

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# ریاضیات تکمیلی

ویژه مدارس استعدادهای درخشان

پایه هشتم دوره اول متوسطه



این کتاب، به منظور فراهم کردن مواد آموزشی تکمیلی مورد نیاز مدارس استعداد‌های درخشان، توسط مرکز ملی پرورش استعداد‌های درخشان و دانش‌پژوهان جوان و دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری طراحی و تألیف شده است.

نام کتاب:	ریاضیات تکمیلی ویژه مدارس استعداد‌های درخشان پایه هشتم دوره اول متوسطه - ۱۱۷/۱
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:	محمود امانی طهرانی، محمد نستوه، کورش امیری‌نیا، سیده‌طاهره آقامیری، رضا گلشن مهرجردی، عباسعلی مظفری و ناصر جعفری (اعضای شورای برنامه‌ریزی) محمدحسین احمدی، نرگس اخلاقی‌نیا، عبدالرضا زارع‌شحنه، سعید صدری، علی قصاب و عاطفه کشاورزی زفرقندی (اعضای گروه تألیف) واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری (نظارت) - سهیلا غفرانی (ویراستار علمی) - سید اکبر میرجعفری (ویراستار ادبی)
شناسه افزوده آماده‌سازی:	لیدا نیک‌روش (مدیر امور فنی و چاپ) - سعید صدری (نگاشتارگر (طراح گرافیک)، طراح جلد و صفحه‌آرا) - محمدحسین احمدی (طراح پشت جلد) - محمدحسین احمدی، عبدالرضا زارع‌شحنه (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان:	تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی) تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹ وبگاه: <a href="http://www.irtextbook.ir">www.irtextbook.ir</a> و <a href="http://www.chap.sch.ir">www.chap.sch.ir</a>
ناشر:	شرکت افست: تهران - کیلومتر ۴ جاده اُبعلی، پلاک ۸، تلفن: ۷۷۳۳۹۰۹۳، دورنگار: ۷۷۳۳۹۰۹۷، صندوق پستی: ۱۱۱۵۵ - ۴۹۷۹
چاپخانه:	شرکت افست «سهامی عام» ( <a href="http://www.Offset.ir">www.Offset.ir</a> )
سال انتشار و نوبت چاپ:	چاپ سوم ۱۳۹۶

حق چاپ محفوظ است.



بنیان‌گذار کبیر جمهوری اسلامی، حضرت امام خمینی (رحمة الله علیه)

ما در شرایط جنگ و محاصره توانسته‌ایم آن همه هنرآفرینی و اختراعات و پیشرفت‌ها داشته باشیم. ان‌شاءالله در شرایط بهتر، زمینه کافی برای رشد استعداد و تحقیقات را در همه امور فراهم می‌سازیم. مبارزه علمی برای جوانان زنده کردن روح جستجو و کشف واقعیت‌ها و حقیقت‌هاست.



به نام خداوند جان آفرین

## سخنی با معلم

ریاضیات (که در زبان پارسی قدیم «انگارِش» خوانده می شد) را بیشتر دانش بررسی کمیّتها، ساختارها، فضا و دگرگونی تعریف می کنند.

دیدگاه دیگری ریاضی را دانشی می داند که در آن با استدلال منطقی از اصول و تعریفها به نتایج دقیق و جدیدی می رسیم. با اینکه ریاضیات از علوم طبیعی به شمار نمی رود، ولی ساختارهای ویژه ای که ریاضی دانان می پژوهند بیشتر از دانش های طبیعی به ویژه فیزیک سرچشمه می گیرند و در فضایی جدا از طبیعت و محض گونه (مجرد) گسترش پیدا می کنند، به طوری که علوم طبیعی برای حل مسائل خود به ریاضی باز می گردند تا جوابشان را با آن مقایسه و بررسی کنند.

علوم طبیعی، مهندسی، اقتصاد و پزشکی بسیار به ریاضیات تکیه دارد ولی ریاضی دانان گاه به دلایل صرفاً ریاضی (و نه کاربردی) به تعریف و بررسی برخی ساختارها می پردازند.

\*\*\*\*\*

این کتاب که در راستای اجرای سیاست غنی سازی برنامه درسی مدارس استعدادهای درخشان و مطابق با اصل یکپارچگی و فراگیری برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران تولید شده است، به تعمیق بخش هایی از کتاب درسی ریاضی پایه هشتم می پردازد. این کتاب حاصل فرایندی مطالعاتی با بیش از پنج سال است؛ با این همه تیزبینی صاحب نظران در هنگام تدریس در نقد منصفانه این کتاب بسیار ضروری است، زیرا بی نقصی این کتاب هیچ گاه در تصور نبوده است!

فصل های کتاب متناظر با کتاب درسی ریاضی است و مشخصاً دبیر ریاضی مجرب خواهد فهمید که تدریس هر بخش را چه زمانی آغاز کند. با این همه کلید واژه های بخش های کتاب به صورت فهرست وار بدین شرح است:

۱. تمرین های این کتاب با پیش فرض استعداد برتر و نیاز مخاطبین نگاشته شده است. یک معلم خلاق می تواند مخاطبین خود را در هنگام تدریس با بخشی از تمرین ها به چالش مفهومی

بکشد. تفکر درباره همه تمرین‌ها در سال آموزشی واجب تلقی می‌شود، و این امر شاید در تضاد با معرفی کتاب‌های دیگر باشد. خلاقیت خود را با تدریس «این کتاب» به تصویر بکشید!

۲. دیر زمانی است که مقوله کارگاه بازی در فرایند تدریس نقش آفرینی می‌کند و کتاب پیش رو نیز متناسب با موضوع، با کارگاه‌های آموزشی غنی شده است. توصیه می‌شود زمانی یک یا دو جلسه‌ای برای اجرای هر یک از آنها در نظر بگیرید؛ و مکانی که می‌تواند فضایی به جز فضای مرسوم کلاسی باشد را به این امر اختصاص دهید.

۳. تغییرات فرهنگ آموزشی نیز مد نظر قرار گرفته اند. برای تغییر نسل، باید نخست دیدگاه خود را تغییر مناسب داد. برای این منظور باب بخشی به نام گفتگو در این کتاب گشوده شده است، تا عیاری برای سنگ محک نقد نظام تفکر تدریس معلمین در اختیار قرار داده شود. این گفتگوها آینه‌ای است برای نمود ساخت ارزش‌های رو به رشد، تا یک معلم نهاد ایستایی و پویایی خود را مشاهده کند.

۴. شماره برخی از مسائل کتاب با رنگ صورتی مشخص شده‌اند. این رنگ برای اعلام نیاز زمان بیشتری برای تفکر است. معلم باید در هنگام حل این مسائل زمان شایسته‌ای برای تفهیم روش حل و توصیف ایده‌ها و راهکارهای آن ارائه دهد؛ تا در طول یک سال آموزشی دانش آموزان منفعل، در کنار صدها مسئله مهارتی، با حل چند مسئله چالش برانگیز هم آشنا گردند.

۵. شماره برخی از مسائل کتاب با رنگ سبز مشخص شده‌اند. این رنگ نشان دهنده یک برنامه مطالعاتی است که در فرهنگ عامه به نام پروژه شناخته می‌شود. به زبان تمثیل اگر حل مسئله ریاضی را به بازچینش درست یک نقاشی قطعه‌قطعه شده تشبیه کنیم، انجام یک پروژه به مثابه کشیدن یک نقاشی خلاقانه با موضوع داده شده است. این هر دو ضروری است؛ زیرا پر واضح است که آحاد اندیشمندان باید بتوانند کاری از جنس حل مسئله را به‌خوبی انجام دهند، در حالی‌که نخبگان و سرآمدان باید به خلق آثار خلاقانه و ماندگار بپردازند.

# فهرست مطالب

۱	فصل ۱- عددهای صحیح و گویا
۲	گفت‌وگو
۴	یادآوری عددهای صحیح
۱۱	عددهای گویا
۲۱	فصل ۲- عددهای اول
۲۲	گفت‌وگو
۲۴	یادآوری عددهای اول
۲۶	تعیین عددهای اول
۲۹	ماشین کانوی
۳۱	فصل ۳- چندضلعی‌ها
۳۲	گفت‌وگو
۳۴	کارگاه بازی
۳۵	چندضلعی‌ها و تقارن
۳۷	توازی و تعامد
۴۱	چهارضلعی‌ها

۴۲	زاویه‌های داخلی و خارجی
۴۷	کاشی‌کاری
۵۵	<b>فصل ۴- جبر و معادله</b>
۵۶	ساده کردن عبارت‌های جبری
۶۰	پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری
۶۵	تجزیه عبارت‌های جبری
۶۹	معادله
۷۷	<b>فصل ۵- بردار و مختصات</b>
۷۸	کارگاه بازی
۷۹	دریچه‌ای به روبوکاپ
۸۲	کاربردهایی از بردارها
۸۴	بردار، رودخانه و غواص
۸۷	ریاضیات تخم مرغی
۸۹	<b>فصل ۶- مثلث</b>
۹۰	رابطه فیثاغورس
۹۵	هم‌نهستی
۹۶	مثلث‌های هم‌نهشت
۱۰۲	هم‌نهستی مثلث‌های قائم‌الزاویه
۱۰۸	تخیلات یک دانش‌آموز در کلاس ریاضی (۱)
۱۰۹	<b>فصل ۷- توان و جذر</b>
۱۱۰	توان
۱۱۲	اعداد رادیکالی



۱۱۳

تخیلات یک دانش‌آموز در کلاس ریاضی (۲)

۱۱۵

فصل ۸- آمار و احتمال

۱۱۶

گفت‌وگو

۱۱۸

دسته‌بندی داده‌ها و میانگین

۱۲۴

کارگاه بازی- حلقه شانس

۱۲۶

احتمال یا اندازه‌گیری شانس

۱۲۹

بررسی حالت‌های ممکن

۱۳۵

فصل ۹- دایره

۱۳۶

خط و دایره

۱۳۸

زاویه مرکزی و زاویه محاطی

۱۴۳

کاربردهایی از دایره

۱۴۷

کتاب‌نامه

۱۴۹

درباره طرح روی جلد





## عددهای صحیح و گویا



عددهای گویا را هر روز بارها می‌بینید و به‌کار می‌برید،  
فقط کفایت کمی بیشتر دقت کنید.

## گفت وگو

معلم ۱: [با لحنی خسته و معترض] من نمی فهمم که چرا بعضی از دانش آموزها دوست دارند که راه حل خودشان را توضیح بدهند؟! [پس از اندکی مکث] امروز برای صدمین بار یک اتفاق تکراری را دیدم؛ سر کلاس به یک مسئله رسیدیم. یکی از دانش آموزها مسئله را حل کرد و راه حلش را پای تخته نوشت. من هم درباره راه حل او توضیح دادم. هنوز حرفم تمام نشده بود که دانش آموزی دیگر گفت که من هم یک راه حل دیگر دارم.

معلم ۲: از اینکه وسط حرف شما پرید ناراحت شدید؟

معلم ۱: نه! حرفم تمام شده بود! با اینکه کامل کامل توضیح داده بودم، ولی او می خواست راه حل خودش را توضیح بدهد.

معلم ۲: شاید راه حلش متفاوت بوده است؟

معلم ۱: حُب، من معتقدم که دو حالت دارد: یا راه حلش غلط بوده یا درست. اگر غلط بوده که هیچ، و اگر درست بوده ما سر کلاس یک راه حل ارائه داده بودیم. دیگر نیازی به چک کردن راه حل او نداشتیم.

معلم ۲: ولی اگر راه حلش متفاوت باشد چه؟

معلم ۱: «اگر راه حلش متفاوت باشد» یعنی چه؟ مگر فرقی دارد از چه راه حلی مسئله حل شده باشد؟!

معلم ۲: برای شما؟ یا برای آن دانش آموز؟

معلم ۱ پاسخی نداد.

معلم ۲: برای شما می تواند خیلی فرق نداشته باشد، اما برای او مهم است.

معلمی دیگر از آن سوی اتاق دبیران وارد بحث شد.

معلم دیگر: ببخشید وارد بحث می‌شوم. منم فکر می‌کنم که روحیه آن دانش‌آموز آسیب می‌بیند. اگر زمان کلاس اجازه می‌دهد، خوب است که آن دانش‌آموز هم راه‌حل خودش را توضیح دهد.

معلم ۲: [قاطعانه] ببخشید! اما من منظورم روحیه‌اش نبود! من منظورم چیزی فراتر بود!

اکنون همه نگاه‌های دفتر دبیران به سمت او بود.

معلم ۲: یک معلم خوب معلمی است که بتواند خوب تدریس کند؛ یعنی بتواند نظام منطقی ذهن خودش را به شاگردهایش یاد بدهد؛ اما ساختار ذهنی هر آدمیزاد عاقلی نظام و منطقی خاص دارد. یک معلم عالی کسی است که بتواند با هر منطق ذهنی کنار بیاید و با راه‌حل هر کدام از شاگردهایش که متفاوت فکر می‌کنند، متفاوت برخورد کند.

معلم دیگر: یعنی با شاگردهای زرنگش، محترمانه‌تر برخورد کند؟ و بیشتر به ایشان فرصت بدهد؟

معلم ۲: منظور من این نیست! من می‌گویم هر دانش‌آموزی نگرش خاص خودش را دارد. یک معلم عالی کسی است که بتواند آن نگرش را نقد کند و بینش آن دانش‌آموز را ارتقا بدهد؛ نه اینکه نگرش و بینش خودش را با نگرش و بینش آن دانش‌آموز جایگزین کند. باید اجازه بدهد دانش‌آموز ایده‌اش را توضیح بدهد. اگر غلط بود، اشتباهش را بگوید و کمکش کند که راه‌حلش را اصلاح کند.

معلم ۱: [با تردید] این کار وقت کلاس را خیلی می‌گیرد! چه فایده‌ای دارد؟!

معلم ۲: فایده؟! برای هر نفر، بهترین راه‌حل، راه‌حلی است که مال خودش باشد.

## یادآوری عددهای صحیح

۱. الف) حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

•  $10 + 3 - 7 - 2$

•  $3 \times 4 \div 2 \times 8$

ب) خلیل محاسبه‌های بالا را این‌گونه انجام داد:

•  $10 + 3 - 7 - 2 = 10 + 3 + (-7) + (-2) = 4$

•  $3 \times 4 \div 2 \times 8 = 3 \times 4 \times \frac{1}{2} \times 8 = 48$

درباره روش خلیل بحث کنید.

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $12 - 8 - 3 - 4 + 6$

ب)  $2 \times 6 \div 3 \div 2 \times 5$

ج)  $4^3 + 3^2 - 2 \times 5^2$

د)  $6 \times 2^3 - 2 \times 6^2$

ه)  $(7^2 - 5^2)(6 \times 3^2 + 4) \times 20 - 25$  و)  $(5^3 - 3^5)(3^2 - 2^3)^4 - 5^4$

ز)  $(2 - 3^2 \times 5^2 \div 15 - 2^3)(7 + 2)$  ح)  $5^2 - (3^2 - 1^3) \times 2^2 \div 4^2$

ط)  $(4^3 - 5^2 \times 2)^2 - 8 \div 2^4 - 1 \times 3 - 4 \times (8 + 3^2)$

۳. با قرار دادن دو علامت ضرب و دو علامت جمع در جاهای خالی عبارت

$$5 \square 4 \square 3 \square 2 \square 1$$

کدام یک از اعداد ۱۵، ۲۷، ۲۹ و ۳۰ می‌تواند حاصل عبارت داده شده باشد؟

۴. یک ماشین حساب خراب داریم که نمی‌تواند همزمان بیش از دو عدد را باهم جمع

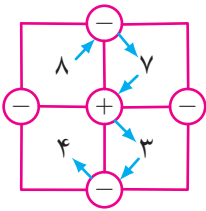
کند و هرگاه حاصل جمع اعداد از ۹ بیشتر شود، حاصل جمع را ۳- اعلام می‌کند. با

پرانترگذاری روی عبارت‌های زیر و محاسبه آنها، حاصل حداقل چقدر می‌شود؟

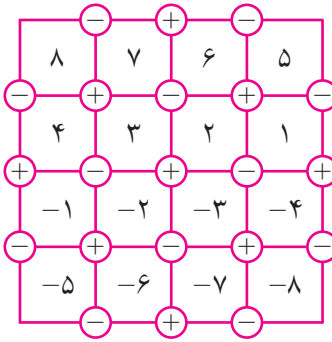
الف)  $1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2$

ب)  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$





۵. در جدول روبه‌رو، از خانهٔ بالا سمت چپ به خانهٔ پایین سمت چپ مسیری یافته‌ایم که حاصل آن برابر صفر شده است.  
 $8 - 7 + 3 - 4 = 0$ .



در جدول زیر، از خانهٔ بالا سمت چپ، یعنی خانهٔ ۸ شروع به حرکت کنید و مسیری بیابید که به خانهٔ پایین سمت چپ، یعنی خانهٔ -۵ ختم شود و حاصل برابر ۸ شود. توجه کنید که به هر خانه و هر دایره حداکثر یک بار می‌توان وارد شد.

۶. الگوی زیر را با دقت ببینید.

$$1 = 1 \times 1$$

$$1 + 3 = 2 \times 2$$

$$1 + 3 + 5 = 3 \times 3$$

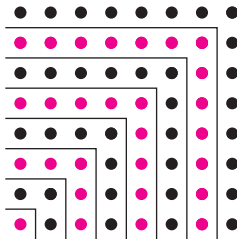
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4 \times 4$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5 \times 5$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 6 \times 6$$



قانون الگوی بالا چیست؟ آیا می‌توانید دو سطر بعدی این الگو را بنویسید؟ سعی کنید با استفاده از شکل زیر توضیح دهید که چرا تساوی‌های بالا برقرار است.





## • عدهای صحیح وگویا •

۷. نجمه حاصل عبارت  $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹$  را اینگونه محاسبه کرد:

$\begin{array}{ c } \hline ۱ \\ \hline ۲ \\ \hline ۳ \\ \hline ۴ \\ \hline ۵ \\ \hline ۶ \\ \hline ۷ \\ \hline ۸ \\ \hline ۹ \\ \hline \end{array} + \begin{array}{ c } \hline ۹ \\ \hline ۸ \\ \hline ۷ \\ \hline ۶ \\ \hline ۵ \\ \hline ۴ \\ \hline ۳ \\ \hline ۲ \\ \hline ۱ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{ c } \hline ۱۰ \\ \hline ۱۰ \\ \hline ۱۰ \\ \hline ۱۰ \\ \hline ۱۰ \\ \hline ۱۰ \\ \hline ۱۰ \\ \hline ۱۰ \\ \hline ۱۰ \\ \hline \end{array},$	$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ = \frac{۱۰ \times ۹}{۲} = ۴۵.$
---	---

الف) راهحل نجمه را شرح دهید.

ب) با استفاده از راهحل نجمه، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۱۱۷$$

۸. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $۲ + ۴ + ۶ + \dots + ۸۶$

ب)  $۴ + ۷ + ۱۰ + \dots + ۱۲۴$

ج)  $۱۷۹ + ۱۷۳ + \dots - ۳۱ - ۳۷ - ۴۳$

د)  $(-۸۹) - (-۷) - (-۶) - (-۵)$

ه)  $۹۰ - ۸۹ + ۸۸ - ۸۷ + ۸۶ - ۸۵ + ۴$

و)  $۲۴۰ - ۲۳۸ + ۲۳۶ - \dots - ۱۲ - ۱۰ - ۸ - ۶ - ۴ - ۲$

ز)  $(-۲۰ - ۱) + (-۱۹ - ۱) + (-۱۸ - ۱) + \dots + (۱۸ - ۱) + (۱۹ - ۱) + (۲۰ - ۱)$

۹. الگوی عددی زیر را در نظر بگیرید.

الف) دو سطر بعدی این الگو را بنویسید.

		-۱		
		۲	-۲	
	-۳	۳	-۳	
۴	-۴	۴	-۴	

ب) اگر این الگو را تا سطر بیستم بنویسیم و سپس

همه عددهای آن را با هم جمع بزنیم، حاصل

چه عددی می‌شود؟

ج) این الگو را تا سطر چندم ادامه دهیم که مجموع

همه عددهای آن  $-۱۴۴$  شود؟



۱۰. نوشین حاصل عبارت  $۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲$  را این‌گونه محاسبه کرد:

می‌دانیم:



$$۱^۲ = ۱ \times ۱ = ۱,$$

$$۲^۲ = ۲ \times ۲ = ۲ + ۲,$$

$$۳^۲ = ۳ \times ۳ = ۳ + ۳ + ۳,$$

$$۴^۲ = ۴ \times ۴ = ۴ + ۴ + ۴ + ۴,$$

$$۵^۲ = ۵ \times ۵ = ۵ + ۵ + ۵ + ۵ + ۵.$$

با استفاده از رابطه‌های بالا، سه برابر مجموع  $۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲$  را این‌گونه

حساب می‌کنیم:

$$\begin{array}{|c|} \hline ۱ \\ \hline ۲ \ ۲ \\ \hline ۳ \ ۳ \ ۳ \\ \hline ۴ \ ۴ \ ۴ \ ۴ \\ \hline ۵ \ ۵ \ ۵ \ ۵ \ ۵ \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline ۵ \\ \hline ۴ \ ۵ \\ \hline ۳ \ ۴ \ ۵ \\ \hline ۲ \ ۳ \ ۴ \ ۵ \\ \hline ۱ \ ۲ \ ۳ \ ۴ \ ۵ \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline ۵ \\ \hline ۵ \ ۴ \\ \hline ۵ \ ۴ \ ۳ \\ \hline ۵ \ ۴ \ ۳ \ ۲ \\ \hline ۵ \ ۴ \ ۳ \ ۲ \ ۱ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline ۱۱ \\ \hline ۱۱ \ ۱۱ \\ \hline ۱۱ \ ۱۱ \ ۱۱ \\ \hline ۱۱ \ ۱۱ \ ۱۱ \ ۱۱ \\ \hline ۱۱ \ ۱۱ \ ۱۱ \ ۱۱ \ ۱۱ \\ \hline \end{array}.$$

در نتیجه،

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲ = \frac{۱۱ \times \left(\frac{۵ \times ۶}{۲}\right)}{۳}.$$

الف) راه حل نوشین را شرح دهید.

ب) با استفاده از راه‌حل نوشین، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

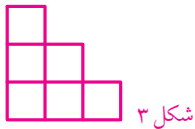
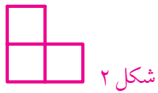
$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \dots + ۱۱۷^۲$$

۱۱. در کتاب ریاضی تکمیلی هفتم با چند حجره‌ای‌ها و  $n$  - پله آشنا شدید. برای یادآوری،

تعریف  $n$  - پله در صفحه بعد آمده است.

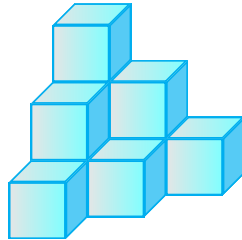


## • عددهای صحیح وگویا •



در روبه‌رو، شکل ۱ نمای جلو، نمای سمت راست و نمای بالای یک چندحجره‌ای<sup>۱</sup> است که به آن ۱- پله می‌گوییم؛ شکل ۲ نمای جلو، نمای سمت راست و نمای بالای یک چندحجره‌ای است که به آن ۲- پله می‌گوییم؛ شکل ۳ نمای جلو، نمای سمت راست و نمای بالای یک چندحجره‌ای است که به آن ۳- پله می‌گوییم.

با همین الگو  $n$ - پله را تعریف می‌کنیم. بنابراین  $n$ - پله‌ای‌ها نمای جلو، بالا و سمت راست یکسانی دارند. شکل زیر، تصویری سه‌بعدی از یک ۳- پله است.



با روش نوشتن، تعداد مکعب‌های واحد به‌کاررفته در یک  $n$ - پله را به‌دست آورید.

۱۲. اقدس می‌خواست چهل و یک عدد موجود در الگوی عددی زیر را باهم جمع بزند.

$$۱, ۴, ۱۰, ۲۰, ۳۵, ۵۶, ۸۴, ۱۲۰, \dots, ۱۲۳۴۱$$

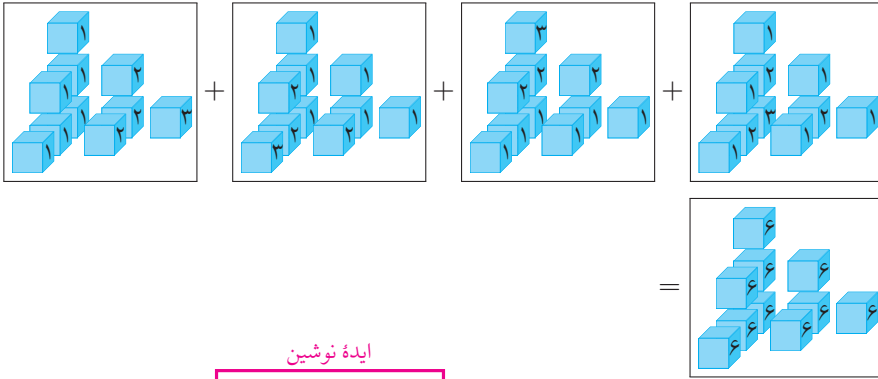
او با روشی عجیب حاصل  $۱ + ۴ + ۱۰$  را به‌دست آورد تا در ادامه با استفاده از روش عجیبش مجموع چهل و یک عدد بالا را به‌دست آورد. اقدس ابتدا  $۱ + ۴ + ۱۰$  را این‌گونه نوشت:

$$\begin{aligned} ۱ + ۴ + ۱۰ &= ۱ + (۱ + ۳) + (۱ + ۳ + ۶) \\ &= ۱ + (۱ + (۱ + ۲)) + (۱ + (۱ + ۲) + (۱ + ۲ + ۳)) \\ &= ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۲ + ۲ + ۲ + ۳. \end{aligned}$$

<sup>۱</sup> به جسم‌های سه‌بعدی که از به‌هم چسباندن یک (یا چند) وجه مکعب‌های واحد به یکدیگر ساخته می‌شوند، «چندحجره‌ای» می‌گوییم.

## • عددهای صحیح و گویا •

سیس اقدس با استفاده از شکل های زیر، حاصل  $۱ + ۴ + ۱۰$  را به صورت زیر به دست آورد.



$$\frac{۶ \times (۱ + ۳ + ۶)}{۴} = \frac{۶ \times \left(\frac{۳ \times ۴ \times ۵}{۶}\right)}{۴} = \frac{۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶}{۲۴} = ۱۵.$$

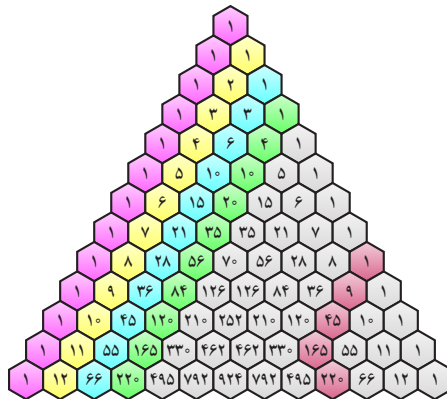
ایده نوشتن

الف) روش اقدس را توضیح دهید.

ب) با استفاده از روش اقدس حاصل جمع زیر را محاسبه کنید.

$$۱ + ۴ + ۱۰ + ۲۰ + ۳۵ + ۵۶ + ۸۴ + ۱۲۰ + \dots + ۱۲۳۴۱$$

۱۳. در کتاب تکمیلی سال هفتم با مثلث خیام آشنا شدید. شکل زیر، قسمتی از مثلث خیام را نشان می دهد. قبل از دیدن مسائل صفحه بعد، حدس بزنید اعداد مثلث خیام چه ارتباطی با مسئله های نجومه، نوشتن و اقدس دارند.



در مثلث خیام صفحه قبل، اعدادی که رنگ زمینه آنها صورتی، زرد، آبی و سبز است، به ترتیب روی قطرهای صفر، اول، دوم و سوم قرار گرفته‌اند.

الف) باتوجه به ایده‌های نجمه، نوشین و اقدس، مجموع اعداد قطر اول، قطر دوم و قطر سوم مثلث خیام صفحه قبل را به دست آورید.

ب) می‌خواهیم مجموع  $m$  عدد اول قطر  $n$ ام مثلث خیام را بیابیم. حدس شما چیست؟

۱۴. اگر  $n^2$  تا عدد متمایز، طوری در یک جدول  $n \times n$  چیده شود که حاصل جمع اعداد روی هر سطر، هر ستون و هر قطر، عدد یکسانی باشد، به این جدول  $n \times n$  مربع جادویی می‌گویند. برای مثال، جدول زیر، یک مربع جادویی  $3 \times 3$  با اعداد ۱ تا ۹ است.

۶	۱	۸
۷	۵	۳
۲	۹	۴

الف) آیا در تمام مربع‌های جادویی  $3 \times 3$  که با اعداد ۱ تا ۹ ساخته می‌شوند، مجموع هر سطر، هر ستون و هر قطر ۱۵ است؟ چرا؟

ب) باتوجه به متن زیر، یک مربع جادویی  $5 \times 5$  با اعداد ۱ تا ۲۵ بسازید.

فرض کنید  $n$  عددی فرد باشد. برای ساختن یک مربع جادویی  $n \times n$  با اعداد ۱ تا  $n^2$ ، ابتدا عدد ۱ را در خانه وسط سطر بالایی جدول  $n \times n$  قرار می‌دهیم. یک خانه به بالا می‌رویم و یک خانه به سمت چپ (اگر از جدول خارج شدیم از سمت مقابل وارد می‌شویم) و عدد بعدی را داخل آن می‌نویسیم و همین کار را تکرار می‌کنیم تا به  $n^2$  برسیم. اگر در مرحله‌ای به خانه‌ای رسیدیم که پر بود (و می‌خواستیم عدد  $m$  را داخل آن بنویسیم)، عدد بعدی را زیر خانه عدد قبلی (خانه‌ای که عدد  $m - 1$  را در آن نوشته بودیم)، می‌نویسیم.

(ج) یک مربع جادویی  $4 \times 4$  با اعداد ۱ تا ۱۶ بسازید.

(د) پروژه. فرض کنید  $n$  عددی زوج باشد. روشی برای ساخت مربع‌های جادویی  $n \times n$  با اعداد ۱ تا  $n^2$  ارائه کنید.

## عددهای گویا

۱. حاصل عبارت زیر تقریباً چقدر است؟

$$\frac{1023}{1024} + \frac{513}{511} - \frac{301}{900} + \frac{5}{6}$$

۲. اگر نقطه  $A$  نمایش  $\frac{2}{7}$  و نقطه  $B$  نمایش  $\frac{2}{3}$  روی محور اعداد زیر باشد و فاصله این دو عدد روی محور به پنج قسمت مساوی تقسیم شده باشد، در این صورت نقطه  $C$  نمایش چه عددی است؟



۳. اگر به مخرج کسر  $\frac{1}{15}$  عدد ۶ را اضافه کنیم، چه عددی باید به صورت کسر اضافه کنیم تا مقدار کسر تغییر نکند؟

۴. مقدار  $x$  را در معادله‌های زیر به دست آورید. سپس با جایگذاری مقدار  $x$ ، کسرهای سمت راست و چپ هر تساوی را مشخص کنید.

(الف)  $\frac{46}{2/5} \times 5 = \frac{x}{\text{°}125}$

(ب)  $\frac{x}{12} = \frac{x+6}{3}$

(ج)  $-\frac{4}{11} = \frac{x}{x+30}$

۵. در تساوی زیر، مقدار  $x$  را پیدا کنید.

$$\frac{1}{x} + \frac{5}{2x} + \frac{7}{4x} + \frac{6}{8x} = \frac{3}{2}$$

۶. خانم خیرخواه و آقای خیراندیش دو معلم ریاضی هستند. آنها دربارهٔ اینکه چرا عدد صفر معکوس ندارد، این‌گونه بحث کردند:

<p>در کلاس درس آقای خیراندیش</p> <p>آقای خیراندیش: معکوس ۵ یعنی <math>\frac{1}{5}</math>، مقداری است که اگر ۵ تا از آن داشته باشیم یعنی یک واحد داریم.</p> $5 \times \frac{1}{5} = 1$ <p>معکوس ۲ یعنی <math>\frac{1}{2}</math>، مقداری است که اگر ۲ تا از آن داشته باشیم یعنی یک واحد داریم.</p> $2 \times \frac{1}{2} = 1$ <p>با این تعریف معکوس صفر، یعنی <math>\frac{1}{0}</math> چه معنایی دارد؟</p> <p>دانش‌آموزان: یعنی مقداری که اگر صفر تا از آن داشته باشیم، یک واحد داریم.</p> $0 \times \frac{1}{0} = 1$ <p>آقای خیراندیش: <math>\frac{1}{0}</math> عددی است که اگر هیچی از آن نداشته باشیم یک واحد داریم و این معنایی ندارد. پس معکوس صفر تعریف نشده است.</p>	<p>در کلاس درس خانم خیرخواه</p> <p>خانم خیرخواه: ۱۲ تقسیم بر ۴ یعنی ۱۲ تا سیب داریم و ۴ تا سبد و می‌خواهیم در هر سبد به‌طور مساوی سیب قرار دهیم. حالا در هر سبد چند تا سیب داریم؟</p> <p>دانش‌آموزان: ۳ تا.</p> <p>خانم خیرخواه: با این تعبیر اگر بخواهیم ۱۲ را تقسیم بر صفر کنیم، یعنی ۱۲ تا سیب داریم و صفر تا سبد. یعنی سبد نداریم و می‌خواهیم در هر سبد به‌طور مساوی سیب قرار دهیم. حالا در هر سبد چند تا سیب داریم؟</p> <p>دانش‌آموزان: خانم سبد نداریم که بخواهیم داخلش سیب بگذاریم.</p> <p>خانم خیرخواه: به همین خاطر تقسیم بر صفر تعریف نمی‌شود. در نتیجه یک تقسیم بر صفر یعنی <math>\frac{1}{0}</math> یا به عبارتی معکوس صفر هم تعریف نشده است.</p>
---	---

الف) دربارهٔ دو متن بالا بحث کنید و ایرادهای آنها را، در صورت وجود، بیابید.

ب) تعبیر دیگری برای اینکه چرا صفر معکوس ندارد پیدا کنید.

## • عددهای صحیح و گویا •

۷. بین دو عدد ۹ و ۱۰، سی عدد گویا بنویسید.

۸. حاصل عبارتهای زیر را به صورت یک کسر ساده‌نشده بنویسید.

الف)  $\frac{6 \times 14}{6}$

ب)  $\frac{6 + 14}{6}$

ج)  $\frac{3 \times 5 + 5 \times 7}{5}$

د)  $\frac{3 + 5 + 7}{5}$

ه)  $\frac{52 + 218}{91 + 218}$

و)  $\frac{52 \times 218}{91 \times 218}$

ز)  $\frac{2 \times 5 \times 7 \times 11 + 7}{2 \times 5 \times 11}$

ح)  $\frac{3 \times 3^2 \times 3^3 - 1}{3 \times 3 \times 3 - 1}$

۹. حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56}$

ب)  $\frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \dots + \frac{2}{49 \times 51}$

ج)  $\frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \frac{1}{11 \times 14} + \dots + \frac{1}{32 \times 35}$

د)  $\frac{2+4}{2 \times 3 \times 4} + \frac{4+6}{4 \times 5 \times 6} + \frac{6+8}{6 \times 7 \times 8} + \dots + \frac{18+20}{18 \times 19 \times 20}$

ه)  $\frac{1}{1 \times 6} + \frac{1}{6 \times 11} + \frac{1}{11 \times 16} + \dots + \frac{1}{46 \times 51}$

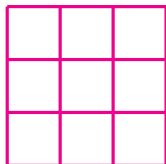
و)  $\frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{6 \times 9} + \frac{1}{9 \times 12} + \dots + \frac{1}{21 \times 24}$

ز)  $\frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} + \dots + \frac{1}{98 \times 100}$

۱۰. در تساوی زیر مقدار  $m$  و  $n$  را بیابید.

$$\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{7}{6} \times \dots \times \frac{m}{n} = 3$$

۱۱. جدول زیر را با اعداد داده شده طوری پر کنید که یک مربع جادویی تشکیل شود.



$$, \frac{1}{100}, \frac{1}{50}, \frac{1}{25}, \frac{1}{20}, \frac{3}{100}, -\frac{1}{100}, -\frac{1}{50}, -\frac{3}{100}.$$

۱۲. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $\frac{-20}{35} + \frac{-2}{7} - \frac{1}{5}$

ب)  $\frac{\frac{15}{33} \times \frac{13}{4}}{-\frac{3}{8} \times \frac{-5}{16}} \div 52$

ج)  $\frac{1 + \frac{3}{4}}{(2 + \frac{1}{5}) \div (1 - \frac{1}{4})}$

د)  $\frac{373737}{37} \left( \frac{1}{37} + \frac{1}{13 \times 7} \right)$

۱۳. در زیر، عدد  $\frac{7}{8}$  به صورت مجموع سه عدد گویای متفاوت با صورت ۱ نوشته شده است:

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

هر یک از اعداد زیر را به صورت مجموع دو یا چند عدد گویای متفاوت با صورت ۱ بنویسید.

•  $\frac{5}{6}$

•  $\frac{4}{13}$

•  $\frac{5}{121}$

•  $\frac{13}{18}$

•  $\frac{1}{6}$

•  $\frac{23}{15}$

•  $\frac{7}{12}$

•  $\frac{6}{23}$

•  $\frac{2}{35}$

•  $\frac{43}{48}$

•  $\frac{400}{729}$

•  $\frac{823}{1024}$

•  $\frac{351}{512}$

•  $\frac{57}{64}$

•  $\frac{73}{81}$

•  $\frac{13}{27}$

<sup>۱</sup> به‌چنین مجموع کسرهایی، «کسر مصری» می‌گویند؛ زیرا در مصر باستان از این روش برای نمایش و محاسبه کسرها استفاده می‌شده است. برای حل بهتر این تمرین بهتر است به [www.webmath.ir](http://www.webmath.ir) بیایید.



۱۴. برای هر قسمت مسئله‌ای بسازید که عدد داده شده در راه‌حل آن مسئله ظاهر شود.

(الف)  $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7}$

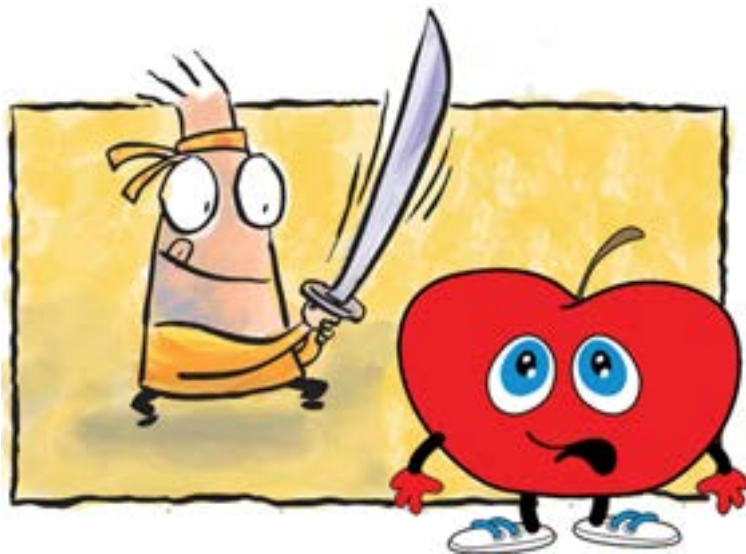
(ب)  $\frac{7}{3} \div \frac{1}{5}$

(ج)  $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$

(د)  $-\frac{2}{3} - \frac{5}{4}$

۱۵. پروژه. دو نفر می‌خواهند یک سیب را به‌طور عادلانه بین خودشان تقسیم کنند. نفر اول با چاقو سیب را می‌برد و نفر دوم حق انتخاب دارد که کدام تکه را انتخاب کند. (الف) اگر سه نفر بخواهند یک سیب را به‌طور عادلانه بین خودشان تقسیم کنند، راه‌حل چیست؟

(ب) اگر  $n$  نفر بخواهند یک سیب را به‌طور عادلانه بین خودشان تقسیم کنند، راه‌حل چیست؟



با مراجعه به «[www.webmath.ir](http://www.webmath.ir)» نتایج خود را ارسال کنید.

۱۶. دستوره‌های زیر را در نظر بگیرید.

A : قرینه و معکوس ورودی

B : ضرب در، یک واحد کمتر از قرینه ورودی

C : تقسیم بر قرینه مجذور ورودی

D : منهای معکوس مجذور قرینه ورودی

در هر ستون جدول زیر، یکی از دستوره‌های بالا روی عدد ورودی هر ستون اعمال شده و خروجی به دست آمده است.

ستون «د»	ستون «ج»	ستون «ب»	ستون «الف»	
خروجی ستون «ج»	خروجی ستون «ب»	خروجی ستون «الف»	اولین عدد اول	ورودی
D	C	B	A	دستور
$-\frac{65}{16}$	-۴	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	خروجی

الف) اعداد صورتی نوشته شده در جدول فوق درست‌اند. راه‌حل به دست آمدن هر یک را بنویسید.

ب) خروجی هر ستون از جدول زیر را به دست آورید.

ستون «د»	ستون «ج»	ستون «ب»	ستون «الف»	
خروجی ستون «ج» به اضافه معکوسش	خروجی ستون «ب» به توان ۲	خروجی ستون «الف»	بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی	ورودی
D	C	B	A	دستور
				خروجی

۱۷. یک مسئله واقعاً کاربردی. بنا به ابلاغ سازمان امور مالیاتی کشور، سقف معافیت‌های مالیاتی در سال ۱۳۹۴ تا حقوق ماهیانه مبلغ یک میلیون و صد و پنجاه هزار تومان (۱, ۱۵۰, ۰۰۰) است. بر اساس این قانون، تمام کسانی که بیش از یک میلیون و صد و پنجاه هزار تومان و کمتر از هشت میلیون و پنجاه هزار تومان (۸, ۰۵۰, ۰۰۰) دریافتی ماهیانه دارند، با محاسبه نرخ ۱۰ درصد مالیات پرداخت می‌کنند و کسانی که ماهیانه بیش از هشت میلیون و پنجاه هزار تومان حقوق می‌گیرند، مازاد این مبلغ را به نرخ ۲۰ درصد مالیات پرداخت می‌کنند.

جدول مالیات بر حقوق به صورت زیر است.

معاف	تا سقف ۱, ۱۵۰, ۰۰۰ تومان
۱۰ درصد	مازاد بر ۱, ۱۵۰, ۰۰۰ و تا سقف ۸, ۰۵۰, ۰۰۰ تومان
۲۰ درصد	مازاد بر ۸, ۰۵۰, ۰۰۰ تومان

برای مثال، اگر شخصی ۱۰ میلیون تومان حقوق ماهیانه دریافت کند، باید یک میلیون و هشتاد هزار تومان (۱, ۰۸۰, ۰۰۰) مالیات پرداخت کند که محاسبه آن به صورت زیر است.

$$۱۰,۰۰۰,۰۰۰ - ۸,۰۵۰,۰۰۰ = ۱,۹۵۰,۰۰۰ \quad \text{مشمول ۲۰ درصد}$$

$$۸,۰۵۰,۰۰۰ - ۱,۱۵۰,۰۰۰ = ۶,۹۰۰,۰۰۰ \quad \text{مشمول ۱۰ درصد}$$

$$\begin{aligned} \text{مالیات محاسبه شده: } & \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۱,۹۵۰,۰۰۰ + \frac{۱۰}{۱۰۰} \times ۶,۹۰۰,۰۰۰ = ۳۹۰,۰۰۰ + ۶۹۰,۰۰۰ \\ & = ۱,۰۸۰,۰۰۰. \end{aligned}$$

حقوق چند نفر (به تومان) در زیر آمده است. مالیات بر حقوق هر یک را محاسبه کنید.

الف) ۱,۰۰۰,۰۰۰

ب) ۴,۴۲۰,۰۰۰

ج) ۸,۰۰۰,۰۰۰

د) ۱۲,۵۰۰,۰۰۰



۱۸. بنابر احکام اسلامی تقسیم ارث و قوانین جمهوری اسلامی ایران در سال ۱۳۹۴ برای متوفی مرد:

• قبل از اینکه اموال متوفی بین وراثت تقسیم شود، باید تمام بدهی‌های شخص مرحوم پرداخت شود.

• هرکس قبل از مرگش می‌تواند  $\frac{1}{4}$  کل اموال خود را وصیت کند و بقیه اموال، یعنی  $\frac{3}{4}$  آن، باید بین وراثت تقسیم شود.

• از  $\frac{2}{3}$  اموالی که باید بین وراثت تقسیم شود، \*  $\frac{1}{8}$  آن به همسر می‌رسد؛

\* در صورت زنده بودن پدر و مادر شخص مرحوم، به هر کدام  $\frac{1}{2}$  آن به ارث می‌رسد؛

• باقی‌مانده ارث به فرزندان می‌رسد به طوری که هر پسر دو برابر هر دختر ارث می‌برد.

وراثت باید مطابق جدول زیر، مالیات بر ارث بپردازند.

۵ درصد	تا سقف ۵ میلیون تومان
۱۵ درصد	مازاد بر ۵ میلیون تومان و تا سقف ۲۰ میلیون تومان
۲۵ درصد	مازاد بر ۲۰ میلیون تومان و تا سقف ۵۰ میلیون تومان
۳۵ درصد	مازاد بر ۵۰ میلیون تومان

اکبر آقا قبل از مرگش، خودرویی به قیمت ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان خرید ولی ۲۰ درصد از قیمت خودرو را پرداخت نکرده بود. اکبر آقا برای  $\frac{1}{4}$  اموال خود، بعد از ارزش‌گذاری تمام دارایی‌ها و اموالش، وصیت کرد:

یک‌دهم از ثلث اموال را به مادر بزرگوارم بدهید.

یک‌هشتم آن را به نوه عزیزم صدرا بدهید و بقیه را

به انسان‌های خیلی خوب بدهید.



پدر و مادر مرحوم اکبر آقا هنوز زنده هستند. اکبر آقا ۱ همسر، ۳ پسر و ۲ دختر داشت و اموال وی بیست میلیارد و سیصد و هجده میلیون تومان بود.

الف) قبل از محاسبه مقدار ارث هر شخص، می‌توانید بگویید که ارث صدرا با ارث چه کسی برابر می‌شود؟

ب) به هر کدام از وراثت چند تومان ارث می‌رسد؟

ج) اداره مالیات از مرگ اکبر آقا چقدر کسب درآمد کرده است؟

### حکایتی از گلستان سعدی

پادشاهی را مهمی پیش آمد. گفت: اگر انجام این حالت به مراد من برآید، چندین درم دهم زاهدان را. چون حاجتش برآمد و تشویش خاطرش برفت، وفای نذرش به وجود شرط، لازم آمد. یکی را از بندگان خاص، کیسه‌ای درم داد تا صرف کند بر زاهدان. گویند: غلامی عاقل هشیار بود. همه روز بگردید و شبانگه باز آمد و درم‌ها بوسه داد و پیش مَلک بنهاد و گفت: زاهدان را چندان که گردیدم، نیافتم. گفت: این چه حکایت است؟! آنچه من دانم در این مُلک چهارصد زاهد است. گفت: ای خداوند جهان، آن که زاهد است، نمی‌ستاند و آن که می‌ستاند، زاهد نیست. مَلک بُخندید و ندیمان را گفت: چندان که مراد حق خداپرستان ارادت است و اقرار، مر این شوخ دید را عداوت است و انکار و حق به جانب اوست.


زاهد که درم گرفت و دینار      زاهد تراز او کسی به دست آر

• عددهای صحیح و گویا •

۱۹. صدرا یک صندوقچه قدیمی در زیرزمین خانه اکبر آقا پیدا کرد که برگه زیر، در آن بود. این برگه را تصحیح کنید.

• پنجم لسری از هر شکل عماشور خورده است؟ (۱)

• معکوس هر عدد را بنویس.

(۲) 

(۳)  $\frac{25}{11} \leftarrow \frac{12}{28} \leftarrow 61$

• حاصل عبارت را به ساده ترین شکل ممکن بنویس.

۶)  $\frac{18}{8} \times \frac{5}{18} = \frac{18}{18} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{8}$

۷)  $\frac{5}{13} \times \frac{11}{2} = \frac{55}{26}$

۸)  $\frac{3^3 + 2^3}{2 \times 5} = \frac{27 + 8}{10} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$

۹)  $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{3}{12} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

۱۰)  $1 \frac{3^2}{4} + 2 \frac{3}{4} = 1 \frac{9}{4} + 2 \frac{3}{4} = 3 \frac{12}{4} = 3 \frac{3}{1} = 6 \frac{3}{1} = 9 \frac{3}{1} = 12$

• مسئله‌ی زیر را پاسخ گو.

(۱۱) با طنجری، یک مربع ساخته ایم. طناب را با بازی لیسیم و از آن مستطیلی می‌سازیم که عرض آن،  $\frac{2}{3}$  ضلع مربع باشد. طول این مستطیل چقدر است؟

• حاصل عبارت زیر را پیدا کن.

۱۲)  $3 \frac{2}{3} \times 5 \times 6 \frac{1}{2} \times \frac{11}{7} = 9 \frac{22}{7}$

• مسئله‌ی زیر را حل کن.

(تعمیم) سوال‌های ۱ تا ۵، سوال‌های ۱۰ تا ۱۵، سوال‌های ۱۱ و ۱۲، سوال‌های ۱۳ و ۱۴، سوال‌های ۱۵ و ۱۶، سوال‌های ۱۷ و ۱۸، سوال‌های ۱۹ و ۲۰، سوال‌های ۲۱ و ۲۲، سوال‌های ۲۳ و ۲۴، سوال‌های ۲۵ و ۲۶، سوال‌های ۲۷ و ۲۸، سوال‌های ۲۹ و ۳۰، سوال‌های ۳۱ و ۳۲، سوال‌های ۳۳ و ۳۴، سوال‌های ۳۵ و ۳۶، سوال‌های ۳۷ و ۳۸، سوال‌های ۳۹ و ۴۰، سوال‌های ۴۱ و ۴۲، سوال‌های ۴۳ و ۴۴، سوال‌های ۴۵ و ۴۶، سوال‌های ۴۷ و ۴۸، سوال‌های ۴۹ و ۵۰، سوال‌های ۵۱ و ۵۲، سوال‌های ۵۳ و ۵۴، سوال‌های ۵۵ و ۵۶، سوال‌های ۵۷ و ۵۸، سوال‌های ۵۹ و ۶۰، سوال‌های ۶۱ و ۶۲، سوال‌های ۶۳ و ۶۴، سوال‌های ۶۵ و ۶۶، سوال‌های ۶۷ و ۶۸، سوال‌های ۶۹ و ۷۰، سوال‌های ۷۱ و ۷۲، سوال‌های ۷۳ و ۷۴، سوال‌های ۷۵ و ۷۶، سوال‌های ۷۷ و ۷۸، سوال‌های ۷۹ و ۸۰، سوال‌های ۸۱ و ۸۲، سوال‌های ۸۳ و ۸۴، سوال‌های ۸۵ و ۸۶، سوال‌های ۸۷ و ۸۸، سوال‌های ۸۹ و ۹۰، سوال‌های ۹۱ و ۹۲، سوال‌های ۹۳ و ۹۴، سوال‌های ۹۵ و ۹۶، سوال‌های ۹۷ و ۹۸، سوال‌های ۹۹ و ۱۰۰.

$5 \times 1 \frac{1}{2} = 5 \frac{5}{2} = \frac{10}{2} + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$

$4 \times 2 = 8$

$3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

$9 + 8 + \frac{9}{2} = 17 \frac{9}{2}$





در دفتر دبیران به جز مدیر و معلم ریاضی که دوست صمیمی مدیر بود، کسی نبود.

مدیر: امسال نیاز به یک معلم ریاضی دیگر هم داریم. به نظر شما برای انتخاب معلم جدید به چه چیزی بیشتر اهمیت بدهم؟ به سواد ریاضی‌اش؟ یا به هنر تدریس معلمی‌اش؟

معلم ریاضی: هر دو مهم است. [پس از اندکی مکث] سودِ هنر تدریس را همهٔ دانش‌آموزانِ کلاس می‌برند و سود سواد ریاضی را دانش‌آموزهای نخبه.

مدیر: پس کلاً به نظر شما هنر تدریس مهم‌تر است!

معلم ریاضی: نه! بستگی به این دارد که شاگردهای کلاس چقدر باهوش باشند. اگر یک کلاس با سطح یادگیری متوسط داشته باشیم، حتماً هنر تدریس مهم‌تر است؛ اما اگر یک کلاس با دانش‌آموزهای باهوش داشته باشیم، باید سواد معلم را لحاظ کنیم.

مدیر: جسارتاً من این حرف شما را قبول ندارم. من خودم رشته‌ام مهندسی برق بوده است، ولی چند سال ریاضی درس داده‌ام. همه راضی بودند؛ هم دانش‌آموزهای نخبه و هم کلاً همهٔ دانش‌آموزها.

معلم ریاضی: مثلاً در فصل اعداد، به دانش‌آموزهای نخبه چه خوراک علمی می‌دادید؟

مدیر: [با خنده ریز] آن روزها هر کسی دربارهٔ عده‌های اول خیلی کنجکاو می‌کرد، به او می‌گفتم برود فرمول اعداد اول را کشف کند!!

معلم ریاضی: فرمول اعداد اول؟! یعنی هیچ مسئلهٔ مناسب‌تری سراغ نداشتید که به او پیشنهاد بدهید؟ عملاً آنها را سرکار می‌گذاشتید!



مدیر: آها! حالا فهمیدم منظور شما چیه! من همیشه کلی مسئله داشتم که به هر دانش‌آموزی که علاقه داشت می‌دادم. برای بعضی از مسئله‌ها هم جایزه می‌دادم. کلاً خیلی از شاگردها همیشه در تکاپو بودند.

معلم ریاضی: [با حالتی صمیمانه] تو معلم ریاضی خوبی بودی، اما نه برای دانش‌آموزهای خاص! چیزی که احتمالاً نداشتی یک شناخت کلی از دانش ریاضی است! اگر کسی ده‌ها درس رشته ریاضی دانشگاهی را گذرانده باشد، ممکن است بتواند چنین دانشی را کسب کند، تا حدوداً بفهمد هدف مطالعه گرایش‌های مختلف در رشته ریاضی چه هستند؛ تفاوتشان با هم چیست؛ تا حالا درباره چه ایده‌هایی در این گرایش‌ها کار شده و از این جور چیزها.

مدیر: می‌فرمایید یک مهندس برق که کلی ریاضی خوانده، معنای ریاضی را نفهمیده است؟

معلم ریاضی: واقعیت این است که یک مهندس برق خیلی ریاضی نخونده است! او حداکثر کاربردهایی از ریاضی را دیده است.

معلم ریاضی کمی مکث کرد که ببیند بین همه آنچه که می‌خواهد بگوید کدام یک را انتخاب کند.

معلم ریاضی: شما می‌دانید که اعداد را، هم می‌شود تحلیلی مطالعه کرد و هم جبری؟ یعنی هم در ساختارهای پیوسته مطالعه‌شان کرد و هم در ساختارهای گسسته.

مدیر: دانستن این موضوع چه فایده‌ای برای دانش‌آموزها دارد؟

معلم ریاضی: برای تقریباً همه دانش‌آموزها، تقریباً هیچی! اما ممکن است در سی سال تدریس، به یک دانش‌آموز نابغه برخورد کنید که گفتن این جمله به او، دیدش را از زمین تا آسمان تغییر دهد. این همان دانش‌آموزی است که ممکن است در آینده یک ریاضیدان بزرگ شود.

## یادآوری عددهای اول

۱. بیشترین تعداد اعداد طبیعی دو رقمی پشت سر هم که هیچ‌کدام از آنها اول نباشند، چند تا است؟

۲. چند عدد طبیعی دو رقمی وجود دارد که اعداد قبل و بعد از آن، یکی مربع کامل و دیگری عدد اول باشد؟

۳. مربع زیر را با اعداد اول دو رقمی طوری پر کنید که یک مربع جادویی حاصل شود.

۱۱۳		۵
		۱۰۱

• در دو مسئله بعد، به دو عدد همسایه می‌گوییم هرگاه خانه‌های آنها در یک ضلع مشترک باشند.

۴. اعداد ۱ تا ۹ را طوری در یک جدول  $3 \times 3$  بچینید که هر دو عدد همسایه نسبت به هم اول باشند.

۵. الف) نمی‌توان اعداد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳ و ۱۵ را طوری در خانه‌های خالی جدول زیر قرار داد که هر دو عدد همسایه نسبت به هم اول باشند. چرا؟

	۸		۱۶
۴		۱۲	
	۶		۱۴
۲		۱۰	

ب) آیا می‌توان اعداد ۱ تا ۱۶ را طوری در یک جدول  $4 \times 4$  قرار داد که هر دو عدد همسایه نسبت به هم اول باشند؟

۶. الف) همه اعداد یک رقمی را بنویسید که نسبت به ۱۴ اول اند.

ب) همه اعداد کوچکتر از ۳۰ را بنویسید که نسبت به ۳۰ اول اند.

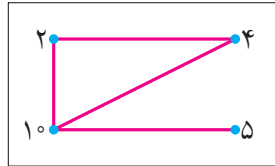
ج) چند عدد کوچکتر از ۱۲۱ وجود دارد که نسبت به ۱۲۱ اول باشد؟

۷. عددی اول، مانند  $p$  داده شده است. چند عدد طبیعی وجود دارد که:

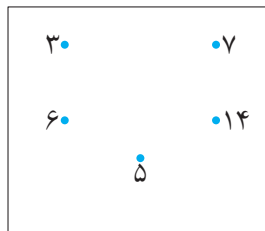
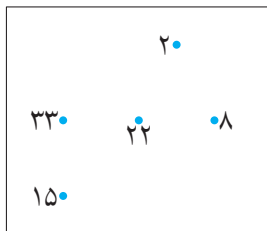
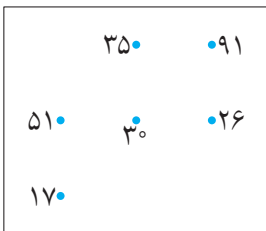
الف) از  $p$  کوچکتر و نسبت به  $p$  اول باشد؟

ب) از  $p^2$  کوچکتر و نسبت به  $p$  اول باشد؟

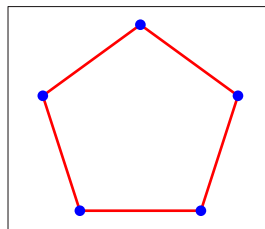
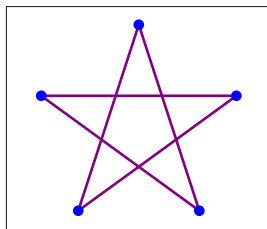
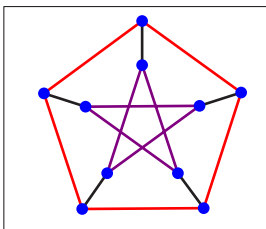
۸. در شکل زیر، فقط اعدادی که نسبت به هم اول نیستند را به یکدیگر وصل کرده ایم.



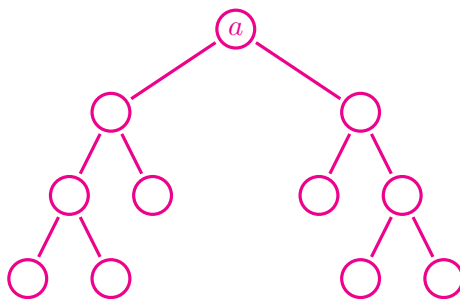
الف) در هر یک از کادرهای زیر، اعدادی که نسبت به هم اول نیستند را به یکدیگر وصل کنید. سپس عبارت به دست آمده را بخوانید!



ب) در هر یک از کادرهای زیر، باتوجه به قانون گفته شده، برای هر نقطه عددی مناسب بیابید.



۹. نمودار درختی زیر، برای تجزیه عدد  $a$  رسم شده است. کدامیک از اعداد ۶۴،  $۱۳۰ \times ۹۹$ ،  $۳۵ \times ۳۶$  و ۱۶۸ نمی‌تواند برابر  $a$  باشد؟



## تعیین عددهای اول

۱. یک عدد مرکب را «تقریباً اول» می‌نامیم، هرگاه هر دو شمارنده آن، به غیر از خود عدد، نسبت به هم اول باشند. برای مثال عدد ۱۵ یک عدد تقریباً اول است، زیرا هر دو شمارنده از شمارنده‌های ۱، ۳ و ۵ نسبت به هم اول‌اند؛ ولی عدد ۱۲ نسبتاً اول نیست، زیرا شمارنده‌های ۲ و ۶ نسبت به هم اول نیستند.

الف) اعداد نسبتاً اول کوچک‌تر از ۱۰۰ را بیابید و آنها را به ترتیبی که در غریبال اعداد کوچک‌تر از ۱۰۰ حذف می‌شوند، مرتب کنید.

ب) چند عدد دو رقمی تقریباً اول وجود دارد که نسبت به ۳۳۰ اول باشد؟

ج) آیا حاصل ضرب دو عدد تقریباً اول، می‌تواند عددی تقریباً اول باشد؟

د) عددی مثال بزنید که اعداد دو رقمی تقریباً اول، نسبت به آن عدد، اول نباشند.

ه) در غریبال اعداد کوچک‌تر از ۱۰۰۰ آخرین عدد تقریباً اولی که حذف می‌شود،

چیست؟

۲. الف) قانون جدول زیر را کشف کنید و جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.



۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	۱۹	<input type="checkbox"/> $n + 1$
۷	۱۲	۱۷	۲۲	۲۷	۳۲	<input type="checkbox"/> $n + 2$
۱۰	۱۷	۲۴	۳۱	۳۸	۴۵	<input type="checkbox"/> $n + 3$
۱۳	۲۲	۳۱	۴۰	۴۹	۵۸	<input type="checkbox"/> $n + 4$
۱۶	۲۷	۳۸	۴۹	۶۰	۷۱	<input type="checkbox"/> $n + 5$
۱۹	۳۲	۴۵	۵۸	۷۱	۸۴	<input type="checkbox"/> $n + 6$

ب) فرض کنید سطرها و ستون‌های این جدول را ادامه داده‌اید. نینا ادعا می‌کند که اگر عددی، مانند  $m$ ، در جدول ظاهر شود، آنگاه  $2m + 1$  اول نیست؛ و اگر  $m$  در جدول ظاهر نشود، آنگاه  $2m + 1$  عددی اول است. برای مثال  $m = 22$  در جدول ظاهر می‌شود، بنابراین برای  $m = 22$  داریم،

$$2m + 1 = 2 \times 22 + 1 = 45,$$

که ۴۵ عددی اول نیست. اما  $m = 6$  در جدول ظاهر نمی‌شود، پس برای  $m = 6$  داریم،

$$2m + 1 = 2 \times 6 + 1 = 13,$$

که ۱۳ عددی اول است. ادعای نینا را برای حداقل پنج عدد دیگر آزمایش کنید.

ج) همهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۵۰ را که در جدول ظاهر نمی‌شوند، بیابید.

۳. الف) نشان دهید برای هر عدد طبیعی  $n$  که  $n < 631$ ، عددی اول مانند  $p$  وجود دارد که  $n < p \leq 2n$ .

کامبیز الگوی عددی زیر را نوشت و ادعا کرد برای حل مسئلهٔ بالا نوشتن همین اعداد کافی است.

۲, ۳, ۵, ۷, ۱۳, ۲۳, ۴۳, ۸۳, ۱۶۳, ۳۱۷, ۶۳۱

چرا ادعای کامبیز درست است؟

(ب) پروژه. اگر  $n \geq 1$ ، ثابت کنید عدد اولی مانند  $p$  وجود دارد که  $n < p \leq 2n$ .

با مراجعه به «[www.webmath.ir](http://www.webmath.ir)» نتایج خود را ارسال کنید.

۴. جدولی از اعداد طبیعی را به صورت زیر تشکیل دهید:

- در ستون سمت چپ آن، اعداد اول را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسید.
- در هر ردیف مضرب‌های طبیعی عدد اول آن ردیف را از کوچک به بزرگ (از چپ به راست) بنویسید.
- هر ردیف را با عدد اول آن نام‌گذاری کنید. برای مثال ردیفی را که در آن اعداد

۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, ۳۰, ۳۵, ۴۰, ۴۵, ۵۰, ۵۵, ۶۰, ...

آمده است، ردیف ۵ بنامید.

(الف) عدد ۲۰ در کدام ردیف‌ها ظاهر می‌شود؟ عدد ۳۰ چگونه؟

(ب) پنج عدد مثال بزنید که فقط در ردیف‌های ۷ و ۱۷ ظاهر شده باشند.

(ج) آیا می‌توان سه عدد در ردیف ۱۱ پیدا کرد که فقط در ردیف ۱۱ دیده شوند؟

(د) در هر ردیف اولین عدد مرکبی را بیابید که در ردیف‌های بالایی ظاهر نشده باشد. آیا این اعداد خاصیت مشترکی دارند؟

(ه) هر یک از اعداد ۹۱، ۱۱۹، ۱۴۳، ۱۳۳، ۲۹۹، ۲۴۷ و ۶۶۷ برای اولین بار در کدام ردیف ظاهر می‌شوند؟

(و) می‌دانیم  $a$  عددی مرکب و کوچکتر از ۳۰۰ است. دربارهٔ درستی یا نادرستی جملهٔ زیر بحث کنید.

«عدد  $a$  در ردیف ۱۷ یا یکی از ردیف‌های قبل از ردیف ۱۷ ظاهر می‌شود.»

۵. باتوجه به قسمت «و» تمرین قبل، توضیح دهید که چرا برای تعیین اول بودن عدد  $n$ ، کافی است بخش‌پذیری عدد  $n$  بر اعداد اول کوچک‌تر از  $\sqrt{n}$  را بررسی کنیم.

۶. سهیلا با روش غربال، اعداد اول کوچک‌تر از  $2500$  را مشخص کرده است. او با چه ترتیبی اعداد زیر را خط زده است؟

• ۲۴۷۱

• ۱۶۵۱

• ۱۷۱۷

• ۱۹۰۹

۷. تاکنون هیچ الگوی عددی با رقم‌های منظم که همهٔ اعداد آن اول باشند، پیدا نشده است. در الگوی عددی زیر اولین عدد مرکب را بیابید.

$31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, \dots$

برای یافتن اولین عدد مرکب در الگوی بالا می‌توانید مانند ریاضی‌دان‌های حرفه‌ای از نرم‌افزارهای ریاضی، استفاده کنید. برای آشنایی با نرم‌افزارهای ریاضی به [www.webmath.ir](http://www.webmath.ir) بیایید.

## ماشین کانونی

کسرهای زیر را در نظر بگیرید.

$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$
$\frac{7}{3}$	$\frac{99}{98}$	$\frac{13}{49}$	$\frac{39}{35}$	$\frac{36}{91}$	$\frac{10}{143}$	$\frac{49}{13}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{91}{1}$

عدد  $10$  را در کسرهای فوق به ترتیب از چپ به راست ضرب می‌کنیم تا به یک عدد طبیعی برسیم. حاصل ضرب  $10$  در کسرهای  $F_1$  تا  $F_8$  عددی طبیعی نیست ولی حاصل ضرب  $10$  در  $F_9$  یک عدد طبیعی و برابر با  $5$  است.

اکنون  $5$  را در کسرهای جدول از چپ به راست ضرب می‌کنیم تا به یک عدد طبیعی برسیم. اولین عدد طبیعی از حاصل ضرب  $5$  در کسر  $F_{10}$  به دست می‌آید که  $455$  است.


حال  $455$  را در کسرهای جدول از چپ به راست ضرب می‌کنیم تا به یک عدد طبیعی برسیم. اولین عدد طبیعی از حاصل ضرب  $455$  در کسر  $F_4$  به دست می‌آید که  $507$  است.

اگر این کار را به همین صورت ادامه دهیم، دنباله‌ای از اعداد طبیعی حاصل می‌شود. در این دنباله توان‌های عدد  $10$ ، اعداد اول هستند که به ترتیب همه آنها ساخته می‌شوند. یعنی اولین عددی که

از توان‌های  $10^1$  ساخته خواهد شد  $10^2$  است که به عنوان شانزدهمین عدد در دنباله ساخته می‌شود. دومین عددی که از توان‌های  $10^1$  ساخته خواهد شد  $10^3$  است که به عنوان شصت و هفتمین عدد در دنباله ساخته می‌شود.  $10^5$  به عنوان دویست و پنجاه و ششمین عدد،  $10^7$  به عنوان ششصد و هفتمین عدد و به همین ترتیب بقیه توان‌های عدد  $10$  ساخته می‌شوند.

۵، ۴۵۵، ۵۰۷، ۱۱۸۳، ۴۶۸، ۱۰۹۲، ۲۵۴۸، ۲۵۷۴، ۶۰۰۶، ۱۴۰۱۴، ۱۴۱۵۷، ۳۳۰۳۳، ۷۷۰۷۷، ۲۰۴۴۹، ۱۴۳۰، ۱۰۰، ۵۰، ۲۵،  
 ۲۲۷۵، ۲۵۳۵، ۵۹۱۵، ۶۵۹۱، ۱۵۳۷۹، ۶۰۸۴، ۱۴۱۹۶، ۳۳۱۲۴، ۳۳۴۶۲، ۷۸۰۷۸، ۱۸۲۱۸۲، ۱۸۴۰۴۱، ۴۲۹۴۲۹، ۱۰۰۲۰۰۱،  
 ۲۶۵۸۳۷، ۱۸۵۹۰، ۱۳۰۰، ۴۹۰۰، ۴۹۵۰، ۱۱۵۵۰، ۲۶۹۵۰، ۲۷۲۲۵، ۶۳۵۲۵، ۱۴۸۲۲۵، ۳۹۳۲۵، ۲۷۵۰، ۱۷۵۰، ۱۹۵۰، ۴۵۵۰،  
 ۵۰۷۰، ۱۱۸۳۰، ۱۳۱۸۲، ۳۰۷۵۸، ۱۲۱۶۸، ۲۸۳۹۲، ۶۶۲۴۸، ۶۶۹۲۴، ۱۵۶۱۵۶، ۳۶۴۳۴۶، ۳۶۸۰۸۲، ۸۵۸۸۵۸، ۲۰۰۴۰۰۲،  
 ۲۰۴۴۵۱، ۴۷۲۳۷۱۹، ۱۱۰۲۲۰۱۱، ۲۹۲۴۲۰۷، ۲۰۴۴۹۰، ۱۴۳۰۰، ۱۰۰۰۰، ۵۰۰، ۲۵۰، ۱۲۵، ۱۱۳۷۵، ۱۲۶۷۵، ۲۹۵۷۵،  
 ۳۲۹۵۵، ۷۶۸۹۵، ۸۵۶۸۳، ۱۹۹۹۲۷، ۷۹۰۹۲، ۱۸۴۵۴۸، ۴۳۰۶۱۲، ۴۳۵۰۰۶، ۱۰۱۵۰۱۴، ۲۳۶۸۳۶۶، ۲۳۹۲۵۳۳، ۵۵۸۲۵۷۷،  
 ۱۳۰۲۶۰۱۳، ۳۴۵۵۸۸۱، ۲۴۱۶۷۰، ۱۶۹۰۰۰، ۶۳۷۰۰۰، ۶۴۳۵۰، ۱۵۰۱۵۰، ۳۵۰۳۵۰، ۳۵۳۹۲۵، ۸۲۵۸۲۵، ۱۹۲۶۹۲۵، ۵۱۱۲۲۵،  
 ۳۵۷۵۰، ۲۵۰۰، ۱۲۵۰، ۶۲۵، ۵۶۸۷۵، ۶۳۳۷۵، ۱۴۷۸۷۵، ۱۶۴۷۷۵، ۳۸۴۴۷۵، ۴۲۸۴۱۵، ۹۹۹۶۳۵، ۱۱۱۳۸۷۹، ۲۵۹۹۰۵۱،  
 ۱۰۲۸۱۹۶، ۲۳۹۹۱۲۴، ۵۵۹۷۹۵۶، ۵۶۵۵۰۷۸، ۱۳۱۹۵۱۸۲، ۳۰۷۸۸۷۵۸، ۳۱۱۰۲۹۲۹، ۷۲۵۷۳۵۰۱، ۱۶۹۳۳۸۱۶۹، ۴۴۹۲۶۴۵۳،  
 ۳۱۴۱۷۱۰، ۲۱۹۷۰۰، ۸۲۸۱۰۰، ۸۳۶۵۵۰، ۱۹۵۱۹۵۰، ۴۵۵۴۵۵۰، ۴۶۰۱۰۲۵، ۱۰۷۳۵۷۲۵، ۲۵۰۵۰۰۲۵، ۶۶۴۵۹۲۵، ۴۶۴۷۵۰،  
 ۳۲۵۰۰، ۱۲۲۵۰۰، ۱۲۳۷۵۰، ۲۸۸۷۵۰، ۶۷۳۷۵۰، ۶۸۰۶۲۵، ۱۵۸۸۱۲۵، ۳۷۰۵۶۲۵، ۹۸۳۱۲۵، ۶۸۷۵۰، ۴۳۷۵۰، ۴۸۷۵۰، ۱۱۳۷۵۰،  
 ۱۲۶۷۵۰، ۲۹۵۷۵۰، ۳۲۹۵۵۰، ۷۶۸۹۵۰، ۸۵۶۸۳۰، ۱۹۹۹۲۷۰، ۲۲۲۷۷۵۸، ۵۱۹۸۱۰۲، ۲۰۵۶۳۹۲، ۴۷۹۸۲۴۸، ۱۱۱۹۵۹۱۲،  
 ۱۱۳۱۰۱۵۶، ۲۶۳۹۰۳۶۴، ۶۱۵۷۷۵۱۶، ۶۲۲۰۵۸۵۸، ۱۴۵۱۴۷۰۰۲، ۳۳۸۶۷۶۳۳۸، ۳۴۲۱۳۲۲۱۹، ۷۹۸۳۰۸۵۱۱، ۱۸۶۲۷۱۹۸۵۹،  
 ۴۹۴۱۹۰۹۸۳، ۳۴۵۵۸۸۱۰، ۲۴۱۶۷۰۰، ۱۶۹۰۰۰۰، ۶۳۷۰۰۰۰، ۶۴۳۵۰۰۰، ۱۵۰۱۵۰۰، ۳۵۰۳۵۰۰، ۳۵۳۹۲۵۰، ۸۲۵۸۲۵۰، ۱۹۲۶۹۲۵۰،  
 ۱۹۴۶۵۸۷۵، ۴۵۴۲۰۳۷۵، ۱۰۵۹۸۰۸۷۵، ۲۸۱۱۷۳۷۵، ۱۹۶۶۲۵۰، ۱۳۷۵۰۰۰، ۸۷۵۰۰۰، ۹۷۵۰۰۰، ۲۲۷۵۰۰۰، ۲۵۳۵۰۰۰، ۵۹۱۵۰۰۰،  
 ۶۵۹۱۰۰۰، ۱۵۳۷۹۰۰۰، ۱۷۱۳۶۶۰۰، ۳۹۹۸۵۴۰۰، ۴۴۵۵۵۱۶۰۰، ۱۰۳۹۶۲۰۰۴، ۴۱۱۲۷۸۴، ۹۵۹۶۴۹۶، ۲۲۲۹۱۸۲۴، ۲۲۶۲۰۳۱۲،  
 ۵۲۷۸۰۷۲۸، ۱۲۳۱۵۵۰۳۲، ۱۲۴۴۱۱۷۱۶، ۲۹۰۲۹۴۰۰۴، ۶۷۷۳۵۲۶۷۶، ۶۸۴۲۶۴۴۳۸، ۱۵۹۶۶۱۷۰۲۲، ۳۷۲۵۴۳۹۷۱۸،  
 ۳۷۶۳۴۵۴۴۰۹، ۸۷۸۱۳۹۳۶۲۱، ۲۰۴۸۹۹۱۸۴۴۹، ۵۴۳۶۱۰۰۸۱۳، ۳۸۰۱۴۶۹۱۰، ۲۶۵۸۳۷۰۰، ۱۸۵۹۰۰۰۰، ۱۳۰۰۰۰۰، ۴۹۰۰۰۰۰،  
 ۴۹۵۰۰۰۰، ۱۱۵۵۰۰۰۰، ۲۶۹۵۰۰۰۰، ۲۷۲۲۵۰۰۰، ۶۳۵۲۵۰۰۰، ۱۴۸۲۲۵۰۰۰، ۱۴۹۷۳۷۵۰۰، ۳۴۹۲۸۷۵۰۰، ۸۱۵۲۳۷۵۰۰، ۸۲۳۵۵۶۲۵۰،  
 ۱۹۲۱۶۳۱۲۵، ۴۴۸۳۸۰۶۲۵، ۱۱۸۹۵۸۱۲۵، ۸۳۱۸۷۵۰، ۵۲۹۳۷۵۰، ۵۸۹۸۷۵۰، ۱۳۷۶۳۷۵۰، ۱۵۳۳۶۷۵۰، ۳۵۷۸۵۷۵۰،  
 ۳۹۸۷۵۵۵۰، ۹۳۰۴۲۹۵۰، ۱۰۳۶۷۶۴۳۰، ۲۴۱۹۱۱۶۷۰، ۲۶۹۵۵۸۷۱۸، ۶۲۸۹۷۰۳۴۲، ۲۴۸۸۲۳۴۳۲، ۵۸۰۵۸۸۰۰۸،  
 ۱۳۵۴۷۰۵۳۵۲، ۱۳۸۵۲۸۸۷۶، ۳۱۹۳۲۳۴۰۴۴، ۷۴۵۰۸۷۹۴۳۶، ۷۵۲۶۹۰۸۸۱۸، ۱۷۵۶۲۷۸۷۲۴۲، ۴۰۹۷۹۸۳۶۸۹۸،  
 ۴۱۳۹۷۹۸۴۹۹، ۹۶۵۹۵۳۲۹۸۳۱، ۲۲۵۳۸۹۱۰۲۹۳۹، ۵۹۷۹۷۱۰۸۹۴۳، ۴۱۸۱۶۱۶۰۱۰، ۲۹۲۴۲۰۷۰۰، ۲۰۴۴۹۰۰۰۰، ۱۴۳۰۰۰۰۰،  
 ۱۰۰۰۰۰۰.





## چند ضلعی‌ها

در بیشتر بناهای قدیمی و جدید ایران می‌توانید از دیدن طرح‌ها و تقارن‌های زیبای کاشی‌کاری‌ها لذت ببرید.

## گفت‌وگو

پس از یک روز طولانی و خسته‌کننده، معلم ریاضی در دفتر دبیران نشسته بود و در این هنگام معلم دیگری وارد دفتر دبیران شد.

**معلم دیگر:** از این خسته شدم که همه جا در کتاب‌های درسی نوشته، مثلاً فلان ابن فلان یک دانشمند ایرانی یا مسلمان بوده که در قدیم زندگی می‌کرده است و چه‌ها کرده است. این حرف‌ها را باید تمام کرد. ما باید علم جدید را یاد بگیریم.

**معلم ریاضی:** خُب، چه اشکالی دارد که هم علم جدید یاد بگیریم و هم یاد بگیریم که گذشتگان ما چه نقشی در علم داشتند؟

**معلم دیگر:** به اعتقاد من آنها هیچ کار مهمی انجام ندادند. جایی می‌خواندم که «نقش دانشمندان اسلامی انتقال دانش از یونان باستان به اروپای رنسانس<sup>۱</sup> بوده است. مسلمان‌ها دانشمند درست و حسابی نداشتند. نهایتاً امانت‌دارهای خوبی بودند که کتاب‌های دانشمندان بزرگ یونان را گرفتند و به دانشمندان بزرگ اروپایی تحویل دادند!»!

**معلم ریاضی:** شما که این قدر اهل مطالعه هستید، جایی نخوانده‌اید که مثلاً خوارزمی، ابن سینا و ابوریحان چه اشخاصی بوده‌اند و چه کارهایی انجام داده‌اند؟ یا ابن خلدون یا ...، باز هم بگوییم؟

**معلم دیگر:** حالا این چند نفر را استثنا می‌کنیم. بقیه چی؟ واقعاً دیگر بس است!

کمی هر دو ساکت شدند، تا اینکه سکوت فضا دوباره شکسته شد.

**معلم دیگر:** [با لحنی گلایه‌آمیز] تازه امروز در همین مدرسه استعدادهای درخشان، یکی

<sup>۱</sup> رنسانس یا دوره نوزایش، جنبش فرهنگی مهمی بوده است که آغازگر دورانی از پیشرفت‌های همه‌جانبه در

اروپا شد.

از دانش‌آموزانم به من می‌گوید که تصمیم گرفته است که برود و تاریخ علم گذشتگان را مطالعه کند. من هم نه گذاشتم و نه برداشتم. سریع بهش گفتم که: «هر چه تا حالا بوده کشف شده! در گذشته ما دیگر چیزی پیدا نمی‌شود! برو آینده این مملکت را بساز!». [با تأکید] بد گفتم!!

**معلم ریاضی:** البته باید خیلی‌ها آینده این مملکت را بسازند. ولی گذشته، یعنی تاریخ یک ملت. که این هم خیلی مهم است. بد نیست در هر نسل، چند نفری بروند و در این مورد تحقیق کنند.

**معلم دیگر:** واقعاً به نظر شما چیز مهمی برای تاریخ کشفیات ما باقی مانده است؟

**معلم ریاضی:** شما تا حالا اصفهان رفتید؟

**معلم دیگر:** [بی حوصله] بله! چند باری رفتم. آثار تاریخی شهر را حفظ هستم! شما فکر می‌کنید من که این حرف‌ها را می‌زنم از هیچ جای ایران خبر ندارم؟!

**معلم ریاضی:** شما که به اصفهان سفر کرده‌اید، تا حالا «امامزاده درب امام»<sup>۱</sup> رفته‌اید؟

**معلم دیگر:** خیر! این چه جور اسمی است؟

**معلم ریاضی:** حدوداً ۴۰ سال پیش یک دانشمند انگلیسی روشی برای کاشی‌کاری کشف کرد که خیلی عجیب و جدید بود. او توانست یک روش کاشی‌کاری «فقط نامتناوب» ارائه بدهد.

همین چند سال پیش چند نفر گردشگر از هزاران کیلومتر آن طرف‌تر آمدند اصفهان. رفته بودند برای دیدن کاشی‌های این امامزاده و فهمیده بودند حدود ۵۰۰ سال پیش از کشف آن روش کاشی‌کاری عجیب، معمار گمنام این امامزاده روش کاشی‌کاری تقریباً مشابهی ارائه داده بوده است.

<sup>۱</sup> واقع در اصفهان، خیابان عبدالرزاق، بازار حاج محمدجعفر، کوی درب امام. به راستی چند نفر از

خوانندگان این کتاب، این اثر تاریخی را دیده‌اند؟



اکنون «معلم دیگر» فقط گوش می‌کرد.

معلم ریاضی: یک سوال؛ این باعث شرمساری ما نیست که یکی از آن سر دنیا بیاید و

بگوید تاریخ ما ایرانی‌ها چه بوده است؟

[با لبخندی معنی دار] فکر کنم کسی که گفته نقش دانشمندان ما انتقال دانش

از یونان باستان به اروپای رنسانس بوده یا معنی انتقال را نمی‌فهمیده یا

معنی دانش را!

برای دیدن عکس‌های «امام‌زاده درب امام» و آشنایی با روش کاشی‌کاری فقط نامتناوب به

«[www.webmath.ir](http://www.webmath.ir)» مراجعه کنید.

## کارگاه بازی

### مثلث

شش نقطه روی یک صفحه هستند. نفر اول دو نقطه را انتخاب می‌کند و با یک پاره‌خط این دو نقطه را به هم وصل می‌کند. نفر دوم نیز، دو نقطه را انتخاب و به هم وصل می‌کند. هرکس که اولین مثلث را بسازد باخته است. منظور از مثلث سه‌ضلعی است که هر رأس آن یکی از شش نقطه داده شده باشد.



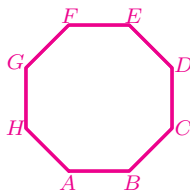
## چندضلعی‌ها و تقارن

۱. در بازی مثلث که در بخش قبل معرفی شد،

الف) نفر اول چگونه بازی کند که همیشه برنده باشد؟

ب) فرض کنید بازی را با  $n$  نقطه ( $n > 4$ ) از رأس‌های یک  $n$ -ضلعی منتظم انجام می‌دهید. برای چه  $n$ ‌هایی نفر اول همیشه می‌تواند برنده باشد؟ برای چه  $n$ ‌هایی نفر دوم می‌تواند همیشه برنده باشد؟

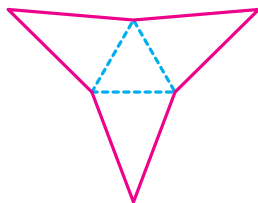
۲. چند تا چندضلعی منتظم درون هشتضلعی منتظم زیر می‌توان رسم کرد که همه رأس‌های هر یک از آنها روی رأس‌های هشتضلعی منتظم زیر باشند؟



۳. یک هشتضلعی مقعر با ضلع‌های برابر بسازید. هشتضلعی مقعر دیگری با ضلع‌های برابر بسازید که با هشتضلعی اول هم‌نهشت نباشد.

۴. فرض کنید  $n$  عددی زوج و بزرگ‌تر از ۴ باشد.

الف) باتوجه به شکل زیر، روشی برای رسم یک  $n$ -ضلعی مقعر با ضلع‌های برابر پیدا کنید. برای چه  $n$ ‌هایی،  $n$ -ضلعی مقعر ساخته شده مرکز تقارن دارد؟

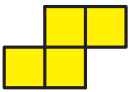


ب) روش دیگری برای ساخت یک  $n$ -ضلعی مقعر با ضلع‌های برابر که محور و مرکز تقارن ندارند، پیدا کنید.

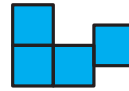
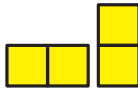
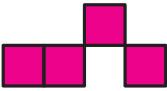
۵. فرض کنید  $n$  عددی فرد و بزرگ‌تر از ۳ باشد. آیا می‌توانید حداقل دو روش برای ساختن یک  $n$ -ضلعی مقعر با ضلع‌های برابر ارائه دهید؟

۶. شکلی مثال بزنید که محور تقارن داشته باشد ولی مرکز تقارن نداشته باشد.

۷. به شکل‌هایی در صفحه که از به هم چسباندن یک یا چند ضلع مربع‌های واحد به یکدیگر ساخته می‌شوند، چندخانه‌ای می‌گویند. برای مثال، سه شکل زیر، چندخانه‌ای (۴-خانه‌ای) هستند.



ولی سه شکل زیر چندخانه‌ای (۴-خانه‌ای) نیستند.



الف) همهٔ ۴-خانه‌ای‌های غیر هم‌نهشت را رسم کنید.

ب) کدام یک از ۴-خانه‌ای‌ها مرکز تقارن دارند؟

ج) کدام یک از ۴-خانه‌ای‌ها محور تقارن دارند؟

۸. می‌دانیم که بازشدهٔ یک مکعب یک ۶-خانه‌ای است.

الف) همهٔ ۶-خانه‌ای‌هایی را که باز شدهٔ یک مکعب هستند، رسم کنید.

ب) کدام یک از ۶-خانه‌ای‌های قسمت «الف» مرکز تقارن دارند؟

ج) کدام یک از ۶-خانه‌ای‌های قسمت «الف» محور تقارن دارند؟

۹. همهٔ عددهای فارسی دورقمی را بیابید که مرکز تقارن دارند.

۱۰. فرض کنید دو شکل دارید که هر یک مرکز تقارن دارند.

الف) این شکل‌ها را طوری در یک صفحه قرار دهید که شکل جدید نیز مرکز تقارن داشته باشد.

ب) دربارهٔ تعداد روش‌های حل قسمت «الف» بحث کنید.

۱۱. در یک کاغذ شطرنجی، مثلثی با رأس‌های  $P = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ ،  $Q = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$  و  $R = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$  رسم کنید و دستوره‌های زیر را در نظر بگیرید.

$A$ : تقارن نسبت به خط گذرنده از نقطه‌های  $\begin{bmatrix} ۴ \\ -۴ \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} -۴ \\ -۴ \end{bmatrix}$ .

$B$ : دوران  $۱۸^\circ$  در جهت عقربه‌های ساعت نسبت به نقطه  $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۱ \end{bmatrix}$ .

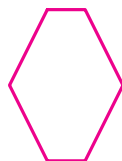
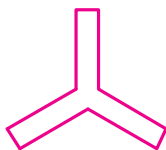
$C$ : تقارن نسبت به خط گذرنده از نقطه‌های  $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ .

در هر یک از قسمت‌های زیر دستوره‌های داده شده را به ترتیب از چپ به راست برای مثلث  $PQR$  اجرا کنید. آیا شکل‌های به دست آمده در هر قسمت یکسان می‌شوند؟

الف)  $A \rightarrow B \rightarrow C$

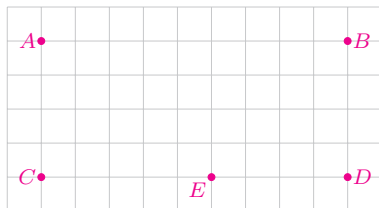
ب)  $B \rightarrow C \rightarrow A$

۱۲. شکل‌های زیر را بر اساس تعداد محور تقارن از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



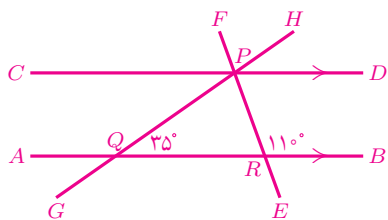
## توازی و تعامد

۱. باتوجه به شکل زیر، نقاط خواسته شده در هر قسمت را مشخص کنید.



الف) چند نقطه مانند  $F$ ، روی پاره‌خط  $AB$  هست که  $D\hat{E}F$  و  $B\hat{F}E$  مکمل باشند؟

ب) چند نقطه مانند  $G$ ، روی پاره‌خط  $AB$  هست که  $B\hat{G}E$  و  $D\hat{E}G$  برابر باشند؟



۲. در شکل روبه‌رو،

الف) کدام زاویه‌ها برابر  $35^\circ$  است؟

ب) کدام زاویه‌ها برابر  $110^\circ$  است؟

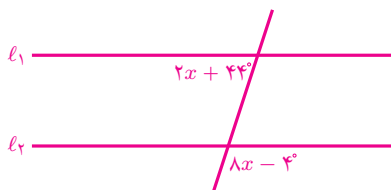
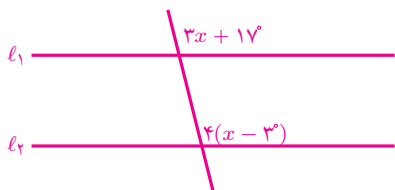
۳. دربارهٔ درستی یا نادرستی جملهٔ زیر بحث کنید.

اگر دو ضلع یک زاویه با دو ضلع زاویه‌ای دیگر موازی باشند، آنگاه آن دو زاویه با هم برابرند.

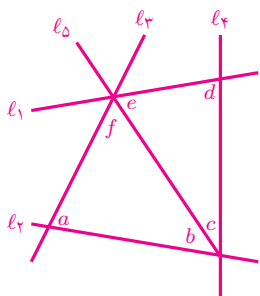
۴. عبارت‌های نوشته شده در کادرهای زیر، همواره درست‌اند. نوشته‌های این دو کادر چه تفاوتی با یکدیگر دارند؟

<p>اگر خط <math>d</math> دو خط <math>l_1</math> و <math>l_2</math> را قطع کند و زاویه‌های <math>A_1</math> و <math>B_1</math> پدید آیند به‌طوری‌که <math>\hat{A}_1 = \hat{B}_1</math>، آنگاه <math>l_1</math> و <math>l_2</math> موازی‌اند.</p>	<p>اگر خط <math>d</math> دو خط موازی <math>l_1</math> و <math>l_2</math> را قطع کند و زاویه‌های <math>A_1</math> و <math>B_1</math> را پدید آورد، آنگاه <math>\hat{A}_1 = \hat{B}_1</math>.</p>
---	---

۵. در هر یک از شکل‌های زیر،  $x$  چقدر باشد که داشته باشیم  $l_1 \parallel l_2$ ؟





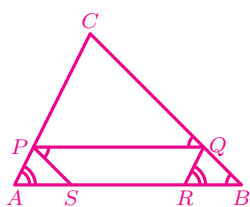


۶. در شکل، کدام خطوط موازی اند اگر،

الف)  $c = 68^\circ$  و  $f = 68^\circ$ ،  $a = 90^\circ$

ب)  $c = 48^\circ$  و  $b = 42^\circ$ ،  $d = 90^\circ$

ج)  $b = 46^\circ$  و  $f = 54^\circ$ ،  $e = 46^\circ$



۷. باتوجه به شکل، ثابت کنید:

الف)  $PQ \parallel AB$

ب)  $AC \parallel RQ$

ج)  $PS \parallel CB$

۸. در چهارضلعی  $ABCD$ ، زاویه‌های  $A$  و  $B$  مکمل‌اند. همچنین زاویه‌های  $A$  و  $D$

مکمل‌اند. ثابت کنید  $AD \parallel BC$ ،  $AB \parallel DC$  و  $\hat{A} = \hat{C}$ .

۹. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ،  $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ،  $D = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ ،  $E = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ ،  $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  و

$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، آنگاه مقدار عبارت زیر را به دست آورید.

$$O\hat{A}P + O\hat{B}P + O\hat{C}P + O\hat{D}P + O\hat{E}P$$

۱۰. یک توپ بیلیارد روی نقطه‌ای از میز مستطیلی شکل بیلیارد قرار دارد. به این توپ

ضربه‌ای زده شده است. بررسی کنید که پس از چندبار برخورد توپ با دیواره‌های

میز، مسیر توپ با مسیر اولیه‌اش موازی می‌شود.



۱۱. روی یک نوار کاغذی مستطیلی، زاویه‌ای به اندازه  $x$  داریم. (شکل ۱).



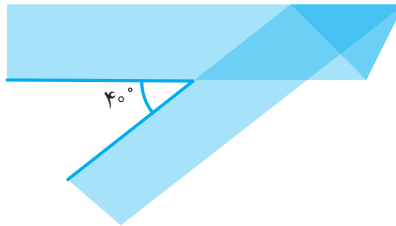
شکل ۱

ابتدا نوار را روی ضلع زاویه تا می‌زنیم (شکل ۲).



شکل ۲

سپس آن را از پشت تا می‌زنیم (شکل ۳). اگر زاویه‌ای که در شکل آخر تشکیل می‌شود  $40^\circ$  درجه باشد، آنگاه  $x$  چقدر است؟



شکل ۳

۱۲. دو مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع‌های  $a$  و  $b$  طوری روی هم قرار گرفته‌اند که هر ضلع مثلث اول با یکی از اضلاع مثلث دوم موازی است. محیط شش‌ضلعی آبی را بر حسب  $a$  و  $b$  به دست آورید.



## چهارضلعی‌ها

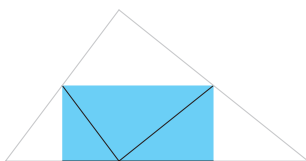
۱. حسن یک مثلث داشت. او یک ضلع مثلثش را به آینه چسباند و یک مربع تشکیل شد! مثلث حسن چه خاصیتی دارد؟
۲. الف) آیا یک چهارضلعی غیر از مربع وجود دارد که چهار محور تقارن داشته باشد؟  
ب) آیا شکلی غیر از مربع وجود دارد که چهار محور تقارن داشته باشد؟
۳. یک چهارضلعی به غیر از لوزی مثال بزنید که قطرهای آن برهم عمود باشند.
۴. یک چهارضلعی داریم که قطرش محور تقارنش است. ثابت کنید قطرهای این چهارضلعی برهم عمودند.
۵. آیا می‌توانید یک چهارضلعی به غیر از مربع مثال بزنید که قطرهای آن باهم برابر و برهم عمود باشند؟
۶. یک چهارضلعی به غیر از متوازی‌الاضلاع مثال بزنید که دو جفت ضلع برابر داشته باشد.
۷. یک چهارضلعی با دو جفت ضلع برابر و قطرهای عمود برهم و دو زاویه قائمه مثال بزنید که مربع نباشد.
۸. یک چهارضلعی با دو ضلع موازی، دو ضلع مساوی و دو جفت زاویه برابر مثال بزنید که متوازی‌الاضلاع نباشد.
۹. در یک چهارضلعی دو قطر برهم عمودند. تعداد محورهای تقارن این چهارضلعی چه اعدادی می‌تواند باشد؟ برای هر عدد یک مثال بیاورید.
۱۰. ثابت کنید که اگر یک متوازی‌الاضلاع محور تقارن داشته باشد، آن متوازی‌الاضلاع یا مستطیل است و یا لوزی.

## زاویه‌های داخلی و خارجی

۱. نازنین برای اینکه ثابت کند مجموع زاویه‌های هر مثلث  $180^\circ$  درجه است، یک مثلث کاغذی ساخت و ارتفاع آن را رسم کرد. سپس رأسی را که ارتفاع از آن رسم شده بود، روی پای ارتفاع گذاشت و کاغذ را تا زد.



سپس هر یک از دو رأس دیگر مثلث را نیز روی پای ارتفاع رسم شده گذاشت و کاغذ را تا زد.



دربارهٔ درستی روش نازنین بحث کنید.

۲. هادی و هدی می‌خواستند ثابت کنند مجموع زاویه‌های مثلث  $180^\circ$  درجه است.

راه‌حل هدی:	راه‌حل هادی:
$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_2 = \hat{B} \\ \hat{A}_2 = \hat{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ.$ $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_2 = 180^\circ$	$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} = \hat{C}_2 \\ \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ.$

هر دو راه‌حل بالا ایراد دارند. در صورت امکان آنها را اصلاح کنید.

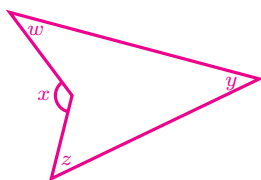
۳. در پنج ضلعی منتظم  $ABCDE$ ،

الف) زاویه بین دو قطر  $AD$  و  $BE$  چند درجه است؟

ب) زاویه بین دو قطر  $AC$  و  $CE$  در محل تقاطع آنها، چند درجه است؟

۴. یک مثلث دلخواه رسم کنید و آن را  $ABC$  بنامید. نقاط  $D$  و  $E$  را به ترتیب روی  $BC$  و  $AD$  طوری انتخاب کنید که با رسم پاره‌خط‌های  $AD$  و  $CE$ ، تعداد زاویه‌های با اندازه مختلف کمترین تعداد ممکن باشد. (پنج نقطه  $A, B, C, D, E$  را متمایز در نظر بگیرید.)

۵. در شکل زیر ثابت کنید  $x = y + z + w$ .



۶. در چهارضلعی  $ABCD$  اندازه زاویه  $C$  بیشتر از  $180^\circ$  درجه است. اگر دو مثلث  $ABC$  و  $BCD$  هم‌نهشت باشند، آنگاه درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف)  $\widehat{BAC} = \widehat{CBD}$

ب)  $\widehat{ACB} = \widehat{BCD}$

ج)  $AB = BC$

د)  $AB = CD$

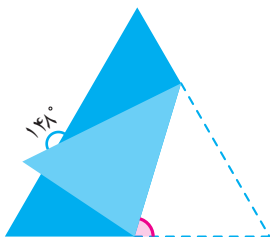
۷. یک چندضلعی محدب، حداکثر چند زاویه داخلی حاده (تند) دارد؟

۸. در چهارضلعی محدب  $ABCD$  امتداد ضلع‌های  $AD$  و  $BC$  یکدیگر را در نقطه  $E$ ، و امتداد ضلع‌های  $AB$  و  $CD$  یکدیگر را در نقطه  $F$  قطع می‌کنند.

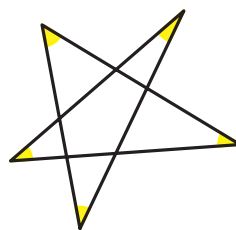
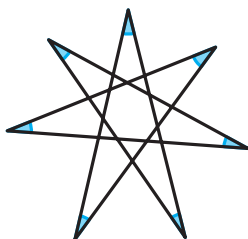
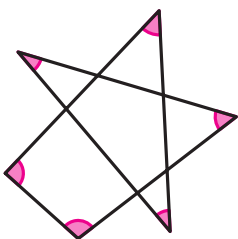
الف) ثابت کنید اگر دو زاویه  $E$  و  $F$  برابر باشند، آنگاه  $ABCD$  دو زاویه روبه‌روی برابر دارد.

ب) اگر  $\widehat{E} = \widehat{F} = 20^\circ$ ، آنگاه تفاضل زاویه‌های روبه‌رو در این چهارضلعی چقدر است؟

۹. یک مثلث متساوی‌الاضلاع مانند شکل زیر تا شده است. اندازه زاویه صورتی چند درجه است؟



۱۰. در شکل‌های زیر، مجموع زاویه‌های رنگ شده را به دست آورید.



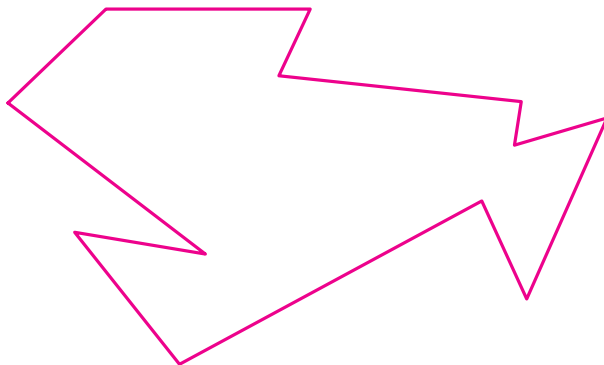
۱۱. درون مربعی ۵۷ نقطه وجود دارد. می‌خواهیم این مربع را با کاشی‌های مثلثی شکل بپوشانیم به طوری که سه شرط زیر برقرار باشند:

- حتماً و فقط این ۵۷ نقطه و چهار رأس مربع، رئوس کاشی‌های مثلثی باشند.
- کاشی‌ها روی هم قرار نگیرند.
- کاشی‌ها تمام مربع را بپوشانند.

برای این کار به چند کاشی مثلثی نیاز داریم؟

۱۲. می‌خواهیم چندضلعی صفحه‌بند را مثلث‌بندی کنیم، یعنی طوری چندضلعی را با تعدادی مثلث (نه لزوماً هم‌نهشت) بپوشانیم که هر سه شرط زیر برقرار باشد:

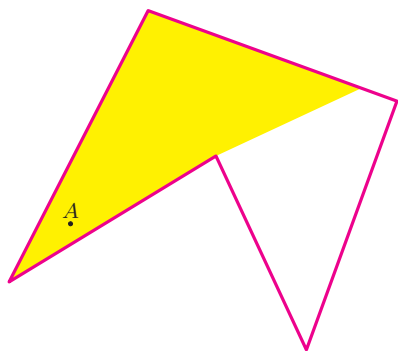
- ضلع هر مثلث، ضلع یا قطر چندضلعی باشد.
- هیچ دو مثلثی روی هم قرار نگیرند و هیچ مثلثی از چندضلعی خارج نشود.
- تمام چندضلعی با مثلث‌ها پوشانده شود.



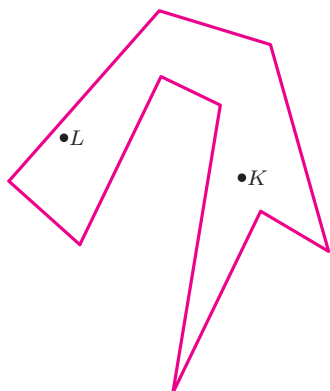
الف) حداقل سه مثلث بندی متفاوت برای چندضلعی بالا بیابید.

ب) مجموع زاویه‌های داخلی شکل بالا، چند درجه است؟

۱۳. در شکل زیر، فرض کنید نقطه  $A$  یک لامپ است. این لامپ ناحیه‌ای از چندضلعی را روشن (زرد رنگ) کرده است.



الف) در شکل روبه‌رو، لامپ‌های  $L$  و  $K$  چه ناحیه‌ای از چندضلعی را روشن می‌کنند؟ آن ناحیه‌ها را با رنگ زرد مشخص کنید.



ب) لامپ‌های شکل روبه‌رو را طوری جابه‌جا کنید که تمام چندضلعی روشن شود.

ج) آیا می‌توان فقط با یک لامپ، این چندضلعی را روشن کرد؟

۱۴. شکل‌های زیر، نقشه‌های ساختمان سه موزه هستند. می‌خواهیم در این موزه‌ها دوربین‌های مداربسته کار بگذاریم. اگر هر دوربین قابلیت دید  $360^\circ$  درجه داشته باشد، با حداقل چند دوربین می‌توان تمام نقاط هر یک از موزه‌ها را پایید؟



۱۵. پروژه. می‌خواهیم درباره  $n$  ضلعی‌های مقعر بیشتر بدانیم. برای مثال، می‌توانیم پرسیم:

- مجموع زاویه‌های داخلی یک  $n$ -ضلعی مقعر چقدر است؟
- یک  $n$ -ضلعی مقعر حداکثر چند زاویه بیش از  $180^\circ$  درجه دارد؟

الف) آیا می‌توانید به این پرسش‌ها پاسخ دهید؟

ب) آیا می‌توانید پرسش‌های دیگری مطرح کنید؟

در «[www.webmath.ir](http://www.webmath.ir)» لینکی قرار داده شده تا کار شما را برای انجام این پروژه ساده‌تر کند. با مراجعه به «[www.webmath.ir](http://www.webmath.ir)» نتایج خود را ارسال کنید.

۱۶. پروژه. اگر یک موزه  $n$ -ضلعی داشته باشیم، برای پاییدن آن حداقل به چند دوربین نیازمندیم؟ به عبارت دیگر برای پاییدن هر موزه با  $n$  دیوار چند دوربین کافی است؟



با مراجعه به «[www.webmath.ir](http://www.webmath.ir)» نتایج خود را ارسال کنید.



## کاشی کاری

## کاشی کاری

تعدادی چندضلعی در نظر بگیرید. به پوشاندن یک صفحه با این چندضلعی‌ها (و یا چندضلعی‌های هم‌نهشت با آنها) به طوری که این چندضلعی‌ها روی هم قرار نگیرند و شکافی بین آنها ایجاد نشود، «کاشی کاری» می‌گویند.

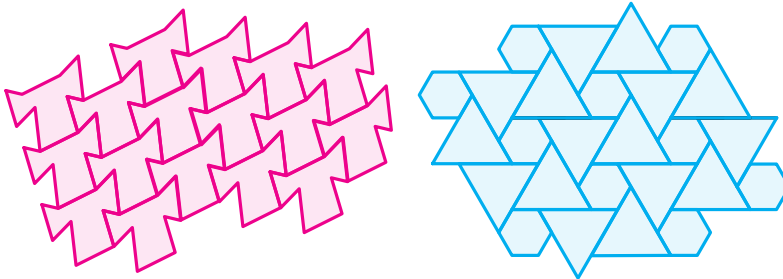
## کاشی کاری ضلع به ضلع

اگر هر دو چندضلعی یک کاشی کاری، یا هیچ نقطهٔ مشترکی با هم نداشته باشند، یا فقط در یک رأس مشترک باشند، و یا فقط در یک ضلع مشترک باشند، آن کاشی کاری را، «کاشی کاری ضلع به ضلع» می‌نامند.

## کاشی کاری تک وجهی

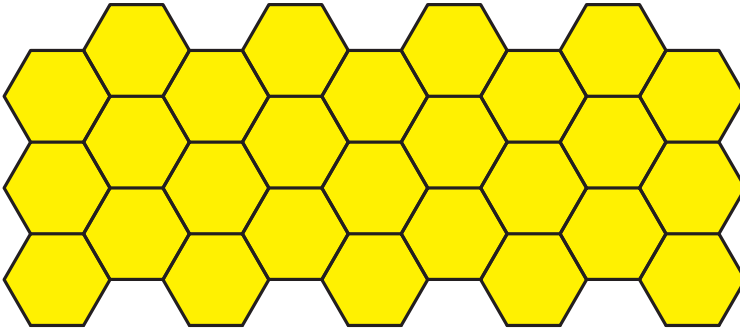
اگر در یک کاشی کاری همهٔ کاشی‌ها هم‌نهشت باشند، به آن کاشی کاری، «کاشی کاری تک وجهی» می‌گویند.

۱. الف) چرا هیچ‌کدام از کاشی‌کاری‌های زیر کاشی کاری ضلع به ضلع نیستند؟

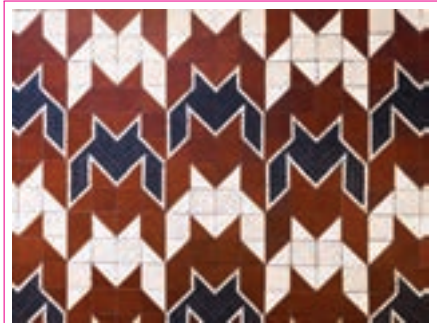


ب) کدام یک از کاشی‌کاری‌های بالا تک وجهی است؟

ج) کاشی‌کاری زیر یک کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع است. چرا؟



۲. اگر به محیط اطراف خود دقت کنید، کاشی‌کاری‌های جالبی می‌بینید. در زیر، کدام تصویرها قسمتی از یک کاشی‌کاری را نشان می‌دهند؟ ضلع‌به‌ضلع و تک‌وجهی بودن هر کاشی‌کاری را بررسی کنید.



۳. طرح روی جلد کتاب ریاضی تکمیلی هشتم یک نوع کاشی‌کاری است. ضلع‌به‌ضلع و تک‌وجهی بودن این کاشی‌کاری را بررسی کنید.

۴. در هر قسمت کاشی‌کاری خواسته شده را در محیط اطراف خود (سرویس‌های بهداشتی، حمام، آشپزخانه، حیاط، راهروهای ساختمان، نمای ساختمان، مدرسه، پیاده‌رو، استخر، مسجد، زیارتگاه و ...) بیاید و آن را در دفترتان رسم کنید. سپس پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

(الف) یک کاشی‌کاری که ضلع به ضلع باشد ولی تک‌وجهی نباشد.

(ب) یک کاشی‌کاری که هم ضلع به ضلع باشد و هم تک‌وجهی.

(ج) یک کاشی‌کاری که تک‌وجهی باشد ولی ضلع به ضلع نباشد.

(د) یک کاشی‌کاری که نه تک‌وجهی باشد و نه ضلع به ضلع.

۵. الف) نشان دهید که مجموع زاویه‌های داخلی یک  $n$ -ضلعی محدب مساوی با  $n-2$  برابر مجموع زاویه‌های یک مثلث است.

(ب) چرا با افزایش تعداد اضلاع چندضلعی منتظم، اندازه زاویه‌های داخلی آن بیشتر می‌شود؟

(ج) چرا اگر  $n$  عددی بزرگ‌تر از شش باشد، با  $n$ -ضلعی منتظم نمی‌توان کاشی‌کاری ضلع به ضلع تک‌وجهی کرد؟

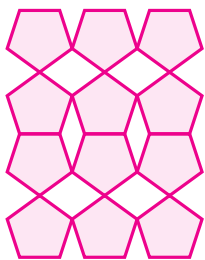
(د) چرا با پنج‌ضلعی منتظم نمی‌توان کاشی‌کاری ضلع به ضلع تک‌وجهی کرد؟

(ه) ثابت کنید که فقط سه نوع چندضلعی منتظم هستند که با آنها می‌توان کاشی‌کاری ضلع به ضلع تک‌وجهی کرد.

۶. در هر یک از موارد زیر بررسی کنید که آیا با تعدادی چندضلعی منتظم (به طول واحد) می‌توان کاشی‌کاری ضلع به ضلع کرد یا خیر. (توجه کنید که در هر مورد باید از هر نوع کاشی، حداقل یک بار استفاده شود.)

(الف) چهارضلعی منتظم، شش‌ضلعی منتظم و ۱۲ ضلعی منتظم

(ب) سه‌ضلعی منتظم، هفت‌ضلعی منتظم و ۴۲ ضلعی منتظم



۷. الف) در شکل روبه‌رو، با تعدادی پنج‌ضلعی منتظم و دو نوع چهارضلعی، یک کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع ارائه شده است. چرا این دو نوع چهارضلعی، لوزی هستند؟  
 ب) با تعدادی پنج‌ضلعی منتظم هم‌نهشت و یک نوع لوزی، یک کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع بسازید.

۸. نشان دهید با هر مثلث می‌توان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

راهنمایی: ابتدا ثابت کنید می‌توان با چسباندن دو مثلث هم‌نهشت به یکدیگر، یک متوازی‌الاضلاع ساخت. سپس نشان دهید با هر متوازی‌الاضلاع می‌توان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

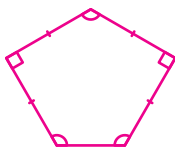
۹. نشان دهید با هر چهارضلعی محدب می‌توان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

راهنمایی: ابتدا ثابت کنید می‌توان با چسباندن دو چهارضلعی محدب هم‌نهشت به یکدیگر، یک شش‌ضلعی ساخت که ضلع‌های آن دوه‌دو باهم موازی باشند. سپس نشان دهید با هر شش‌ضلعی که ضلع‌های آن دوه‌دو باهم موازی‌اند، می‌توان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

۱۰. نشان دهید با هر چهارضلعی مقعر می‌توان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

۱۱. یک پنج‌ضلعی محدب مثال بزنید که با آن نتوان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

۱۲. یکی از پنج‌ضلعی‌های محدبی که می‌توان با آن کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد، «پنج‌باز»<sup>۱</sup> (شکل زیر) است. با پنج‌باز کاشی‌کاری تک‌وجهی کنید.



۱۳. شما و ریاضی‌دانان می‌دانید که با هر پنج‌ضلعی محدب نمی‌توان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد. سؤالی که برای ریاضی‌دانان مطرح است این است که یک پنج‌ضلعی محدب چه خاصیتی داشته باشد که بتوان با آن کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

<sup>۱</sup> نام نوعی کاشی که معماران و هنرمندان ایرانی به‌کار می‌برده‌اند.