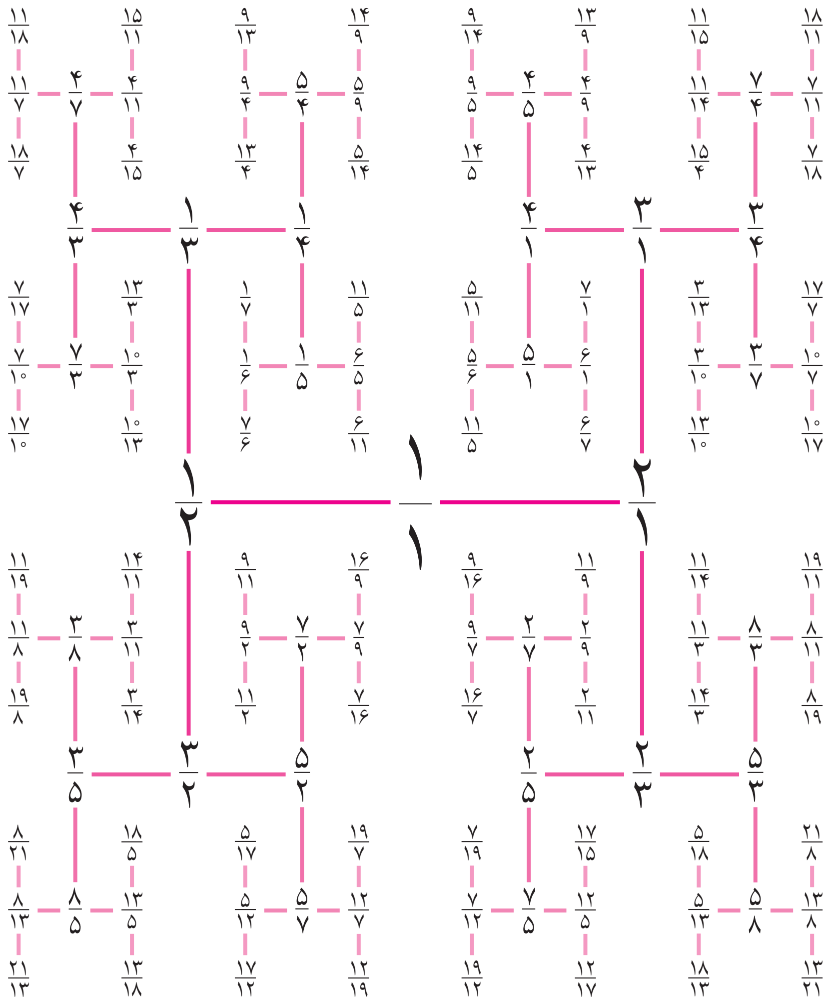
مجموع این اعداد برابر است با ۷۵۷ که سال کشته شدن ابواسحاق است.

مظفرالدین شاه قاجار (تصویر زیر) در سال ۱۳۲۴ هجری قمری با مشروطه موافقت کرد. این کار به «عدل مظفر» معروف شد. با حساب جمله‌ها «عدل مظفر» برابر با عدد ۱۳۲۴ است.

یک عبارت برای سال تولد خود بسازید.

فصل ۲

عددهای حقیقی



با ادامه دادن الگویی که مشاهده می‌کنید بی‌شمار عدد حقیقی مثبت ساخته می‌شود. ولی این اعداد همهٔ اعداد حقیقی مثبت نیستند؛ زیرا در این الگو اعدادی مانند $\sqrt{۲}$ و π تولید نمی‌شوند.

عددهای گویا

۱. در هر قسمت، کدام‌یک از چهار کسر سمت راست، بین دو کسر سمت چپ است؟

الف) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \quad \frac{17}{24}, \frac{91}{120}, \frac{87}{120}, \frac{65}{96}$

ب) $\frac{7}{5}, \frac{5}{3}, \quad \frac{23}{15}, \frac{51}{45}, \frac{113}{75}, \frac{119}{90}$

۲. کدام‌یک از عبارت‌های زیر یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

الف) دو عدد گویای کمتر از یک که مجموع آنها برابر ۲ باشد.

ب) کوچک‌ترین عدد گویای مثبت

ج) یک میلیون عدد گویا بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$

۳. ابتدا هر جفت از کسرهای زیر را با هم مقایسه کنید. سپس کسری بین هر دو کسر بیابید که مخرج آن ۲۴ باشد.

الف) $\frac{3}{7}, \frac{2}{5}$

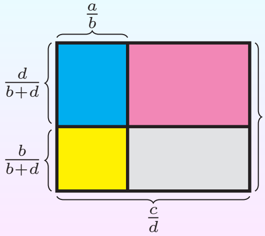
ب) $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}$

۴. ثابت کنید که اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو عدد مثبت باشند و $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$، آنگاه $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

مریم و ملیحه این مسئله را با راه‌حل‌های زیر حل کرده‌اند. ابتدا راه‌حل این دو نفر را بررسی کنید. سپس راه‌حل دیگری ارائه دهید.

راه‌حل مریم

در مستطیل روبه‌رو، مجموع مساحت دو ناحیهٔ آبی و زرد برابر $\frac{a}{b}$ است. مجموع مساحت ناحیه‌های آبی، زرد و صورتی برابر $\frac{a+c}{b+d}$ می‌باشد. مجموع مساحت چهار ناحیهٔ آبی، زرد، صورتی و خاکستری برابر است با $\frac{c}{d}$. بنابراین واضح است که: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.



راه‌حل ملیحه

فرض کنید در یک لیوان، a گرم نمک در b گرم آب حل شده باشد و در یک کاسه، c گرم نمک در d گرم آب محلول باشد. اگر این دو محلول را داخل یک پارچ، روی‌هم بریزیم، آنگاه محلول داخل پارچ، $a+c$ گرم نمک و $b+d$ گرم آب دارد. حال فرض کنید غلظت محلول داخل لیوان کمتر از غلظت محلول داخل کاسه باشد (به‌عبارتِ‌دیگر آب‌نمک داخل کاسه شورتر از آب‌نمک داخل لیوان باشد یعنی $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$). دراین‌صورت غلظت محلول داخل پارچ از غلظت محلول داخل لیوان بیشتر و از غلظت محلول داخل کاسه کمتر است. یعنی:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

۵. تلاش کنید که بین دو عدد زیر، عددی بیابید.

$$\frac{۲۳}{۹۹}, \qquad \frac{۲۳۲۳۲۳}{۹۹۹۹۹۹}$$

۶. فرض کنید c و d دو عدد طبیعی باشند. تمام مقادیر c و d را بیابید به‌طوری‌که $\frac{۵}{۷} < \frac{c}{d} < \frac{۷}{۱۰}$ و $d < ۲۰$ باشد.

۷. دانا و مانا می‌خواستند عدد $۰/\overline{۷۲}$ را به‌صورت کسری بنویسند که صورت آن صحیح و مخرجش طبیعی باشد. راه‌حل هریک را بررسی کنید.

راه‌حل دانا

چون همهٔ ارقام بعد از ممیزِ عدد $۰/۷۲۷۲۷۲\cdots$ داخل دورهٔ گردش قرار دارند، کارمان ساده‌تر است. ابتدا رقم‌های عدد $۰/۷۲۷۲۷۲\cdots$ را طوری جابه‌جا می‌کنیم که ارقام داخل دورهٔ گردش حداقل یک‌بار قبل از ممیز ظاهر شوند. پس عدد $۷۲/۷۲۷۲۷۲\cdots$ که ۱۰۰ برابر $۰/۷۲۷۲۷۲\cdots$ است، به‌دست می‌آید. حال با

استفاده از $۰/۷۲۷۲۷۲\cdots$، $۷۲/۷۲۷۲۷۲\cdots$ و عمل تفریق، ارقام بعد از ممیز را نابود می‌کنیم:

$$۷۲/۷۲۷۲۷۲\cdots - ۰/۷۲۷۲۷۲\cdots = ۷۲.$$

یعنی ۹۹ برابر $۰/۷۲۷۲۷۲\cdots$ مساوی با ۷۲ است. پس $۰/۷۲۷۲۷۲\cdots$ برابر است با $\frac{۷۲}{۹۹}$.

راه‌حل مانا

$$a = ۰/\overline{۷۲} \Longrightarrow ۱۰۰a = ۷۲/\overline{۷۲}$$

$$\Longrightarrow ۱۰۰a - a = ۷۲/\overline{۷۲} - ۰/\overline{۷۲}$$

$$\Longrightarrow ۹۹a = ۷۲$$

$$\Longrightarrow a = \frac{۷۲}{۹۹}.$$

۸. هریک از اعداد زیر را به کسری تبدیل کنید که صورت آن صحیح و مخرجش طبیعی باشد.

الف) $۰/\overline{۷}$ ب) $۱/\overline{۳}$ ج) $۱۲/\overline{۲۳}$ د) $-۲/\overline{۱۶۸}$

۹. دانا و مانا این‌بار می‌خواستند عدد $۱/۳۲\overline{۵۷}$ را به‌صورت کسری بنویسند که صورت آن صحیح و مخرجش طبیعی باشد. راه‌حل هریک را بررسی کنید.

راه‌حل دانا

چون همهٔ ارقام بعد از ممیزِ عدد $۱/۳۲۵۷۵۷۵۷\cdots$ داخل دورهٔ گردش قرار ندارند، پس کارمان سخت‌تر است؛ چون نمی‌توانیم با یک‌بار جابه‌جا کردن رقم‌ها، رقم‌های داخل دورهٔ گردش را نابود کنیم، بنابراین ابتدا رقم‌های عدد $۱/۳۲۵۷۵۷۵۷\cdots$ را

طوری جابه‌جا می‌کنیم که فقط ارقام داخل دورهٔ گردش، بعد از ممیز بمانند. پس عدد ۱۳۲/۵۷۵۷۵۷۰۰۰ که ۱۰۰ برابر ۱/۳۲۵۷۵۷۵۷۰۰۰ است، به‌دست می‌آید. سپس رقم‌های ۱۳۲/۵۷۵۷۵۷۰۰۰ را طوری جابه‌جا می‌کنیم که ارقام داخل دورهٔ گردش حداقل یک‌بار قبل از ممیز ظاهر شوند. بنابراین عدد ۱۳۲۵۷/۵۷۵۷۵۷۰۰۰ که ۱۰۰۰۰ برابر ۱/۳۲۵۷۵۷۵۷۰۰۰ است، به‌دست می‌آید. حال با استفاده از ۱۳۲۵۷/۵۷۵۷۵۷۰۰۰، ۱۳۲/۵۷۵۷۵۷۰۰۰ و عمل تفریق، ارقام بعد از ممیز را نابود می‌کنیم:

$$۱۳۲۵۷/۵۷۵۷۵۷\cdots - ۱۳۲/۵۷۵۷۵۷\cdots = ۱۳۱۲۵.$$

یعنی ۹۹۰۰ برابر ۱/۳۲۵۷۵۷۵۷۰۰۰ مساوی با ۱۳۱۲۵ است. پس ۱/۳۲۵۷۵۷۵۷۰۰۰ برابر است با $\frac{۱۳۱۲۵}{۹۹۰۰}$.

راه‌حل مانا

$$a = ۱/۳۲\overline{۵۷} \Longrightarrow ۱۰۰a = ۱۳۲/\overline{۵۷}$$
$$\Longrightarrow ۱۰۰۰۰a = ۱۳۲۵۷/\overline{۵۷}$$
$$\Longrightarrow ۱۰۰۰۰a - ۱۰۰a = ۱۳۲۵۷/\overline{۵۷} - ۱۳۲/\overline{۵۷}$$
$$\Longrightarrow ۹۹۰۰a = ۱۳۱۲۵$$
$$\Longrightarrow a = \frac{۱۳۱۲۵}{۹۹۰۰}.$$

۱۰. هریک از اعداد زیر را به کسری تبدیل کنید که صورت آن صحیح و مخرجش طبیعی باشد.

الف) $۴/۵\overline{۷۱}$ ب) $۶۳/۰\overline{۷}$ ج) $۶۳/۰\overline{۷۱۲}$ د) $-۲/\overline{۱۱۶۸}$

● باتوجه‌به تعریف «طول دورهٔ گردش» که در زیر آمده است، به پرسش‌های ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴ و ۱۵ پاسخ دهید.

طول دورهٔ گردش

تعداد ارقام درون دورهٔ گردش نمایش اعشاری یک عدد را «طول دورهٔ گردش» می‌نامیم. برای مثال، طول دورهٔ گردش $۳/۴\overline{۵۶۷}$ برابر ۳ است.

۱۱. طول دورهٔ گردش هریک از کسرهای زیر را به‌دست آورد. می‌توانید از ماشین‌حساب کمک بگیرید.

الف) $\frac{۱}{۱۱}$ ب) $\frac{۵}{۲۲}$ ج) $\frac{۱}{۱۷}$ د) $\frac{۲}{۲۱}$

هـ) $\frac{۲۰}{۳۷}$ و) $\frac{۱۲}{۴۱}$ ز) $\frac{۹}{۱۰۱}$ ح) $\frac{۴۱}{۳۳۳}$

۱۲. الف) عددی با طول دورهٔ گردش ۳ بنویسید که اگر آن را با $\frac{۴۱}{۳۳۳}$ جمع بزنیم طول دورهٔ گردش حاصل‌جمع، برابر ۳ باشد.

ب) عددی با طول دورهٔ گردش ۳ بنویسید که اگر آن را با $\frac{۴۱}{۳۳۳}$ جمع بزنیم طول دورهٔ گردش حاصل‌جمع، برابر ۱ باشد.

ج) عددی با طول دورهٔ گردش ۳ بنویسید که اگر آن را با $\frac{۴۱}{۳۳۳}$ جمع بزنیم حاصل‌جمع، دورهٔ گردش نداشته باشد.

۱۳. الف) طول دورهٔ گردش کسر $\frac{۱}{۷}$ را بیابید.

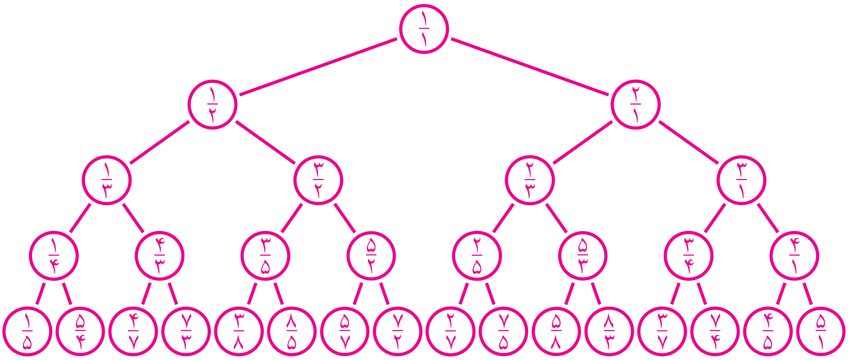
ب) نمایش اعشاری کسرهای $\frac{۱}{۷}$، $\frac{۲}{۷}$، $\frac{۳}{۷}$، ...، $\frac{۶}{۷}$ را به‌کمک ماشین‌حساب به‌دست آورید. ارقام داخل دورهٔ گردش این کسرها چه ارتباطی باهم دارند؟

۱۴. الف) طول دورهٔ گردش کسر $\frac{۱}{۱۳}$ را بیابید.

ب) نمایش اعشاری کسرهای $\frac{۱}{۱۳}$، $\frac{۲}{۱۳}$، $\frac{۳}{۱۳}$، ...، $\frac{۱۲}{۱۳}$ را به‌کمک ماشین‌حساب به‌دست آورید. ارقام داخل دورهٔ گردش این کسرها چه ارتباطی باهم دارند؟

۱۵. **پروژه.** اگر p عددی اول باشد، برای چه pهایی طول دورهٔ گردشِ عدد $\frac{۱}{p}$ برابر $p-۱$ است؟

۱۶. پروژه. فرض کنید الگوی زیر با رابطهٔ $\frac{n}{m} \to \frac{n}{m+n},\ \frac{n+m}{m}$ ادامه پیدا کرده باشد.



اگر اعداد این الگو را به‌صورت زیر، پشت‌سرهم بنویسیم، الگویی ساخته می‌شود که نام آن دنبالهٔ کالکین‌ـ ویلف[۱] است.

$$\frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۱}, \frac{۱}{۳}, \frac{۳}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۱}, \frac{۱}{۴}, \frac{۴}{۳}, \frac{۳}{۵}, \frac{۵}{۲}, \frac{۲}{۵}, \frac{۵}{۳}, \frac{۳}{۴}, \frac{۴}{۱}, \ldots$$

الف) ثابت کنید در دنبالهٔ کالکین‌ـ ویلف هر عدد گویای مثبت دقیقاً یک‌بار ظاهر می‌شود.

ب) آیا می‌توانید روش دیگری برای تولید همهٔ اعداد گویای مثبت بیابید که در آن هر عدد گویای مثبت دقیقاً یک‌بار ظاهر شود؟ (اگر دنبالهٔ شما واقعاً با دنبالهٔ کالکین‌ـ ویلف متفاوت باشد، در تمام دنیا نام شما را به‌خاطر عملکرد این دنباله خواهند شناخت.)

اعداد حقیقی

۱. نمایش اعشاری اعداد سمت راست چه تفاوتی با نمایش اعشاری اعداد سمت چپ دارند؟

■ ۰/۰۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲...

■ ۰/۱۰۱۱۰۰۱۱۱۰۰۰۱۱۱۱...

■ ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳...

• ۰/۱۲۱۲۱۲۱۲۱۲۱۲۱۲۱۲۱۲...

• ۲/۱۲۳۴۴۴۴۴۴۴۴۴۴۴۴۴۴...

• ۱/۱۲۳۴۱۰۱۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰...

[۱] Calkin-Wilf sequence

۲. خوارزمی در کتاب «الجبر و المقابله» دربارهٔ محاسبهٔ محیط دایره نوشته است: «بهترین راه این است که قطر را در $\frac{۲۲}{۷}$ ضرب کنیم. این سریع‌ترین و ساده‌ترین روش است. خدای بزرگ بهتر می‌داند.»

در زیر، عدد π تا سی رقم اعشار نوشته شده است.

۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۸

به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) اگر در محاسبهٔ محیط دایره به‌جای π از $\frac{۲۲}{۷}$ استفاده کنیم، چقدر خطا کرده‌ایم؟

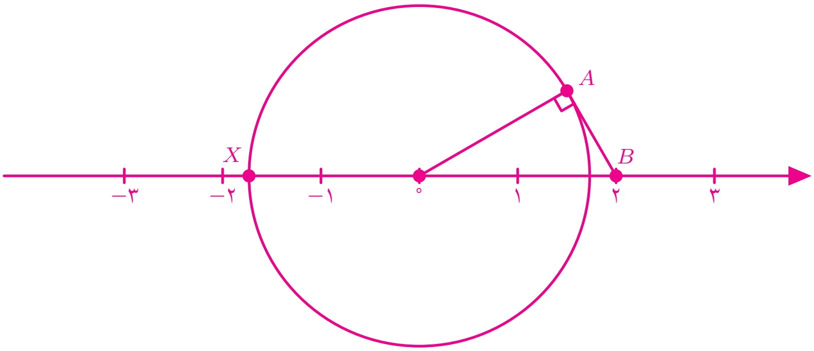
ب) اگر در محاسبهٔ محیط دایره به‌جای π از $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ استفاده کنیم، چقدر خطا کرده‌ایم؟

۳. مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$ را با ماشین‌حساب به‌دست آورید.

الف) کسری با صورت و مخرج طبیعی، مانند $\frac{m}{n}$، مثال بزنید که $۰ < \sqrt{۲} - \frac{m}{n} < ۰/۰۰۱$.

ب) کسری با صورت و مخرج طبیعی، مانند $\frac{m}{n}$ که n نسبت به ۲ و ۵ اول باشد، مثال بزنید که $۰ < \sqrt{۲} - \frac{m}{n} < ۰/۰۰۰۰۰۱$.

۴. الف) در شکل زیر، طول پاره‌خط AB برابر ۱ واحد است. نقطهٔ X نشان‌دهندهٔ چه عددی است؟



ب) فرض کنید $m \in \mathbb{Z}$، $n \in \mathbb{N}$ و n نسبت به ۲ و ۵ اول است. m و n را طوری بیابید که $۰ < \frac{m}{n} - X < ۰/۰۰۰۰۰۱$. این مسئله چند جواب دارد؟

۵. مجموعهٔ اعداد حقیقی را به دو زیرمجموعه که هریک بی‌شمار عضو دارند، اِفراز کنید.

۶. مجموعهٔ اعداد طبیعی را به دو زیرمجموعه که هریک بی‌شمار عضو دارند، اِفراز کنید و هر زیرمجموعه را با نمادهای ریاضی نمایش دهید.

۷. الف) مجموعهٔ $\mathbb{N}$ را به سه زیر مجموعهٔ A، B و C که هریک بی‌شمار عضو دارند، اِفراز کرده‌ایم. اگر A، B و C به‌صورت زیر باشند، آنگاه جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$A = \{۳x \mid x \in \bigcirc\},\ B = \{۳x - \bigcirc \mid x \in \mathbb{N}\},\ C = \{\bigcirc x + \bigcirc \mid x \in \bigcirc\}$$

ب) اگر $x, y \in B$، آیا می‌توان گفت $x + y$ عضو کدام مجموعه است؟

۸. مجموعهٔ اعداد صحیح را به پنج زیرمجموعه که هر کدام بی‌شمار عضو دارند، اِفراز کنید و هر زیرمجموعه را با نمادهای ریاضی نمایش دهید.

۹. فرض کنید مجموعهٔ اعداد صحیح به سه زیرمجموعهٔ A، B و C که هریک بی‌شمار عضو دارند، اِفراز شده باشند. اگر $A = \{۶k + ۲ \mid k \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{۶k - ۱ \mid k \in \mathbb{N}\}$، کدام‌یک از عددهای زیر عضو مجموعهٔ C است؟

الف) -۱۱ ب) -۱۹ ج) -۳۲ د) ۵۳

۱۰. ریاضی‌دان‌ها مجموعهٔ اعداد گنگ را به دو زیرمجموعه اِفراز کرده‌اند. دراین‌باره تحقیق کنید.

قدرمطلق و محاسبهٔ تقریبی

۱. حاصل هریک از عبارت‌های زیر را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

الف) $-۱ - |۱ - |-۱||$ ب) $|۲\sqrt{۵} - \sqrt{۵}|$

ج) $|۲ - \sqrt{۳}| - \sqrt{۳}|۱ - \sqrt{۳}|$ د) $|۱۰ - \pi^۲|$

ه) $|(\sqrt{۲})^۳ - (\sqrt{۳})^۲| - \sqrt{(\sqrt{۲} - \sqrt{۳})^۲}$

۲. هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

الف) $\{|x| \mid x \in \mathbb{Z}, -۵ \leqslant x \leqslant ۵\}$

ب) $\{|x-۲| \mid x^۲ \in \mathbb{Z}, -۴ \leqslant x \leqslant ۳\}$

ج) $\{x^۲ - |-x| \mid x \in \mathbb{Z}, -۲ \leqslant x \leqslant ۴\}$

د) $\{(-۱)^{x+۳}(x-|x|) \mid x \in \mathbb{Z}, -۳ \leqslant x \leqslant ۴\}$

۳. کدام مجموعه‌ها با هم برابرند؟ آنها را مشخص کنید.

الف) $\{x|x| \mid x \in \mathbb{Z}, -۳ \leqslant x \leqslant ۲\}$

ب) $\{x(x+۱) \mid x \in \mathbb{N}, ۲ \leqslant x \leqslant ۶\}$

ج) $\{(-۱)^x|x-۴|^۲ \mid x \in \mathbb{Z}, ۱ \leqslant x \leqslant ۶\}$

د) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x(x+۲) = ۰\}$

ه) $\{x^۳ - |x| \mid x \in \mathbb{Z}, -۱ \leqslant x \leqslant ۱\}$

و) $\{(-۱)^{x+۴}x^۲ \mid x \in \mathbb{Z}, -۳ \leqslant x \leqslant ۲\}$

ز) $\{-۹, ۴, -۱, ۰, ۱, -۴\}$

ح) $\{x^۲ - |x| \mid x \in \mathbb{Z}, ۲ \leqslant x \leqslant ۶\}$

ط) $\{x^۲ + |x| \mid x \in \mathbb{Z}, -۶ \leqslant x \leqslant -۲\}$

۴. فرض کنید $m \in \mathbb{Z}$، $n \in \mathbb{N}$ و n نسبت به ۲ و ۵ اول است. m و nای بیابید که

$$۰ < \frac{m}{n} - |\sqrt{۲} - \sqrt{۳}| < ۰/۰۰۰۰۰۱.$$

می‌توانید برای محاسبهٔ مقدار تقریبی $\sqrt{۳} - \sqrt{۲}$ از ماشین‌حساب کمک بگیرید.

فصل ۳
استدلال و اثبات در هندسه

تصویر بالا برشی از صدف یک حلزون را نشان می‌دهد. در این برش، خانه‌های کوچکی را می‌بینید که به تدریج بزرگ شده‌اند. اما در روند بزرگ شدن این خانه‌ها، اجزاء طوری متناسب باقی مانده‌اند که همهٔ این خانه‌ها تقریباً مشابه یکدیگرند.

گفت‌وگو

در کلاس هندسهٔ مدرسهٔ علامه حلّی

دانش‌آموز: ببخشید یک سؤال دارم که چند وقت است ذهنم را مشغول کرده است. ما برای چه باید هندسه بخوانیم؟

معلم: یعنی قبول نداری هندسه خواندن مفید است؟

دانش‌آموز: بله. قبول دارم تاحدّی هندسه خواندن مفید است؛ اما چرا باید این همه مسائل پیچیدهٔ هندسه را حل کنیم؟

معلم: باید خودتان را برای آینده آماده کنید. این مسائل هندسه‌ای که می‌بینید، در آینده برایتان بسیار کاربردی است. برای مثال اگر مهندس طراحی ساختمان بشوید، نیاز به دانش بسیار بالای هندسه دارید. پس باید هندسه خواند.

دانش‌آموز: ببخشید، اما برادر من مهندس عمران است و خواهرم مهندس معمار. من تا حالا ندیده‌ام که آنها این‌جور مسائل هندسه را حل کنند؛ یا در انجام دادن پروژه‌هایشان این قضیه‌های هندسه را به‌کار ببرند.

معلم: [درحالی‌که لبخند معنی داری می زد] یعنی آنها اصلاً خط و دایره و منحنی نمی‌کشند؟!

دانش‌آموز: یعنی اگر دایره و منحنی بکشند با هندسه سروکار دارند؟

معلم: بله.

دانش‌آموز: پس با این استدلال یعنی همهٔ نقاش‌ها و هنرمندان هم هندسه‌دان هستند!

معلم: بله.

دانش‌آموز: من حتماً امتحان می‌کنم. اگر هنرمندان و نقاش‌ها هندسه‌دان باشند باید بتوانند به‌سادگی مسائل معمولی هندسهٔ این کتاب را حل کنند.

درحالی‌که به نظر بحث تمام شده بود، دوباره همان دانش آموز تکرار کرد: «من حتماً امتحان می‌کنم.»

در کلاس هندسهٔ مدرسهٔ فرزانگان

دانش‌آموز: ببخشید یک سؤال دارم که چند وقت است ذهنم را مشغول کرده است. ما برای چه باید هندسه بخوانیم؟

معلم: هندسه تمرینی است برای رشد ذهن. وقتی دربارهٔ یک مسئلهٔ هندسه فکر می‌کنیم در واقع ذهنمان را مجبور می‌کنیم که از یک سری قواعد و اصول ساده، بتواند نتایج پیچیده‌تری را به‌دست آورد.

دانش‌آموز: این مسئله در مورد ریاضی خواندن هم درست است؟

معلم: بله.

دانش‌آموز: پس چرا هندسه می‌خوانیم؟ چرا هندسه را از کتاب‌های ریاضی حذف نمی‌کنیم و فقط ریاضی نمی‌خوانیم؟

معلم: در واقع در کمتر جایی از ریاضی است که اینقدر اصول و قواعد واضح باشد و از پایه‌های مشخصی نتایج پیچیده و خیره کننده بگیریم. یعنی قبول نداری هندسه خواندن مفید است؟

دانش‌آموز: بله. قبول دارم تاحدّی هندسه خواندن مفید است. اما چرا باید این همه مسائل پیچیدهٔ هندسه را حل کنیم؟

معلم: باید خودتان را برای آینده آماده کنید. این مسائل هندسه‌ای که می‌بینید در آینده برایتان تقریباً کاربردی ندارند؛ اما در فرایند آموزشی، رشد ذهنی حاصل از هندسه لازم است. پس باید هندسه خواند.

دانش‌آموز درحالی‌که دیگر چیزی نگفت با خودش فکر می‌کرد که چطور می‌توانم درستی این ادعا را نشان دهم. شاید فعلاً باید اعتماد کنم.

در کلاس هندسهٔ مدرسهٔ شهید بهشتی

دانش‌آموز: ببخشید یک سؤال دارم که چند وقت است ذهنم را مشغول کرده است. ما برای چه باید هندسه بخوانیم؟

معلم: هندسه! یعنی قبول نداری هندسه خواندن مفید است؟

دانش‌آموز: [درحالی‌که سرش را می خاراند] اگر توهین نباشد، «نه»؛ قبول ندارم.

معلم: خب. به نظر تو به‌جای هندسه خواندن، خواندن چه چیزی مفید است؟

دانش‌آموز: [با تردید] به‌جای هندسه؟

دانش‌آموز لحظه‌ای فکر کرد. اگر معلم گفته بود «خواندن چه چیزی مفید است»، او می‌توانست لیستی از مطالب مهم و ضروری زندگی را ارائه دهد. اما معلمشان گفته بود «به‌جای هندسه خواندن».

دانش‌آموز: باید ببینم که هندسه خواندن قرار است چه مهارتی را در من رشد دهد؟

معلم: مثلاً وقتی هندسه می‌خوانیم یاد می‌گیریم که چطور متن‌ها را تبدیل به شکل کنیم.

دانش‌آموز: این مهارت، در آیندهٔ من نقش دارد؟

معلم: به نظر من، بله.

معلم دیگر چیزی نگفت و با خودش فکر کرد که چطور می‌تواند درستی این ادعا را نشان دهد.

بخشی از کتاب «دربارهٔ استدلال‌های هندسی»

یک روز در ابتدای سال تحصیلی، به گفت‌وگوی دو دانش‌آموز سیزده ساله گوش می‌کردم. آنها دربارهٔ درس‌های تازه‌ای که داشتند، بحث می‌کردند. یکی از آنها از درس هندسه با شگفتی یاد می‌کرد. او می‌گفت: «درس بسیار عجیبی است، معلم وارد کلاس می‌شود، دو مثلث برابر روی تخته رسم می‌کند و در تمام طول ساعت تلاش می‌کند، برابری آنها را برای ما ثابت کند. هیچ‌کس نمی‌فهمد این تلاش بیهوده دربارهٔ مطلبی که واضح است، چه لزومی دارد؟!»

آشنایی با اثبات در هندسه

قضیه

بسیاری از مسائل ریاضی، فرض و حکم دارند. فرض، داده‌هایی از مسئله است که درستی آنها را می‌پذیریم. حکم، موضوعی است که باید درست یا نادرست بودنش را بررسی کنیم.

اگر به‌کمک فرض‌های مسئله و حقایقی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، توانستیم درست بودن حکم را نتیجه بگیریم، می‌توانیم به آن مسئله قضیه بگوییم.

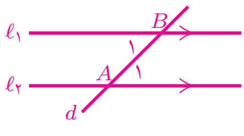
معمولاً ریاضی‌دان‌ها قضیه‌هایی را که در اثبات مسائل کاربرد فراوان دارند، نام‌گذاری می‌کنند.

چند قضیهٔ پرکاربرد

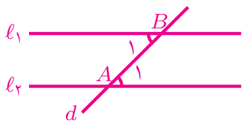
قضیه‌های زیر در حل مسائل هندسه کاربرد فراوان دارند. فرض و حکم هریک را بنویسید.

۱. **قضیهٔ زاویه‌های متقابل‌به‌رأس.** زاویه‌های متقابل‌به‌رأس برابرند.

۲. الف) **قضیهٔ خطوط موازی و مورب.** اگر خط d دو خط موازی ℓ_1 و ℓ_2 را قطع کند و زاویه‌های A_1 و B_1 را پدید آورد، آنگاه $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$.



ب) **عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب.** اگر خط d دو خط ℓ_1 و ℓ_2 را قطع کند و زاویه‌های A_1 و B_1 پدید آیند به‌طوری‌که $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$، آنگاه ℓ_1 و ℓ_2 موازی‌اند.



۳. **قضیهٔ مجموع زاویه‌های مثلث.** مجموع زاویه‌های هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

۴. **قضیهٔ زاویهٔ خارجی مثلث.** اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی در یک مثلث دلخواه برابر است با مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی غیرمجاورش.

۵. **اصل[1] ض‌زض.** اگر دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از مثلثی با دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از مثلثی دیگر برابر باشند، آنگاه این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۶. **قضیهٔ زض‌ز.** اگر دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلثی دیگر برابر باشند، آنگاه این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۷. **قضیهٔ ض‌ض‌ض.** اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلثی دیگر برابر باشد، آنگاه این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۸. **قضیهٔ ززض.** اگر دو زاویه و ضلع غیر بین آنها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع غیر بین آنها از مثلثی دیگر، نظیر به نظیر برابر باشند، آنگاه این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۹. الف) **قضیهٔ عمودمنصّف.** هر نقطه روی عمودمنصّفِ یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط فاصلهٔ یکسان دارد.

ب) **عکس قضیهٔ عمودمنصّف.** اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط فاصلهٔ یکسان داشته باشد، این نقطه روی عمودمنصّف پاره‌خط قرار دارد.

۱۰. الف) **قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین.** در هر مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های پای ساق باهم برابرند.

ب) **عکس قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین.** اگر مثلثی دو زاویهٔ برابر داشته باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است.

۱۱. الف) **قضیهٔ فیثاغورس.** در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع اندازهٔ وتر با مجموع مربع‌های اندازهٔ دو ضلع دیگر برابر است.

---
[1] در ریاضیات اصل، عبارتی است که درستی آن بدون استدلال پذیرفته می‌شود.

ب) **عکس قضیهٔ فیثاغورس.** اگر در مثلثی مربع اندازهٔ یک ضلع با مجموع مربع‌های اندازهٔ دو ضلع دیگر برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

۱۲. **قضیهٔ وتر و یک ضلع.** اگر وتر و یک ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای دیگر برابر باشند، آنگاه این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۱۳. الف) **قضیهٔ نیم‌ساز.** هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه فاصلهٔ یکسان دارد.

ب) **عکس قضیهٔ نیم‌ساز.** اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه فاصلهٔ یکسان داشته باشد، این نقطه روی نیم‌ساز آن زاویه قرار دارد.

۱۴. **قضیهٔ شعاع و مماس.** شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است.

۱۵. **قضیهٔ کمان و وتر.** وترهای نظیر دو کمان برابر، برابرند و برعکس.

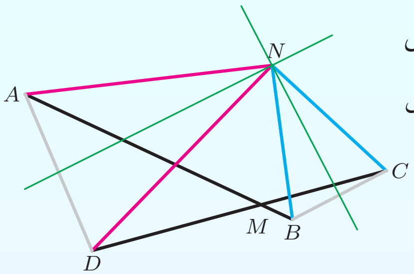
۱۶. **قضیهٔ زاویهٔ محاطی.** اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی با نصف کمان روبه‌رو به آن زاویه برابر است.

مسائل

۱. دو پاره‌خط برابر AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کرده‌اند. عمودمنصّف‌های دو پاره‌خط AD و BC یکدیگر را در نقطهٔ N قطع کرده‌اند. اگر نقطهٔ N درون زاویهٔ AMC باشد، آنگاه ثابت کنید MN نیم‌ساز زاویهٔ AMC است.

بُرنا با استفاده از قضیه‌هایی که در بخش قبل آمده، این مسئله را حل کرده است. راه‌حل بُرنا را بررسی کنید. شما نیز در حل مسئله‌های بعدی (مانند راه‌حل بُرنا) نام هر قضیه‌ای را که از آن استفاده می‌کنید، ذکر نمایید.

راه‌حل بُرنا



چون نقطهٔ N روی عمودمنصّف‌های پاره‌خط‌های AD و BC قرار دارد، پس بنابه **قضیهٔ عمودمنصّف** داریم:

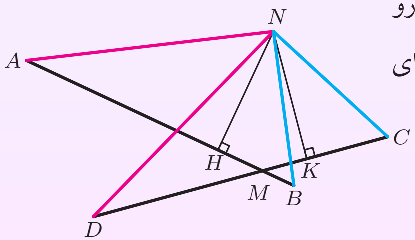
$$AN = DN \ (۱), \ BN = CN \ (۲)$$

حال می‌توانیم ثابت کنیم دو مثلث ABN و CDN هم‌نهشت‌اند.

$$\left.\begin{array}{ll} AB = CD & \text{فرض مسئله} \\ AN = DN & \text{بنابه (۱)} \\ BN = CN & \text{بنابه (۲)} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{قضیهٔ ضضض}} \overset{\triangle}{ABN} \cong \overset{\triangle}{CDN}$$

$$\xRightarrow{\text{بقیهٔ اجزای متناظر}} \left\{\begin{array}{l} A\hat{B}N = D\hat{C}N \ (۳) \\ N\hat{A}B = N\hat{D}C \\ B\hat{N}A = C\hat{N}D \end{array}\right.$$

برای اینکه نشان دهیم MN نیمساز زاویهٔ AMC است از عکس قضیهٔ نیمساز استفاده می‌کنیم. برای این کار کافی است ثابت کنیم نقطهٔ N از دو ضلع زاویهٔ AMC فاصلهٔ یکسان دارد.



بنابراین ثابت می‌کنیم که در شکل روبه‌رو دو پاره‌خط NH و NK برابرند. برای این کار نشان می‌دهیم:

$$\triangle BNH \cong \triangle CNK.$$

چون $BN = CN$ (بنابه ۱)، $A\hat{B}N = D\hat{C}N$ (بنابه ۲) و $N\hat{H}B = N\hat{K}C$ (هر دو قائمه‌اند)، پس بنابه قضیهٔ ززض، دو مثلث BNH و CNK هم‌نهشت‌اند. در نتیجه $NH = NK$.

۲. روی ضلع‌های مثلث ABC و در بیرون آن، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع MAB، NBC و PAC رسم شده‌اند. ثابت کنید سه پاره‌خط MC، NA و PB برابرند.

۳. در مثلث ABC نیمساز زاویه‌های A و B یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کرده‌اند. ثابت کنید اگر از نقطهٔ O خطی موازی با AB رسم شود و ضلع‌های AC و BC را به‌ترتیب در D و E قطع کند، آنگاه اندازهٔ پاره‌خط DE با مجموع اندازه‌های AD و BE برابر است.

۴. چرا در قضیهٔ «ززض»، از عبارت «نظیر به نظیر» استفاده شده ولی در قضیهٔ «زضز» از عبارت «نظیر به نظیر» استفاده نشده است؟

۵. الف) درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید.

اگر دو ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه با دو ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر برابر باشند، آنگاه این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

ب) عبارت بالا چه تفاوتی با قضیهٔ وتر و یک ضلع دارد؟

۶. در چهارضلعی $ABCD$ عمودمنصّف‌های ضلع‌های AB و CD یکدیگر را روی ضلع AD قطع می‌کنند و $B\hat{A}D = C\hat{D}A$. ثابت کنید دو پاره‌خط AC و BD نیز برابرند.

۷. روی ربع دایرهٔ AOB امتداد دو وتر مساوی AM و BN یکدیگر را در نقطهٔ D قطع می‌کنند. ثابت کنید اندازهٔ $A\hat{O}D$ برابر ۴۵ درجه است.

۸. سه نقطهٔ A، B و C روی یک دایره چنان قرار دارند که دو وتر AB و BC برابرند. نقطهٔ D را روی این دایره چنان انتخاب می‌کنیم که $ABCD$ یک چهارضلعی باشد. ثابت کنید هر نقطه روی BD از دو پاره‌خط AD و CD فاصلهٔ یکسان دارد.

۹. در یک دایره قطر RS، عمودمنصّف وتر AB است. نقطهٔ دلخواه P را روی قطر RS در نظر بگیرید. اگر امتداد پاره‌خط‌های AP و BP دایره را به‌ترتیب در نقاط C و D قطع کرده باشند، آنگاه ثابت کنید پاره‌خط‌های AD و BC برابرند؛ همچنین پاره‌خط‌های AC و BD نیز برابرند.

۱۰. چهار نقطهٔ A، B، C و D روی دایره‌ای به قطر $۶\sqrt{۲}$ چنان قرار دارند که $ABCD$ یک چهارضلعی و BD قطر دایره است. اگر AC نیم‌ساز زاویهٔ BAD و طول AD برابر ۱ باشد، آنگاه محیط $ABCD$ چقدر است؟

۱۱. خطی با دو ضلع زاویهٔ xOy در نقطه‌های A و B برخورد کرده است. اگر نیم‌سازهای دو زاویهٔ xAB و yBA باهم در نقطهٔ C برخورد کنند، آنگاه ثابت کنید CO نیم‌ساز زاویهٔ xOy است.

۱۲. ثابت کنید اگر یک ضلع و ارتفاع و میانهٔ وارد بر آن از یک مثلث با اجزاء نظیر از مثلثی دیگر برابر باشند، آنگاه دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۱۳. در مثلث ABC میانهٔ AM را از طرف M به‌اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ N به‌دست آید. ثابت کنید محیط مثلث‌های ABN و ACN برابر است.

هم‌نهشتی مثلث‌ها

۱. باتوجه‌به جملهٔ «در چهارضلعی $ABCD$، دو مثلث ABD و BCD همنهشت‌اند»، مثال‌هایی بیاورید که تساوی‌های قسمت‌های «الف» و «ج» را نقض کند. چرا تساوی قسمت «ب» همواره درست است؟

الف) $A\hat{B}D = C\hat{B}D$
ب) $B\hat{A}D = D\hat{C}B$
ج) $A\hat{B}D = C\hat{D}B$

۲. در چهارضلعی محدب $ABCD$، دو مثلث ABD و ADC همنهشت‌اند. کدام‌یک از عبارت‌های زیر همواره درست است؟ برای هریک از عبارت‌های نادرست، مثالی بیاورید که درستی آنها را نقض کند.

الف) $A\hat{D}C = D\hat{A}B$
ب) $D\hat{A}C = B\hat{D}A$
ج) $A\hat{B}D = D\hat{C}A$
د) $AC = BD$

۳. چهارضلعی مقعر $ABCD$ را در نظر بگیرید. اگر دو مثلث ABD و ADC همنهشت باشند، آنگاه کدام‌یک از عبارت‌های زیر همواره درست است؟ برای هریک از عبارت‌های نادرست، مثالی بیاورید که درستی آنها را نقض کند.

الف) $A\widehat{D}C = D\widehat{A}B$ ب) $A\widehat{D}C = B\widehat{D}A$

ج) $A\widehat{B}C = A\widehat{C}B$ د) $BD = CD$

۴. چهارضلعی $ABCD$ را در نظر بگیرید. اگر سه مثلث ABD، BCD و ACD هم‌نهشت باشند، آنگاه کدام‌یک از عبارت‌های زیر همواره درست است؟ برای هریک از عبارت‌های نادرست، مثالی بیاورید که درستی آنها را نقض کند.

الف) مثلث ABC متساوی‌الساقین است. ب) $ABCD$ مستطیل است.

۵. مثالی بیاورید که درستی جملهٔ زیر را نقض کند.

قطرهای چهارضلعی $ABCD$ یکدیگر را در نقطهٔ E قطع کرده‌اند. اگر دو مثلث AEB و CED هم‌نهشت باشند، آنگاه $\triangle ABC \cong \triangle BCD$.

حل مسئله در هندسه

در حل بسیاری از مسائل این بخش می‌توانید از ایده‌هایی که در راه‌حل‌های داده شده آمده‌اند، کمک بگیرید. توجه کنید که برای حل هیچ‌یک از مسائل این بخش به قضیه‌ای غیر از قضیه‌هایی که در بخش «ابزارهایی برای اثبات» نوشته شده‌اند، نیاز ندارید.

امتداد دادن میانه

۱. در مثلث ABC میانهٔ AM را از طرف M به‌اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ N به‌دست آید. چند جفت مثلث هم‌نهشت می‌توان یافت که رئوس آنها از پنج نقطهٔ A، B، C، M یا N انتخاب شده باشند؟

۲. دو ضلع و میانهٔ وارد بر ضلع سوم یک مثلث با اجزاء نظیر در مثلث دیگر برابرند. ثابت کنید این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

گلرخ مسئلهٔ بالا را به‌صورت زیر حل کرده است. درستی راه‌حل گلرخ را بررسی کنید.

راه‌حل گلرخ

در دو مثلث ABC و MNP داریم:

$$AB = MN,\ \ AC = MP,\ \ AD = MQ,$$

که D و Q به‌ترتیب وسط ضلع‌های BC و NP هستند. کافی است ثابت کنیم $B\widehat{A}C = N\widehat{M}P$. برای این کار، ضلع AD را از طرف D به اندازهٔ خودش ادامه می‌دهیم و نقطهٔ حاصل را E می‌نامیم. ضلع MQ را نیز از طرف Q به‌اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم و نقطهٔ حاصل را R می‌نامیم. بنابه حالت «ض‌زض» دو مثلث ABD و CDE هم‌نهشت‌اند؛ همچنین دو مثلث MNQ و PQR نیز هم‌نهشت هستند. در نتیجه دو مثلث ACE و MPR هم‌نهشت هستند. بنابراین $D\widehat{A}C = Q\widehat{M}P$.

از طرفی

$$B\widehat{A}D = \widehat{E} = \widehat{R} = Q\widehat{M}N.$$

پس $B\widehat{A}C = N\widehat{M}P$.

۳. ثابت کنید اگر طول میانهٔ وارد بر یک ضلع و زاویه‌هایی که این میانه با دو ضلع دیگر می‌سازد از یک مثلث با اجزاء نظیر در مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۴. اگر جملهٔ زیر درست است آن را ثابت کنید و اگر نادرست است مثالی بیاورید که آن را نقض کند.

اگر اندازهٔ یک زاویه و طول میانهٔ رسم شده از آن زاویه از یک مثلث با اجزاء نظیر در مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۵. ثابت کنید اگر در یک مثلث میانه و نیم‌ساز برهم منطبق باشند، آن مثلث متساوی‌الساقین است.

۶. AM میانهٔ مثلث ABC است. نقطه‌های D و E بیرون از مثلث ABC چنان قرار دارند که B و C به‌ترتیب درون زاویه‌های DAC و EAB هستند. اگر دو مثلث ABD و ACE به رأس A متساوی‌الساقین باشند و $ED = ۲AM$، آنگاه ثابت کنید $A\hat{B}C + A\hat{C}B = E\hat{A}D$.

۷. ثابت کنید در هر مثلث، دو سر یک ضلع از میانهٔ وارد بر آن ضلع فاصلهٔ یکسانی دارند.

امتداد دادن یک ضلع، رسم خط موازی و ...

۱. مثلث ABC به رأس A متساوی‌الساقین است. نقطهٔ دلخواه D را روی ضلع AB قرار دهید. ضلع AC را از طرف C به‌اندازهٔ BD امتداد دهید و نقطهٔ حاصل را E بنامید. اگر محل برخورد BC و DE، نقطهٔ F باشد، آنگاه ثابت کنید اندازهٔ دو پاره‌خط DF و EF برابر است.

مصطفی و فرزانه این مسئله را به‌صورت زیر حل کرده‌اند. ابتدا توضیحات راه‌حل‌های این دو نفر را کامل کنید؛ سپس سعی کنید راه‌حل دیگری برای این مسئله بیابید.

راه‌حل مصطفی

ضلع BC را از طرف C به‌اندازهٔ BF امتداد می‌دهیم و نقطهٔ حاصل را G می‌نامیم. چون دو مثلث BDF و CEG در حالت «ض‌زض» هم‌نهشت‌اند، پس اندازهٔ زاویه‌های BFD و CGE برابر است و همچنین $DF = EG$. از طرفی دو زاویهٔ BFD و GFE متقابل‌به‌رأس هستند؛ بنابراین مثلث FEG متساوی‌الساقین است و در نتیجه $DF = EF$.

راه‌حل فرزانه

BC را از طرف C امتداد می‌دهیم. سپس از نقطهٔ E خطی موازی با AD رسم می‌کنیم تا امتداد BC را در نقطهٔ P قطع کند. اکنون چون دو زاویهٔ $A\hat{B}C$ و $C\hat{P}E$ برابرند و $A\hat{C}B$ و $P\hat{C}E$ متقابل‌به‌رأس هستند، نتیجه می‌شود $EP = EC$. بنابراین دو مثلث BDF و PEF هم‌نهشت‌اند؛ پس $DF = EF$.

۲. در مثلث ABC از وسط ضلع BC خطی بر نیم‌ساز زاویهٔ A عمود شده است که اضلاع (یا امتداد اضلاع) AB و AC را به‌ترتیب در نقاط E و F قطع کرده است. ثابت کنید $BE = CF$.

۳. ثابت کنید اگر یک زاویهٔ حاده و مجموع اضلاع این زاویه از یک مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویهٔ حاده و مجموع اضلاع این زاویه از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۴. فرض کنید یک زاویه و یکی از ضلع‌های آن زاویه از یک مثلث با اجزاء نظیر از مثلث دیگر برابر باشند. ثابت کنید اگر مجموع دو ضلع دیگر این دو مثلث باهم برابر باشند، آنگاه این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۵. اگر دو زاویه و محیط یک مثلث با دو زاویه و محیط مثلثی دیگر برابر باشند، ثابت کنید این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۶. نقطهٔ M روی ضلع AC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC قرار دارد. نقطهٔ N را روی امتداد BC (از طرف C) چنان انتخاب می‌کنیم که $BM = NM$. ثابت کنید $AM = CN$.

۷. سه نقطهٔ A، B و C دایره‌ای را به سه کمان برابر تقسیم کرده‌اند و M نقطه‌ای دلخواه روی کمان AC است. ثابت کنید وتر MB با مجموع وترهای MA و MC برابر است.

۸. در مربع $ABCD$ نقطه E روی ضلع CD قرار دارد. اگر F روی ضلع BC چنان قرار داشته باشد که AF نیم‌ساز زاویهٔ BAE شود، آنگاه ثابت کنید $BF + DE = AE$.

۹. در مثلث ABC زاویهٔ C قائمه است. روی اضلاع AC و BC مربع‌های $ACMN$ و $BCPQ$ ساخته شده است. اگر از N و Q به‌ترتیب عمودهای NH و QK بر امتداد AB رسم شوند، آنگاه ثابت کنید $NH + QK = AB$.

۱۰. در چهارضلعی $ABCD$ سه ضلع AB، BC و CD برابرند. اگر $A\hat{B}C = ۷۰^\circ$ و $B\hat{C}D = ۱۷۰^\circ$، آنگاه اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{A}D$ چند درجه است؟

ارغوان، سمن، نرگس و شقایق این مسئله را به‌صورت زیر حل کرده‌اند. ابتدا توضیحات راه‌حل هریک را کامل کنید. سپس سعی کنید این مسئله را با راه‌حل دیگری حل نمایید.

راه‌حل ارغوان

نقطهٔ M را درون زاویهٔ ABC چنان انتخاب می‌کنیم که مثلث ABM متساوی‌الاضلاع باشد. چون $BM = BC$، پس $BCM = ۸۵^\circ$. بنابراین دو مثلث BCM و DCM در حالت «ض‌زض» هم‌نهشت‌اند. بنابراین مثلث AMD متساوی‌الساقین است و چون $A\widehat{M}D = ۱۳۰^\circ$، پس $D\hat{A}M = ۲۵^\circ$ و در نتیجه $D\hat{A}B = ۸۵^\circ$.

راه‌حل سمن

دو قطر AC و BD یکدیگر را در نقطهٔ E قطع می‌کنند. روی قطر AC نقطهٔ F را چنان قرار می‌دهیم که $AF = CE$. اکنون دو مثلث ABF و CBE در حالت «ض‌زض» هم‌نهشت‌اند. در نتیجه مثلث BEF متساوی‌الاضلاع است. روی پاره‌خط ED نقطهٔ G را چنان قرار می‌دهیم که $CE = EG$. حال دو مثلث CDG و ABF در حالت «ض‌زض» هم‌نهشت‌اند. بنابراین مثلث AED متساوی‌الساقین است و چون $A\hat{E}D = ۱۲۰^\circ$، در نتیجه $D\hat{A}B = ۸۵^\circ$.

راه‌حل نرگس

پاره‌خط AP را موازی و مساوی با BC رسم می‌کنیم به‌طوری‌که AC قطر چهارضلعی $ABCP$ باشد. اکنون دو مثلث ABC و CPA در حالت «ض‌زض» هم‌نهشت‌اند. پس $PC = AB$ و $C\hat{P}A = ۷۰^\circ$. بنابراین مثلث CDP متساوی‌الساقین است. حال اگر اندازهٔ زاویه‌ها را محاسبه کنیم به‌سادگی نتیجه می‌شود که $P\hat{C}D = ۶۰^\circ$ و در نتیجه مثلث CPD متساوی‌الاضلاع است. از طرفی چون مثلث PAD متساوی‌الساقین است پس $P\hat{A}D = ۲۵^\circ$ و در نتیجه $D\hat{A}B = ۸۵^\circ$.

راه‌حل شقایق

چون $BC = AB$، پس B روی عمودمنصّف قطر AC قرار دارد. همچنین چون $BC = CD$، پس C روی عمودمنصّف قطر BD قرار دارد. اگر عمودمنصّف‌های AC و BD یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند، آنگاه سه مثلث ABO، BCO و CDO در حالت «ض‌ض‌ض» هم‌نهشت‌اند. توجه کنید که محاسبهٔ اندازهٔ سه زاویهٔ مثلث BCO به‌سادگی امکان‌پذیر است. پس $O\hat{A}B = ۸۵^\circ$. حال چون سه نقطهٔ D، O و A روی یک خط قرار دارند نتیجه می‌شود که اندازهٔ زاویهٔ DAB نیز برابر ۸۵ درجه است.

۱۱. در چهارضلعی $ABCD$ سه ضلع AB، BC و CD برابرند. اگر $A\hat{B}C = ۱۵۰^\circ$ و $B\hat{C}D = ۹۰^\circ$، آنگاه اندازهٔ زاویه‌های BAD و CDA چقدر است؟

۱۲. در مثلث ABC، $\hat{B} = ۱۲۰^\circ$ و نیمسازهای زاویه‌های A و C یکدیگر را در نقطهٔ H قطع کرده‌اند. اگر روی امتداد ضلع‌های AB و BC (از طرف B)، به‌ترتیب نقطه‌های P و Q را چنان انتخاب کنیم که سه پاره‌خط AP، CQ و AC برابر شوند، آنگاه ثابت کنید زاویهٔ PHQ قائمه است.

۱۳. سه نقطهٔ A، B و C روی یک دایره چنان قرار دارند که سه زاویهٔ مثلث ABC حاده هستند. اگر دو ارتفاع AH و BG یکدیگر را در نقطهٔ D قطع کنند و امتداد AH با دایره در نقطهٔ M برخورد کند، آنگاه ثابت کنید پاره‌خط‌های DH و MH باهم برابرند.

۱۴. دو دایره یکدیگر را در نقطه‌های A و B قطع کرده‌اند. اگر AC قطری از دایرهٔ اول و AD قطری از دایرهٔ دوم باشد، آنگاه ثابت کنید نقطه‌های B، C و D روی یک خط راست قرار دارند.

۱۵. در مثلث ABC، $\widehat{A} = ۱۲۰^\circ$. روی نیم‌ساز زاویهٔ A نقطهٔ D طوری انتخاب شده است که $AD = AB + AC$. اندازهٔ زاویه‌های مثلث BDC چقدر هستند؟

۱۶. در مثلث ABC، $AB = AC$ و $\widehat{A} = ۸۰^\circ$. نقطهٔ D درون مثلث ABC چنان قرار دارد که $D\widehat{B}C = ۱۰^\circ$ و $D\widehat{C}B = ۳۰^\circ$. ثابت کنید مثلث ADB متساوی‌الساقین است.

۱۷. دو خط عمود برهم ضلع‌های مربع $ABCD$ را به‌ترتیب در نقطه‌های M، N، P و Q قطع کرده‌اند. ثابت کنید دو پاره‌خط MP و QN برابرند.

چند استدلال نادرست

۱. جملهٔ «در هر مثلث میانهٔ وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع است»، درست است یا نادرست؟

سامان با استدلال زیر ثابت کرده که جملهٔ بالا درست است. چرا استدلال سامان نادرست است؟

استدلال سامان

در مثلث ABC، میانهٔ AM را از طرف M به‌اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم و نقطهٔ حاصل را N می‌نامیم. دو مثلث AMB و NMC در حالت ض‌زض هم‌نهشت‌اند.

پس داریم:

$$\overset{\triangle}{AMB} \cong \overset{\triangle}{NMC} \Longrightarrow \overset{\triangle}{AMB} + \overset{\triangle}{AMC} \cong \overset{\triangle}{NMC} + \overset{\triangle}{AMC}$$

$$\Longrightarrow \overset{\triangle}{NAC} \cong \overset{\triangle}{ABC}.$$

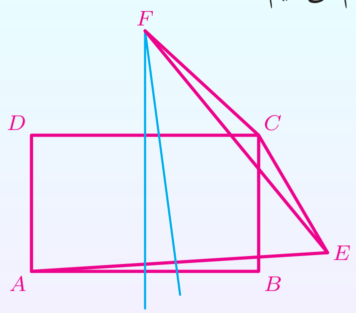
پس $AN = BC$ و در نتیجه $AM = BM$. بنابراین در هر مثلث میانهٔ وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع است.

۲. مستطیل $ABCD$ را در نظر بگیرید. پاره‌خط CE برابر با BC در خارج مستطیل رسم شده است. عمودمنصّف AB با عمودمنصّف AE در نقطهٔ F برخورد کرده است. آیا می‌توان ثابت کرد که زاویه‌های FCB و FCE برابرند؟

صدف و کیمیا با راه‌حل‌های زیر، مسئله را حل کرده‌اند. راه‌حل درست کدام است؟

راه‌حل صدف

ابتدا شکل مسئله را رسم می‌کنیم.



همان‌طور که در شکل می‌بینیم،

$$F\hat{C}B + B\hat{C}E = F\hat{C}E.$$

بنابراین واضح است که $F\hat{C}B < F\hat{C}E$. پس این دو زاویهٔ FCB و FCE برابر نیستند.

راه‌حل کیمیا

چون F روی عمودمنصّف‌های سه پاره‌خط AB، CD و AE قرار دارد پس بنا به قضیهٔ عمودمنصّف داریم:

$$FA = FB,\ FA = FE,\ FC = FD.$$

بنابراین دو مثلث FAD و FCE بنابه قضیهٔ ض‌ض‌ض هم‌نهشت‌اند و در نتیجه:

$$F\widehat{D}A = F\widehat{C}E. \qquad (۱)$$

از طرفی بنابه قضیهٔ مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های FCD و FDC برابرند و چون CDA و DCB قائمه‌اند، پس:

$$F\widehat{C}D + D\widehat{C}B = F\widehat{D}C + C\widehat{D}A \Longrightarrow F\widehat{C}B = F\widehat{D}A. \qquad (۲)$$

با مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) به‌سادگی نتیجه می‌شود که دو زاویهٔ FCE و FCB برابرند.

۳. در مثلث ABC، $\widehat{B} = ۱۲۰^\circ$. روی ضلع AC و خارج از مثلث ABC، مثلث متساوی‌الاضلاع ACD ساخته شده است. ثابت کنید BD نیم‌ساز زاویهٔ ABC است.

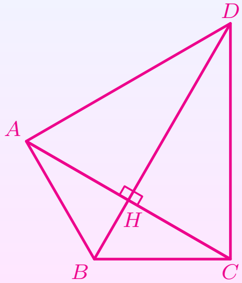
غزل مدعی است که مسئله را حل کرده است. چرا راه‌حل او نادرست است؟

راه‌حل غزل

مثلث ACD متساوی‌الاضلاع است. پس $AD = CD$؛ یعنی نقطهٔ D از دو سر پاره‌خط AC فاصلهٔ یکسان دارد. درنتیجه بنابه قضیهٔ عمودمنصف، نقطهٔ D روی عمودمنصّف AC است. اگر محل برخورد عمودمنصّف AC با ضلع AC را H بنامیم، آنگاه دو مثلث AHD و CHD هم‌نهشت‌اند. زیرا:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{فرض مسئله} & AD = CD \\ \text{ضلع مشترک} & DH = DH \\ \text{دو زاویهٔ قائمه} & A\hat{H}D = C\hat{H}D \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\triangle}{AHD} \cong \overset{\triangle}{CHD}.$$

در نتیجه $H\hat{D}C = H\hat{D}A$.



اگر از H به B وصل کنیم، چون $H\hat{D}C = H\hat{D}A$، BD ضلع مشترک است و $AD = CD$، دو مثلث BCD و BAD در حالت ض‌زض هم‌نهشت‌اند. در نتیجه $A\hat{B}D = C\hat{B}D$. یعنی BD نیمساز زاویهٔ ABC است.

● قبل از اینکه خواننده مسئلهٔ بعد را بخواند، لازم است تعریف «دو خط موازی» را یادآوری کنیم.

دو خط موازی

دو خط در یک صفحه را موازی می‌نامند هرگاه هیچ نقطهٔ مشترکی نداشته باشند یا برهم منطبق باشند.

۴. نصیر مدعی است که همهٔ مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند. او برای ادعای خود استدلال زیر را ارائه کرده است. ایراد استدلال نصیر را پیدا کنید.

استدلال نصیر

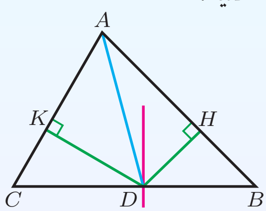
مثلث دلخواهی رسم کنید و آن را ABC بنامید. نیمساز زاویهٔ A و عمودمنصّف ضلع BC را بکشید. دو حالت ممکن است پیش آمده باشد.

الف) نیمساز زاویهٔ A و عمودمنصّف ضلع BC موازی باشند.

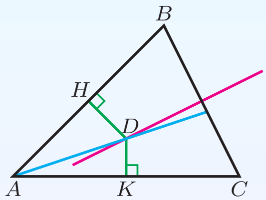
ب) نیمساز زاویهٔ A و عمودمنصّف ضلع BC موازی نباشند.

اگر حالت «الف» پیش آمده باشد، نیم‌ساز زاویهٔ A ارتفاع مثلث ABC می‌شود. بنابراین ABC متساوی‌الساقین خواهد شد.

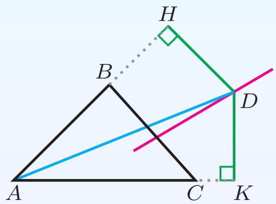
اگر حالت «ب» پیش بیاید، محل برخورد نیم‌ساز زاویهٔ A و عمودمنصّف ضلع BC را D بنامید. نقطهٔ D یا روی ضلع BC است، یا بیرون مثلث ABC است یا درون آن. در هر حالت، از D عمودهای DH و DK را به‌ترتیب بر AB و AC رسم کنید.



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

با یک استدلال برای هر سه شکل بالا می‌توان ثابت کرد $AK = AH$ و $BH = CK$. اگر این دو تساوی ثابت شوند، برای شکل‌های ۱ و ۲ داریم:

$$AH + BH = AK + CK \Longrightarrow AB = AC,$$

و برای شکل ۳ داریم:

$$AH - BH = AK - CK \Longrightarrow AB = AC.$$

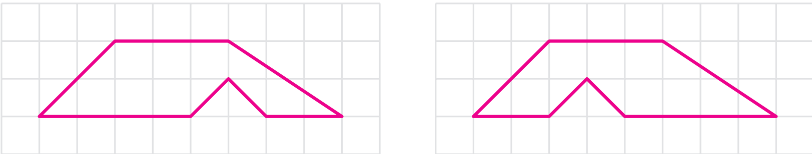
بنابراین در هر سه شکل، مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

و اما استدلالی که برای هر سه شکل ثابت می‌کند $AH = AK$ و $BH = CK$:

نقطهٔ D روی نیم‌ساز زاویهٔ BAC قرار دارد؛ پس بنابه قضیهٔ نیم‌ساز $DH = DK$. بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH و ADK بنابه قضیهٔ وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند؛ در نتیجه $AH = AK$. از طرفی نقطهٔ D روی عمودمنصّف ضلع BC قرار دارد؛ پس بنابه قضیهٔ عمودمنصّف $BD = CD$. بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BDH و CDK بنابه قضیهٔ وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند؛ در نتیجه $BH = CK$.

شکل‌های متشابه

۱. الف) چرا دو چندضلعی زیر متشابه نیستند؟



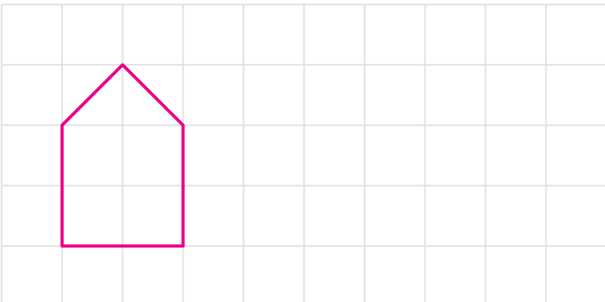
ب) شهرام تشابه دو چندضلعی را به‌صورت زیر تعریف کرده است:

تعریف شهرام

هرگاه در دو چندضلعی همهٔ ضلع‌ها به یک نسبت تغییر کرده باشد (کوچک یا بزرگ شده، و یا بدون تغییر باشد.) و اندازهٔ زاویه‌ها تغییر نکرده باشد، آن دو چندضلعی باهم متشابه‌اند.

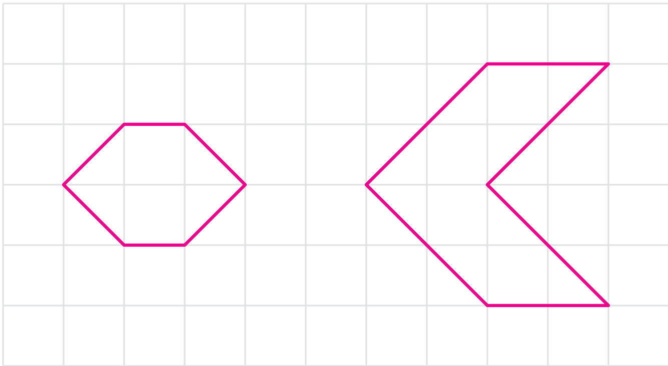
آیا تعریف شهرام درست است؟ اگر پاسخ خیر است، چه چیزی به تعریف شهرام اضافه کنیم تا درست شود؟

۲. یک پنج‌ضلعی رسم کنید که زاویه‌های آن دوبه‌دو با زاویه‌های پنج‌ضلعی زیر برابر باشد ولی دو پنج‌ضلعی متشابه نشوند.



۳. فرض کنید $n > 3$. روشی برای رسم دو nـ‌ضلعی که زاویه‌های آنها دوبه‌دو برابرند ولی متشابه نیستند، ارائه دهید.

۴. الف) آیا در دو چندضلعی زیر، ضلع‌ها می‌توانند دوبه‌دو متناسب باشند؟



ب) فرض کنید $n > ۳$. روشی برای رسم دو nـ ضلعی که ضلع‌های آنها دوبه‌دو متناسب‌اند ولی متشابه نیستند، ارائه دهید.

۵. دو ده‌ضلعی محدب مثال بزنید که زاویه‌های آنها دوبه‌دو برابر و ضلع‌های آنها نیز دوبه‌دو متناسب باشند ولی این دو ده‌ضلعی متشابه نباشند.

۶. استاندارد بین‌المللی اندازهٔ کاغذ به‌نام ایزو ۲۱۶ (ISO 216)، برای کاغذها اندازه و نام‌های مختلفی در نظر گرفته است. بعضی از این نام‌ها A0، A1، A2، A3، A4 و ... هستند. عرض و طول کاغذ A0 به‌ترتیب ۸۴۱ و ۱۱۸۹ میلیمتر است.

الف) دو کاغذ A4 را چگونه کنارهم قرار دهیم که مستطیل حاصل با کاغذ A4 تقریباً متشابه باشد.

ب) یک کاغذ A4 را چگونه نصف کنیم که کاغذهای حاصل با کاغذ A0 تقریباً متشابه باشد.

ج) سعید مستطیلی داشت! آن را از وسط طولش نصف کرد. او حالا دو مستطیلِ متشابه با مستطیل اول دارد. نسبت تشابه چیست؟

د) حدس بزنید که ایزو ۲۱۶ بر چه اساسی کاغذها را نام‌گذاری کرده است.

بخشی از کتاب «تاریخ فشردهٔ ریاضیات»

اقلیدس، که درباره زندگی وی به‌طور قطعی چیزی نمی‌دانیم، احتمالاً در طول سلطنت بطلمیوس اول (۲۸۳ـ۳۰۶ ق.م.) می‌زیست و گویا جمله معروف اقلیدس: «هیچ راه شاهانه‌ای به هندسه وجود ندارد.»، خطاب به اوست. گرچه چندین متن کوچک را به او نسبت می‌دهند، اما مشهورترین و پیشرفته‌ترین کار او سیزده کتاب *اصول* ($Stoicheia$) است. از زمره آثار دیگرش کتاب *مفروضات* ($Data$) است که مشتمل بر مطالبی است که آن را کاربردهای جبر در هندسه می‌نامیم و به زبان کاملاً هندسی ارائه شده است. نمی‌دانیم چه تعداد از این متون از خود اقلیدس و چه تعداد از آنها گردآوری آثار اوست؛ اما این کتاب‌ها در موارد بسیار، عمق شگفت‌انگیزی را نشان می‌دهند. این متون نخستین متن‌های کامل ریاضیِ به‌جامانده از یونان باستان است.

اصول، پس از کتاب مقدس، شاید بیش از هر کتاب دیگر در تاریخ جهان غرب، تجدید چاپ شده و مورد مطالعه قرار گرفته است. از اختراع چاپ تاکنون، بیش از هزار ویرایش از آن انتشار یافته و قبل از آن نیز، نسخ خطی این کتاب بخش اعظم آموزش هندسه را تحت سیطرهٔ خود داشته است. قسمت اعظم هندسه دبیرستانی ما گاه کلمه به کلمه از هشت یا نه کتاب از سیزده کتاب اقلیدس، گرفته شده است؛ و هنوز سنت اقلیدسی در آموزش مقدماتی ما اهمیت بسیار دارد. برای ریاضی‌دان حرفه‌ای این کتاب‌ها همواره افسونی گریزناپذیر داشته‌اند (گرچه برای شاگردان اغلب سؤال‌انگیز بوده‌اند) و ساخت منطقی آنها شاید بیش از هر متن دیگری در جهان، تفکر علمی را تحت تأثیر قرار داده است.

کار اقلیدس، بر اساس استنتاج کاملاً منطقی قضایا از مجموعه‌ای از تعاریف، اصول متعارفی، و اصول موضوع، استوار است. در چهار کتاب اول به هندسه مسطحه پرداخته شده است، و به نظریه تناسب‌ها اشارتی ندارد و از مقدماتی‌ترین خواص خطوط و زوایا به همنهشتی مثلث‌ها، تساوی مساحت‌ها، قضیهٔ فیثاغورس (کتاب اول، گزارهٔ ۴۷)، ساختن مربعی برابر با مستطیل داده شده، بخش طلایی، دایره، و چندضلعی‌های منتظم، می‌رسیم.

فصل ۴

توان و ریشه

شکل بالا تصویر رنگ شدهٔ جسمی است که از ترکیبات سادهٔ شیمیایی به‌وجود آمده است. ارتفاع این جسم کمتر از 10^{-6} متر و ضخامت آن کمتر از موی انسان است.

توان صحیح

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $۲^{۳} - ۲^{-۳}$

ب) $۵^{۲} + ۵^{۲} - ۳^{-۳}$

ج) $۳^{۴} \times ۵^{-۲} - ۲^{-۲}$

د) $۵^{۲} - ۳^{۲} \times (-۳)^{-۲}$

هـ) $-۲^{-۳} \times (-۲)^{-۴} - ۸$

و) $۲ \times ۵^{-۴} + ۲^{-۳} \times ۳^{-۲}$

ز) $۳^{۴} \times ۳^{۵} \times ۵^{۲} \times ۳^{-۷} - ۵^{۳}$

ح) $۴^{۳} + ۴^{۳} + ۴^{۳} - ۳^{۴} \times ۳^{-۱}$

ط) $\dfrac{۳^{۴} \times ۵^{۲} \times ۳^{۳}}{۵^{۳} \times ۲^{۷} \times ۵}$

ی) $\dfrac{۲ + ۳ \times ۴^{-۱} - ۲ \times ۵^{-۱}}{۳^{۲} \times ۲^{-۲} - ۵}$

۲. عبارت‌های زیر را ساده کنید و توان‌های منفی را از بین ببرید.

الف) $\dfrac{۳^{-۴}}{۵^{-۱}}$

ب) $\dfrac{۲a^{-۱}b^{-۲}}{a^{-۳}b^{-۲}}$

ج) $\dfrac{(۰/۱)^{-۱}}{۱۰^{-۱}}$

د) $\dfrac{۲x^{-۳}}{۳^{-۳}y}$

۳. عبارت‌های زیر را ساده کنید و توان‌های منفی را از بین ببرید.

الف) $\left(\dfrac{۱}{۵}\right)^{-۴}$

ب) $\left(\dfrac{۳}{۷}\right)^{-۲}$

ج) $\left(\dfrac{۲a^{-۱}}{۳^{-۲}}\right)^{-۲}$

د) $\left(\dfrac{x^{-۱}}{y^{-۱}z}\right)^{-۱}$

۴. هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید و توان‌های منفی را از بین ببرید.

الف) $\left(\dfrac{۲a^{-۱}b}{a^{۲}b^{-۳}}\right)^{-۳}$

ب) $\left(\dfrac{q^{-۱}r^{-۱}s^{-۲}}{r^{-۵}sq^{-۸}}\right)^{-۱}$

ج) $\left(\dfrac{s^{۲}t^{-۴}}{۵s^{-۱}t}\right)^{-۲}$

د) $\left(\dfrac{xy^{-۲}z^{-۳}}{x^{۲}y^{۳}z^{-۴}}\right)^{-۳}$

۵. کدام‌یک از اعداد زیر بین صفر و یک است؟

الف) $\left(\dfrac{۳^{۲} \times ۲^{-۳}}{۵^{-۴}}\right)^{-۱}$

ب) $\left(\dfrac{۲^{-۲} \times ۵^{۳}}{۳^{۳} \times ۷^{-۲}}\right)^{-۲}$

۶. اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\left(-\frac{۱}{۴}\right)^{-۱} \quad \left(-\frac{۱}{۲}\right)^{-۱} \quad \left(-\frac{۳}{۲}\right)^{-۲} \quad \left(-\frac{۴}{۳}\right)^{-۳}$$

۷. عدد $\left(\frac{۱}{۶۴}\right)^{-۱۲}$ را به‌صورت عدد ۲^m نوشته‌ایم. مقدار m را بیابید.

۸. اگر a عددی گویا و b عددی صحیح باشد و $۶^۸ = ۳^۲ \times a^b$، آنگاه حداقل پنج مقدار مختلف برای $a+b$ بیابید.

۹. فرض کنید m و n دو عدد صحیح باشند.

الف) برای n^{-m} چند مقدار وجود دارد به‌طوری‌که تساوی $m^n = ۲^{۱۰}$ برقرار باشد؟

ب) برای m^{-n} چند مقدار وجود دارد به‌طوری‌که تساوی $m^n = ۲^{۲۰}$ برقرار باشد؟

۱۰. به‌جای x چه عددی باید قرار گیرد؟

$$۳^{-۱۰۲} - ۳^{-۱۰۱} + ۳^{-۱۰۰} - ۳^{-۹۹} = ۳^{-۹۹}x$$

۱۱. اگر $n \in \mathbb{Z}$ و $\left(n^n\right)^{۱۳۹۶} = ۱$، آنگاه مقدار n را بیابید.

۱۲. اگر $\{m,n\} \subseteq \mathbb{N}$ و $a \in \mathbb{R}$،

الف) مثالی بیابید که $a^m + a^n = a^{m+n}$.

ب) مثالی بیابید که $a^m + a^n = a^{mn}$.

۱۳. x و y چه اعدادی هستند؟

$$۲^{۲^{۲^{۲}}} = ۲^{۲^{۲}}x = ۴^{y^{۳}}$$

۱۴. حاصل عبارت زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار با توان ۵ بنویسید.

$$\frac{۳^۴ + ۳^۳ \times ۳ + \frac{۱}{۹} \times ۲۷^۲}{(۲۶)^۲ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۲} \times ۲^{-۴}}$$

۱۵. در هر یک از قسمت‌های زیر، x و y را بیابید.

الف) $\frac{۱۵^{۳}}{۲^{۳}} = \left(\frac{۵}{۲}\right)^{x} \times ۳^{y}$

ب) $\frac{۱۵^{۵}}{۱۴^{۵}} = \left(\frac{۳}{۷}\right)^{x} \left(\frac{۵}{۲}\right)^{y}$

ج) $\frac{۲^{۱۵}}{۱۵^{۲}} \times \frac{۲^{-۱۰}}{۵} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^{x} \left(\frac{۲}{۵}\right)^{y}$

د) $\frac{۲۱^{۳} \times ۳^{۲}}{۲^{۱۳}} = \left(\frac{۷}{۲}\right)^{x} \left(\frac{۳}{۴}\right)^{y}$

نماد علمی

۱. کدام‌یک از اعداد زیر به‌صورت نماد علمی نوشته شده‌اند؟

الف) ۱۲×۱۰^{۵}

ب) $۱/۹۹۹۹ \times ۱۰^{-۴}$

ج) $۹/۸۳ \times ۲^{۱۰}$

د) $۰/۹۹۹ \times ۱۰^{-۸}$

۲. هر یک از اعداد زیر را به‌صورت نماد علمی بنویسید.

الف) یک سال نوری تقریباً ۹,۴۶۰,۵۲۸,۴۰۰,۰۰۰ کیلومتر است.

ب) جرم یک مولکول اکسیژن تقریباً ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵۳ گرم است.

ریشه‌گیری

۱. الف) اگر x عددی نامنفی باشد، ریشه‌های دوم $x^{۲}$ را بیابید.

ب) اگر x عددی نامنفی باشد، حاصل $\sqrt{x^{۲}}$ چیست؟

ج) اگر x عددی منفی باشد، ریشه‌های دوم $x^{۲}$ را بیابید.

د) اگر x عددی منفی باشد، حاصل $\sqrt{x^{۲}}$ چیست؟

۲. می‌دانیم $\sqrt[۳]{۵۴a^۳z^۸}$ عددی حقیقی است. کدام عبارت درست و کدام نادرست است؟ برای عبارت درست دلیل بیاورید و برای عبارت نادرست مثالی بیاورید که درستی آن را نقض کند.

الف) $\sqrt[۳]{۵۴a^۳z^۸} = ۳|a|z^۲\sqrt[۳]{۲z^۲}$ ب) $\sqrt[۳]{۵۴a^۳z^۸} = ۳az^۲\sqrt[۳]{۲z^۲}$

۳. می‌دانیم $\sqrt{۵۴a^۳z^۸}$ عددی حقیقی است. کدام عبارت درست و کدام نادرست است؟ برای عبارت درست دلیل بیاورید و برای عبارت نادرست مثالی بیاورید که درستی آن را نقض کند.

الف) $\sqrt{۵۴a^۳z^۸} = ۳|a|z^۴\sqrt{۶a}$ ب) $\sqrt{۵۴a^۳z^۸} = ۳az^۴\sqrt{۶a}$

۴. پس از آزمون ریاضی نیم‌سال اول، نمرهٔ دانش‌آموزان ۰، ۱، ۲، ۳، ...، ۲۰ شده بود! معلم ریاضی تصمیم گرفت برای کمک به دانش‌آموزان، نمرهٔ هر دانش‌آموز را در ۲۰ ضرب کند، سپس از حاصل جذر بگیرد و نمرهٔ به‌دست آمده را در کارنامه وارد کند.

الف) چه نمره‌هایی تغییر نمی‌کنند؟

ب) چه نمره‌هایی بیشترین تغییر را دارند؟

ج) چه نمره‌ای پس از تغییر عدد صحیح خواهد بود؟

۵. اگر $\sqrt{x} = ۹۲۶۱$ و $\sqrt[۳]{y} = ۶$، آنگاه $\sqrt[۳]{xy}$ چه عددی است؟

۶. اگر $\sqrt[۳]{x\sqrt{x}} = ۴$، آنگاه x چه عددی است؟

۷. هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\sqrt{۷۵a^۳x}$ ب) $\sqrt[۳]{a^۲b}\sqrt[۳]{۶۴a^۴b}$

ج) $\sqrt{\dfrac{۱۶۲b^۵c^۵}{۱۲۵x^۲y^۴}}$ د) $\sqrt[۳]{\dfrac{۵۴b^۴c^۶}{-۳۲x^۵y^۹}}$

هـ) $\sqrt{۱۲۸a^۵b^۳}$ و) $\sqrt[۳]{۲۵۰a^۴b^۳c^۲}$

ز) $\sqrt{\dfrac{۱۵۰x^۲y^۶}{۸۱a^۷b^۴}}$ ح) $\sqrt[۳]{\dfrac{-۴۰x^۳y^۵}{۸۱t^۵s^۷}}$

۸. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sqrt[۳]{-(-۷)^{-۶}}$　　ب) $\sqrt{(\pi^۲ - ۱۰)^۲}$

ج) $\sqrt{\frac{۸^{۱۰}+۴^{۱۰}}{۸^۴+۸^{۱۱}}}$　　د) $(\sqrt{۳}-\sqrt{۶})^۲$

هـ) $\frac{۲\sqrt{۸}-\sqrt{۵۰}+۳\sqrt{۱۸}+\sqrt{۱۶۲}}{\sqrt{۲۰۰}}$

۹. اگر $۳ < a < ۵$، آنگاه درستی تساوی زیر را بررسی کنید.

$$\sqrt{(a-۶)^۶(a-۳)^۳} = -(a-۶)^۳(a-۳)\sqrt{a-۳}$$

۱۰. اگر $a < ۰$، $b > ۰$ و $c < ۰$، آنگاه عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\sqrt{a^۲b^۵c^۴}$　　ب) $\sqrt[۳]{a^۲b^۵c^۴}$

۱۱. ابراهیم برای محاسبهٔ اولین رقم بعد از ممیز عدد $\sqrt[۳]{۹}$ این‌گونه عمل کرد:

روش ابراهیم

برای محاسبهٔ اولین رقم بعد از ممیز عدد $\sqrt[۳]{۹}$ کافی‌است بدانیم که عدد $۱۰\sqrt[۳]{۹}$ یا $\sqrt[۳]{۹۰۰۰}$ بین کدام دو عدد طبیعی متوالی قرار دارد.

$$۲۰^۳ < ۹۰۰۰ < ۲۱^۳ \Longrightarrow \sqrt[۳]{۲۰^۳} < \sqrt[۳]{۹۰۰۰} < \sqrt[۳]{۲۱^۳}$$

$$\Longrightarrow ۲۰ < \sqrt[۳]{۹۰۰۰} < ۲۱$$

$$\Longrightarrow ۲۰ < ۱۰\sqrt[۳]{۹} < ۲۱$$

$$\Longrightarrow ۲ < \sqrt[۳]{۹} < ۲/۱.$$

بنابراین اولین رقم بعد از ممیز عدد $\sqrt[۳]{۹}$ صفر است.

الف) اولین رقم بعد از ممیز $\sqrt[۳]{۱۰}$ را به‌دست آورید.

ب) دومین رقم بعد از ممیز $\sqrt[۳]{۱۰}$ را به‌دست آورید.

جمع و تفریق رادیکال‌ها

۱. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\left(۱+\frac{\sqrt{۸}+۲}{۱+\sqrt{۲}}\right)^{-۱}$$

۲. در هر یک از قسمت‌های زیر، x را بیابید.

الف) $x-\sqrt{۶}=۶\sqrt{۶}$

ب) $-۲\sqrt{۷}-x=-۵\sqrt{۷}$

ج) $\sqrt[۳]{۱۲}+۳\sqrt[۳]{۹۶}-x=-۹\sqrt[۳]{۱۲}$

د) $\sqrt[۳]{۸۱}+\sqrt[۳]{-۲۴}-x=\frac{۹}{۱۰}\sqrt[۳]{۳}$

هـ) $۲\sqrt{۲۰}+\sqrt{۹۰}+x=۴\sqrt{۵}+۲۳\sqrt{۱۰}$

و) $\sqrt{\frac{۵}{۴۹}}+x+۳\sqrt{\frac{۱۲۵}{۳۶}}=\frac{۲۱۳}{۷۰}\sqrt{۵}$

۳. در هر یک از قسمت‌های زیر، A را بر حسب x و y به‌دست آورید.

الف) $\sqrt{۱۶x}+A=(۴+x^۲)\sqrt{x}$

ب) $\sqrt[۳]{۲y^۴}-A=(y-۳)\sqrt[۳]{۲y}$

ج) $\sqrt[۳]{۲۵۰x^۴y^۵}-A=xy\sqrt[۳]{۲xy^۲}$

د) $A+\sqrt{۹x^۵y^۹}=۵x^۲y^۴\sqrt{xy}$

۴. کدام‌یک از راه‌حل‌های زیر را برای گویا کردن مخرج کسر $\frac{۲}{\sqrt[۳]{۴}}$ بیشتر می‌پسندید؟!

$$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۴}}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۴}}\times\frac{\sqrt[۳]{۴^۲}}{\sqrt[۳]{۴^۲}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۱۶}}{\sqrt[۳]{۴^۳}}=\frac{۴\sqrt[۳]{۲}}{۴}=\sqrt[۳]{۲}$$

$$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۴}}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۴}}\times\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۸}}=\frac{۲\sqrt[۳]{۲}}{۲}=\sqrt[۳]{۲}$$

۵. درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{۲}{\sqrt{۳}+۱}=\sqrt{۳}-۱$ ب) $\frac{۲}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}-۱$

ج) $\frac{۳}{\sqrt[۳]{۲۸}}=\frac{۳}{۲^{۲}}$ د) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}$

۶. مخرج هر یک از کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵۲}}$ ب) $\frac{۲۴}{\sqrt{۱۲}}$ ج) $\frac{۱۱}{\sqrt{۵}\sqrt[۳]{۷}}$ د) $\frac{\sqrt[۳]{۱۵}}{\sqrt{۱۵}}$

۷. هر یک از اعداد زیر را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) $\frac{۲}{\sqrt{۲}}$ ب) $\frac{۹}{\sqrt{۳}}$ ج) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ د) $\frac{۵}{\sqrt{۲۰}}$

مسئلهٔ پنج‌تایی دیوفانتی

فرض کنید A زیرمجموعه‌ای mـعضوی از اعداد گویا باشد. اگر حاصل‌ضرب هر دو عضو متمایز A را با یک جمع بزنیم و حاصلْ توان دوم یک عدد گویا باشد، آنگاه مجموعهٔ A را یک mـتایی دیوفانتی می‌نامند. اگر همهٔ اعضای یک mـتایی دیوفانتی اعداد طبیعی باشند، به آن یک mـتایی دیوفانتی طبیعی می‌گویند. برای مثال، $\{۳,۵,۱۶\}$ یک سه‌تایی دیوفانتی طبیعی است، زیرا:

$$۳\times۵+۱=۱۶=۴^{۲},\quad ۳\times۱۶+۱=۴۹=۷^{۲},\quad ۵\times۱۶+۱=۸۱=۹^{۲}.$$

دیوفانتوس (قرن سوم ق.م) چهارتایی دیوفانتیِ $\{\frac{۱}{۱۶},\frac{۳۳}{۱۶},\frac{۱۷}{۴},\frac{۱۰۵}{۱۶}\}$ را پیدا کرد؛ اما نتوانست یک پنج‌تایی دیوفانتی بیابد. فِرما (۱۶۰۷ ـ ۱۶۶۵) اولین نفری بود که توانست چهارتایی دیوفانتی طبیعی $\{۱,۳,۸,۱۲۰\}$ را بسازد. اویلِر (۱۷۰۷ ـ ۱۷۸۳) با اضافه کردن عدد $\frac{۷۷۷۴۸۰}{۸۲۸۸۶۴۱}$ به چهارتایی فرما، یک پنج‌تایی دیوفانتی ساخت. اویلر ثابت کرد که بی‌شمار پنج‌تایی دیوفانتی وجود دارد. بیش از دو قرن بعد، در سال ۱۹۹۹، گیبز (Gibbs) اولین کسی بود که توانست یک شش‌تایی دیوفانتی پیدا کند [۶]:

$$\left\{\frac{۱۱}{۱۹۲},\frac{۳۵}{۱۹۲},\frac{۱۵۵}{۲۷},\frac{۵۱۲}{۲۷},\frac{۱۲۳۵}{۴۸},\frac{۱۸۰۸۷۳}{۱۶}\right\}.$$

در سال ۲۰۱۵، دویلا (Dujella) و همکارانش ثابت کردند که بی‌شمار شش‌تایی دیوفانتی وجود

دارد [۵]. دربارهٔ وجود یا عدم وجود هفت‌تایی دیوفانتی، هنوز چیزی نمی‌دانیم.

اما مهم‌ترین مسئله در ارتباط با چندتایی‌های دیوفانتی که هنوز کسی پاسخ آن را نمی‌داند، مسئلهٔ زیر است.

مسئلهٔ پنج‌تایی دیوفانتی. آیا یک پنج‌تایی دیوفانتی طبیعی وجود دارد؟

بی‌شک فرما و اویلر برای ساختن یک پنج‌تایی دیوفانتی طبیعی تلاش زیادی کرده بودند که به سرانجامی نرسید؛ این نشان می‌دهد حل این مسئله بدون استفاده از ریاضیات مدرن، تقریباً غیرممکن است.

تا به امروز تلاش‌های زیادی برای حل مسئلهٔ پنج‌تایی دیوفانتی صورت گرفته است. یکی از ایده‌های حلّ این مسئله این بوده است که به یک چهارتایی دیوفانتی یک عضوْ چنان اضافه کنیم که پنج‌تاییِ حاصلْ پاسخ مسئله باشد. در سال ۱۹۶۹، بیکر (Baker)، برندهٔ مدال فیلدز، و داونپورت (Davenport) ثابت کردند که عدد طبیعی دیگری وجود ندارد که اگر آن را به مجموعهٔ $\{۱, ۳, ۸, ۱۲۰\}$ اضافه کنیم، یک پنج‌تایی دیوفانتی ساخته شود [۲].

واضح است که اگر یک پنج‌تایی دیوفانتی طبیعی وجود داشته باشد، هر زیر مجموعهٔ چهارتایی آن یک چهارتایی دیوفانتی طبیعی است. بنابراین ریاضی‌دان‌ها سعی کردند همهٔ چهارتایی‌های دیوفانتی طبیعی را بشناسند. در سال ۱۹۷۹، آرکین (Arkin) و همکارانش ثابت کردند که می‌توان از هر سه‌تایی دیوفانتی یک چهارتایی دیوفانتی ساخت [۱]. به‌این‌ترتیب که اگر $\{a, b, c\}$ یک سه‌تایی دیوفانتی باشد که

$$ab + ۱ = r^۲, \quad ac + ۱ = s^۲, \quad bc + ۱ = t^۲,$$

آنگاه با قرار دادن $d = a + b + c + ۲abc + ۲rst$، چهارتایی دیوفانتی $\{a, b, c, d\}$ به‌دست می‌آید. از روش آرکین و همکارانش نتیجه می‌شود که اگر بی‌شمار سه‌تایی دیوفانتی وجود داشته باشد، آنگاه بی‌شمار چهارتایی دیوفانتی نیز وجود دارد. در زیر دو روش برای تولید بی‌شمار سه‌تایی دیوفانتی طبیعی آمده است:

روش اول. برای هر عدد طبیعی k، مجموعهٔ $\{k, k + ۲, ۴k + ۴\}$ یک سه‌تایی دیوفانتی طبیعی است.

روش دوم. در این روش از جمله‌های دنبالهٔ فیبوناتچی استفاده می‌شود. در زیر جملهٔ اول تا جملهٔ

یازدهم این دنباله نوشته شده است.

$$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹, \ldots.$$

اگر جملهٔ kاُم دنبالهٔ فیبوناتچی را با $F(k)$ نشان دهیم، آنگاه برای هر عدد طبیعی k، مجموعهٔ $\{F(۲k), F(۲k+۲), F(۲k+۴)\}$ یک سه‌تایی دیوفانتی طبیعی است.

در سال ۱۹۹۷ دویلا ثابت کرد که اگر با روش آرکین و همکارانش از مجموعه‌های $\{k, k+۲, ۴k+۴\}$ و $\{F(۲k), F(۲k+۲), F(۲k+۴)\}$ چهارتایی دیوفانتی طبیعی بسازیم، به هیچ‌کدام از این چهارتایی‌ها نمی‌توان عددی طبیعی اضافه کرد به‌طوری که مجموعهٔ حاصل یک پنج‌تایی دیوفانتی طبیعی باشد [۴].

دویلا در سال ۲۰۰۴ ثابت کرد که هیچ شش‌تایی دیوفانتی طبیعی وجود ندارد. همچنین او ثابت کرد که اگر پنج‌تایی‌های دیوفانتی طبیعی وجود داشته باشند، تعداد آنها متناهی است [۳].

چندتایی‌های دیوفانتی به‌عنوان مسئله‌ای در خم‌های بیضوی نیز مطرح هستند. خم‌های بیضوی موجوداتی هندسی هستند که ارتباط تنگاتنگی با اعداد صحیح دارند و در رمزنگاری پیشرفته از آنها استفاده می‌شود.

منابع

[1] J. Arkin and V. E. Hoggatt, and E. G. Strauss, *On Euler's solution of a problem of Diophantus*, Fibonacci Quart. **17** (1979), 333–339.

[2] A. Baker and H. Davenport, *The equations* $3x^2 - 2 = y^2$ *and* $8x^2 - 7 = z^2$, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **20** (1969), 129–137.

[3] A. Dujella, *There are only finitely many Diophantine quintuples*, J. Reine Angew. Math. **566** (2004), 183–214.

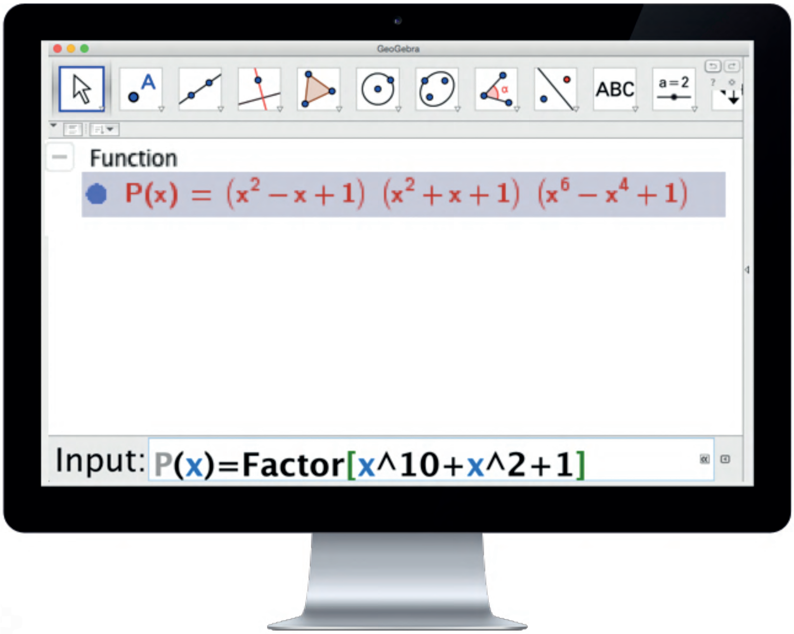
[4] A. Dujella, *The problem of the extension of a parametric family of Diophantine triples*, Publ. Math. Debrecen **51** (1997), 311–322.

[5] A. Dujella, M. Kazalicki, M. Mikic, and M. Szikszai, *There are infinitely many rational Diophantine sextuples*, Int. Math. Res. Not. IMRN, to appear.

[6] P. Gibbs, *Some rational Diophantine sextuples*, Glas. Mat. Ser. III **41** (2006), 195–203.

فصل ۵

عبارت‌های جبری



امروزه نرم‌افزارهای زیادی هستند که محاسبات جبری را به‌سادگی انجام می‌دهند. همان‌طور که در تصویر بالا می‌بینید نرم‌افزار جئوجبرا چندجمله‌ای $x^{۱۰} + x^{۲} + ۱$ را تجزیه کرده است.

گفت‌وگو

در کلاس درس ریاضی معلم طبق معمول راه‌حل مسئله‌ای را توضیح می‌داد. درحالی‌که به مکان خاصی از تختهٔ کلاس اشاره می‌کرد، رو به دانش‌آموزان کرد؛

معلم: حاصل این عبارت چند می‌شود؟ کسی ماشین‌حساب دم دست دارد؟

دو دانش‌آموز با تعجب به یکدیگر نگاه کردند.

دانش‌آموز ۱: ما کاملاً گیج شده‌ایم. یک روز می‌گویید از ماشین‌حساب استفاده نکنید. یک روز می‌گویید استفاده بکنید!

دانش‌آموز ۲: خُب آره. یک روز می‌گویید ماشین‌حساب مضر است؛ و یک روز می‌گویید اشکال ندارد!

معلم: [درحالی‌که لبخند ریزی به لب داشت] هیچ‌کس دیگری نظری ندارد؟

دانش‌آموزان کلاس کمی پِچ‌پِچ کردند. به نظر می‌آمد چیزهایی برای گفتن داشتند ولی کسی چیزی نگفت.

معلم: هر مسئله‌ای برای تمرین یک مهارت است و به ما کمک می‌کند تا مهارتی را یاد بگیریم. اگر آن مهارت «محاسبه کردن» باشد، نمی‌توانیم از ماشین‌حساب استفاده کنیم؛ اما اگر مهارتی که در یک مسئله باید آن را تمرین کنیم از جنس «محاسبه» نباشد، می‌توان از ماشین‌حساب استفاده کرد. به همین سادگی!

دانش‌آموز ۱: چطور می‌توانیم خودمان بفهمیم که چه زمانی از ماشین‌حساب کمک بگیریم و چه زمانی نه؟

معلم: [درحالی‌که به‌طور خاص به آن دانش‌آموز نگاه می‌کرد] سؤال خوبی است. باید ببینیم که معنی محاسبه چیست. [رو به همهٔ دانش‌آموزان کلاس] کسی می‌داند محاسبه یعنی چه؟

دانش‌آموز ۳: محاسبه یعنی فرایندی که با چهار عمل اصلی انجام می‌دهیم. مثلاً به‌دست آوردن حاصل ۲ × ۴ − ۲ محاسبه است.

معلم: به نظر شما ضرب دوتا چندجمله‌ای محاسبه است یا نه؟

دوباره در کلاس همهمه شد. این‌بار شاید چون جواب از جنس بله‌ـ خیر بود، خیلی‌ها می‌خواستند نظر بدهند. معلم از دانش‌آموزان خواست که همه نظر بدهند و در سه گروه موافق‌ها، مخالف‌ها و بی‌نظرها تقسیم شدند. (البته طبق معمول یکی از عادت‌های بد خیلی‌ها که همه در مورد همه چیز نظر می‌دهند، تعداد بی‌نظرها خیلی خیلی کم بود.) معلم به جواب‌های نه اشاره کرد و توضیحاتش را ادامه داد؛

معلم: اما ریاضی‌دان‌ها حتی برای به‌دست آوردن حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای هم می‌گویند «محاسبه کردن حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای».

دانش‌آموزی با خودش گفت که الان مچ آقای معلم را می‌گیرم!

دانش‌آموز ۴: شما گفتید می‌توان از ماشین‌حساب کمک گرفت؛ اما مگر اینجا هم می‌شود گفت که اگر هدف مسئله‌ای محاسبه کردن نبود می‌توانیم از ماشین‌حساب کمک بگیریم؟

معلم: [کمی بی‌تفاوت] بله.

دانش‌آموز ۴: اما یک ماشین‌حساب که نمی‌تواند حاصل‌ضرب چندجمله‌ای‌ها را حساب کند!

معلم: [با لبخندی که انگار با آن می‌خواست درسی به مخاطب خود بدهد] ماشین‌حساب‌هایی که تا حالا داشتی یا ماشین‌حساب‌هایی که تا حالا دیدی؟! جوری می‌گویی ماشین‌حساب که انگار کلی اطلاعات داری. [بعد از کمی مکث] زمانی که من دبیرستانی بودم هر ساله ماشین‌حساب‌های پیشرفته‌تری تولید می‌شدند، اما در نسل شما چون ابعاد پردازشگرهای قویِ در دسترس کوچکتر شده‌اند، ماشین‌حساب‌ها به‌عنوان نرم‌افزارهایی در دل دستگاه‌های هوشمند قرار گرفته‌اند. راستش دیگر

آنچنان خبری از ماشین‌حساب‌های مستقل نیست. شما می‌توانید از نرم‌افزارهای پیشرفته برای محاسبه کمک بگیرید.

کلاس در سکوت محض رفت.

معلم: ضرب چندجمله‌ای‌ها که خیلی ساده است. با نرم‌افزارهای ریاضی می‌توانید حتی چندجمله‌ای‌ها را تجزیه کنید!

کلاس این‌بار در بهت فرو رفت، زیرا هم ادعای معلم عجیب بود و هم اینکه دانش‌آموزی آهسته گفته بود: «پس عملاً ما وقتی داریم تجزیه می‌کنیم، سرکاریم!» و بچه‌ها فهمیده بودند که معلم صدای آن دانش‌آموز را شنیده است.

معلم: [با نرمی و قاطعیت] نه! گفتم که وقتی محاسبه کردن هدف است، نباید از وسیلهٔ دیگر کمک بگیریم. مگر وقتی قرار است برای سلامتی‌مان، بخشی از مسیرمان را پیاده راه برویم، می‌توانیم همان بخش را سوار ماشین بشویم؟

دانش‌آموز ۵: ببخشید من متوجه نشدم. بالاخره نفمیدم محاسبه یعنی چه؟

معلم: پس این باشد آخرین بخش این بحث امروزمان. محاسبه کردن یک چیز یعنی تعیین کردن پاسخ یک چیز به کمک روشی الگوریتمی. خُب، حالا دفترهایتان را نشانم بدهید تا ببینم وضع تکالیفتان چطور است.

گروه زیادی از دانش آموزان با هیاهو ابراز ناراحتی کردند که این بار هم نشد خیلی وقت کلاس را تلف کنیم. در این وسط، زرنگ‌ترین دانش آموز کلاس چیز جدیدی یافته بود. با خود می‌اندیشید که «تعیین کردن پاسخ یک چیز به کمک روشی الگوریتمی» یعنی چه؟ چطور می‌توان با کمک نرم‌افزارهای ریاضی چندجمله‌ای‌ها را تجزیه کرد؟

چندجمله‌ای‌ها

۱. چند تا از عبارت‌های زیر یک‌جمله‌ای هستند؟ و یا اینکه به یک‌جمله‌ای تبدیل می‌شوند؟

الف) $۲|x|-|x|$ ب) $\frac{۵x^{۲}}{y}$ ج) $\frac{x^{۲}y}{۵}$ د) $-\sqrt{۲}x$

هـ) $x^{۲}+۳x^{۲}$ و) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ ز) $۲|x^{۲}|+|x^{۲}|$ ح) $۱۸^{-۱}$

۲. در هر قسمت، یک‌جمله‌ای A را بیابید و ضریب عددی آن را مشخص کنید.

الف) $A(-\frac{۳}{۵}t^{۲}z)=\frac{۷}{۵}r^{۳}z^{۳}t^{۴}$ ب) $A(\frac{\sqrt{۲}}{۳}p^{۲}q^{۳})=\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}p^{۴}q^{۵}w^{۲}$

ج) $(a^{۲}-۳ab)A=۴a^{۲}x-۱۲abx$ د) $(y-z)A=\frac{۳}{۲}xy-\frac{۳}{۲}xz$

۳. فرض کنید A و B یک‌جمله‌ای‌هایی با ضرایب عددی صحیح باشند. اگر $AB=x^{۲}$، همهٔ حالت‌هایی را که A و B می‌توانند داشته باشند، بیابید.

۴. چند تا از عبارت‌های زیر دوجمله‌ای هستند؟ و یا اینکه به دوجمله‌ای تبدیل می‌شوند؟

الف) $xy^{۲}+y^{۲}x$ ب) $\frac{۵x^{۲}}{y}+\frac{y}{۵x^{۲}}+a$ ج) $\frac{x^{۲}y+xy^{۲}}{۵}$

د) $-\sqrt{۲}x+\sqrt{۳}x$ هـ) $x^{۲}+\sqrt{x^{۲}}y$ و) $|x^{۳}|+y$

۵. در هر یک از قسمت‌های زیر مشخص کنید که هر دوجمله‌ای از مجموع چه یک‌جمله‌ای‌هایی تشکیل شده است. مانند نمونه، ضریب عددی هر یک‌جمله‌ای را مشخص کنید.

ضریب عددی جمله دوم	ضریب عددی جمله اول	یک‌جمله‌ای‌ها	دوجمله‌ای
-۱	۱	$z, -y$	$z-y$
			$-۳ab^{۲}-۴b^{۲}c^{۳}$
			$\frac{۱}{۵}z-\frac{ab}{۳}$
			$\sqrt[۳]{۲}uw^{۲}-\sqrt{۳}xy^{۲}$

۶. در هر یک از قسمت‌های زیر A دوجمله‌ای است. آن را بیابید.

الف) $xA=xy-x^{۲}$ ب) $A(-۲y^{۲})=۲y^{۲}w^{۲}z-۱۰y^{۲}$

ج) $-\frac{a}{۲}A=۳ab+\frac{a^{۲}cb}{۵}$ د) $A(\sqrt{۳}x)=۳x^{۲}-۹xy$

۷. حاصل‌ضرب دو دوجمله‌ای در یکدیگر، چند جمله می‌تواند داشته باشد؟ همهٔ حالت‌های ممکن را بررسی کنید و برای هریک مثالی بیاورید.

۸. اگر a و b دو عدد صحیح باشند، آنگاه دربارهٔ تعداد جملات حاصل‌ضرب $(x^۲+ax+۱)(x+b)$ پس از ساده‌کردن، کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) اگر $a=-b$، آنگاه تعداد جملات حاصل‌ضرب پس از ساده‌کردن دقیقاً ۳ تا است.

ب) اگر $b=۰$، آنگاه تعداد جملات حاصل‌ضرب پس از ساده‌کردن ۳ تا یا ۲ تا است.

۹. درجهٔ هریک از چندجمله‌ای‌های زیر را مشخص کنید.

الف) ۹ ب) $-\sqrt{۲}$ ج) $\sqrt[۳]{۵}+\pi$ د) ۰

۱۰. در ردیف دوم جدول زیر، دو سه‌جمله‌ای وجود دارد که حاصل‌ضرب آنها یک نُه‌جمله‌ای درجه ۸ است. در هر ردیف، نقطه‌چین‌ها را با یک‌جمله‌ای‌های مناسب طوری پر کنید که،

- درجه و تعداد جملات گستردهٔ حاصل‌ضرب دو سه‌جمله‌ای ستونِ عبارت جبری با اعدادی که در همان ردیف نوشته شده، برابر باشند.
- گستردهٔ حاصل‌ضرب هر دو سه‌جمله‌ای، یک چندجمله‌ای باشد که فقط متغیر x دارد.

درجه	تعداد جملات	عبارت جبری
۸	۹	$(x^۶+x^۳+۱)(x^۲+x+۱)$
۷	۸	$(x^۵+\cdots+۱)(x^۲+x+۱)$
۶	۷	$(x^۴+\cdots+۱)(x^۲+x+۱)$
۵	۶	$(\cdots+\cdots+۱)(x^۲+x+۱)$
۴	۵	$(\cdots+\cdots+۱)(x^۲+x+۱)$
۴	۴	$(\cdots+\cdots+\cdots)(x^۲+\cdots+۱)$
۴	۳	$(\cdots+\cdots+\cdots)(\cdots+\cdots+\cdots)$
۴	۲	$(\cdots+\cdots+\cdots)(\cdots+\cdots+\cdots)$

۱۱. برای هریک از چندجمله‌ای‌هایی که در پرسش قبل به‌دست آورده‌اید، راه‌حلی بیابید که آن چندجمله‌ای را تجزیه کند. برای این کار، به راه‌حلی که در ضرب کردن دو سه‌جمله‌ای به‌کار برده‌اید، به دقت نگاه کنید. برای مثال، اگر حاصل $(x^۶+x^۳+۱)(x^۲+x+۱)$ را به‌صورت زیر به‌دست آورده باشیم:

$$\begin{aligned}&(x^۶+x^۳+۱)(x^۲+x+۱)\\&=x^۶(x^۲+x+۱)+x^۳(x^۲+x+۱)+۱(x^۲+x+۱)\\&=x^۸+x^۷+x^۶+x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱,\end{aligned}$$

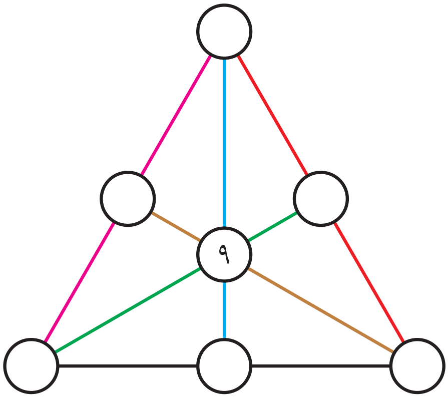
آنگاه برای تجزیهٔ چندجمله‌ای حاصل، می‌توانیم به‌صورت زیر عمل کنیم:

$$\begin{aligned}&\underbrace{x^۸+x^۷+x^۶}+\underbrace{x^۵+x^۴+x^۳}+\underbrace{x^۲+x+۱}\\&=x^۶(x^۲+x+۱)+x^۳(x^۲+x+۱)+۱(x^۲+x+۱)\\&=(x^۶+x^۳+۱)(x^۲+x+۱).\end{aligned}$$

به‌این‌ترتیب هر جا دیدید که دو یا چند چندجمله‌ای در هم ضرب شده‌اند، یعنی یک تمرین تجزیه متولد شده است!

۱۲. در شکل زیر، دایره‌های خالی را با یک‌جمله‌ای‌هایی که فقط متغیر x دارند، طوری پر کنید که هر سه شرط زیر برقرار باشد.

- درجهٔ یک‌جمله‌ای‌ها حداکثر ۴ باشد.
- مجموع یک‌جمله‌ای‌های روی هر پاره‌خط تشکیل یک سه‌جمله‌ای دهد.
- مجموع ضرایب هر سه‌جمله‌ای (روی هر پاره‌خط) برابر صفر شود.



- در زیر، مدلی برای نام‌گذاری چندجمله‌ای‌ها ارائه شده است. در این کتاب از چنین مدلی برای نام‌گذاری چندجمله‌ای‌ها استفاده شده است.

نام‌گذاری چندجمله‌ای‌ها

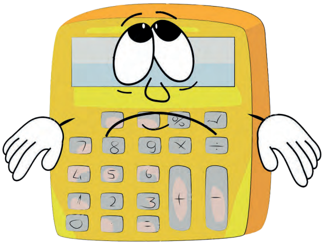
برای نام‌گذاری چندجمله‌ای‌ها از حروف بزرگ انگلیسی استفاده می‌کنند. برای مثال، می‌توان چندجمله‌ای $x^2 + y^2x$ را P نامید. از طرفی چون شناسایی متغیرهای یک چندجمله‌ای مهم هستند، بهتر است چندجمله‌ای P را به‌صورت $P(x, y)$ نمایش داد.

۱۳. در هریک از خانه‌های جدول زیر، یک چندجمله‌ای بنویسید به‌طوری‌که حاصل‌جمع هر سه خانهٔ پشت‌سرهم برابر x شود. $P(x)$ را بیابید.

$x+1$				$P(x)$				$x-1$	

۱۴. یک ماشین‌حساب، عمل جمع را در یک ثانیه و عمل ضرب را در ۵ ثانیه انجام می‌دهد. برای مثال، به‌ازای هر مقدار x، حاصل عبارت $x^۳ + ۴x + ۱۰$ را در ۱۷ ثانیه حساب می‌کند.

درستی هریک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.



الف) $P(x)$ای وجود دارد که محاسبهٔ آن، به‌ازای هر مقدار x، با این ماشین‌حساب ۱۸ ثانیه زمان می‌برد.

ب) $P(x)$ای وجود دارد که محاسبهٔ آن، به‌ازای هر مقدار x، با این ماشین‌حساب ۱۹ ثانیه زمان می‌برد.

۱۵. اگر در گستردهٔ $۳x(۲x - \frac{۱}{۳})(x - ۱۸)$ به‌جای x عدد $\frac{۱}{۶}$ بگذاریم، حاصل چه عددی است؟

هانا و تارا این مسئله را به‌صورت زیر حل کردند. این راه‌حل‌ها را بررسی کنید.

راه‌حل هانا

گستردهٔ این عبارت را به‌دست می‌آوریم و آن را $P(x)$ می‌نامیم.

$$
\begin{aligned}
۳x(۲x - \frac{۱}{۳})(x - ۱۸) &= (۶x^۲ - x)(x - ۱۸) \\
&= ۶x^۲(x - ۱۸) - x(x - ۱۸) \\
&= ۶x^۳ - ۱۰۸x^۲ - x^۲ + ۱۸x \\
&= ۶x^۳ - ۱۰۹x^۲ + ۱۸x.
\end{aligned}
$$

چون $P(x) = ۶x^۳ - ۱۰۹x^۲ + ۱۸x$ و می‌خواهیم $P(\frac{۱}{۶})$ را به‌دست آوریم، پس:

$$
\begin{aligned}
P(\frac{۱}{۶}) &= ۶ \times (\frac{۱}{۶})^۳ - ۱۰۹(\frac{۱}{۶})^۲ + ۱۸(\frac{۱}{۶}) \\
&= ۶(\frac{۱}{۲۱۶}) - ۱۰۹(\frac{۱}{۳۶}) + ۱۸(\frac{۱}{۶}) \\
&= \frac{۱}{۳۶} - \frac{۱۰۹}{۳۶} + ۳ \\
&= \frac{۱ - ۱۰۹ + ۱۰۸}{۳۶} \\
&= ۰.
\end{aligned}
$$

راه‌حل تارا

اگر $P(x)=۳x(۲x-\frac{۱}{۳})(x-۱۸)$، باید $P(\frac{۱}{۶})$ را محاسبه کنیم. بنابراین:

$$\begin{aligned}P(\frac{۱}{۶})&=۳(\frac{۱}{۶})(۲\times\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۳})(\frac{۱}{۶}-۱۸)\\&=\frac{۱}{۲}\times ۰\times(\frac{-۱۰۷}{۶})\\&=۰.\end{aligned}$$

۱۶. اگر $P(x)=x(x-۱)(x-۲)$، آنگاه حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $P(۰)$ ب) $P(۱)$ ج) $P(۲)$ د) $P(۳)$

- در تعدادی از تمرین‌های این کتاب، از تعریف «ریشهٔ یک چندجمله‌ای» که در زیر آمده، استفاده شده است.

ریشهٔ یک چندجمله‌ای

اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای، a یک عدد حقیقی و $P(a)=۰$، آنگاه عدد a ریشهٔ چندجمله‌ای $P(x)$ است.

برای مثال، اگر $P(x)=(x-۱)(x+۳)$، آنگاه عدد ۱ ریشهٔ چندجمله‌ای $P(x)$ و عدد ۳ ریشهٔ $P(x)$ نیست: زیرا:

$$P(۱)=(۱-۱)(۱+۳)=۰,\quad P(۳)=(۳-۱)(۳+۳)=۱۸\neq ۰.$$

۱۷. هریک از عبارت‌های زیر، چند ریشه دارند؟ آنها را بیابید.

الف) $۲x+۷$ ب) $(x+۱)(x-۲)$

ج) $x(x-۳)(x-\sqrt{۲})$ د) $x^۲-۱$

۱۸. حداقل سه تا چندجمله‌ای درجه ۴ مثال بزنید که ریشه‌های آنها ۱، ۲، ۳– و ۱– باشد.

۱۹. $P(x)$ای مثال بزنید که درجهٔ آن ۳ باشد و

$$P(۲) = P(-\frac{۱}{۵}) = P(-\sqrt{۳}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}.$$

● باتوجه‌به تعریف «چندجمله‌ای متعادل» که در زیر آمده است، به پرسش‌های ۲۰، ۲۱، ۲۲ و ۲۳ پاسخ دهید.

چندجمله‌ای متعادل

یک چندجمله‌ای را متعادل می‌نامیم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد.

- درجهٔ آن چندجمله‌ای نسبت به همهٔ متغیرهایش یک باشد.
- مجموع ضرایب جمله‌هایی که یک متغیر دلخواه در آن ظاهر می‌شود، برابر صفر باشد.

برای مثال، چهارجمله‌ای $xy + zw - xz - yw$ متعادل است. زیرا متغیر x در جمله‌های xy و $-xz$ آمده است که مجموع ضرایب این جمله‌ها برابر صفر است. این استدلال برای متغیرهای y، z و w نیز صادق است.

۲۰. کدام‌یک از چندجمله‌ای‌های زیر متعادل هستند؟

الف) $(ab)^۲ - (ac)^۲ - (bd)^۲ + (cd)^۲$ ب) $ac - ad + bd + bc$

ج) $(a-c)(b-d) - (a-d)(b-c)$ د) $ab - ad + bc - cd$

۲۱. کدام‌یک از عبارت‌های زیر هشت‌جمله‌ای متعادل هستند؟

الف) $(a-d)(b-e)(c-f)$

ب) $(a-d)(b-e)(c-f) - (a-d)(b-c)(e-f)$

ج) $(a-d)(b-e)(c-f) - (a-b)(d-c)(e-f)$

۲۲. چندجمله‌ای متعادل قسمت «الف» تمرین قبل، چه ارتباطی با قسمت «الف» تمرین ۱۶ صفحهٔ ۸ دارد؟ با استفاده از چندجمله‌ای قسمت «الف» تمرین قبل و همهٔ زیرمجموعه‌های سه عضوی یک مجموعهٔ شش عضوی، می‌توانید قسمت «ب» تمرین ۱۶ صفحهٔ ۸ را حل کنید.

۲۳. علی باید جاهای خالی عبارت زیر را با حروف a، b، c، d، e و f طوری پر کند که حاصل عبارت یک چندجمله‌ای متعادل باشد.

$$(a-d)(b-e)(c-f)-(\cdots-\cdots)(\cdots-\cdots)(\cdots-\cdots)$$

درستی هریک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

الف) علی می‌تواند شش حرف داده شده را طوری در جاهای خالی قرار دهد که حاصل یک چهارده‌جمله‌ای متعادل باشد.

ب) علی می‌تواند شش حرف داده شده را طوری در جاهای خالی قرار دهد که حاصل یک شانزده‌جمله‌ای متعادل باشد.

اتحاد و تجزیه

۱. تساوی‌های ستون راست چه تفاوتی با تساوی‌های ستون چپ دارند؟

- $۲x = x$ — $x = x$
- $۱۰(y+۱) = ۱۰$ — $۱۰(y+۱) = ۱۰y + ۱۰$
- $z^۳ + z^۲ = xz$ — $z^۲(z+۱) - xz = z(z^۲ + z - x)$
- $(a+b)^۲ = ۴$ — $(a+b)^۲ = a^۲ + b^۲ + ۲ab$

۲. با ذکر دلیل مشخص کنید که کدام یک از تساوی‌های زیر اتحاد است و کدام یک اتحاد نیست.

الف) $۳x^۲ - ۴x + x^۲ = ۱۰x + ۴x^۲ - ۱۴x$

ب) $(x-۱)(x^۳ + x^۲ + x + ۱) = x^۴ - ۱$

ج) $x^۴ + ۲x - ۱ = (x^۲ + x - ۱)(x^۲ - x + ۱) + x^۲$

۳. مثالی بیاورید که اتحاد بودن تساوی زیر را نقض کند.

$$(a+b-c)^{۳}+(ab+۲c)^{۳}=(ab-۲c)^{۳}+(a+b+c)^{۳}+۳abc$$

۴. جفت عبارت‌هایی را که تشکیل اتحاد می‌دهند، بیابید.

الف) $۳x^{۳}-۵x+۲$

ب) $(x-۱)(۳x^{۲}+۳x-۲)$

ج) $x+(x-۱)(x^{۳}+۲)-x^{۳}$

د) $x^{۴}+۲x-۱$

هـ) $x^{۳}+۵x^{۲}+۴x+۱$

و) $(x+۱)(x^{۲}+۳x+۱)+x^{۲}$

ز) $x^{۴}+۳x-۲x^{۳}-۲$

ح) $۸x+۳$

ط) $(x^{۲}+x-۱)(x^{۲}-x+۱)+x^{۲}$

ی) $۱۲x+۵-۲(۲x+۱)$

۵. در هر قسمت، با اضافه کردن یک چندجمله‌ای به عبارت سمت چپ، اتحاد بسازید.

الف) $(xy-۵)^{۲}\ ,\ (x^{۲}y^{۲}+۷)$

ب) $(۲y+۱)(y^{۲}+۲)\ ,\ (y^{۳}+۳)$

ج) $(۲a-۳b)(a+۴b)\ ,\ (۲a^{۲}-۸ab)$

د) $(z+۲z^{۲})(۲z-z^{۳})\ ,\ (-z^{۳})$

۶. a و b چه اعدادی باشند که تساوی زیر یک اتحاد شود؟

$$a(x+۱)^{۲}+b(x+۱)-ax^{۲}-bx=۸x+۳$$

۷. a و b دو عدد هستند به‌طوری‌که تساوی زیر اتحاد شده است. مقدار $a+b$ را به‌دست آورید.

$$۱+x+۲x^{۲}-x^{۳}=۳+a(x-۲)+b(x-۲)^{۲}-(x-۲)^{۳}$$

● در تعدادی از تمرین‌های این کتاب، از تعریف «تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها» که در زیر آمده، استفاده شده است.

تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها

چندجمله‌ای P را در نظر بگیرید. اگر بتوان P را به‌صورت حاصل‌ضرب دو یا چند چندجمله‌ای با درجهٔ کمتر از درجهٔ P نوشت، آنگاه P تجزیه شده است.

۸. ابتدا اتحاد بودن هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید. سپس در مواردی که تساوی یک اتحاد است، با ذکر دلیل، بگویید که طرف راست تجزیه شدهٔ چندجمله‌ای طرف چپ هست یا نه.

الف) $x^۲ + x + ۱ = x(x + ۱) + ۱$

ب) $a^۲ - a + ۶ = (a - ۳)(a + ۲)$

ج) $(۲b - ۷c)(۲b + ۷c) = ۴b^۲ - ۴۹c^۲$

د) $x^۴ + y^۴ = (x^۲ + y^۲)^۲ - (۲xy)^۲$

هـ) $u(u + ۱) - ۵(u + ۱) = (u - ۵)(u + ۱)$

و) $۵w - ۱۰ = ۵(w - ۲)$

ز) $xy - x - y + ۱ = x(y - ۱) - (y - ۱)$

ح) $x^۲ + ۱ = x(x + \frac{۱}{x})$

ط) $x - ۱ = (\sqrt{x} - ۱)(\sqrt{x} + ۱)$

۹. فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه ۱ باشد. آیا ممکن است $P(x)$ تجزیه شود؟

۱۰. فرض کنید $P(x, y)$ یک چندجمله‌ای باشد که درجهٔ آن نسبت به x برابر ۱ و نسبت به y نیز برابر ۱ است. آیا ممکن است $P(x, y)$ تجزیه شود؟

۱۱. به کمک فاکتورگیری، چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $x^۴ + ۲x^۳ + ۳x^۲$

ب) $(z + ۵)z - z(۷ - z)$

ج) $c^۳ + ۲c^۲ - ۳c - ۶$

د) $x^۵ + x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱$

۱۲. آیا فاکتورگیری، همیشه یک چندجمله‌ای را تجزیه می‌کند؟

اتحاد مربع دوجمله‌ای

۱. آیا حاصل‌ضرب یک دوجمله‌ای در خودش همواره سه‌جمله‌ای است؟

۲. با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای هر عبارت را تجزیه کنید.

الف) $k^۲ + ۳k + \frac{۹}{۴}$ ب) $۵z^۲ + ۴ + ۴\sqrt{۵}z$

ج) $۳۶x^۲y^۴ - ۱۲xy^۲ + ۱$ د) $۴(a+b)^۲ - ۱۲(a+b) + ۹$

هـ) $(u-۱)^۲ - ۲(u-۱)(۱-v) + (۱-v)^۲$

۳. یک دوجمله‌ای را در خودش ضرب کنید و حاصل‌ضرب را به هم‌کلاسی‌هایتان بدهید و از آنها بخواهید آن را تجزیه کنند. سعی کنید دوجمله‌ای را طوری انتخاب کنید که هم‌کلاسی‌هایتان نتوانند حاصل‌ضرب دوجمله‌ای در خودش را به‌سادگی تجزیه کنند.

۴. ابتدا به کمک فاکتورگیری و اتحاد مربع دوجمله‌ای، چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید. سپس ریشه‌های هر چندجمله‌ای را بیابید.

الف) $-y^۲ - ۱۶ + ۸y$ ب) $\frac{۱}{۱۲} + \frac{x^۲}{۳} + \frac{x}{۳}$

ج) $(z+۱)^۳ + ۶(z+۱)^۲ + ۹(z+۱)$

د) $\frac{۹}{۲}(u+۴)^۳ + \frac{۴۹}{۸}(u+۴) - \frac{۲۱}{۲}(u+۴)^۲$

۵. الف) چرا می‌توان از اتحاد مربع دوجمله‌ای برای تجزیه کردن کمک گرفت؟

ب) آیا می‌توان از اتحاد $A^۲ + ۲AB + B^۲ + C^۲ = (A+B)^۲ + C^۲$ برای تجزیه کردن کمک گرفت؟

۶. می‌دانیم $a + ۱$ عددی منفی است. عبارت زیر را به‌صورت یک چندجمله‌ای بنویسید.

$$\sqrt{(-a)^۲} + \sqrt{a^۲ + ۲a + ۱}$$

۷. می‌دانیم a عددی منفی است. عبارت زیر را به‌صورت یک چندجمله‌ای بنویسید.

$$\sqrt{a^۲(a-۱)^۲} + \sqrt{۴a^۲ - ۴a + ۱} - \sqrt{(-a^۲ + ۲a - ۱)^۲}$$

۸. اگر a، b و c سه عدد حقیقی باشند و $\{(a+۱)^۲ + ۲, (b-۱)^۳\} = \{-۱, -a^۴, c\}$، آنگاه چند مقدار مختلف برای $a^{-c} + b$ وجود دارد؟

۹. اگر a، b و c سه عدد حقیقی باشند و $\{\sqrt{a^۲ - ۱۰a + ۲۵}, \sqrt[۳]{b^۹}, \sqrt{-c}\} = \{-۸, ۳\}$، آنگاه کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) حاصل $a - b + c$ می‌تواند برابر ۱ باشد.

ب) حاصل $b^{-c} + a^{-c}$ می‌تواند برابر صفر باشد.

۱۰. الف) یک چندجمله‌ای بیابید که $\sqrt{۲}$ ریشه‌اش باشد ولی ضرایب یک‌جمله‌ای‌های آن اعداد صحیح باشند.

ب) یک چندجمله‌ای بیابید که $\sqrt{۲} - ۱$ ریشه‌اش باشد ولی ضرایب یک‌جمله‌ای‌های آن اعداد صحیح باشند.

ج) یک چندجمله‌ای بیابید که $\sqrt{۳} + \sqrt{۲}$ ریشه‌اش باشد ولی ضرایب یک‌جمله‌ای‌های آن اعداد صحیح باشند.

مربع‌سازی

۱. سه‌جمله‌ای $۴x^۲ + ۳۶x + P$، گستردهٔ مربع یک دوجمله‌ای است. P را بیابید.

لیلا، مینا و مهشید این مسئله را به‌صورت زیر حل کرده‌اند. راه‌حل‌های این سه نفر را بررسی کنید.

راه‌حل لیلا

اتحاد مربع دوجمله‌ای را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\text{جملهٔ اول} + \text{جملهٔ دوم})^۲ = (\text{جملهٔ اول})^۲ + ۲(\text{جملهٔ اول})(\text{جملهٔ دوم}) + (\text{جملهٔ دوم})^۲$$

اگر $۴x^۲$ را مربع جملهٔ اول و $۳۶x$ را دوبرابر جملهٔ اول در جملهٔ دوم در نظر بگیریم،

داریم:

$$(۲x)^۲ + \underbrace{۲(۲x)(\text{جملهٔ دوم})}_{۳۶x} + (\text{جملهٔ دوم})^۲ = (۲x + \text{جملهٔ دوم})^۲.$$

پس جملهٔ دوم، عدد ۹ است. بنابراین $P = ۸۱$.

راه‌حل مینا

اگر $۴x^۲$ را مربع جملهٔ اول و $۳۶x$ را مربع جملهٔ دوم در نظر بگیریم، داریم:

$$(۲x)^۲ + (۶\sqrt{x})^۲ + ۲(۲x)(۶\sqrt{x}) = (۲x + ۶\sqrt{x})^۲.$$

بنابراین $P = ۲۴x\sqrt{x}$.

راه‌حل مهشید

اگر $۴x^۲$ دو برابر جملهٔ اول در جملهٔ دوم و $۳۶x$ مربع جملهٔ دوم باشد، داریم:

$$(\text{جملهٔ اول})^۲ + \underbrace{۲(\text{جملهٔ اول})(-۶\sqrt{x})}_{۴x^۲} + (-۶\sqrt{x})^۲ = (\text{جملهٔ اول} - ۶\sqrt{x})^۲.$$

پس جملهٔ اول، $-\frac{۱}{۳}x\sqrt{x}$ است. بنابراین $P = \frac{۱}{۹}x^۳$.

۲. یک یک‌جمله‌ای به هریک از عبارت‌های زیر اضافه کنید به‌طوری‌که عبارت حاصل، گستردهٔ مربع یک دوجمله‌ای باشد. در هر قسمت همهٔ جواب‌ها را بیابید.

الف) $x^۲ + ۱۰x$ ب) $x^۲ + ۳x$

ج) $۴y^۲ + ۱۲y$ د) $۴a^۲ + ۱۴ab$

هـ) $۴a^۲ + ۷ab$ و) $۵a^۲ + ۲\sqrt{۵}a$

ز) $۵a^۲ + ۷a$ ح) $۴a^۲ + ۲۵$

ط) $a^۶ + ۴$ ی) $a^۵ + ۱$

۳. درستی محاسبهٔ زیر را بررسی کنید.

$$\sqrt{۲۹-۱۲\sqrt{۵}}=\sqrt{(۳-۲\sqrt{۵})^{۲}}=۳-۲\sqrt{۵}.$$

۴. ثابت کنید:

الف) $\sqrt{۵+۲\sqrt{۶}}=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ ب) $\sqrt{۱۳+\sqrt{۴۸}}=۲\sqrt{۳}+۱$

۵. در هر مورد اعداد گویای a و b را طوری تعیین کنید که تساوی برقرار باشد.

الف) $\sqrt{۹-\sqrt{۵۶}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ب) $\sqrt{۲+\sqrt{۳}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

۶. در تساوی‌های زیر اعداد طبیعی x و y را طوری تعیین کنید که a و b نیز اعدادی طبیعی شوند. سپس بعد از جایگذاری مقادیر x و y، فقط عبارت سمت چپ تساوی را به هم‌کلاسی‌هایتان بدهید و از آنها بخواهید که حاصل آن را به‌دست آورند. سعی کنید مقادیر x و y را طوری انتخاب کنید که هم‌کلاسی‌هایتان نتوانند به‌سادگی حاصل عبارت را پیدا کنند.

الف) $\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ب) $\sqrt{x+\sqrt{y}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

۷. حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}+\sqrt{۳}$ ب) $\sqrt{۸-۲\sqrt{۱۵}}-\sqrt{۵}$

مجموع مربعات

۱. اگر a، b و c سه عدد باشند و بدانیم $a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}=۰$، آنگاه مقدار عددی $a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}$ را بیابید.

۲. الف) چندجمله‌ای $x^{۲}+y^{۲}+۲-۲x-۲y$ را به‌صورت مجموع مربع دو دوجمله‌ای بنویسید.

ب) ثابت کنید که اگر $x^{۲}+y^{۲}+۲-۲x-۲y=۰$، آنگاه $x=y=۱$.

۳. می‌دانیم $x^{۲}+y^{۲}+\frac{۱}{۴}z^{۲}-۲x+۲y-z+۳=۰$. مقدار عددی $x+y+z$ را بیابید.

۴. اگر a و b دو عدد باشند، آنگاه ثابت کنید مقدار چندجمله‌ای زیر همواره مثبت است.

$$9a^4 + 10a^2 + b^2 - 4ab + 1$$

۵. ثابت کنید:

الف) اگر $w^2 + x^2 = wx$، آنگاه $w = x = 0$.

ب) اگر $w^2 + x^2 + y^2 = w(x + y)$، آنگاه $w = x = y = 0$.

ج) اگر $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = w(x + y + z)$، آنگاه $w = x = y = z = 0$.

مربع چندجمله‌ای

۱. a و b چه اعدادی باشند که تساوی زیر یک اتحاد شود؟

$$(x^2 + ax + 1)^2 = x^4 + bx^3 + 6x^2 + bx + 1$$

۲. حاصل‌ضرب یک سه‌جمله‌ای در خودش حداقل و حداکثر چند جمله دارد؟

۳. به چند روش متفاوت می‌توان با افزودن یک دوجمله‌ای به عبارت زیر، این عبارت را به‌صورت مربع یک سه‌جمله‌ای نوشت؟

$$x^4 + 4y^2 + 1 - 4y$$

۴. عبارت‌های زیر را به‌صورت مربع یک سه‌جمله‌ای بنویسید.

الف) $a^4 + 2\sqrt{2}a^3 - 2\sqrt{2}a + 1$

ب) $a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$

۵. الف) اتحاد زیر را کامل کنید.

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + \cdots$$

ب) اگر گستردهٔ عبارت زیر را $(1 + 2x + 3x^2 + \cdots + 10x^9)^2$ ساده کنیم، چند ضریب فرد خواهیم داشت؟

اتحاد مزدوج

۱. چرا می‌توان از اتحاد مزدوج برای تجزیه کردن کمک گرفت؟

۲. با کمک اتحاد مزدوج، حاصل‌ضرب عبارت‌های داده شده را حساب کنید.

الف) $(x^۳ + ۲x^۲ - x + ۴)(x^۳ - ۲x^۲ - x - ۴)$

ب) $(x^۲ - xy + y^۲)(x^۲ + xy + y^۲)(x^۴ - x^۲y^۲ + y^۴)(x^۸ - x^۴y^۴ + y^۸)$

۳. عبارت $۴a^۲c^۲ - (a^۲ - b^۲ + c^۲)^۲$ را به‌صورت ضرب چهار سه‌جمله‌ای متفاوت بنویسید.

۴. ابتدا به کمک فاکتورگیری و اتحاد مزدوج، چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید. سپس ریشه‌های هر چندجمله‌ای را بیابید.

الف) $-۶۲۵y + y^۳$

ب) $(x + ۲)^۴ - ۴(x + ۲)^۲$

۵. برای تجزیه چندجمله‌ای‌های زیر از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج کمک بگیرید.

الف) $(x^۲ - ۸x + ۸)^۲ - ۶۴$

ب) $(x + y)^۴ - (x - y)^۴$

ج) $(x^۴ + ۴x^۲ + ۴) - ۴x^۲$

د) $۴y^۴ + ۱ + ۴y^۲ - ۴y^۲$

هـ) $۲z^۲ + z^۴ + ۱ - ۲z^۲$

و) $k^۸ + ۶۴ + ۱۶k^۴ - ۱۶k^۴$

۶. الف) اگر $a - b = ۱$، آنگاه درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$(a + b)(a^۲ + b^۲)(a^۴ + b^۴)(a^۸ + b^۸) = a^{۱۶} - b^{۱۶}$$

ب) حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\left(۱ + \frac{۱}{۲}\right)\left(۱ + \frac{۱}{۴}\right)\left(۱ + \frac{۱}{۱۶}\right)\left(۱ + \frac{۱}{۲۵۶}\right)$$

۷. ثابت کنید:

الف) $(\sqrt{۶} - \sqrt{۵})^{۱۰۰۰} \times (\sqrt{۶} + \sqrt{۵})^{۹۹۸} = ۱۱ - ۲\sqrt{۳۰}$

ب) $\sqrt[۳]{۷ - ۴\sqrt{۳}} \times \sqrt[۳]{۷ + ۴\sqrt{۳}} = ۱$

۸. اگر برای چهار عدد a، b، c و d داشته باشیم $a+b=c+d$ و $a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}+d^{۲}$، آنگاه ثابت کنید $\{a,b\}=\{c,d\}$.

۹. در تجزیه عبارت $a^{۲}(۱-x)+(b^{۲}+c^{۲}-۲bc)(x-۱)$، کدام‌یک از چندجمله‌ای‌های زیر می‌توانند وجود داشته باشند؟

الف) $a+b-c$　　ب) $a-b+c$

ج) $b+c-a$　　د) $x-۱$

۱۰. با استفاده از اتحاد مزدوج، مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\dfrac{۳+\sqrt{۵}}{\sqrt{۷}-\sqrt{۵}}$　　ب) $\dfrac{۱}{\sqrt{۱۰}+\sqrt{۱۴}}$

۱۱. حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{۱}{\sqrt{۱}+\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۴}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۹۹}+\sqrt{۱۰۰}}$$

۱۲. فرض کنید $a=\sqrt{۱۳۹۴}+\sqrt{۱۳۵۷}$. عبارت $\sqrt{۱۳۹۴}-\sqrt{۱۳۵۷}$ را برحسب a بنویسید.

۱۳. اگر $x=۱-\sqrt{۲}$ باشد، حاصل $\sqrt[۳]{x+x^{-۱}}$ چقدر است؟

۱۴. آیا $x^{۴}+۳x^{۲}+۴$ با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج، تجزیه می‌شود؟

محدثه و امیرعباس این مسئله را به‌صورت زیر حل کرده‌اند. راه‌حل‌های آنها را بررسی کنید.

راه حل محدثه

اگر $x^{۴}$ را مربع جملهٔ اول و $۳x^{۲}$ را دو برابر جملهٔ اول در جملهٔ دوم در نظر بگیریم، آنگاه:

$$x^{۴}+۳x^{۲}+۴=(x^{۲}+\frac{۳}{۲})^{۲}+۴-\frac{۹}{۴}$$
$$=(x^{۲}+\frac{۳}{۲})^{۲}+\frac{۷}{۴}.$$

بنابراین $x^{۴}+۳x^{۲}+۴$ با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج، تجزیه نمی‌شود.

راه حل امیرعباس

ابتدا $x^۴$ را مربع جملهٔ اول و ۴ را مربع جملهٔ دوم در نظر می‌گیریم. پس:

$$\begin{aligned} x^۴ + ۳x^۲ + ۴ &= (x^۲ + ۲)^۲ - x^۲ \\ &= \big((x^۲ + ۲) + x\big)\big((x^۲ + ۲) - x\big). \end{aligned}$$

بنابراین $x^۴ + ۳x^۲ + ۴$ با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج، تجزیه می‌شود.

۱۵. آیا $x^۴ + ۳x^۲ + ۱$ با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج، تجزیه می‌شود؟

سعید و آرمیتا این مسئله را به‌صورت زیر حل کرده‌اند. راه‌حل‌های این دو نفر را بررسی کنید.

راه حل سعید

اگر $x^۴$ مربع جملهٔ اول و ۱ مربع جملهٔ دوم باشد، داریم:

$$x^۴ + ۳x^۲ + ۱ = (x^۲ + ۱)^۲ + x^۲.$$

بنابراین $x^۴ + ۳x^۲ + ۱$ با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج، تجزیه نمی‌شود.

راه حل آرمیتا

فرض کنید $x^۴$ مربع جملهٔ اول و $۳x^۲$ دو برابر جملهٔ اول در جملهٔ دوم باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} x^۴ + ۳x^۲ + ۱ &= (x^۲ + \frac{۳}{۲})^۲ + ۱ - \frac{۹}{۴} \\ &= (x^۲ + \frac{۳}{۲})^۲ - \frac{۵}{۴} \\ &= \big((x^۲ + \frac{۳}{۲}) + \frac{\sqrt{۵}}{۲}\big)\big((x^۲ + \frac{۳}{۲}) - \frac{\sqrt{۵}}{۲}\big). \end{aligned}$$

بنابراین $x^۴ + ۳x^۲ + ۱$ با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج، تجزیه می‌شود.

۱۶. چندجمله‌ای‌های زیر را با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج، تجزیه کنید.

الف) $x^۴ + ۴x^۲ + ۱۶$ ب) $x^۴ + ۴x^۲ - ۱۶$

ج) $x^۴ + ۲x^۲ + ۹$ د) $x^۴ - ۲x^۲ + ۹$

ه) $x^۴ - ۵x^۲ + ۱۱$ و) $x^۴ + ۵x^۲ - ۵۹۹$

ز) $۴x^۴ + ۱$ ح) $x^۴ + ۱$

۱۷. به‌جای a و b در عبارت $x^۴ + ax^۲ + b$ اعدادی قرار دهید که اگر عبارت حاصل را به هم‌کلاسی‌هایتان دادید، آنها نتوانند این عبارت را به‌سادگی تجزیه کنند.

۱۸. اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آیا $x^۴ + ax^۲ + b$ همیشه با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج، تجزیه می‌شود؟

۱۹. دربارهٔ ریشه داشتن و تجزیه شدن دو چندجمله‌ای $x^۲ + ۱$ و $x^۴ + ۱$ بحث کنید.

اتحاد جمله مشترک

۱. چرا می‌توان از اتحاد جمله‌مشترک برای تجزیه کردن کمک گرفت؟

۲. ابتدا با استفاده از اتحاد جمله‌مشترک هریک از چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید. سپس ریشه‌های هر چندجمله‌ای را بیابید.

الف) $x^۲ - ۲x - ۸$ ب) $y^۲ - ۱۰y + ۱۶$

ج) $۴k^۲ + ۱۴k + ۱۰$ د) $۱۶h^۲ + ۱۶h + ۳$

۳. فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای و مجموعهٔ ریشه‌های آن R باشد به‌طوری‌که

$$n(R) = ۲,\ R \subseteq \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -۲۰ \leqslant x \leqslant ۲۰\}.$$

با شرایط بالا، $P(x)$ای مثال بزنید که اگر آن را به هم‌کلاسی‌هایتان بدهید، آنها نتوانند $P(x)$ را به‌سادگی تجزیه کنند.

۴. به کمک فاکتورگیری، اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد جمله‌مشترک، چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $(x^۲ + ۳x + ۲) + (x^۲ + ۴x + ۳)$ ب) $۸x^۳ + ۱۶x^۲ + ۶x$

ج) $(x^۲ + ۴x + ۴) + (x^۲ + ۳x + ۲)$

۵. در تجزیهٔ عبارت $(x^۲ - ۱۰x + ۱۶)(x^۴ - ۵x^۲ + ۴)$ چه تعداد چندجمله‌ای درجهٔ یک متفاوت وجود دارد؟

۶. مقادیر a و b را طوری بیابید که تساوی زیر یک اتحاد باشد.

$$x^۴ + ۲x^۳ - ۴x^۲ - ۵x - ۶ = (x - a)(x - b)(x^۲ + x + ۱)$$

۷. فرض کنید k عددی طبیعی باشد. ثابت کنید برای هر مقدار k، اگر حاصل‌ضرب هر دو عضو متمایز مجموعهٔ زیر را با یک جمع بزنیم، حاصلْ مربع کامل است.

$$\{k, k + ۲, ۴k + ۴, ۱۶k^۳ + ۴۸k^۲ + ۴۴k + ۱۲\}$$

نامعادله

نامعادلهٔ یک مجهولی درجه اول

اگر مجهول نامعادله‌ای را با x نشان داده باشیم و پس از ساده‌کردن به‌صورت $ax + b > ۰$ درآید به‌طوری‌که $a \neq ۰$، آن را یک نامعادلهٔ یک مجهولی درجه اول می‌نامیم.

۱. برای چند مقدار a، عبارت $a^۲x + ۱ > ax$ نامعادلهٔ یک مجهولی درجه اول نیست؟ همهٔ این مقدارها را مشخص کنید.

۲. طرفین نامعادلهٔ $۲x - ۱ < ۳x + ۲$ با طرفین کدام نامعادله جمع شود که جواب آن $x < ۷$ شود؟

الف) $۲x + ۳ < ۴x - ۱$ ب) $۵x - ۱ < x + ۳$

ج) $۲x < x + ۱$ د) $-x > x - ۴$

۳. نامعادلهٔ $۲x + d < ۵x - ۳$ را در نظر بگیرید. فرض کنید A مجموعه اعدادی باشد که می‌توان به‌جای x قرار داد و B مجموعه اعدادی باشد که می‌توان به‌جای d قرار داد. اگر $۵ \in A$، آنگاه دربارهٔ B چه می‌توان گفت؟

۴. اگر A و B به‌ترتیب مجموعه جواب نامعادله‌های $\frac{x}{۲} - \frac{x-۱}{۳} > ۱$ و $\frac{۳}{۲}x + ۲ > ۲x - ۳$ باشند، آنگاه $A \cap B$ را به‌دست آورید.

۵. اگر مجموعهٔ A مجموعه جواب نامعادلهٔ یک مجهولی درجه اول $P(x) < Q(x)$ و مجموعهٔ B مجموعه جواب نامعادلهٔ یک مجهولی درجه اول $R(x) < S(x)$ باشد، آنگاه درستی هریک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

الف) مجموعه جواب نامعادلهٔ $P(x) + R(x) < Q(x) + S(x)$ با مجموعهٔ $A \cup B$ برابر است.

ب) مجموعه جواب نامعادلهٔ $P(x) \times R(x) < Q(x) \times S(x)$ با مجموعهٔ $A \cap B$ برابر است.

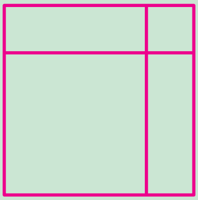
۶. اگر $x \in \mathbb{Z}$، آنگاه دربارهٔ درستی یا نادرستی دو عبارت زیر بحث کنید.

الف) اگر $x^۲ < ۶۴$، آنگاه $-\sqrt{۷} < x < \sqrt{۷}$.

ب) اگر $x^۲ < ۶۴$، آنگاه $-\sqrt{۷۰} < x < \sqrt{۷۰}$.

تاریخچهٔ نمادگذاری در جبر

جبر یونانی، آن‌گونه که به‌دست فیثاغورسیان (حدود ۵۴۰ ق.م) و اقلیدس (حدود ۳۰۰ ق.م) مدون شد، هندسی بود. برای مثال، آنچه را که ما با عنوان «اتحاد مربع دوجمله‌ای» می‌شناسیم و به‌صورت $(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$ نشان می‌دهیم، در کتاب *اصول* اقلیدس (مقالهٔ دوم، قضیهٔ ۴) به‌صورت زیر بیان شده است.



اگر یک خط راست به دو قطعهٔ دلخواه تقسیم شده باشد، مربع تمامی خط با مربع‌های هریک از قطعه‌ها و دو برابر مستطیل حاصل از این قطعه‌ها مساوی است.

خوارزمی (۸۲۵ م)، ریاضی‌دان ایرانی در کتاب معروف خود، الجبر و المقابله، حتی از کلمات به‌جای اعداد استفاده کرده است. معادله‌ای را که امروزه به‌صورت $x^۲ + ۲۱ = ۱۰x$ می‌نویسند، خوارزمی به‌شکل زیر بیان و حل کرده است:

> مقدار یک مربع چیست که وقتی بیست‌ویک درهم بر آن افزوده شود، ده برابر جذر آن مربع به‌دست آید؟ پاسخ چنین است: تعداد جذرها را نصف کن؛ این نصف، پنج است. آن را در خودش ضرب کن؛ حاصل‌ضرب، بیست‌وپنج است. از این عدد، بیست‌ویک را که به مربع افزوده بودیم، تفریق کن؛ باقی‌مانده، چهار است. جذر آن را به‌دست آور؛ این جذر، دو است. این را از نصف تعداد جذرها که پنج است تفریق کن؛ باقی‌مانده، سه است. این جذرِ مربعی است که آن را می‌خواستی و خود مربع، نُه است. یا اینکه می‌توانی جذر را به نصف جذرها اضافه کنی؛ مجموع، هفت است. این جذرِ مربعی است که آن را می‌خواستی و خود مربع، چهل‌ونه است.

البته پاسخ او معادل نوشتهٔ امروزی زیر است:

$$x = \frac{۱۰}{۲} \pm \sqrt{\left(\frac{۱۰}{۲}\right)^۲ - ۲۱} = ۵ \pm \sqrt{۴} = ۳,\ ۷.$$

درست است که جبر خوارزمی کسل‌کننده به نظر می‌رسد، اما اغلب ایده‌ها جلوتر از نمادها حرکت می‌کنند. حتی مسئله‌هایی که امروزه نیز اغلب برای اولین بار حل می‌شوند، در راه‌حل‌هایشان از نمادهای پیچیده‌ای استفاده می‌شود؛ ولی معمولاً پس از چند سال راه‌حل‌های آنها با نمادهای ساده‌تر عرضه می‌شود.

دیوفانتوس (قرن سوم ق.م) اولین بار از خلاصه‌نویسی در جبر استفاده کرده است. در زیر مثالی از یکی از نخستین نسخ دست‌نویس یونانی می‌بینید.

$$K^{\Upsilon}\beta\ s\eta^{\pitchfork}\ \Delta^{\Upsilon}\ \mathring{M}\delta\ \grave{\varepsilon}\sigma\tau\grave{\iota}\ \mu\delta;$$

یعنی

$$۲x^{۳} + ۸x - (۵x^{۲} + ۴) = ۴۴.$$

در زیر توضیحاتی دربارهٔ هریک از نمادهای بالا آمده است.

K^{Υ} اختصاری برای $K\Upsilon BO\Sigma$ به معنای مکعب است.

s اختصاری برای $\alpha\rho\iota\theta\mu os$ به معنای عدد است.

$\pitchfork$ ترکیبی از Λ و I در $\Lambda EI\Psi\Sigma I\Sigma$ به معنای کمبود است.

Δ^{Υ} اختصاری برای $\Delta\Upsilon NAMI\Sigma$ به معنای توان است.

M اختصاری برای $MONA\Delta E\Sigma$ به معنای واحدها است.

$\grave{\varepsilon}\sigma\tau\grave{\iota}$ به نشانهٔ $isos$ یا برابر است.

نُه حرف اول الفبای یونانی یعنی α، β، γ، δ، ε، s، ζ، η و θ به‌ترتیب به نشانهٔ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ به‌کار می‌رفتند؛ و ι، κ، λ، μ، ν، ξ، o، π و Ϙ، به‌ترتیب به نشانهٔ ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰، ۶۰، ۷۰، ۸۰ و ۹۰ به‌کار گرفته می‌شدند.

در ادامه مثال‌های از نوع نگارش ریاضی در سال‌های مختلف آمده است. این مثال‌ها روند تدریجی پیشرفت نمادگذاری جبری را نشان می‌دهند.

پاچولی در سال ۱۴۹۴ معادلهٔ $x + x^{۲} = ۱۲$ را به‌صورت زیر نوشته است.

Trouame .I.n°. che giōto al suo q̄drat° facia. 12.

واندر هوک در سال ۱۵۱۴ معادلهٔ $۴x^۲ - ۵۱x - ۳۰ = ۴۵$ را به‌صورت زیر نوشته است.

4Se.–51 Pri.–30N dit is ghelijc 45.

گالیگایی در سال ۱۵۲۱ معادلهٔ $x^۲ + ۳۲x = ۳۲۰$ را به‌صورت زیر نوشته است.

I □ e 32C°–320 numeri.

رودولف در سال ۱۵۲۵ معادلهٔ $x^۲ = ۱۲x - ۳۶$ را به‌صورت زیر نوشته است.

cubus p̄ 6 rebus aequalis 20.

رکورد در سال ۱۵۵۷ معادلهٔ $۱۴x + ۱۵ = ۷۱$ را به‌صورت زیر نوشته است.

$$14.\ \Phi +\ 15.\varphi ==== 71.\varphi.$$

بوتئو در سال ۱۵۵۹ معادلهٔ $x^۲ + ۶x + ۹ = x^۲ + ۳x + ۲۴$ را به‌صورت زیر نوشته است.

I $\Diamond$ P 6 ρ P 9 [I $\Diamond$ P 3ρ P 24.

استوین در سال ۱۵۸۵ معادلهٔ $۳x^۲ + ۴ = ۲x + ۴$ را به‌صورت زیر نوشته است.

3②+4 egales \`a 2①+4

ویت در سال ۱۵۹۱ معادلهٔ $-۱۵x^۴ + ۸۵x^۳ - ۲۲۵x^۲ + ۲۷۴x = ۱۲۰$ را به‌صورت زیر نوشته است.

I QC-15QQ+85C-225Q+274Q+274N aequatu

هاریوت در سال ۱۶۳۱ معادلهٔ $x^۳ - ۳b^۲x = ۲c^۳$ را به‌صورت زیر نوشته است.

$$aaa - ۳bba ==== +۲ccc.$$

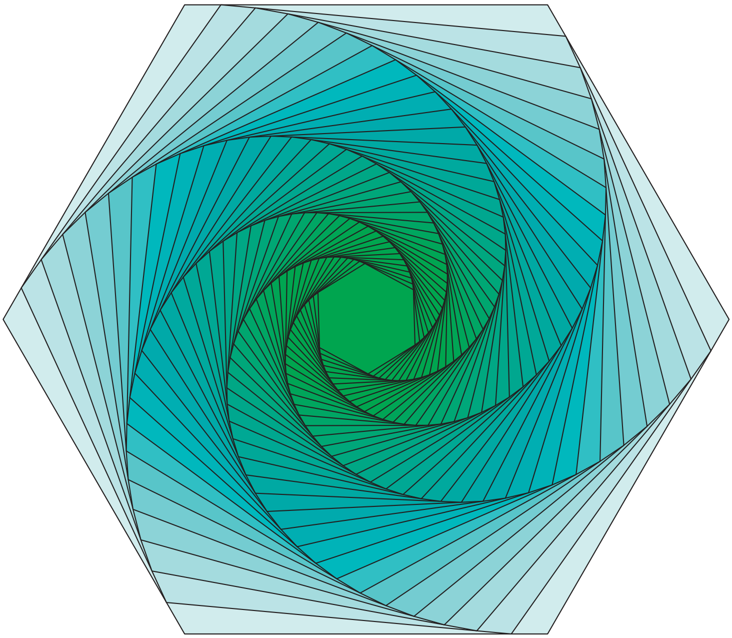
دکارت در سال ۱۶۳۷ معادلهٔ $y^۲ = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$ را به‌صورت زیر نوشته است.

$$yy \propto -\frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

والیس در سال ۱۶۹۳ معادلهٔ $x^۴ + bx^۳ + cx^۲ + dx + e = ۰$ را به‌صورت زیر نوشته است.

$$x^۴ + bx^۳ + cxx + dx + e = ۰.$$

فصل ۶ خط و معادله‌های خطی

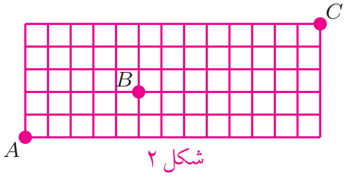


```
\begin{tikzpicture}
\draw(0,0)coordinate(A)--(120:6cm)coordinate(B)--++(60:6cm)coordinate(C)
      --++(0:6cm)coordinate(D)--++(-60:6cm)coordinate(E)--++(240:6cm) coordinate(F)--cycle;
  \foreach \x in {1,...,60}{\draw (A) coordinate(X);
  \draw[fill=green!20](A)--(B)coordinate[pos=.10](A)--(C)coordinate[pos=.10](B)
        --(D)coordinate[pos=.10](C)--(E)coordinate[pos=.10](D)
        --(F)coordinate[pos=.10](E)--(X)coordinate[pos=.10](F);
  \draw (A)--(B)--(C)-- (D) --(E) -- (F) -- cycle;}
\end{tikzpicture}
```

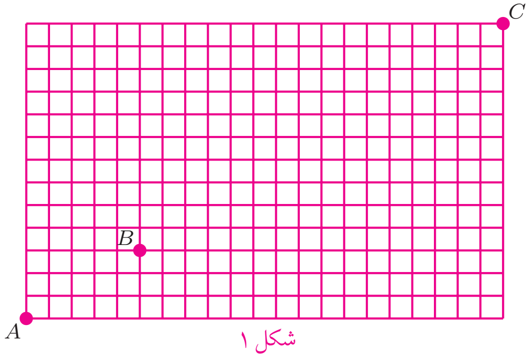
رسم شکل‌های دقیق در رشته‌های بسیاری کاربرد دارد. برای کار با نرم‌افزارهایی که شکل‌ها را دقیق رسم می‌کنند باید به رابطهٔ بین نقاط صفحهٔ مختصات تسلّط داشت. برای رسم شکل بالا که دستورات ترسیمش زیر آن نوشته شده است، از بستهٔ TikZ نرم‌افزار LaTeXاستفاده شده است. بد نیست بدانید که همهٔ شکل‌های کتاب‌های ریاضی تکمیلی با چنین دستوراتی رسم شده‌اند.

شیب و معادلهٔ خط

۱. در کدام‌یک از شکل‌های زیر، سه نقطهٔ A، B و C روی یک خط هستند؟ (طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است.)

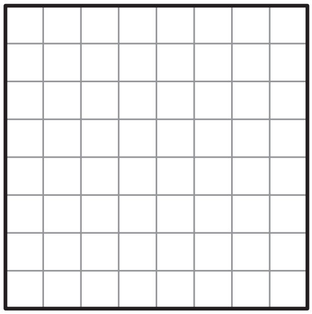


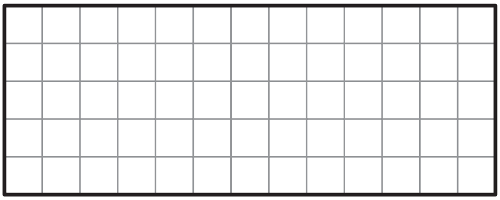
شکل ۲



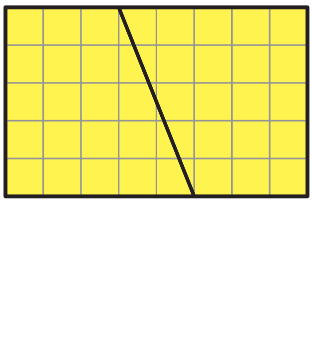
شکل ۱

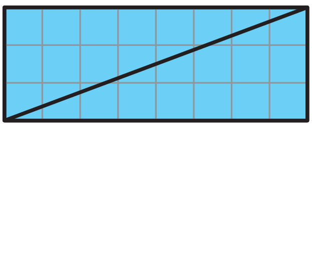
۲. الف) مساحت مربع و مستطیل زیر را حساب کنید. (طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است.)



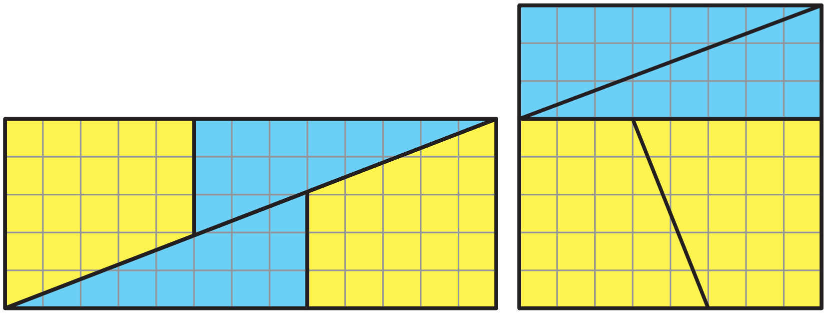


ب) در زیر، در شکل سمت راست مساحت هریک از ذوزنقه‌ها و در شکل سمت چپ مساحت هریک از مثلث‌ها چقدر است؟





ج) به شکل‌های زیر توجه کنید.



در هر دو شکل مشاهده می‌شود دو مثلث و ذوزنقه‌ای که مساحت آن‌ها را در قسمت «ب» حساب کرده‌اید، در مربع و مستطیلی قرار گرفته‌اند که مساحت آن‌ها را در قسمت «الف» حساب کرده‌اید. یعنی به نظر می‌رسد باید مساحت مستطیل و مربعی که در قسمت «الف» حساب کرده‌اید، برابر باشند. ولی چنین نیست. چرا؟

۳. در مسئلهٔ قبل مساحت مربع و مستطیل از حاصل‌ضرب‌های ۸ × ۸ و ۱۳ × ۵ به‌دست می‌آمد. این اعداد در الگوی عددی زیر که به «دنبالهٔ فیبوناتچی»[1] معروف است، ظاهر می‌شوند.

$$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹, \ldots$$

مسئله‌ای مشابه مسئلهٔ قبل طرح کنید به‌طوری‌که مساحت مربع و مستطیل آن بیشتر باشد.

۴. اگر سه نقطه $\begin{bmatrix}k\\ ۲\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}۰\\ k\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-۱\\ ۰\end{bmatrix}$ روی یک خط راست باشند، k چقدر است؟

۵. الف) چهار نقطه در صفحهٔ مختصات مثال بزنید که اگر آنها را دوبه‌دو به‌هم وصل کنیم، چهار شیب متفاوت به‌دست آید.

ب) آیا می‌توانید پنج نقطه در صفحهٔ مختصات مثال بزنید که اگر آنها را دوبه‌دو به‌هم وصل کنیم، چهار شیب متفاوت به‌دست آید؟

ج) آیا می‌توانید شش نقطه در صفحهٔ مختصات مثال بزنید که اگر آنها را دوبه‌دو به‌هم وصل کنیم، پنج شیب متفاوت به‌دست آید؟

---

[1] Sequence Fibonacci

۶. آیا می‌توان همهٔ اعضای مجموعهٔ زیر را در صفحهٔ مختصات نمایش داد؟

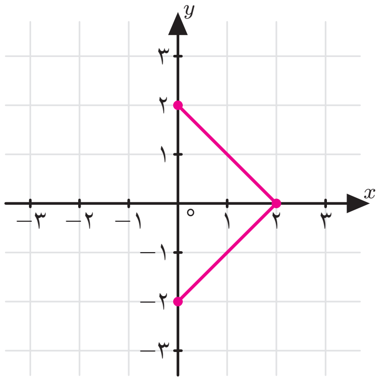
$$\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y = ۲x - ۳\right\}$$

۷. می‌دانیم A مجموعه‌ای شامل نقاطی از صفحهٔ مختصات است به‌طوری‌که همهٔ این نقاط روی یک خط راست قرار دارند.

الف) اگر بدانیم $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \in A$، آیا می‌توان همهٔ عضوهای مجموعهٔ A را مشخص کرد؟

ب) اگر بدانیم $A \supseteq \left\{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}\right\}$، آیا می‌توان همهٔ عضوهای مجموعهٔ A را مشخص کرد؟

۸. مهران و فرهاد می‌خواستند همهٔ نقاط روی پاره‌خط‌های صورتی شکل زیر را به‌صورت یک مجموعه نشان دهند.



پاسخ مهران

اگر

$$A = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid y = -x + ۲, x \geqslant ۰, y \geqslant ۰\right\}$$

و

$$B = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid y = x - ۲, x \geqslant ۰, y \leqslant ۰\right\},$$

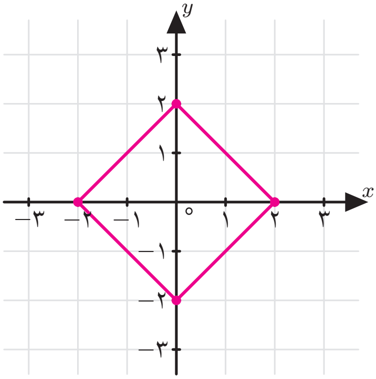
آنگاه مجموعهٔ همهٔ نقاط روی پاره‌خط‌های صورتی $A \cup B$ است.

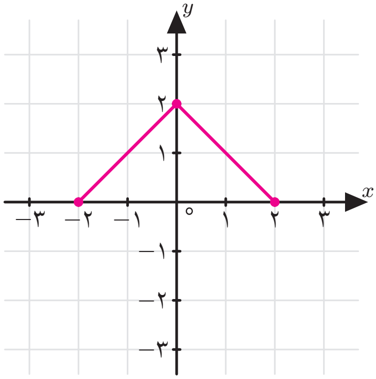
پاسخ فرهاد

اعضای مجموعهٔ $\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \mid x + |y| = ۲, x \geqslant ۰\right\}$ مجموعه همهٔ نقاط روی پاره‌خط‌های صورتی هستند.

آیا پاسخ‌های مهران و فرهاد درست هستند؟ برای پاسخ درست، راه‌حلِ کامل بنویسید.

۹. در هریک از شکل‌های زیر همهٔ نقاط روی پاره‌خط‌های صورتی را به‌صورت یک مجموعه نشان دهید.





۱۰. آرمیتا می‌خواست مجموعه نقاطی در صفحهٔ مختصات را بیابد که فاصلهٔ همهٔ آن نقاط از نقطهٔ $\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$ برابر ۴ باشد. او راه‌حل زیر را نوشت.

راه‌حل آرمیتا

نقطهٔ $\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$ را O می‌نامیم. فرض کنیم فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه $A = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ از نقطهٔ O برابر ۴ باشد. از نقطهٔ A خطی موازی با محور y و از نقطهٔ O خطی موازی با محور x رسم می‌کنیم. این دو خط یکدیگر را در نقطهٔ B قطع می‌کنند. طول پاره‌خطی که نقاط O و B را به یکدیگر وصل می‌کند برابر است با $|x - ۲|$. همچنین طول پاره‌خطی که نقاط A و B را به یکدیگر وصل می‌کند برابر است با $|y - ۳|$. چون رابطهٔ فیثاغورس

برای سه پاره‌خط AB، AO و BO برقرار است، پس:

$$BO^۲ + AB^۲ = AO^۲ \Longrightarrow (x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۴^۲.$$

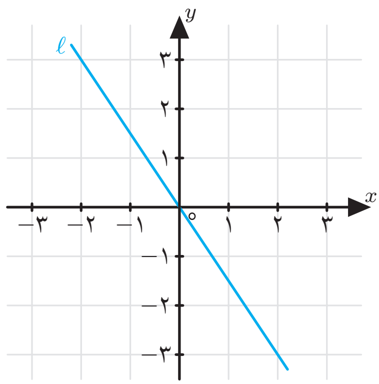
بنابراین مجموعهٔ زیر، مجموعهٔ خواسته شده است.

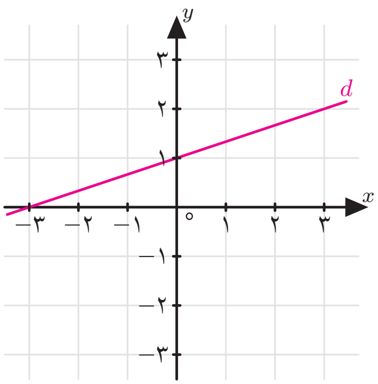
$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid (x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۶ \right\}$$

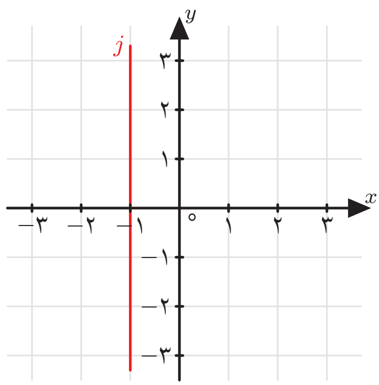
الف) دربارهٔ راه حل آرمیتا بحث کنید.

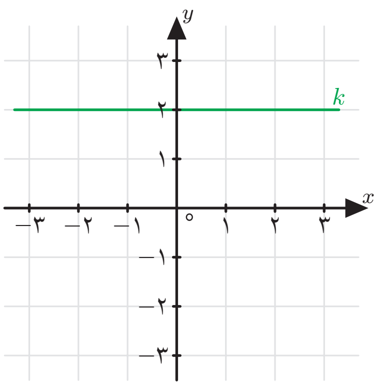
ب) آیا می‌توانید همهٔ نقاطی را که آرمیتا به‌دست آورده است، روی صفحهٔ مختصات نشان دهید؟

۱۱. هما، فاطمه و فرخنده می‌خواستند معادلهٔ چهار خط زیر را به‌دست آورند.









پاسخ‌های آنها به‌صورت زیر است. برای پاسخ هریک راه‌حل کامل بنویسید و دربارهٔ هر راه‌حل بحث کنید.

راه‌حل هما

معادلهٔ خط در حالت کلی به‌صورت $y = ax + b$ است که در آن a شیب و b عرض از مبدأ است.

بنابراین معادلهٔ این چهار خط به‌صورت زیر است.

$\ell :\ y = -\frac{3}{2}x$ $\qquad$ $d :\ y = \frac{1}{3}x + 1$

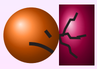
$j :$  $\qquad$ $k :\ y = 2$

راه‌حل فاطمه

معادلهٔ خط در حالت کلی به‌صورت $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ است که در آن a طول از مبدأ و b عرض از مبدأ می‌باشد.

بنابراین معادلهٔ این چهار خط به‌صورت زیر است.

$\ell :$  $\qquad$ $d :\ \frac{x}{-3} + \frac{y}{1} = 1$

$j :$  $\qquad$ $k :$ 

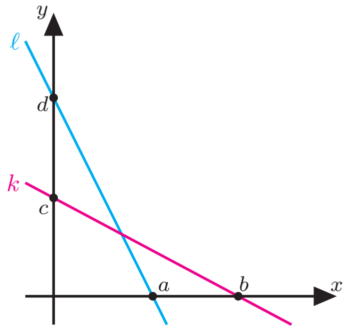
راه‌حل فرخنده

معادلهٔ خط در حالت کلی به‌صورت $ax + by + c = 0$ است. بنابراین معادلهٔ این چهار خط به‌صورت زیر است.

$\ell :\ 3x + 2y = 0$ $\qquad$ $d :\ x - 3y + 3 = 0$

$j :\ x + 1 = 0$ $\qquad$ $k :\ y - 2 = 0$

۱۲. مطابق شکل زیر، خط k به معادلهٔ $\frac{x}{۸} + \frac{y}{۴} = ۱$، خط ℓ را قطع کرده است. اگر $b - a = ۵$ و $d - c = ۵$، آنگاه معادلهٔ خط ℓ را به‌دست آورید.

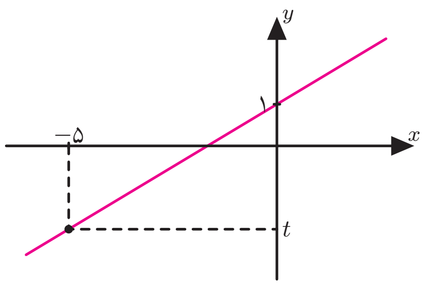


۱۳. خط به معادلهٔ $۲x - ۷y + ۴ = ۰$ از کدام ربع دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱۴. اگر بدانیم $a^۲ + b^۲ = ۰$، آنگاه معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ چه چیزی را در صفحهٔ مختصات نشان می‌دهد؟

۱۵. معادلهٔ خطی را بنویسید که محور xها را در نقطه‌ای به‌طول ۲ قطع کند و موازی خطی باشد که از دو نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

۱۶. خط $y = ۲x + d$ در زیر رسم شده است. مقدار t چقدر است؟



۱۷. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) اگر شیب دو خط برابر باشند، آن دو خط موازی‌اند.

ب) اگر دو خط موازی باشند، شیب آن دو خط برابرند.

۱۸. می‌دانیم دو خط $y = mx + b$ و $y = m'x + b'$ موازی‌اند. اگر $mm' = ۱$، آنگاه کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

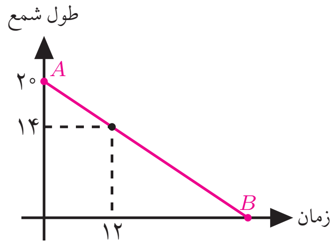
الف) هر دو خط، موازیِ نیمساز ربع اول و سوم هستند.

ب) هر دو خط، موازیِ نیمساز ربع دوم و چهارم هستند.

۱۹. زاویهٔ بین دو خط $x = ۱۳۹۵$ و $y + x = ۲۰۱۶$ چند درجه است؟

۲۰. محیط هشت‌ضلعی منتظمی که سه ضلع آن روی خطوط $y = ۶$، $y = x + ۲$ و $x = ۲$ باشد، چقدر است؟

۲۱. یک شمع عجیب در حالت ایستاده روشن می‌شود و آنقدر روشن می‌ماند تا تمام شود. پاره‌خط AB در شکل زیر، طول شمعِ در حال سوختن را برحسب زمان نشان می‌دهد.



الف) اگر دو سر این شمع عجیب را همزمان روشن کنیم و شمع را به‌صورت افقی روی میز بگذاریم، هر طرف شمع مانند حالت ایستاده می‌سوزد. در این‌حالت نمودار سوختن شمع را رسم کنید.

ب) اگر دو سر این شمع عجیب را همزمان روشن کنیم و شمع را به‌صورت عمودی نگه داریم، پایین شمع با سرعت ۷ برابر بالای شمع می‌سوزد. در این حالت نمودار سوختن شمع را رسم کنید.

۲۲. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) اگر $(x+y) + (x-y) = ۱$، آنگاه $x = \frac{۱}{۲}$ و $y = -\frac{۱}{۲}$.

ب) اگر $\sqrt{۳}(x+y) + (x-y) = ۱$، آنگاه $x = \frac{۱}{۲}$ و $y = -\frac{۱}{۲}$.

دستگاه معادلات خطی

۱. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۳x+۲y \\ ۸ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۷ \\ -۲x-۲y \end{bmatrix}$.

الف) x و y را طوری تعیین کنید که A روی محور عرض‌ها و B روی محور طول‌ها باشد.

ب) x و y را طوری تعیین کنید که A روی نیمساز ربع اول و سوم و B روی نیمساز ربع دوم و چهارم باشد.

۲. فاصلهٔ محل برخورد دو خط $۲x - y = ۱$ و $y + ۳x - ۴ = ۰$ از مبدأ مختصات چقدر است؟

۳. معادله خطی را بنویسید که با خط $\sqrt{۲}y - ۲x + ۲ = ۰$ موازی باشد و از نقطه برخورد دو خط $y + ۲x - ۵ = ۰$ و $y - ۲x - ۱ = ۰$ بگذرد.

۴. محل برخورد دو خط به معادله‌های $y = x + ۲$ و $my = x + n$ روی محور x قرار دارد. n را بیابید.

۵. مقدار k را طوری تعیین کنید که دستگاه زیر جواب نداشته باشد.

$$\begin{cases} ۳x - ۲y = k \\ kx + ۳y = ۱۳۹۵ \end{cases}$$

۶. محل برخورد دو خط $y = ۳x + ۲$ و $y = \frac{a}{۲}x - \frac{۳}{۲}$ دارای مختصات طبیعی است. پنج برادر محدودهٔ مقدار a را به‌صورت زیر حدس زدند. کدام حدس درست و کدام نادرست است؟

- حدس هوشنگ: $۶ < a \leqslant ۱۳$
- حدس بیژن: $۷ < a < ۱۴$
- حدس ارژنگ: $۶ \leqslant a < ۱۳$
- حدس ارسلان: $۵ < a < ۱۴$
- حدس اردشیر: $۱۰ < a < ۱۲$

۷. اگر سه خط با معادله‌های $x - y = ۰$، $(۲m - ۵)x + my = ۳$ و $۲x + y = ۹$ یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند، آنگاه m را بیابید.

۸. معادلهٔ پنج خط را بنویسید به‌طوری‌که این پنج خط دقیقاً در یک نقطه مشترک باشند.

۹. علیرضا در آزمونی شرکت کرد که ۴۰ سؤال داشت. روی دفترچهٔ آزمون نوشته شده بود: «هر پاسخ درست ۰/۵ نمرهٔ مثبت و هر پاسخ نادرست ۱ نمرهٔ منفی دارد.» علیرضا در پایان آزمون خوشحال بود که به تمام سؤال‌ها پاسخ داده است؛ اما بعد از اعلام نتایج نمرهٔ علیرضا ۲ شد! او به چند سؤال پاسخ درست داده بود؟

۱۰. احمد و محمود هر کدام تعدادی سکه داشتند. احمد ۵ سکه از پدربزرگش گرفت و سکه‌هایش دو برابر سکه‌های محمود شد. سپس ۱۲ سکه به مادربزرگش داد و تعداد سکه‌هایش نصف تعداد سکه‌های محمود شد. احمد در ابتدا چند سکه داشته است؟

۱۱. می‌دانیم $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه ۱ است. $P(x)$ را طوری تعیین کنید که داشته باشیم $P(۱) = ۳$ و $P(۲) = ۵$.

۱۲. می‌دانیم $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه ۲ است. $P(x)$ را طوری تعیین کنید که داشته باشیم $P(۱) = ۰$، $P(۲) = ۱$ و $P(۳) = ۴$.

۱۳. می‌دانیم $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه ۳ است. $P(x)$ را طوری تعیین کنید که داشته باشیم $P(۱) = ۰$، $P(۲) = ۱$ و $P(۳) = ۳$.

۱۴. می‌دانیم m و n اعدادی حقیقی هستند و معادلهٔ خط d به‌صورت زیر است:

$$(۲x + y + ۲)m + (۳y - x + ۷)n + (۵x - ۲y + ۱۰) = ۰.$$

اگر خط d موازی محور عرض‌ها باشد و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به‌طول ۲− قطع کند، آنگاه m و n را بیابید.

سهیل این مسئله را به‌صورت زیر حل کرده است. ابتدا ایراد راه‌حل سهیل را پیدا کنید و سپس m و n را به‌دست آورید.

راه‌حل سهیل

معادلهٔ خط در حالت کلی به‌صورت $ax + by + c = ۰$ است. پس ابتدا چهرهٔ معادله را این‌گونه تغییر می‌دهیم:

$$(۲x + y + ۲)m + (۳y - x + ۷)n + (۵x - ۲y + ۱۰) = ۰$$

$$\Longrightarrow (۲m - n + ۵)x + (m + ۳n - ۲)y + (۲m + ۷n + ۱۰) = ۰. \quad (\star)$$

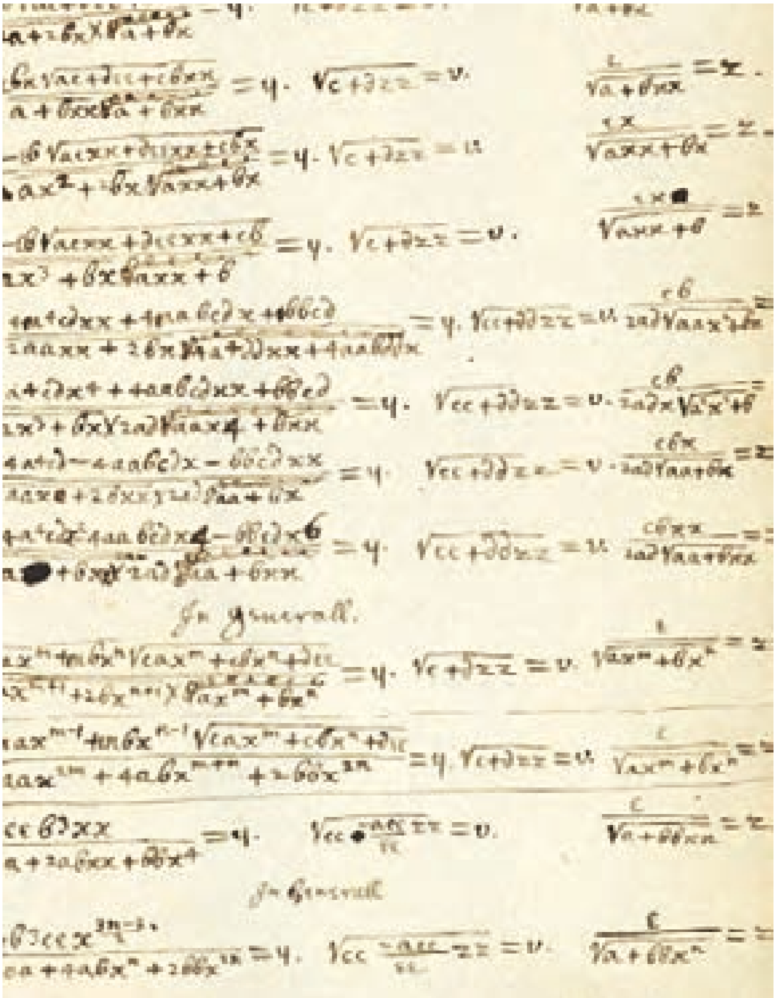
چون خط d موازی محور عرض‌هاست و طول از مبدأ آن ۲− است، در نتیجه $x = -۲$ معادلهٔ خط d است. پس در رابطهٔ $(\star)$ ضریب x برابر ۱ و ضریب y برابر صفر است. بنابراین برای به‌دست آوردن m و n کافی است دستگاه معادلات زیر را حل کنیم.

$$\begin{cases} ۲m - n + ۵ = ۱ \\ m + ۳n - ۲ = ۰ \end{cases}$$

از دستگاه بالا به‌سادگی نتیجه می‌شود که $m = -\frac{۱۰}{۷}$ و $n = \frac{۸}{۷}$.

فصل ۷

عبارت‌های گویا



با شروع دوران کلاسیک ریاضیات و ابداع نمادگذاری‌های مدرن ریاضی، عبارت‌های گویا را می‌توان در اکثر متون علمی دید. در تصویر بالا، دستخطّ آیزاک نیوتن، از بنیان‌گذاران ریاضیات کلاسیک را مشاهده می‌کنید.

گفت‌وگو

چند دقیقهٔ آخر کلاس بود. بعد از یادگرفتن تقسیم چندجمله‌ای‌ها نه کسی حال یادگرفتن درس جدید را داشت و نه فعلاً نیازی بود که تمرین بیشتری حل شود.

معلم: کسی سؤالی یا نظری دارد؟

دانش‌آموز ۱: من به چیز جالبی رسیدم. چندجمله‌ای‌ها خیلی شبیه اعداد صحیح هستند. هر دوتا جمع و تفریق دارند. هر دوتا ضرب هم دارند. تقسیم‌شان هم شبیه هم است.

معلم: آفرین.

دانش‌آموز ۲: این که چیز واضحی است. چون چندجمله‌ای‌ها متغیرهایی دارند که در آنها عدد می‌گذاریم، خُب معلوم است که باید اینقدر شبیه اعداد باشند. اگر جز این بود باید تعجب می‌کردیم.

معلم: مطمئنی؟

دانش‌آموز ۲: بله. مگر اشتباه گفتم؟

معلم: به‌جای متغیرهای چندجمله‌ای‌ها اعداد حقیقی می‌گذاری ولی رفتار آنها شبیه اعداد صحیح است.

دانش‌آموز ۲: خُب اعداد حقیقی هم جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دارند. درست مثل چندجمله‌ای‌ها.

معلم: [درحالی‌که رویش را به سمت دانش آموز ۱ برگرداند] درست می گوید؟

دانش‌آموز ۱: نه.

معلم: چرا؟

دانش‌آموز ۱: تقسیم چندجمله‌ای‌ها شبیه تقسیم اعداد صحیح است. باقی‌مانده‌اش قاعده و قانون دارد. از یک جایی به بعد عمل تقسیم متوقف می‌شود. در مورد اعداد حقیقی این طور نیست. مثلاً اگر ۲ را بر ۳ تقسیم کنیم...

دانش‌آموز ۲: هه! اتفاقاً ۲ و ۳ هر دو عدد صحیح هستند!

دانش‌آموز ۱: من که هنوز حرفم تمام نشده بود.

معلم: قرار بود در مباحثه وسط حرف همدیگر نپرید!

دانش‌آموز ۱: اتفاقاً با اینکه ۲ و ۳ هر دو عدد صحیح هستند، اگر طبق قاعدهٔ تقسیم اعداد حقیقی جلو برویم دورهٔ گردش می‌آورند؛ ولی در اعداد صحیح ۲ تقسیم بر ۳ خارج‌قسمتش صفر است و باقی‌مانده‌اش ۲.

معلم: خوشحالم این آخر سالی تقریباً یاد گرفته‌اید که مباحثه کنید.

اینجا بود که صدای زنگ بلند شد و خیلی‌ها صدای معلم را که در صدای زنگ گم شده بود نشنیدند که گفت: «یک ریاضی‌دان بزرگ به شباهت بین مفاهیم ریاضی پی می‌برد ولی یک ریاضی‌دان خیلی بزرگ شباهت بین شباهت‌های بین مفاهیم ریاضی را کشف می‌کند.»

حکایتی از گلستان سعدی

یکی را از حکما شنیدم که می‌گفت هرگز کسی به جهل خویش اقرار نکرده است مگر آن کس که چون دیگری در سخن باشد همچنان ناتمام گفته، سخن آغاز کند.

سخن را سر است ای خداوند و بن
میاور سخن در میان سخن
خداوند تدبیر و فرهنگ و هوش
نگوید سخن تا نبیند خموش

ساده کردن عبارت‌های گویا

۱. عبارت زیر را ساده کنید.

$$\frac{x^۲ - ۳x + ۲}{x^۲ - ۴}$$

حنیف و سبحان با راه‌حل‌های زیر عبارت بالا را ساده کرده‌اند. دربارهٔ راه‌حل این دو نفر بحث کنید.

راه‌حل حنیف

$$\frac{x^۲ - ۳x + ۲}{x^۲ - ۴} = \frac{(x-۲)(x-۱)}{(x-۲)(x+۲)}$$
$$= \frac{x-۱}{x+۲} \quad (x \neq ۲)$$

چون در کسر $\frac{(x-۲)(x-۱)}{(x-۲)(x+۲)}$ ریشه‌های مخرج ۲ و ۲− هستند، و در کسر $\frac{x-۱}{x+۲}$ ریشه مخرج فقط ۲− است، پس واجب است شرط $x \neq ۲$ نوشته شود.

البته گذاشتن شرط $x \neq -۲$ مستحب است که من ننوشته‌ام. چون خود کسر $\frac{x-۱}{x+۲}$ می‌گوید $x \neq -۲$.

راه‌حل سبحان

$$\frac{x^۲ - ۳x + ۲}{x^۲ - ۴} = \frac{(x-۲)(x-۱)}{(x-۲)(x+۲)} \quad (x \neq ۲,\ x \neq -۲)$$
$$= \frac{x-۱}{x+۲} \quad (x \neq ۲,\ x \neq -۲)$$

چون اعداد ۲ و ۲− ریشه‌های مخرج کسر $\frac{x^۲ - ۳x + ۲}{x^۲ - ۴}$ هستند پس در همهٔ تساوی‌ها باید شرط‌های $x \neq ۲$ و $x \neq -۲$ نوشته شود.

۲. زینب یک عبارت گویا را ساده کرد و حاصل را این‌گونه نوشت:

$$\frac{x-1}{x+2}, \quad (x \neq 2)$$

می‌دانیم زینب عمل ساده کردن را درست انجام داده است. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) عبارتی که زینب ساده کرده است می‌تواند $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ باشد.

ب) عبارتی که زینب ساده کرده است می‌تواند $\frac{x^3+x-x^2-1}{x^3+x+2x^2+2}$ باشد.

۳. لیلا یک عبارت گویا را ساده کرد و حاصل را این‌گونه نوشت:

$$\frac{x-1}{x+2}.$$

می‌دانیم لیلا عمل ساده کردن را درست انجام داده است. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) عبارتی که لیلا ساده کرده است می‌تواند $\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}$ باشد.

ب) عبارتی که لیلا ساده کرده است می‌تواند $\frac{a-ax}{-ax-2a}$ باشد.

۴. حداقل سه عبارت گویا مثال بزنید که ساده شدهٔ آنها عبارت زیر باشد.

$$\frac{2x-1}{x+2}, \quad \left(x \neq -3,\ x \neq 2, x \neq \frac{1}{2}\right)$$

۵. باتوجه‌به تساویِ

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}=\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}$$

مقدار $a+b+c$ را به‌دست آورید.

۶. حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $\frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}-\frac{x-3}{x^2-4x+3}$

ب) $\frac{x-1}{x+2} \times \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$

۷. ثابت کنید معکوس ریشه‌های چندجمله‌ای x^3-x+1، ریشه‌های چندجمله‌ای x^5+x+1 است.

تقسیم چندجمله‌ای‌ها

۱. تقسیم کنید و رابطه تقسیم را بنویسید.

الف) $۴x^۳ + ۲x$ بر $x + ۲$

ب) $۵x^۵ + ۱$ بر $x^۲ + ۳x + ۱$

ج) $x - x^۲ + ۲x^۴ + \frac{۱}{۸}$ بر $۲x - ۱$

د) $۵x^۴ - ۳x^۵ - ۳x - ۵$ بر $x + ۱ - x^۲$

ه) $x^۴$ بر $x + \sqrt{۲}$

۲. تقسیم‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $۳x^۲ + ۴$ بر $x^۲ + ۴$

ب) $x^۲ + ۴$ بر $۳x^۲ + ۴$

ج) ۲۵ بر $x + ۵$

د) $x + ۵$ بر ۲۵

۳. در تقسیم زیر، مقسوم‌علیه را به‌دست آورید.

$$\begin{array}{c|l} ۶x^۴ - ۷x^۳ - ۴x^۲ + ۵x + ۳ & \\ \cline{2-2} \vdots & ۲x^۲ - ۳x + ۱ \\ \cline{1-1} -۲x + ۵ & \end{array}$$

۴. یک چندجمله‌ای درجه ۵ را بر یک چندجمله‌ای درجه ۳ تقسیم کرده‌ایم. درجهٔ خارج‌قسمت چند است؟ چرا؟ برای هر حالت یک مثال بیاورید.

۵. یک چندجمله‌ای درجه ۷ را بر یک چندجمله‌ای درجه ۳ تقسیم کرده‌ایم. درجهٔ باقی‌مانده کدام‌یک از اعداد صفر، ۱، ۲، ۳ یا ۴ می‌تواند باشد؟ چرا؟ برای هر حالت یک مثال بیاورید.

۶. هر یک از رابطه‌های زیر یک رابطه تقسیم را نشان می‌دهد. در هر قسمت، ابتدا به‌جای $P(x)$ چندجمله‌ای مناسب قرار دهید و سپس مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج‌قسمت و باقی‌مانده را مشخص کنید.

الف) $۴x^۵ + ۱ = (P(x))(۲x^۲ + ۲x + ۱) + (-x^۲ - ۲x + \frac{۱}{۲})$

ب) $x^۵ + ۲x^۲ + ۱ = (P(x))(x^۲ - x + ۱) + x$

۷. اگر $x^۴ - ۲x^۳ - x^۲ + ۲x - ۲۴ = (x-a)(x-b)(x^۲ - x + ۴)$، اتحاد باشد، آنگاه a^b برابر با چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۸. آیا رابطهٔ تقسیم، اتحاد است؟

۹. الف) با استفاده از تقسیم $x^۴+x^۳-۲x^۲+۱$ بر $x^۲+۱$، چندجمله‌ای $x^۴+x^۳-۲x^۲-۳+x$ را تجزیه کنید.

ب) آیا می‌توان گفت بعد از انجام یک تقسیم در چندجمله‌ای‌ها، یک تمرین تجزیه متولد شده است؟!

۱۰. الف) تساوی زیر یک رابطه تقسیم است. مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج‌قسمت و باقی‌مانده را مشخص کنید.

$$x^۶ + ۲x^۴ = (x^۴ + x^۲ + ۱)(x^۲ + ۱) + (-۲x^۲ - ۱)$$

ب) آیدا $-۴x^{۱۰}+۱$ را بر یک چندجمله‌ای تقسیم کرد. او در انجام تقسیم دچار اشتباه شد و رابطه تقسیم را به‌صورت زیر نوشت.

$$-۴x^{۱۰}+۱=(-۲x^{۲}-۱)(۲x^{۸}-x^{۶}+\frac{۱}{۲}x^{۴}-\frac{۱}{۴}x^{۲})+(-\frac{۱}{۴}x^{۲}+۱)$$

می‌دانیم تساوی بالا اتحاد است. اشتباه آیدا را پیدا کنید و پس از اصلاح رابطه تقسیم، مقسوم‌علیه، خارج‌قسمت و باقی‌مانده را مشخص کنید.

۱۱. اگر $P(x)$ یک سه‌جمله‌ای درجهٔ ۶ و $Q(x)$ یک چندجمله‌ای درجهٔ ۳ باشد و $P(x)$ را بر $Q(x)$ تقسیم کرده باشیم، آنگاه کدام‌یک از جمله‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) باقی‌مانده می‌تواند یک چندجمله‌ای درجهٔ ۲ و خارج‌قسمت یک سه‌جمله‌ای باشد.

ب) باقی‌مانده می‌تواند یک سه‌جمله‌ای و خارج‌قسمت می‌تواند یک سه‌جمله‌ای باشد.

ج) خارج‌قسمت می‌تواند یک چهارجمله‌ای باشد.

د) باقی‌مانده می‌تواند یک چهارجمله‌ای باشد.

۱۲. باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^{۴}-ax^{۳}+x^{۲}+۲ax+۱$ بر $x+۱$ برابر ۴ است. a چه عددی است؟

۱۳. داریوش می‌خواست بدون عملیات تقسیم، باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^{۵}+۲۰$ بر $x-۲$ را پیدا کند. راه‌حل او در صفحهٔ بعد آمده است. دربارهٔ راه‌حل داریوش بحث کنید.

راه‌حل داریوش

رابطهٔ تقسیم به‌صورت زیر است.

$$x^{۵}+۲۰=(x-۲)Q(x)+R(x),$$

که در آن $Q(x)$ خارج‌قسمت و $R(x)$ باقی‌مانده هستند. چون مقسوم‌علیه از درجهٔ یک است پس یا درجهٔ باقی‌مانده صفر است یا باقی‌مانده برابر صفر است. بنابراین می‌توان باقی‌مانده را به‌صورت یک عدد حقیقی مثل a نشان داد. بنابراین می‌توانیم

رابطهٔ تقسیم را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$x^{۵} + ۲۰ = (x - ۲)Q(x) + a.$$

در این تساوی $Q(x)$ و a را نمی‌شناسیم. بنابراین یکی را نابود می‌کنیم تا بتوانیم دیگری را پیدا کنیم. انتخاب ما نابودی $Q(x)$ است.

می‌دانیم تساوی بالا یک اتحاد است؛ یعنی اگر به‌جای x هر عددی بگذاریم به یک تساویِ عددیِ درست می‌رسیم؛ بنابراین به‌جای x، ۲ قرار می‌دهیم تا $Q(x)$ نابود شود.

$$۲^{۵} + ۲۰ = (۲ - ۲) \times Q(۲) + a \Longrightarrow ۳۲ + ۲۰ = ۰ \times Q(۲) + a$$

$$\Longrightarrow ۵۲ = a.$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^{۵} + ۲۰$ بر $x - ۲$ برابر ۵۲ است.

۱۴. بدون محاسبات تقسیم، باقی‌ماندهٔ تقسیم‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $x^{۵} + ۲۰$ بر $x - ۳$

ب) $x^{۵} + x^{۴} - ۱۰$ بر $(x - ۱)(x - ۳)$

۱۵. چندجمله‌ای $x^{۱۰} + x^{۵} - ۱۰$ را بر $x^{۲} + x + ۱$ تقسیم کرده‌ایم. می‌دانیم خارج‌قسمت به‌ازای $x = -۱$ برابر ۱ است. آیا می‌توان بدون عملیات تقسیم، مقدار باقی‌مانده را به‌ازای $x = -۱$ پیدا کرد؟

۱۶. اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $۳x - ۱$ برابر $R(x)$ باشد، آنگاه دربارهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x - \frac{۱}{۳}$ چه می‌توان گفت؟

۱۷. یک چندجمله‌ای بیابید که بر $x - ۱$ بخش‌پذیر باشد و همچنین باقی‌ماندهٔ تقسیمش بر $x + ۲$، ۳۳ شود.

۱۸. در تقسیم $۴x^{۳} + ۸x^{۲} - ۱۱x$ بر $۲x - ۱$، مقدار خارج‌قسمت به‌ازای $x = \frac{۱}{۲}$ چیست؟

۱۹. کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) عبارت $x^۳(x^۲-۱۳)^۲-۱۴۴x$ بر $x^۳-x^۲$ بخش‌پذیر است.

ب) عبارت $x^۳(x^۲-۱۳)^۲-۱۴۴x$ بر $x^۲+۵x+۶$ بخش‌پذیر است.

۲۰. در هر مورد m و n دو عدد هستند. آنها را بیابید.

الف) می‌خواهیم عبارت $nx^۳-۴x^۲-mx+۶$ بر $x^۲-x-۲$ بخش‌پذیر شود.

ب) می‌خواهیم عبارت $x^۵+nx^۴+(۳m+n)x^۳-۷x^۲+۲(۲m-n)x-۸$ بر $x^۳-۳x+۲$ بخش‌پذیر شود.

۲۱. اگر $F(x)$ و $G(x)$ دو چندجمله‌ای با متغیر x باشند و باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر $x^۲-x+۱$ به‌ترتیب $x-۱$ و $x-۲$ شود، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $F(x)\times G(x)$ را بر $x^۲-x+۱$ بیابید.

۲۲. اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای با متغیر x باشد و باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x+۱$، $x-۲$ و $x+۲$ به‌ترتیب، ۱، ۳ و ۲− شود، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ را بر $(x^۲-۴)(x+۱)$ به‌دست آورید.

بخشی از یک حکایت گلستان سعدی

یکی از حکما پسر را نهی همی کرد از بسیار خوردن که سیری مردم را رنجور کند گفت ای پدر گرسنگی خلق را بکشد نشنیده‌ای که ظریفان گفته‌اند به سیری مردن به که گرسنگی بردن. گفت اندازه نگهدار، «کُلوا وَ اشرَبوا وَ لا تُسرِفوا»[۱].

نه چندان بخور کز دهانت بر آید — نه چندان که از ضعف، جانت برآید

[۱] قرآن کریم، سورهٔ مومنون، آیهٔ ۵۱.

فصل ۸

حجم و مساحت

یک مخروط و چند نیم‌کرهٔ دوست‌داشتنی؟!

حجم و سطح کره

۱. الف) چرا پرگار دایره رسم می‌کند؟

ب) آیا می‌توانید وسیله‌ای مثال بزنید که در فضا کره بسازد؟

۲. یک ظرف استوانه‌ای به ارتفاع ۲۵ و شعاع ۱۲، پر از آب است. کره‌ای به قطر ۲۰ را در ظرف فرو می‌بریم و سپس بیرون می‌آوریم. چقدر آب در ظرف باقی می‌ماند؟

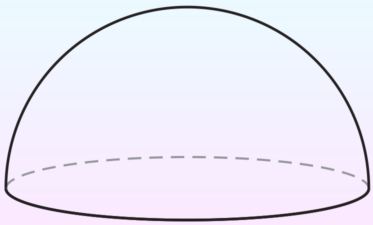
۳. یک گوی کروی به شعاع ۳، در مرکزش حفره‌ای کروی به شعاع ۲ دارد. حجم این جسم چقدر است؟

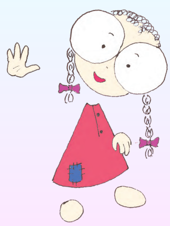
۴. حجم یک کره با مساحت آن مساوی شده است. شعاع کره را به‌دست آورید.

۵. نوشین برای پیدا کردن فرمول حجم کره، راه‌حل زیر را ارائه کرد. راه‌حل نوشین را به‌دقت بخوانید و توضیحات آن را کامل کنید.

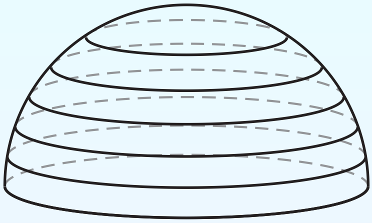
راه‌حل نوشین

فرمول حجم نیم‌کره‌ای به شعاع ۱ را به‌دست می‌آوریم.



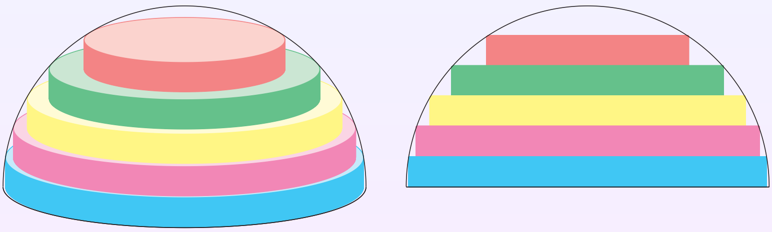


برای به‌دست آوردن حجم نیم‌کره‌ای به شعاع ۱، روی نیم‌کره پنج دایره با فاصله‌های مساوی رسم می‌کنیم تا مانند شکل زیر، نیم‌کره به شش قطعه با ارتفاع‌های برابر تقسیم شود.



واضح است که رابطه‌ای برای محاسبهٔ حجم این شش قطعه نداریم! پس شکلی داخل هریک از آنها قرار می‌دهیم که حجم آن شکل به حجم قطعه نزدیک باشد و فرمول محاسبهٔ حجم آن شکل را بدانیم.

بنابراین در هریک از این قطعه‌ها، استوانه‌ای با ارتفاع $\frac{1}{۶}$ و بیشترین حجم ممکن قرار دهیم. شکل‌های زیر، دو نما از این استوانه‌ها را نشان می‌دهند.



همان‌طور که در شکل‌های بالا می‌بینید در قطعهٔ ششم نمی‌توان استوانه‌ای به ارتفاع $\frac{1}{۶}$ قرار داد؛ ولی ما در ادامهٔ کار، شکلِ داخل قطعهٔ ششم را استوانه‌ای به شعاع صفر و ارتفاع $\frac{1}{۶}$ در نظر می‌گیریم!

واضح است که ارتفاع هریک از این استوانه‌ها $\frac{1}{۶}$ شعاع نیم‌کره است. برای به‌دست آوردن حجم هریک از استوانه‌ها باید شعاع آنها را داشته باشیم. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، مربع شعاع هر استوانه به‌سادگی به‌صورت زیر، به‌دست می‌آید.

$$۱-\left(\frac{۱}{۶}\right)^۲,\ ۱-\left(\frac{۲}{۶}\right)^۲,\ ۱-\left(\frac{۳}{۶}\right)^۲,\ ۱-\left(\frac{۴}{۶}\right)^۲,\ ۱-\left(\frac{۵}{۶}\right)^۲,\ ۱-\left(\frac{۶}{۶}\right)^۲.$$

چون ارتفاع هر استوانه $\frac{۱}{۶}$ است، پس مجموع حجم این شش استوانه برابر است با:

$$\pi\left(۱-\left(\frac{۱}{۶}\right)^{۲}\right)\times\frac{۱}{۶}+\pi\left(۱-\left(\frac{۲}{۶}\right)^{۲}\right)\times\frac{۱}{۶}+\cdots+\pi\left(۱-\left(\frac{۶}{۶}\right)^{۲}\right)\times\frac{۱}{۶}$$
$$=\pi\left(۶-\frac{۱^{۲}+۲^{۲}+\cdots+۶^{۲}}{۶^{۲}}\right)\times\frac{۱}{۶}$$
$$=\pi\left(۱-\frac{۱^{۲}+۲^{۲}+\cdots+۶^{۲}}{۶^{۳}}\right)$$
$$=\pi-\pi\left(\frac{۱^{۲}+۲^{۲}+\cdots+۶^{۲}}{۶^{۳}}\right).$$

به‌جای شش استوانه می‌توانیم هفت، هشت یا هر تعداد دلخواهی مانند n استوانه داشته باشیم. باتوجه‌به رابطهٔ بالا، حجم n استوانه از فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$$\pi-\pi\left(\frac{۱^{۲}+۲^{۲}+\cdots+n^{۲}}{n^{۳}}\right)$$

در فصل اول کتاب ریاضی تکمیلی سال هشتم، روش ساده‌ای برای به‌دست آوردن حاصل‌جمع $۱^{۲}+۲^{۲}+\cdots+n^{۲}$ آمده است که بنابه آن روش داریم:

$$\pi-\pi\left(\frac{۱^{۲}+۲^{۲}+\cdots+n^{۲}}{n^{۳}}\right)=\pi-\pi\left(\frac{\frac{۱}{۶}n(n+۱)(۲n+۱)}{n^{۳}}\right)$$
$$=\pi-\pi\left(\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶n^{۳}}\right).$$

واضح است که هر چقدر تعداد استوانه‌ها، یا عدد n، بزرگتر شود، مجموع حجم استوانه‌ها به حجم نیم‌کره نزدیکتر می‌شود. در جدول زیر، برای مقادیری از n، حاصل تقریبی عبارت $\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶n^{۳}}$ را تا ۷ رقم اعشار به‌دست آورده‌ایم.

n	۶	۶۶	۶۶۶	۶۶۶۶	۶۶۶۶۶
$\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶n^{۳}}$	۰/۴۲۱۲۹۶۳	۰/۳۴۰۹۴۷۴	۰/۳۳۴۰۸۴۵	۰/۳۳۳۴۰۸۳	۰/۳۳۳۳۴۰۸

پس هر چه n بزرگتر شود مقدار کسر $\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶n^{۳}}$ به $\frac{۱}{۳}$ نزدیکتر می‌شود. بنابراین حجم نیم‌کره‌ای به شعاع ۱ برابر است با:

$$\pi-\pi\left(\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۲}{۳}\pi.$$

در نتیجه حجم کره‌ای به شعاع ۱ برابر $\frac{۴}{۳}\pi$ می‌باشد.

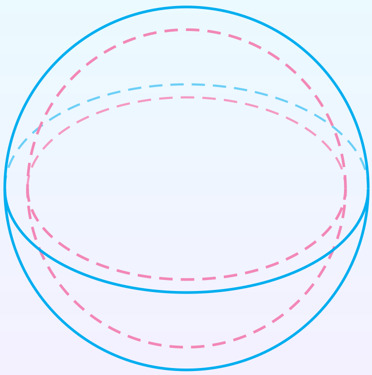
اکنون با استفاده از همین استدلال به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت که حجم نیم‌کره‌ای به شعاع r برابر $\frac{۲}{۳}\pi r^{۳}$ است. بنابراین حجم کره‌ای به شعاع r برابر است با $\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$.

۶. آرمیتا برای پیدا کردن فرمول مساحت کره، راه‌حل زیر را ارائه کرد. راه‌حل آرمیتا را به‌دقت بخوانید و توضیحات آن را کامل کنید.

راه‌حل آرمیتا

ابتدا مساحت کره‌ای به شعاع ۱ را حساب می‌کنیم.

فرض کنید h عدد مثبت کوچکی باشد. شکل زیر، دو کرهٔ هم‌مرکز را که شعاع‌های آنها ۱ و $۱+h$ است، نشان می‌دهد.



ابتدا حجم لایهٔ بین دو کره را برحسب h به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}\frac{۴}{۳}\pi(۱+h)^{۳}-\frac{۴}{۳}\pi &= \frac{۴}{۳}\pi\big((۱+h)^{۳}-۱\big)\\ &= \frac{۴}{۳}\pi(۳h+۳h^{۲}+h^{۳})\\ &= \frac{۴}{۳}\pi(۳+۳h+h^{۲})h.\end{aligned}$$

از طرفی، حجم این لایه از حاصل‌ضرب مقدار مساحت کرهٔ کوچکتر در h بیشتر و از حاصل‌ضرب مقدار مساحت کرهٔ بزرگتر در h کمتر است. بنابراین اگر مساحت

کرهٔ کوچکتر و کرهٔ بزرگتر را به‌ترتیب با s و S نشان دهیم، داریم:

$$sh < \text{حجم لایهٔ بین دو کره} < Sh \Longrightarrow sh < \frac{۴}{۳}\pi(۳ + ۳h + h^۲)h < Sh$$

$$\Longrightarrow s < \frac{۴}{۳}\pi(۳ + ۳h + h^۲) < S.$$

هر چقدر h به صفر نزدیکتر شود، مقدار عبارت $۳ + ۳h + h^۲$ به ۳ نزدیکتر می‌شود.

در نتیجه مساحت کره‌ای به شعاع ۱ برابر است با ۴π.

با همین استدلال می‌توان به‌سادگی نتیجه گرفت فرمول مساحت کره‌ای به شعاع r برابر $۴\pi r^۲$ است.

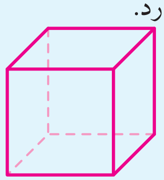
چندوجهی

چندوجهی

بخشی از فضا که از همه طرف با تعدادی صفحه محصور شده است جسمی پدید می‌آورد که به آن چندوجهی می‌گویند.

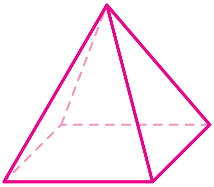
بخش‌هایی از صفحه‌هایی که چندوجهی را پدید می‌آورند سطح‌های با محیط چندضلعی هستند؛ هر چندضلعی (در اینجا منظور سطح درون چندضلعی است)، را وجه‌های چندوجهی، ضلع‌های هر چندضلعی را یال‌های چندوجهی و رأس‌های هر چندضلعی را رأس‌های چندوجهی می‌نامند.

برای مثال، همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، مکعب یک چندوجهی است که شش وجه، دوازده یال و هشت رأس دارد.

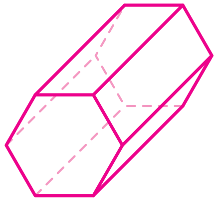


۱. چرا هریک از شکل‌های زیر چندوجهی هستند؟ در هر چندوجهی تعداد وجه‌ها، یال‌ها و رأس‌ها را بشمارید.

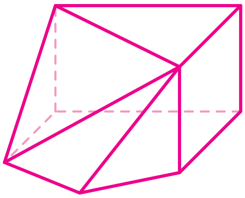
الف)



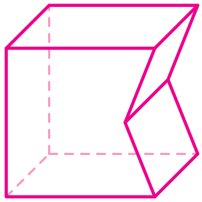
ب)



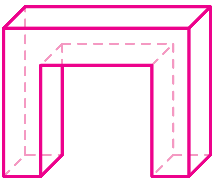
ج)



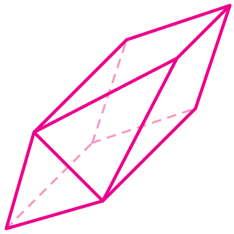
د)



هـ)

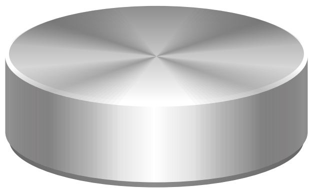


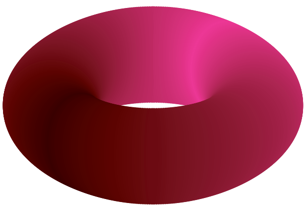
و)



۲. الف) چرا استوانه، مخروط و کره، چندوجهی نیستند؟

ب) چرا شکل‌های زیر چندوجهی نیستند؟





۳. الف) آیا می‌توانید دوتا چهاروجهی مثال بزنید که تعداد یال‌های آنها برابر نباشد؟

ب) آیا می‌توانید دوتا پنج‌وجهی مثال بزنید که تعداد یال‌های آنها برابر نباشد؟

ج) آیا می‌توانید دوتا شش‌وجهی مثال بزنید که تعداد یال‌های آنها برابر نباشد؟

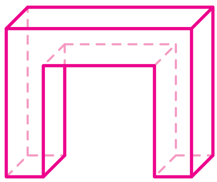
د) آیا می‌توانید سه‌تا هفت‌وجهی مثال بزنید که تعداد یال‌های آنها برابر نباشد؟

چندوجهی محدب و مقعر

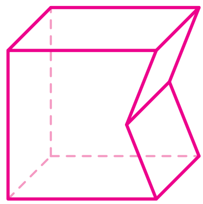
در یک چندوجهی، اگر پاره‌خط وصل کنندهٔ هر دو نقطهٔ دلخواه چندوجهی به‌طور کامل داخل چندوجهی قرار گیرد به آن چندوجهی، چندوجهی محدب می‌گویند؛ در غیر این‌صورت آن چندوجهی مقعر نامیده می‌شود.

۴. چرا چندوجهی‌های زیر مقعرند؟

الف)



ب)



۵. الف) یک شش‌وجهی مقعر مثال بزنید که تمام وجه‌های آن چهارضلعی باشند. سپس تعداد یال‌ها و رأس‌های آن را بشمارید.

ب) یک دوازه‌وجهی مقعر مثال بزنید که دقیقاً ۱۰ وجه آن چهارضلعی باشد.

ج) یک چندوجهی مقعر مثال بزنید که هیچ‌یک از وجه‌های آن چهارضلعی نباشند.

۶. می‌دانیم وجه‌های یک پنج‌وجهی، چهارتا مثلث و یک چهارضلعی هستند. این پنج‌وجهی چند یال دارد؟

کیومرث این مسئله را به‌صورت زیر حل کرده است. درستی راه‌حل او را بررسی کنید.

راه‌حل کیومرث

می‌دانیم در یک چندوجهی، هر یال بین دقیقاً دو وجهْ مشترک است. بنابراین اگر چندضلعی‌های روی وجه‌ها را جدا از هم در نظر بگیریم، مجموعِ تعدادِ ضلع‌های این چندضلعی‌ها، دقیقاً دو برابرِ تعداد یال‌هاست؛ یا به‌عبارتِ‌دیگر تعداد یال‌ها، نصف مجموعِ تعدادِ ضلع‌های این چندضلعی‌هاست.

پس در این مسئله، تعداد یال‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

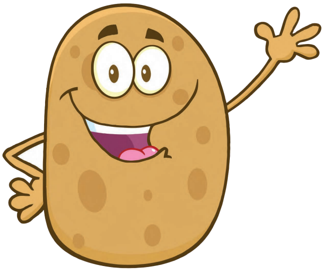
$$\frac{۱}{۲} \times (۴ \times ۳ + ۱ \times ۴) = \frac{۱}{۲} \times (۱۲ + ۴) = ۸.$$

۷. می‌دانیم وجه‌های یک هفت‌وجهی، دوتا مثلث و پنج‌تا چهارضلعی هستند. این هفت وجهی چند یال دارد؟

۸. می‌دانیم وجه‌های یک هشت‌وجهی چهارتا مثلث و چهارتا چهارضلعی هستند.

الف) تعداد یال‌های این هشت‌وجهی چند تاست؟

ب) با شرایط بالا، یک هشت‌وجهی با سیب‌زمینی بسازید!

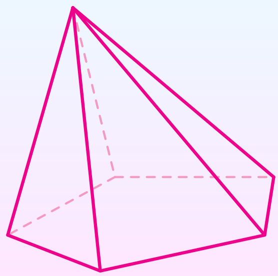


۹. یک شش‌وجهی محدب مثال بزنید که ۱۰ یال داشته باشد.

امید و کیومرث با راه‌حل‌های زیر، مثال‌های متفاوتی پیدا کرده‌اند. دربارهٔ این دو راه‌حل بحث کنید.

راه‌حل امید

اگر این شش‌وجهی یک هرم باشد، قاعدهٔ آن پنج‌ضلعی است. از طرفی چون هرم با قاعدهٔ پنج ضلعی، ۱۰ یال دارد، بنابراین مثال پیدا شده است!



راه‌حل کیومرث

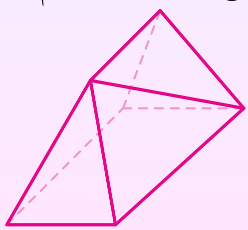
ابتدا باید کشف کنیم که هریک از وجه‌های این شش‌وجهی، چند ضلع دارند. برای کشف این موضوعِ کلیدی، از تعداد یال‌ها کمک می‌گیریم.

اگر در این شش‌وجهی، وجه‌ها را جدا از هم در نظر بگیریم، آنگاه شش‌تا چندضلعی داریم که مجموعِ تعدادِ ضلع‌های آنها دو برابر تعداد یال‌هاست. یعنی اگر چند تا چندضلعی پیدا کنیم که مجموعِ تعدادِ ضلع‌های آنها دو برابر تعداد یال‌ها شود، آن‌وقت کلید حل مسئله در دستمان است.

با اندکی محاسبه، به‌سادگی نتیجه می‌شود که وجه‌های این چندوجهی از یکی از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$۵ \times ۳ + ۱ \times ۵ = ۲۰ \quad \text{«یا»} \quad ۴ \times ۳ + ۲ \times ۴ = ۲۰.$$

رابطهٔ سمت چپ می‌گوید که این شش‌وجهی می‌تواند از پنج‌تا سه‌ضلعی و یک پنج‌ضلعی ساخته شده باشد. رابطهٔ سمت راست نشان می‌دهد که این شش‌وجهی می‌تواند از چهارتا سه‌ضلعی و دوتا چهارضلعی تشکیل شده باشد. در زیر، با استفاده از چهار مثلث و دو چهارضلعی، یک مثال آورده‌ایم.



۱۰. الف) وجه‌های یک هفت‌وجهی محدب فقط مثلث و چهارضلعی هستند. اگر این هفت‌وجهی ۱۳ یال داشته باشد، آنگاه از چند مثلث و چند چهارضلعی تشکیل شده است؟ آن را بسازید.

ب) یک هفت‌وجهی محدب مثال بزنید که ۱۵ یال داشته باشد و هیچ‌یک از وجه‌های آن مثلث نباشند.

۱۱. الف) یک شش‌وجهی محدب مثال بزنید که ۹ یال داشته باشد.

ب) یک شش‌وجهی محدب مثال بزنید که ۱۱ یال داشته باشد.

ج) یک هفت‌وجهی محدب مثال بزنید که ۱۱ یال داشته باشد.

۱۲. یک هشت‌وجهی دلخواه مثال بزنید و تعداد یال‌های آن را بشمارید؛ سپس تعداد یال‌ها را به هم‌کلاسی‌هایتان بدهید و از آنها بخواهید یک هشت‌وجهی با این تعداد یال بسازند. سعی کنید هشت‌وجهی‌ای که مثال می‌زنید طوری باشد که هم‌کلاسی‌هایتان نتوانند مسئلهٔ شما را به‌سادگی حل کنند.

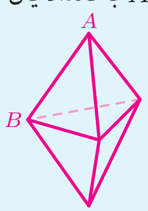
چندوجهی‌های منتظم

چندوجهی‌های منتظم

به یک چندوجهی محدب که هر سه شرط زیر را داشته باشد، چندوجهی منتظم می‌گویند.

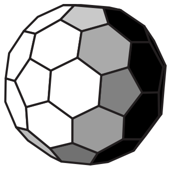
- همهٔ وجه‌ها چندضلعی منتظم باشند.
- همهٔ وجه‌ها هم‌نهشت باشند.
- تعداد یال‌های متصل به یک رأس با تعداد یال‌های متصل به هریک از رأس‌های دیگر برابر باشد.

برای مثال، مکعب یک چندوجهی منتظم است ولی شکل زیر چندوجهی منتظم نیست زیرا تعداد یال‌های متصل به رأس A با تعداد یال‌های متصل به رأس B برابر نیست.

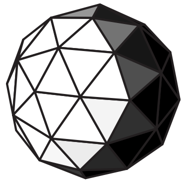


۱. چرا شکل‌های زیر چندوجهی منتظم نیستند؟

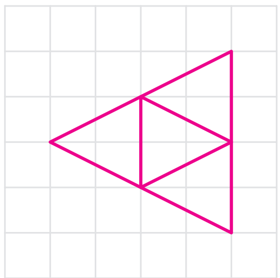
الف)



ب)

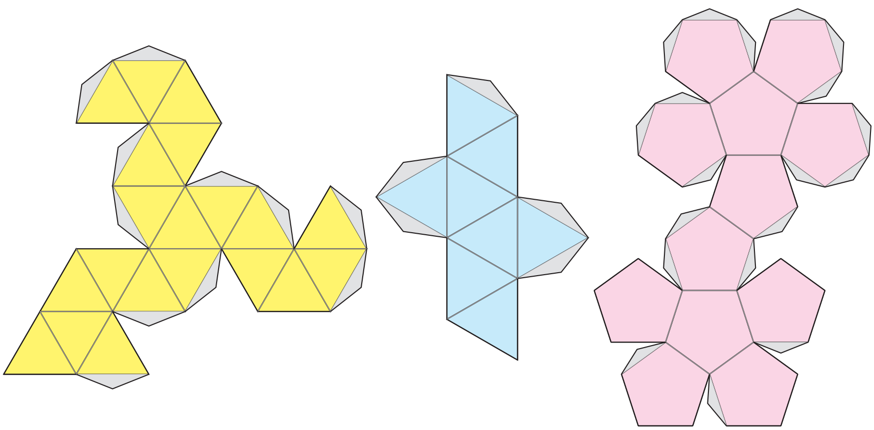


۲. شکل صورتی زیر، گستردهٔ یک چندوجهی را نشان می‌دهند. این چندوجهی را بسازید. آیا این چندوجهی منتظم است؟ (طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است.)



۳. در زیر، گستردهٔ سه چندوجهی منتظم را می‌بینید. هریک از آنها را با ابعاد بزرگ‌تر روی یک مقوای A3 طوری رسم کنید که وقتی آن را می‌بُرید تبدیل به یک چندوجهی منتظم با بیشترین حجم ممکن شود. در هر مورد تعداد وجه‌ها، یال‌ها و رأس‌ها را بشمارید.

توجه داشته باشید که ناحیه‌های خاکستری جزء گستردهٔ چندوجهی نیستند؛ ولی وقتی می‌خواهید وجه‌های چندوجهی را به‌هم بچسبانید، این ناحیه‌ها کمک می‌کنند که وجه‌های چندوجهی راحت‌تر به یکدیگر بچسبند.



۴. اگر بخواهیم با مثلث چندوجهی منتظم بسازیم، هر رأس به چند یال می‌تواند متصل باشد؟ همهٔ حالت‌های ممکن را بیابید و برای هر حالت یک چندوجهی منتظم بسازید.

۵. اگر بخواهیم با چهارضلعی چندوجهی منتظم بسازیم، هر رأس به چند یال می‌تواند متصل باشد؟ همهٔ حالت‌های ممکن را بیابید و برای هر حالت یک چندوجهی منتظم بسازید.

۶. اگر بخواهیم با پنج‌ضلعی چندوجهی منتظم بسازیم، هر رأس به چند یال می‌تواند متصل باشد؟ همهٔ حالت‌های ممکن را بیابید و برای هر حالت یک چندوجهی منتظم بسازید.

۷. چرا برای $n \geqslant ۶$، nـ ضلعی منتظمی وجود ندارد که بتوان با آن چندوجهی منتظم ساخت؟

۸. **پروژه.** همهٔ چندوجهی‌های منتظم را بیابید.

۹. **پروژه.** سال گذشته با کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع آشنا شدید و دیدید که با استفاده از یک یا چند نوع چندضلعی می‌توان کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع کرد.

می‌خواهیم مشابه کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع، این بار در فضا و با استفاده از چندوجهی‌ها فضا را پر کنیم. با چه چندوجهی‌هایی می‌توان فضا را این‌چنین پر کرد؟

حجم هرم و مخروط

۱. هامون یک چهاروجهی منتظم به طول یال ۱ ساخته است. او می‌خواهد چند هرم بسازد که با چسباندن آنها به چهاروجهی منتظم، یک مکعب ساخته شود. آیا چنین هرم‌هایی وجود دارند؟ اگر پاسخ مثبت است هرم‌ها را بسازید و حجم هریک از آنها را محاسبه کنید.

۲. هومان یک مکعب ساخت و یکی از رأس‌های آن را A نامید. او می‌خواست سه رأس دیگر از مکعب را طوری انتخاب کند که به‌همراه رأس A، چهار رأس یک چهاروجهی منتظم باشند. آیا چنین رأس‌هایی وجود دارند؟ اگر پاسخ مثبت است این مکعب و چهاروجهی را بسازید.

۳. حجم یک چهاروجهی منتظم به طول یال ۱ را به‌دست آورید.

۴. حجم یک هرم منتظم با قاعدهٔ مربع ۳۸۴ سانتی‌متر مکعب و ارتفاع آن ۸ سانتی‌متر است. طول ضلع قاعده و مساحت کل هرم را به‌دست آورید.

۵. قیف یک بستنی، مخروطی به عمق ۱۰ سانتی‌متر و شعاع ۵ سانتی‌متر است. دو تکه بستنی به شکل نیم‌کره و به قطر ۵ سانتی‌متر روی قیف بستنی گذاشته شده است. اگر بستنی‌ها آب شوند، آیا از قیف بیرون می‌ریزند؟

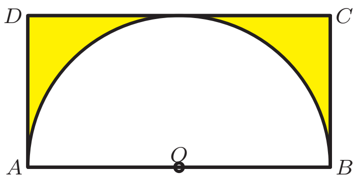
سطح و حجم

۱. چهار نقطهٔ $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. حجم حاصل از دورن چهارضلعی $ABCD$ حول هریک از خط‌های زیر چقدر است؟

الف) $y = 1$ ب) $x = 2$ ج) $y = 0$ د) $x = 4$

۲. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$. اگر چهارضلعی $ABCD$ را حول خط $x = 2$، ۱۸۰ درجه دوران دهیم، حجم حاصل چقدر می‌شود؟

۳. همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، در مستطیل $ABCD$ نیم‌دایره‌ای به شعاع OA رسم شده است. حجم حاصل از دوران ناحیهٔ زرد حول خط AB چقدر است؟



۴. یک مستطیل در نظر بگیرید که مربع نباشد. می‌خواهیم خطی موازی با طول مستطیل پیدا کنیم که اگر مستطیل را حول آن خط دوران دهیم، حجم به‌دست آمده با حجم حاصل از دوران مستطیل حول عرضش برابر باشد. فاصلهٔ این خط از طول مستطیل را برحسب طول و عرض مستطیل به‌دست آورید.

۵. سه نقطهٔ $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. حجم حاصل از دوران مثلث ABC حول هریک از خط‌های زیر چقدر است؟

الف) $x = ۳$ ب) $y = ۵$ ج) $y = -۱$ د) $x = ۰$

۶. حجم حاصل از دوران یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a حول یکی از اضلاعش را برحسب a به‌دست آورید.

۷. حجم حاصل از دوران یک مربع به ضلع ۱ حول یکی از قطرهایش چقدر است؟

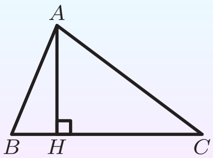
۸. در مثلث ABC، $\hat{A} = ۹۰°$، $AB = ۱۲$ و $AC = ۵$. حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع BC را حساب کنید.

۹. در مثلث ABC، طول ضلع‌های AB، AC و ارتفاع AH به‌ترتیب برابر با ۱۳، ۲۰ و ۱۲ است. حجم حاصل از دوران مثلث ABC حول BC چقدر است؟

بهرام و مژده این مسئله را به‌صورت زیر حل کرده‌اند. توضیحات راه‌حل هریک را کامل کنید.

راه‌حل بهرام

مثلث ABC و ارتفاع AH را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.



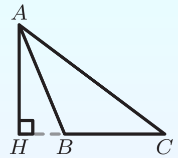
بنابه قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH، داریم $BH = ۵$ و

$CH = ۱۶$. حال کافی است مجموع حجم حاصل از دوران مثلث‌های ABH و ACH را حول BC محاسبه کنیم.

$$\frac{۱}{۳}(\pi(AH)^۲(BH)) + \frac{۱}{۳}(\pi(AH)^۲(CH)) = \frac{۱}{۳}(\pi(AH)^۲(BH + CH))$$
$$= \frac{۱}{۳}(\pi(۱۲)^۲(۵ + ۱۶))$$
$$= ۱۰۰۸\pi.$$

راه‌حل مژده

مثلث ABC و ارتفاع AH را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.



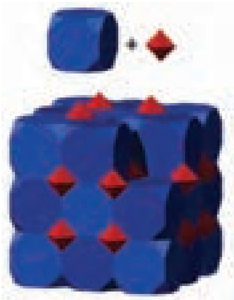
بنابه قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های ACH و ABH، داریم $CH = ۱۶$ و $BH = ۵$. حال کافی است تفاضل حجم حاصل از دوران مثلث‌های ACH و ABH محاسبه کنیم.

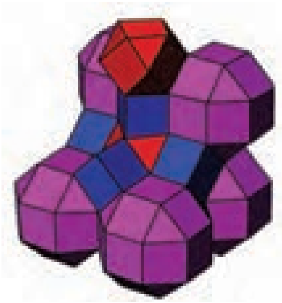
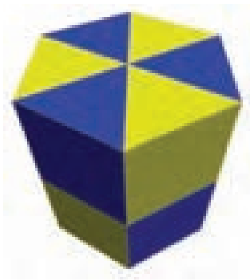
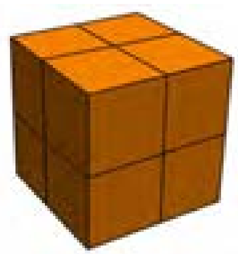
$$\frac{۱}{۳}(\pi(AH)^۲(CH)) - \frac{۱}{۳}(\pi(AH)^۲(BH))$$
$$= \frac{۱}{۳}(\pi(۱۲)^۲(۱۶)) - \frac{۱}{۳}(\pi(۱۲)^۲(۵))$$
$$= ۷۶۸\pi - ۲۴۰\pi$$
$$= ۵۲۸\pi.$$

۱۰. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، $\hat{A} = ۴۵^\circ$، $AB = ۶$ و $AD = ۴\sqrt{۲}$. حجم حاصل از دوران این متوازی‌الاضلاع را یک‌بار حول ضلع AB و بار دیگر حول ضلع AD حساب کنید.

دربارهٔ طرح روی جلد

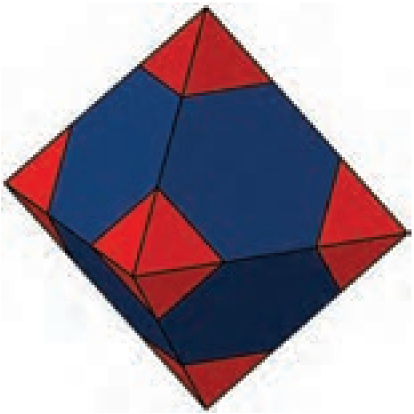
به پر کردن فضای سه‌بعدی با چندوجهی‌ها به‌گونه‌ای‌که هیچ فضایی بین چندوجهی‌ها خالی نماند و اگر دو وجه یا دو یال دو چندوجهی روی هم قرار بگیرند کاملاً برهم منطبق شوند، لانه‌زنبوری[۱] می‌گویند. برای مثال، یک لانه‌زنبوری می‌تواند فقط از مکعب تشکیل شده باشد؛ یا اگر از هر چندضلعیِ یک کاشی‌کاریْ یک منشور با قاعدهٔ آن کاشی بسازیم به‌طوری‌که ارتفاع منشورها برابر باشند، یک لانه‌زنبوری خواهیم داشت. در زیر تعدادی لانه‌زنبوری می‌بینید.

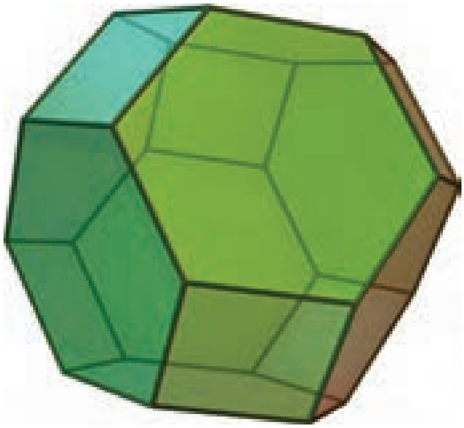


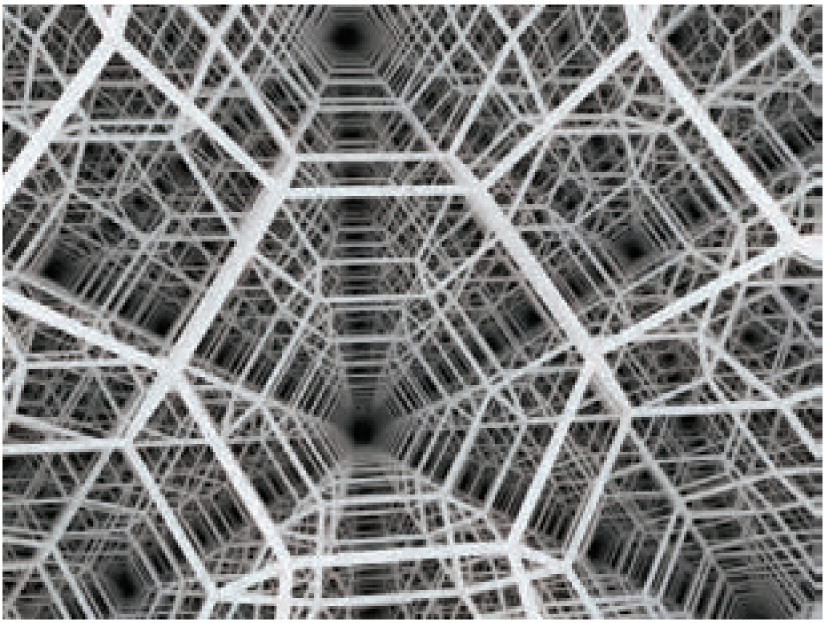

honeycomb[۱]

طرح روی جلد (شکل میانی سطر آخر صفحهٔ قبل)، یک لانه‌زنبوری را نشان می‌دهد که فقط از یک چندوجهی ساخته شده و این چندوجهی‌ها بدون دوران کنار و روی هم چیده شده‌اند. به هر یک از چندوجهی‌های این لانه‌زنبوری، هشت‌وجهی گوشه‌بریده[1] می‌گویند.



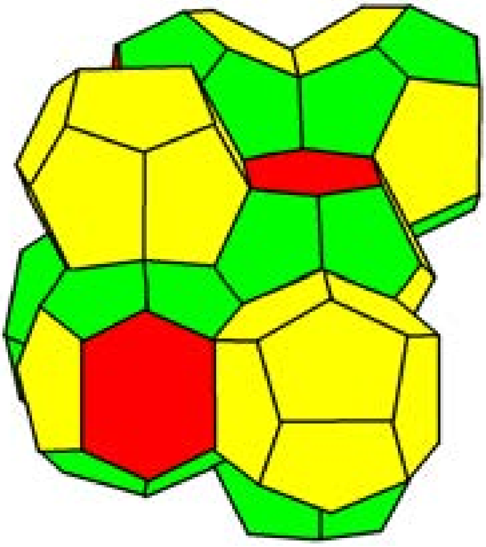


اگر وجه‌های این لانه‌زنبوری را حذف کنیم و از داخل به آن نگاه کنیم، تصویر زیر را می‌بینیم.



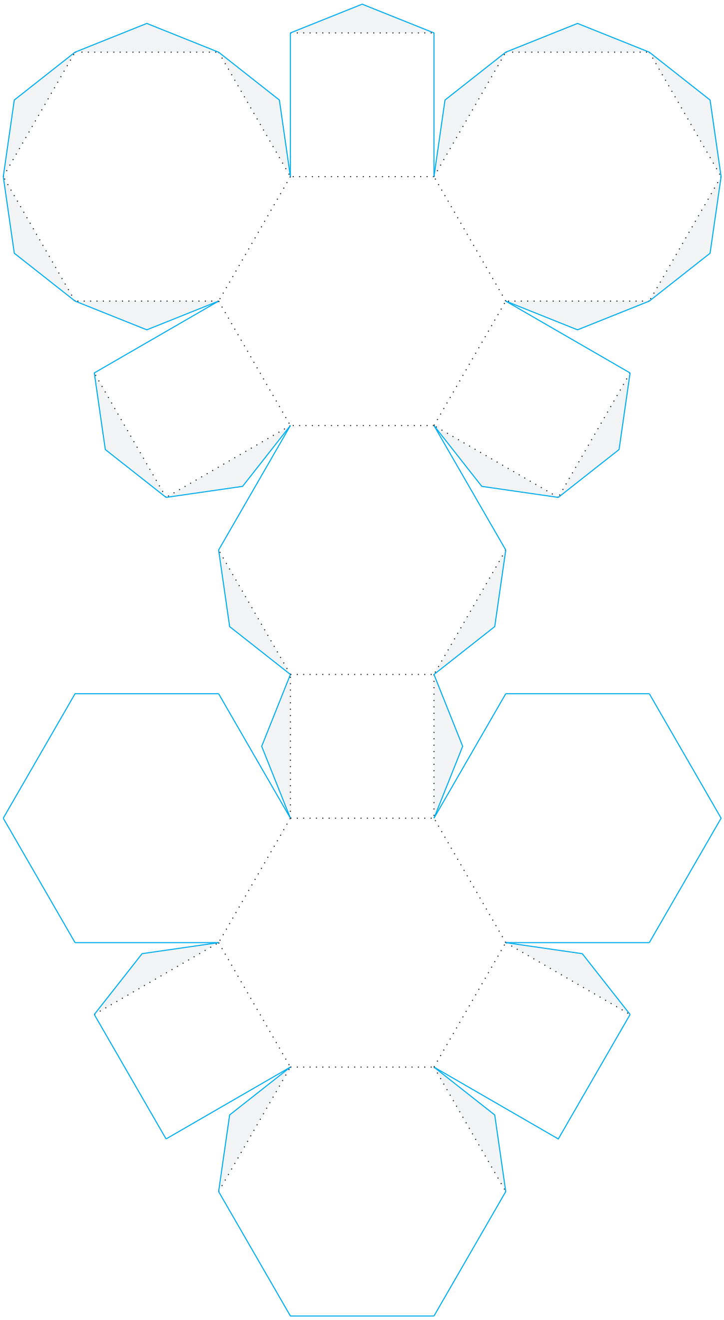
[1] Truncated Octahedra

در سال ۱۸۸۷ کلوین (Kelvin) حدس زد که مجموع مساحت وجه‌های لانه‌زنبوری ساخته شده با هشت‌وجهی‌های گوشه‌بریده، کمترین مقدار را در بین سایر لانه‌زنبوری‌ها دارد. فلان (Phelan) و ویر (Weaire) در سال ۱۹۹۳ با مثال نقض زیر، حدس کلوین را رد کردند.



از دیگر لانه‌زنبوری‌های جالب دیگر می‌توان به چهاروجهی‌های گوشه‌بریدهٔ تریاکیس اشاره کرد. چهاروجهی‌های گوشه‌بریدهٔ تریاکیس معرف چینش اتم‌های کربن در الماس است.

تصویر زیر گستردهٔ یک هشت‌وجهی گوشه‌بریده را نشان می‌دهد.



کتاب‌نامه

[۱] درک ج. استرویک، *تاریخ فشردهٔ ریاضیات*، ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی و حشمت‌اله کامرانی، نشر نو، تهران، ۱۳۶۶.

[۲] اِ.ژ.اُنه، *روش‌های حل مسئله‌های مقدماتی هندسه* ، ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی، انتشارات فاطمی، چاپ سوم، تهران، ۱۳۸۷.

[۳] جان باومگارت، *تاریخ جبر*، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل، انتشارات علمی و فرهنگی، تهران، ۱۳۸۵.

[۴] نادر حاجی‌زاده، حسین کرد و صادق بازوی، *هندسهٔ سال دوم* ، انتشارات خوشخوان، چاپ اول، تهران، ۱۳۸۱.

[۵] ارشک حمیدی، *هندسه از ابتدا تا . . .* ، جلد اول، نشر علوم ریاضی ره‌آورد، تهران، ۱۳۹۴.

[۶] محمدبن موسی خوارزمی، *جبر و مقابله*، ترجمهٔ حسین خدیوجم، انتشارات اطلاعات، تهران، ۱۳۶۳.

[۷] نجف دریابندری، *کتاب مستطاب آشپزی از سیر تا پیاز*، نشر کارنامه، تهران، ۱۳۹۰.

[۸] دمیتری فومین، سرگی گنکین و ایلیا ایتنبرگ، *محافل ریاضی (تجربه روس‌ها)*، ترجمهٔ ارشک حمیدی و مهرداد مسافر، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۸۶.

[۹] علی قصاب، *ریاضی تکمیلی سال اول دبیرستان*، سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان، تهران، ۱۳۸۹.

[۱۰] استیون کرانتس، *فنون مسئله حل کردن*، ترجمهٔ مهران اخباریفر، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۸۴.

[۱۱] نصیر کریمی، نیما احمدی‌پور اناری، مرتضی ثقفیان و میثم عقیقی، *۲۵۰ مسئلهٔ جبر*، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۸۸.

[۱۲] ـــ، *۲۵۰ مسئلهٔ هندسه*، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۸۸.

[۱۳] سرژ لانگ و جین مورو، *هندسه*، ترجمهٔ محمدعلی رضوانی، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۷.

[۱۴] ادوین مویز و فلوید دانز، *هندسه*، ترجمهٔ محمود دیانی، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۵.

[۱۵] تامس ال. هیث، *اصول اقلیدس*، ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۷.

[۱۶] غلامحسین یوسفی، *دامنی از گل: گزیدهٔ گلستان سعدی*، انتشارات سخن، تهران، ۱۳۹۳.

[۱۷] *ریاضیات کانگورو ۷ و ۸* ، ترجمهٔ مهران اخباریفر، انتشارات فاطمی با همکاری انتشارات باشگاه دانش‌پژوهان جوان، تهران، ۱۳۸۹.

[۱۸] *ریاضیات کانگورو ۹ و ۱۰* ، ترجمهٔ بردیا حسام، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۹۰.

[19] Martin Erickson, *AHA Solutions!*, MAA, 2009.

[20] Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, New York, 2000.

[21] Martin Aigner and Günter M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK* , Springer, Berlin, Fifth Edition, 2014.

[22] R. Hatcher and G. Gilbert *Mathematics Beyond the Numbers*, Kendall Hunt, 2012.

معلمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را دربارهٔ مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران، خیابان سپهبد قرنی، نبش سمیه، وزارت آموزش و پرورش، ساختمان مرحوم علاقه‌مندان، طبقهٔ هفتم، کد پستی ۱۵۹۹۹-۵۸۱۱۱ و یا به نشانی رایانامه sampad@medu.ir ارسال نمایند.

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان