

فصل اوّل

دایره



عکس: محمد رضا دوسیری گنجی

قلعهٔ فلک الافلاک که از دوره ساسانیان در شهرستان خرم‌آباد
برجای مانده است.
چرا در ساخت بسیاری از قلعه‌ها در کشورمان از شکل دایره
استفاده شده است؟



اهداف کلی فصل ۱

- ۱ آشنایی با وضعیت‌های مختلف خط و دایره نسبت به هم و اثبات برخی قضایای مربوط به آنها؛
- ۲ آشنایی با زوایای مرکزی، محاطی، ظلی و اثبات قضایایی در خصوص ارتباط بین اندازه زوایای مذکور و اندازه کمان‌های متقابل یا محصور بین آن زوایا؛
- ۳ آشنایی و اثبات قضایایی درباره روابط طولی در دایره و استفاده از آن روابط در حل مسائل؛
- ۴ آشنایی با چندضلعی‌ها و دایره‌های محاطی و محیطی و درک ویژگی‌های آنها با تأکید بر مثلث‌ها، چهارضلعی‌ها و چندضلعی‌های منتظم.

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

اهداف درس

- ۱ آشنایی با تعریف دایره و مفاهیم کلیدی در دایره نظیر : وتر، کمان، قطر و زاویه مرکزی؛
- ۲ بیان وضعیت نقطه نسبت به دایره و مشخص کردن نزدیک‌ترین و دورترین نقطه روی دایره نسبت به یک نقطه خاص؛
- ۳ تشخیص وضعیت خط و دایره نسبت به هم و بیان حالت‌های مختلف آن؛
- ۴ رسم خط مماس از یک نقطه در روی دایره بر آن؛
- ۵ آشنایی با زاویه مرکزی، قطاع و پیدا کردن اندازه زاویه مرکزی، طول کمان روبه‌رو و محیط و مساحت قطاع؛
- ۶ تعریف زاویه محاطی و اثبات اندازه آن و پیدا کردن اندازه زوایای محاطی در دایره؛
- ۷ تعریف زاویه ظلّی و اثبات اندازه آن و پیدا کردن اندازه زوایای ظلّی بر دایره؛
- ۸ پیدا کردن اندازه زاویه بین دو قاطع بر دایره و زاویه بین دو وتر متقاطع در داخل دایره براساس اندازه کمان‌های محصور بین آنها.

چند نکته خطاب به همکاران محترم قبل از تدریس درس اول :

- ۱ از قبل به دانش‌آموزان گفته شود که خط کش و پرگار همراه داشته باشند.
- ۲ درس اول را می‌توان در ۳ یا ۴ جلسه ۷۵ دقیقه‌ای، با توجه به آمادگی دانش‌آموزان، ارائه داد.
- ۳ مطالبی که پیشنهاد می‌شود در جلسه اول ارائه شود : مفاهیم اولیه دایره، اوضاع نسبی نقطه نسبت به

دایره، اوضاع نسبی خط و دایره، رسم مماس بر دایره از نقطه روی آن، زاویه مرکزی و پیدا کردن طول کمان روبه روی زاویه مرکزی (صفحات ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ تا انتهای «کار در کلاس» صفحه ۱۲).

انجام فعالیت صفحه ۱۳ به عنوان تمرین از دانش آموز خواسته شود.

مطالبی که پیشنهاد می شود در جلسه دوم ارائه شود :

شروع با انجام فعالیت پایین صفحه ۱۳ کتاب درسی، تعریف زاویه محاطی و اثبات اندازه آن در سال های مختلف به همراه حل چند نمونه مثال، تعریف زاویه ظلّی به همراه پیدا کردن اندازه آن و حل چند نمونه سؤال ارائه شود. (صفحات ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ تا ابتدای فعالیت پایین صفحه ۱۵).

پیشنهاد می شود در جلسه سوم این مطالب بیان شود : زوایای بین دو وتر متقاطع در داخل دایره، زاویه بین دو قاطع بر دایره در خارج آن، رابطه طولی بین وترهای در داخل و خارج دایره (صفحات ۱۵ و ۱۶ و ۱۸) تمرینات صفحه ۱۶ و ۱۷ برای حل در منزل پیشنهاد می شود.

در جلسه چهارم، حل تمرین های صفحه ۱۶ و ۱۷ و برگزاری آزمون احتمالی پیشنهاد می شود.

روش تدریس درس اوّل

می توان با استفاده از مفهوم مکان هندسی، وارد مبحث دایره شد؛ یعنی یک نقطه روی تخته رسم می کنیم و آن را O می نامیم. به کمک خط کش، یک نقطه فرضی به فاصله 1 cm از O رسم می کنیم. سپس نقطه دیگری پیدا می کنیم و ادامه می دهیم تا چند نقطه به دست آید. آن گاه دانش آموزان خواهند گفت که این نقاط دایره هستند. سپس دایره را تعریف می کنیم و نوع نمایش را، مطابق با رسم الخط کتاب، بیان می کنیم. (لازم به ذکر است که نیازی به ارائه تعریف دایره به عنوان مکان هندسی نیست. چون که جزء اهداف کتاب نمی باشد).

سپس وارد مباحث وضعیت نقطه نسبت به دایره می شویم؛ یعنی چند نقطه روی تخته رسم می کنیم و وضعیت آن را نسبت به مرکز دایره مقایسه می کنیم. در اینجا بد نیست به تقسیم نقاط صفحه به سه مجموعه اشاره شود و بعد وضعیت نقطه و دایره بیان شود. جای خالی صفحه ۱۰ کتاب را کامل می کنیم. حال وارد مبحث وضعیت خط و دایره می شویم. قبل از شروع این مبحث، بهتر است ابتدا به «یادآوری» پایین صفحه ۱۰ اشاره و فاصله نقطه تا خط بیان شود و نشان داده شود این اندازه از هر فاصله دیگر نقطه تا خط کوتاه تر است. آن گاه به وضعیت خط و دایره اشاره و تعاریف بیان شود. سپس جای خالی صفحه ۱۱ را به صورت زیر کامل می کنیم.

الف) ۲ ب) یک خط بر دایره مماس است. پ) نقطه مشترک ندارند.

فعالیت صفحه ۱۱ انجام می شود.

این فعالیت دو هدف دارد :

۱ درک اینکه خط مماس بر دایره، بر شعاع دایره در نقطه تماس، عمود است.

۲ آشنایی با نحوه رسم خط مماس بر دایره از یک نقطه روی آن.

دقت شود که این ۲ موضوع بعد از حل فعالیت توسط دانش آموزان بیان شود.

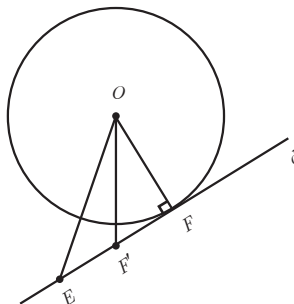
انجام فعالیت صفحه ۱۱ کتاب :

الف) نقطه F نزدیک ترین نقطه روی خط نسبت به O است؛ زیرا F تنها نقطه روی خط d است که روی دایره قرار دارد و بقیه نقاط خط d خارج دایره هستند. می دانیم که نقاط روی دایره با شعاع دایره برابرند، ولی نقاط خارج دایره، از شعاع بیشترند.

ب) نقطه F نزدیک ترین نقطه روی خط نسبت به O است؛ زیرا به خلف فرض می کنیم که خط عمود در نقطه دیگری مانند F' خط d را قطع کند. آن گاه نقطه ای مانند E را روی خط d در نظر می گیریم، به طوری که $FF' = F'E$ در دو مثلث OFF' و $OFF'E$ داریم :

$$\triangle OFF' \cong \triangle OFF'E \begin{cases} OF' = OF' \\ F' = F' = 90^\circ \\ EF' = FF' \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} OF = OE = r$$

یعنی نقطه E نیز روی دایره قرار دارد که این با خط مماس d بر دایره C در تناقض است.



پ) نتیجه : اگر F نقطه ای روی دایره باشد، شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطه F بر هم عمودند. قسمت پ «فعالیت» طریقه رسم خط مماس بر دایره از یک نقطه روی آن است. بهتر است این ترسیم مهم جلوه داده شود.

طریقه رسم خط مماس از نقطه F روی دایره

نقطه F روی دایره را در نظر می‌گیریم. از نقطه F به مرکز دایره O وصل می‌کنیم. سپس از نقطه F روی خط OF بر آن عمود می‌کنیم. این خط بر دایره مماس است.

مفاهیم کلی مانند شعاع، وتر، قطر، کمان و زوایای مرکزی، به همراه رسم شکل، تعریف شود. زاویه مرکزی را تعریف و اندازه زاویه مرکزی و کمان روبه‌رو را بیان کنیم. سپس به دنبال پیدا کردن طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی باشیم. حل «کار در کلاس» صفحه ۱۲ به دنبال این موضوع است که دانش‌آموز، با حل آن، اندازه کمان و طول کمان روبه‌رو به یک زاویه مرکزی را یاد می‌گیرد. سپس به کمک آنها محیط و مساحت قطاع بیان می‌شود.

حل «کار در کلاس» صفحه ۱۲ :

۱ در مورد رابطه نوشته شده توضیح داده می‌شود که چگونه به‌دست آمده است.

$$\widehat{AB} = 6^\circ \quad \widehat{AB} \text{ طول} = \frac{6^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \cdot OA = \frac{\pi}{3} \times OA \quad \text{۲}$$

$$\widehat{A_1B_1} = 6^\circ \quad \widehat{A_1B_1} \text{ طول} = \frac{6^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \cdot OA_1 = \frac{\pi}{3} \times OA_1$$

$$\frac{\widehat{AB} \text{ اندازه کمان}}{360^\circ} = \frac{\widehat{AB} \text{ طول کمان}}{\text{محیط دایره}} \Rightarrow \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{L}{2\pi R} \Rightarrow L = \frac{\pi R}{180^\circ} \alpha \quad \text{۳}$$

می‌دانیم یک درجه برابر $\frac{1}{360}$ دایره است. پس مساحت زاویه مرکزی 1° برابر $\frac{1}{360}$ مساحت دایره است؛ یعنی مساحت قطاع به اندازه زاویه α درجه برابر α برابر مساحت قطاع یک درجه است.

$$S = \alpha \times \frac{1}{360^\circ} \times \pi R^2 = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \alpha$$

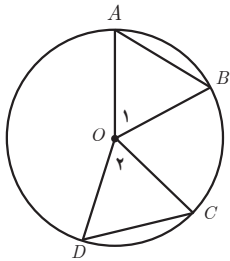
«فعالیت» صفحه ۱۳ چند هدف دارد: در شماره ۱ و ۲ می‌خواهیم بیان کنیم اگر دو وتر مساوی باشند، کمان‌های نظیر آنها برابرند و برعکس. در ۳ و ۴ و ۵ می‌خواهیم بیان کنیم قطر عمود بر وتر، و وتر و کمان روبه‌رو به وتر را نصف می‌کند و برعکس. از این هدف نتیجه می‌توان گرفت که عمود منصف هر وتر از مرکز دایره می‌گذرد.

فعالیت صفحه ۱۳

۱ زاویه‌های O_1 و O_2 زوایای مرکزی هستند. اندازه هر زاویه مرکزی با کمان روبه‌رو برابر است.

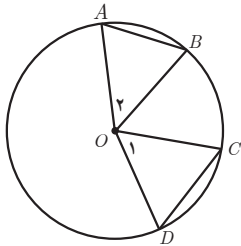
$$\begin{aligned} \hat{O}_1 &= \widehat{AB} \\ \hat{O}_2 &= \widehat{DC} \quad \widehat{AB} = \widehat{DC} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{aligned}$$

فصل اول: دایره ۷



دو مثلث $\triangle OAB$ ، $\triangle ODC$ را در نظر می‌گیریم.

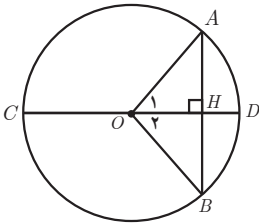
$$\triangle OAB \cong \triangle ODC \begin{cases} OA = OD = r \\ OB = OC = r \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} AB = DC$$



فرض $AB = CD$ حکم $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

$$\triangle OAB \cong \triangle OCD \begin{cases} OA = OC = r \\ OB = OD = r \\ AB = CD \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

O_1 و O_2 زوایای مرکزی‌اند. $O_2 = \widehat{AB}$ و $O_1 = \widehat{CD}$ در نتیجه $\widehat{AB} = \widehat{CD}$



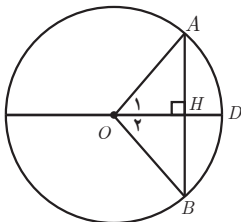
$$\triangle OAH \cong \triangle OHB \begin{cases} OA = OB \\ OH = OH \end{cases} \quad \text{۳}$$

دو مثلث $\triangle OAH$ و $\triangle OHB$ بنا به برابری وتر و یک ضلع قائمه،
همنهشت هستند.

در نتیجه $AH = HB$ و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و O_1 و O_2 زوایای مرکزی هستند.
 $\widehat{AD} = \widehat{BD}$

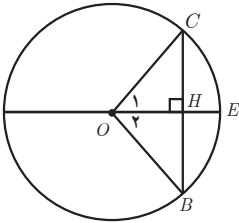
۴ O را به A و B وصل می‌کنیم.

$$\triangle OAH \cong \triangle OHB \begin{cases} OA = OB \\ OH = OH \\ AH = HB \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \left. \begin{matrix} O_1 = O_2 \\ O_1 = \widehat{AD} \\ O_2 = \widehat{BD} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BD}$$



و از طرفی $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ در نتیجه $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ$ و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$

۵ E وسط کمان \widehat{CB} است؛ یعنی $\widehat{CE} = \widehat{EB}$
 O_1 و O_2 زوایای مرکزی هستند.



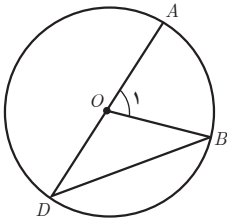
$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \widehat{CE} \\ \hat{O}_2 = \widehat{EB} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

$$\triangle OCH \cong \triangle OHB \left\{ \begin{array}{l} OC = OB \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OH = OH \end{array} \right. \longrightarrow \begin{array}{l} CH = BH \\ H_1 = H_2 \end{array}$$

$$H_1 + H_2 = 180^\circ \rightarrow H_1 = H_2 = 90^\circ \text{ از طرفی}$$

۶ با توجه به فعالیت شماره ۴ و ۵ کافی است وسط کمان را به وسط وتر وصل کنیم و ادامه دهیم تا دایره را قطع کند. این پاره خط قطر دایره و عمود بر وتر است.
 موضوع «فعالیت» پایین صفحه ۱۳ اندازه زاویه محاطی است. ابتدا زاویه محاطی را تعریف و یک زاویه محاطی رسم کنید. سپس قضیه را ثابت کنید. سه حالت برای قضیه در نظر گرفته شده است.

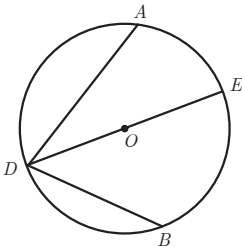
فعالیت صفحه ۱۳



۱ B را به O وصل می کنیم. مثلث OBD متساوی الساقین است.
 $OB = OD \rightarrow \hat{D} = \hat{B}$
 زاویه خارجی مثلث متساوی الساقین است.

$$\hat{O}_1 = \hat{D} + \hat{B} = 2\hat{D} \Rightarrow \hat{D} = \frac{\hat{O}_1}{2}$$

$$\hat{D} = \frac{\widehat{AB}}{2} \text{ از طرفی } \hat{O}_1 = \widehat{AB} \text{ در نتیجه}$$



۲ در حالت دوم فرض می کنیم O بین اضلاع زاویه محاطی واقع باشد.
 D را به O وصل می کنیم و ادامه می دهیم تا کمان روبه رو را در E قطع کند.

$$\hat{ADE} = \frac{\widehat{AE}}{2} \text{ و } \hat{EDB} = \frac{\widehat{EB}}{2}$$

$$\hat{ADB} = \hat{ADE} + \hat{EDB} = \frac{\widehat{AE}}{2} + \frac{\widehat{EB}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

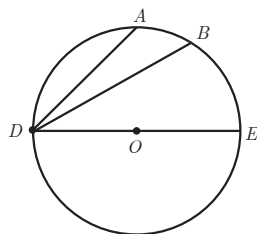
۳ در این حالت، مرکز دایره خارج زاویه مرکزی قرار دارد.

از نقطه D به O وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم. آن‌گاه بنا به قسمت الف داریم:

$$\widehat{ADE} = \frac{\widehat{ABE}}{2} \text{ و } \widehat{BDE} = \frac{\widehat{BE}}{2}$$

$$\widehat{ADB} = \widehat{ADE} - \widehat{BDE} = \frac{\widehat{ABE}}{2} - \frac{\widehat{BE}}{2} = \frac{\widehat{ABE} - \widehat{BE}}{2}$$

$$\widehat{ADB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$



در اینجا بهتر است از چند مثال برای یافتن اندازه زاویه محاطی استفاده شود. چند نمونه مثال در ادامه در قسمت مثال‌های فصل اول درس ۱ ارائه شده است.

در انتها، به صورت یک قضیه، اندازه زاویه محاطی را بیان می‌کنیم (قضیه صفحه ۱۴). حال، زاویه ظلی را تعریف و چند زاویه ظلی رسم می‌کنیم. به کمک حل فعالیت صفحه ۱۴ اندازه زاویه ظلی به دست می‌آید. بعد از حل فعالیت این صفحه، قضیه صفحه ۱۵، که نتیجه فعالیت است، بیان می‌شود. هدف این فعالیت پیدا کردن اندازه ظلی در دایره است.

حل فعالیت صفحه ۱۴:

$$\text{الف) } \widehat{DAC} = 90^\circ \text{ و بنابراین } \widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{ABD}$$

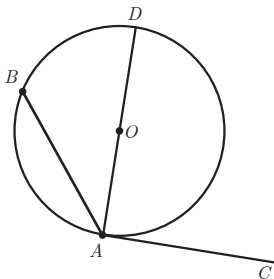
$$\text{ب) زاویه } DAB \text{ یک زاویه محاطی است؛ بنابراین: } \widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{DB}$$

$$\text{پ) از الف) و ب) داریم: } \widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \frac{1}{2}(\widehat{DBA} - \widehat{DB})$$

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

ت) فرض می‌کنیم زاویه \widehat{BAC} منفرجه باشد. نقطه A را به O مرکز دایره وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند.

$$\widehat{DAC} = 90^\circ \rightarrow \widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{DA}$$



زاویه DAB یک زاویه محاطی است $\widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{BD}$

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{BD} + \frac{1}{2}\widehat{DA} = \frac{1}{2}\widehat{BDA}$$

در این قسمت چند مثال بیان کنید تا دانش آموزان اندازه زاویه ظلی را یاد بگیرند.
«کار در کلاس» صفحه ۱۵ حل شود. هدف، بیان نتیجه‌ای است که در ادامه آن بیان شده است. از این کار در کلاس برای اثبات فعالیت بعدی کمک گرفته می‌شود؛ بنابراین، بدون انجام دادن کار در کلاس، وارد فعالیت نشوید.

حل کار در کلاس صفحه ۱۵ :

۱ الف) زوایای \widehat{BAD} و \widehat{ADC} با هم برابرند؛ زیرا :

$$AB \parallel CD \text{ و } AD \text{ مورب} \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{ADC}$$

ب) کمان‌های \widehat{BD} و \widehat{AC} برابرند زیرا زوایای \widehat{BAD} و \widehat{ADC} محاطی هستند؛ پس،

$$\widehat{BAD} = \frac{1}{2}\widehat{BD}$$

$$\widehat{ADC} = \frac{1}{2}\widehat{AC}$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود. $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

۲ الف) وترهای EF و GH رسم می‌شود و پاره خط EH را رسم می‌کنیم.

ب) زوایای FEH و EHG برابرند؛ زیرا :

$$\begin{aligned} \widehat{FEH} &= \frac{1}{2}\widehat{FH} \\ \widehat{EHG} &= \frac{1}{2}\widehat{EG} \end{aligned} \Rightarrow \widehat{FEH} = \widehat{EHG}$$

بنا به عکس قضیه خطوط موازی و مورب، نتیجه می‌شود وتر EF موازی GH است.
می‌خواهیم زوایای بین دو وتر متقاطع در داخل یا امتداد آنها در خارج دایره را پیدا کنیم. با حل فعالیت پایین صفحه ۱۵ و ۱۶ این مقدار به دست می‌آید.
هدف این فعالیت؛ پیدا کردن زاویه بین امتداد دو وتر متقاطع در خارج دایره و زاویه بین دو وتر متقاطع در داخل دایره است.

حل فعالیت صفحه ۱۵ :

$$AD \parallel CF \text{ و } AE \text{ مورب} \Rightarrow \hat{DAE} = \hat{FCE}$$

۱

زاویه FCE یک زاویه محاطی است.

$$\hat{FCE} = \frac{1}{2} \widehat{FE}$$

$$BF \parallel AD \text{ و } BE \text{ مورب} \Rightarrow \hat{FBE} = \hat{DAE}$$

۲

زاویه FBE یک زاویه محاطی است.

$$\hat{FBE} = \frac{1}{2} \widehat{FE}$$

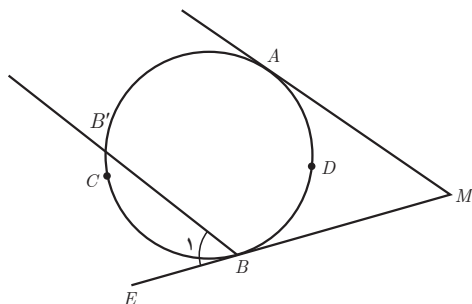
حل تمرین صفحه ۱۶ :

۱ الف) راه اول : از نقطه B موازی MA رسم می کنیم. $MA \parallel BB' \text{ و } MB \setminus \rightarrow \hat{M} = \hat{B}_1$

$$\widehat{AB'} = \widehat{ADB}$$

زاویه B_1 یک زاویه ظلی است و اندازه آن برابر است با $\hat{B}_1 = \frac{\widehat{BB'}}{2}$

$$\hat{B}_1 = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB'}}{2} = \frac{\widehat{ACB}}{2} - \frac{\widehat{AB'}}{2} = \frac{\widehat{ACB}}{2} - \frac{\widehat{ADB}}{2} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$$

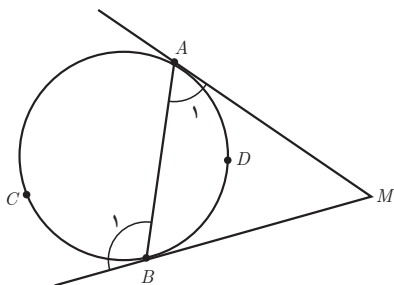


راه دوم : \hat{B}_1 زاویه خارجی مثلث AMB است.

$$\hat{B}_1 = \hat{A}_1 + \hat{M} \rightarrow \hat{M} = \hat{B}_1 - \hat{A}_1$$

$$\hat{B}_1 = \frac{\widehat{ACB}}{2} \text{ زاویه ظلی و } \hat{A}_1 = \frac{\widehat{ADB}}{2} \text{ زاویه ظلی}$$

$$\Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{ACB}}{2} - \frac{\widehat{ADB}}{2}$$

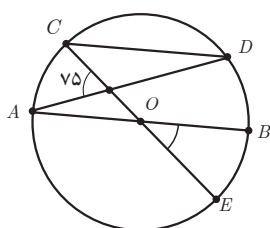


$$\widehat{MN} = x, \hat{C} = \frac{\widehat{MQN} - \widehat{MN}}{2} = \frac{(36^\circ - x) - x}{2} = 7^\circ \Rightarrow x = 11^\circ$$

۳

$$\widehat{QP} = y, \hat{B} = \frac{\widehat{QMP} - \widehat{QP}}{2} = \frac{(36^\circ - y) - y}{2} = 8^\circ \Rightarrow y = 10^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{QM} - \widehat{PN}}{2} = \frac{36^\circ - (x + y)}{2} = \frac{36^\circ - (11^\circ + 10^\circ)}{2} = 7^\circ 5$$



۴ شعاع CO را ادامه می‌دهیم تا دایره را در نقطه E قطع کند.

$$CD \parallel AB \rightarrow \widehat{CA} = \widehat{DB}$$

$$CD \parallel AB, CE \rightarrow \hat{C} = \hat{O}$$

مورب

زاویه O یک زاویه مرکزی است و اندازه آن چنین است: $\hat{O} = \widehat{BE}$. C یک زاویه محاطی است و

$$\widehat{CA} = \widehat{DB} = \widehat{BE} \text{ بنابراین } \frac{\widehat{DE}}{2} = \widehat{BE} \text{؛ بنابراین } \hat{C} = \frac{\widehat{DE}}{2}$$

$$75 = \frac{\widehat{CA} + \widehat{DE}}{2} = \frac{2\widehat{CA}}{2} \Rightarrow \widehat{CA} = 5^\circ \text{ و } \widehat{DB} = 5^\circ \text{ و } \widehat{CD} = 18^\circ - 10^\circ = 8^\circ$$

۵ AB قطر دایره است؛ بنابراین ① $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$. از طرفی $AC \parallel BD$. پس وترهای محصور به

این دو وتر موازی، مساوی هستند؛ یعنی: ② $\widehat{AD} = \widehat{CB}$

طرفین رابطه ۱ را از طرفین رابطه ۲ کم می‌کنیم.

$$\widehat{ACB} - \widehat{CB} = \widehat{ADB} - \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{DB}$$

اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر به آن دو کمان برابرند؛ یعنی: $AC = DB$.

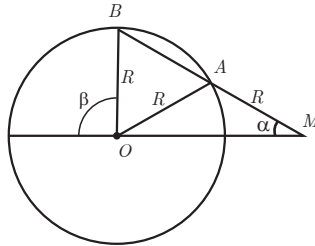
۶ مثلث ABO و AMO متساوی الساقین هستند.

$$OA = AM = R \rightarrow \hat{AOM} = \alpha$$

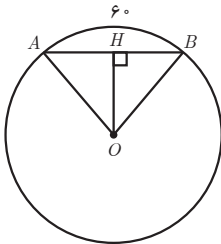
از طرفی $\hat{BAO} = \hat{AOM} + \alpha = 2\alpha$ پس مثلث AOM است؛ پس

مثلث ABO متساوی الساقین است. $BO = AO$ در نتیجه $\hat{MBO} = \hat{BAO} = 2\alpha$

زاویه β زاویه خارجی مثلث BMO است؛ پس $\beta = \widehat{ABO} + \alpha = 3\alpha$



راه اول: در مثل متساوی الساقین $\triangle ABO$ ، ارتفاع OH نیمساز و میانه است.



$$\begin{aligned}\widehat{O} &= \widehat{AB} = 6^\circ \\ \widehat{O}_1 &= \frac{1}{2}\widehat{O} = 3^\circ\end{aligned}$$

$$OH \triangle B : \tan 3^\circ = \frac{HB}{OH} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{OH} \Rightarrow OH = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}$$

راه دوم: در مثل OHB زاویه $\widehat{O}_1 = 3^\circ$ پس $HB = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}R$ پس $HB = 2H = 1^\circ$

$$OH^2 = OB^2 - HB^2 = 100 - 25 = 75$$

$$OH = 5\sqrt{3}$$

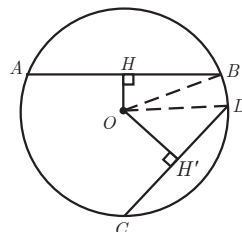
راه سوم: مثلث OAB متساوی الاضلاع است. $OA = OB = AB = 10$.
و OH طول ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع است که برابر است با $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = 5\sqrt{3}$

از O بر دو وتر عمود می کنیم. می دانیم قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می کند.

$$HB = \frac{1}{2}AB, \quad H'D = \frac{1}{2}CD$$

$$AB > CD \rightarrow \frac{1}{2}AB > \frac{1}{2}CD \rightarrow HB > H'D$$

$$\Leftrightarrow HB^2 > H'O^2 \Leftrightarrow HB^2 - H'O^2 > 0 : \textcircled{1}$$



در مثلث‌های قائم‌الزاویه OHB و ODH' بنا به رابطه فیثاغورس داریم:

$$\begin{aligned} OH^2 + HB^2 &= OB^2 \\ OH'^2 + H'D^2 &= OD^2 \end{aligned} \Leftrightarrow OH^2 + HB^2 = OH'^2 + H'D^2$$

$$\Leftrightarrow HB^2 - H'D^2 = OH'^2 - OH^2$$

بنا به رابطه ۱ سمت چپ تساوی فوق مثبت است پس سمت راست تساوی هم مثبت است یعنی

$$OH'^2 - OH^2 > 0 \Leftrightarrow OH'^2 > OH^2 \Leftrightarrow OH' > OH$$

مسائل تکمیلی درس اول

۱ دایره به مرکز $(0,0)$ شعاع $\sqrt{5}$ مفروض است. نقطه $A(m, m-1)$ خارج دایره قرار ندارد. محدوده m کدام است؟

$$OA \leq r \Rightarrow \sqrt{m^2 + (m-1)^2} \leq \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 2m - 4 \leq 0$$

m	-1	2
$2m^2 - 2m - 4$	+	-

$$m \in [-1, 2]$$

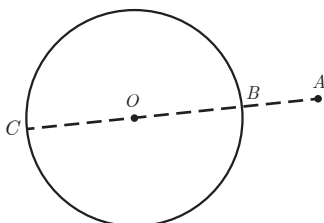
۲ نزدیک‌ترین فاصله نقطه A به دایره $C(O, R)$ برابر ۲ و دورترین فاصله نقطه A تا دایره برابر ۱۰ است. اگر A خارج دایره باشد، شعاع دایره چقدر است؟

از نقطه A بر دایره عمود می‌کنیم؛ یعنی از A به O وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم. AC بر دایره عمود است؛ زیرا بر خط مماس در نقاط A و C عموداند. کمترین فاصله A تا دایره AB و بیشترین فاصله A تا دایره AC است.

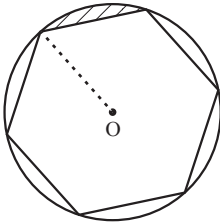
$$AB = OA - OB = 2$$

$$AC = OA + OB = 10 \Rightarrow 2OA = 12 \Rightarrow OA = 6$$

$$6 - OB = 2 \Rightarrow OB = 4$$



۳ در شکل زیر مساحت قسمت هاشور زده را به دست آورید. (شعاع دایره ۴ است و شش ضلعی منتظم است) اگر وترها در دایره برابر باشند، کمان‌های نظیر برابرند. شش ضلعی منتظم است؛ پس کمان‌های نظیر ضلع‌های شش ضلعی برابرند؛ یعنی: $x = 6^\circ \rightarrow 6x = 36^\circ$ از طرفی O زاویه مرکزی است.



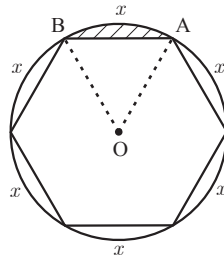
$$S_{OAB} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (16) = \sqrt{3}$$

مثلث OAB متساوی الاضلاع است.

از طرفی مساحت قطاع AOB برابر است با

$$\frac{\pi(4)^2(6^\circ)}{360} = \frac{\pi}{3}$$

$$S_{\text{هاشور}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\text{مثلث}} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$$



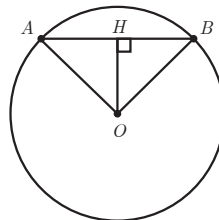
۴ طول وتر AB در دایره $C(O, R)$ برابر 1° سانتی متر است. اگر فاصله وتر AB تا مرکز دایره برابر $5\sqrt{3}$ باشد. طول کمان AB را به دست آورید.

مثلث OAB متساوی الساقین است و OH نیمساز و میانه است از طرفی قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند.

$$OH^2 + HB^2 = OB^2 \Rightarrow (5\sqrt{3})^2 + (5)^2 = OB^2 \Rightarrow OB = 1^\circ$$

مثلث OAB متساوی الاضلاع است. و $\hat{O} = 6^\circ$ ، حال طول کمان AB برابر است با

$$\text{طول کمان } AB = \frac{\pi(1^\circ)}{180} \times 6^\circ = \frac{\pi}{3}$$

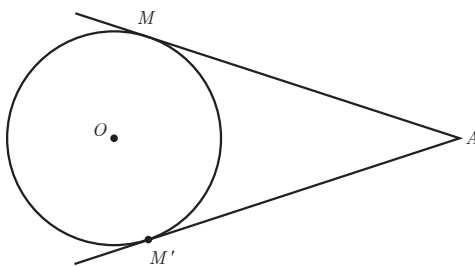


۵ در شکل زیر $\hat{A} = 6^\circ$ است و شعاع دایره برابر ۴ سانتی متر است. طول کمان MM' و مساحت قطاع OMM' را به دست آورید.

از O به M و M' وصل می کنیم و $\hat{M} = \hat{M}' = 9^\circ$ پس $\hat{MOM}' = 12^\circ$ بنابراین، مساحت قطاع MOM' برابر است با:

$$S = \frac{\pi(4)^2 \times 12^\circ}{360^\circ} = \frac{16\pi}{3}$$

$$\text{و طول کمان } MM' \text{ برابر است با } \frac{\pi(4)}{180^\circ} \times 12^\circ = \frac{8\pi}{3}$$



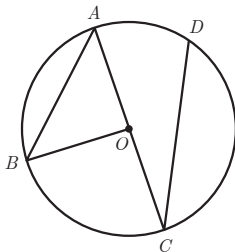
۶ در شکل زیر $\widehat{AB} = 100^\circ$ و $\widehat{DC} = 15^\circ$ ، اندازه \hat{A} و \hat{C} و \hat{BOC} را بیابید. AC قطر دایره است. $\widehat{BC} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ ، زاویه محاطی است.

$$\hat{A} = \frac{1}{2}\widehat{BC} = 40^\circ$$

$$\widehat{AD} = 180^\circ - \widehat{DC} = 3^\circ$$

$$\hat{C} = \frac{1}{2}\widehat{AD} = 15^\circ$$

زاویه BOC مرکزی است و اندازه آن برابر است با $\widehat{BC} = 80^\circ$



۷ در شکل صفحه بعد $\hat{BAC} = \alpha - 10^\circ$ و $\hat{BOC} = \alpha + 15^\circ$ است. مقدار α و \hat{BAC} و \hat{BOC} را بیابید.

$$\hat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BC}$$

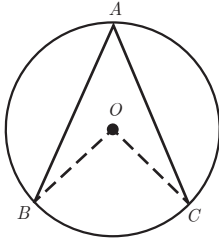
زاویه BAC یک زاویه محاطی است و اندازه آن

و زاویه O یک زاویه مرکزی است

$$\widehat{BOC} = \widehat{BC}$$

از روابط فوق نتیجه می شود که :

$$\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$$



$$\alpha + 15 = 2(\alpha - 10) \Rightarrow \alpha = 25$$

$$\widehat{BOC} = 40^\circ, \quad \widehat{BAC} = 15^\circ$$

۸ در شکل زیر $AB \parallel FC$ و $CD \parallel BE$ و $\widehat{AB} = 6^\circ$ و $\widehat{CD} = 4^\circ$ و $\widehat{EF} = 11^\circ$ ، آن گاه زاویه

\widehat{FCD} چند درجه است.

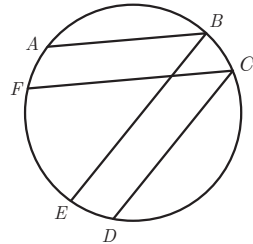
$$AB \parallel FC \Rightarrow \widehat{AF} = \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{AF} = \widehat{BC} = \widehat{ED} = x$$

$$BE \parallel CD \Rightarrow \widehat{ED} = \widehat{BC}$$

$$3x + \widehat{AB} + \widehat{CD} + \widehat{EF} = 360^\circ \rightarrow 3x + 6^\circ + 4^\circ + 11^\circ = 360^\circ$$

$$x = 5^\circ$$

$$\widehat{FCD} = \frac{\widehat{FD}}{2} = \frac{5^\circ + 11^\circ}{2} = 8^\circ$$



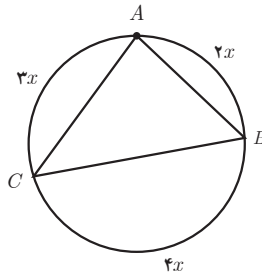
۹ در شکل زیر اندازه x و اندازه زوایای A و B و C را به دست آورید.

$$2x + 3x + 4x = 180^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$$

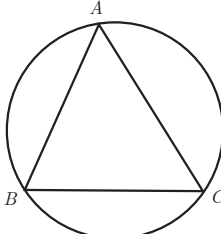
$$\widehat{A} = \frac{1}{2}(4x) = 40^\circ$$

$$\widehat{B} = \frac{1}{2}(3x) = 30^\circ$$

$$\widehat{C} = \frac{1}{2}(2x) = 20^\circ$$



۱۵ با استفاده از زوایای محاطی ثابت کنید مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° درجه است. دایره‌ای رسم می‌کنیم که از سه رأس مثلث بگذرد. زوایای A و B و C محاطی هستند آن‌گاه

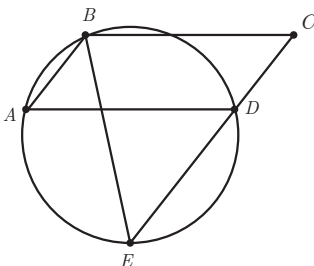
$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{1}{2} \widehat{BC} \\ \hat{B} &= \frac{1}{2} \widehat{AC} \\ \hat{C} &= \frac{1}{2} \widehat{AB} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{+} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \frac{1}{2} (\widehat{AB} + \widehat{AC} + \widehat{BC}) = 180^\circ$$


۱۶ در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است. ثابت کنید مثلث BCE متساوی‌الساقین است.

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \hat{C} \quad (1) \\ \hat{A} &= \frac{1}{2} \widehat{BD} \\ \hat{E} &= \frac{1}{2} \widehat{BD} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{E} \quad (2)$$

چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. از طرفی E و A زوایای محاطی هستند.

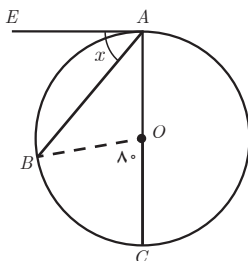
از ۱ و ۲ نتیجه می‌شود $\hat{E} = \hat{C}$ ، مثلث BEC متساوی‌الساقین است.



۱۷ در شکل زیر اندازه x را به دست آورید. زاویه O یک زاویه مرکزی است.

$$\begin{aligned} \hat{O} &= \widehat{BC} = 80^\circ \\ \widehat{BAC} &= \frac{1}{2} \widehat{BC} = 40^\circ \\ \hat{EAB} &= x = \frac{1}{2} \widehat{AB} \\ \widehat{AB} &= 180^\circ - \widehat{BC} = 100^\circ \\ \hat{EAB} &= x = \frac{1}{2} (100^\circ) = 50^\circ \end{aligned}$$

زاویه EAB یک زاویه ظلی است.



۱۳ اگر در شکل زیر اندازه زاویه ظلی \widehat{ATx} برابر $3\alpha - 1^\circ$ و اندازه کمان \widehat{AT} برابر $\alpha + 12^\circ$ باشد، α و β زاویه ATx را بیابید.

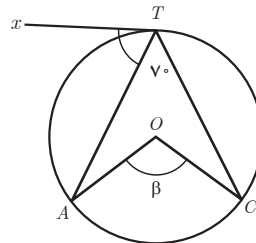
$$\widehat{ATC} = \frac{1}{2} \widehat{AC} \Rightarrow \widehat{AC} = 14^\circ$$

$$\widehat{\beta} = \widehat{BC} = 14^\circ$$

$$\widehat{ATx} = \frac{1}{2} \widehat{AT} \Rightarrow 3\alpha - 1^\circ = \frac{1}{2}(\alpha + 12^\circ)$$

$$\alpha = \frac{14^\circ}{5} = 28$$

$$\widehat{ATx} = 3(28) - 1^\circ = 74^\circ$$

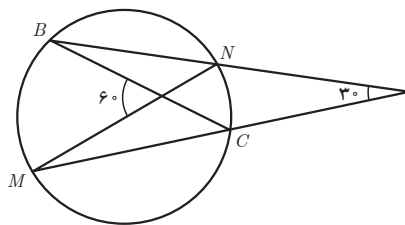


۱۴ در شکل زیر اندازه \widehat{BM} و \widehat{NC} را بیابید.

$$6^\circ = \frac{\widehat{BM} + \widehat{NC}}{2} \Rightarrow \widehat{BM} + \widehat{NC} = 12^\circ$$

$$3^\circ = \frac{\widehat{BM} - \widehat{NC}}{2} \Rightarrow \widehat{BM} - \widehat{NC} = 6^\circ$$

از حل دستگاه $\widehat{BM} = 9^\circ$ و $\widehat{NC} = 3^\circ$ به دست می آید.



۱۵ در شکل صفحه بعد اندازه \widehat{BE} و \widehat{DC} را بیابید.

$$7^\circ = \frac{\widehat{BC} + \widehat{DE}}{2} \Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{DE} = 14^\circ$$

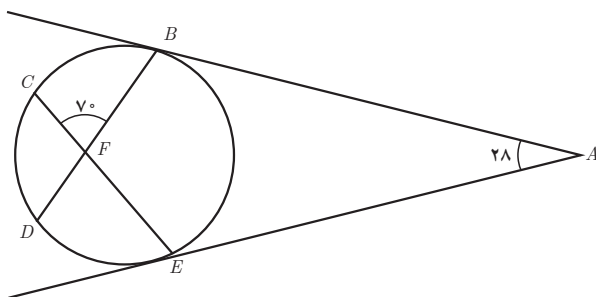
$$28 = \frac{(\widehat{BC} + \widehat{DE} + \widehat{CD}) - (\widehat{BE})}{2} = \frac{14^\circ + \widehat{CD} - \widehat{BE}}{2}$$

$$\widehat{CD} - \widehat{BE} = -84$$

فصل اول: دایره ۲۱

$$\frac{\widehat{CD} + \widehat{BE}}{2} = 110^\circ \Rightarrow \widehat{CD} + \widehat{BE} = 220^\circ$$

$$\widehat{CD} = 152, \quad \widehat{BE} = 68$$



۱۶ در شکل زیر M وسط کمان EF است. نشان دهید $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

نقطه M وسط \widehat{EF} است. $\widehat{EM} = \widehat{MF}$

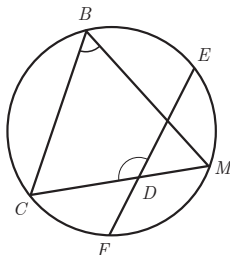
دو وتر FE و CM در داخل دایره متقاطع هستند.

$$\hat{D} = \frac{\widehat{CBE} + \widehat{FM}}{2} \quad (1)$$

$$\hat{B} = \frac{\widehat{CM}}{2} = \frac{\widehat{CF} + \widehat{FM}}{2} = \frac{\widehat{CF} + \widehat{EM}}{2} \quad (2)$$

روابط ۱ و ۲ را با هم جمع می‌کنیم.

$$\hat{D} + \hat{B} = \frac{\widehat{CBE} + \widehat{FM}}{2} + \frac{\widehat{CF} + \widehat{EM}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

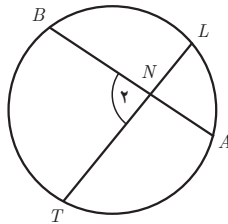


۱۷ در شکل زیر مقدار x و اندازه زاویه N_1 را به دست آورید.

$$\widehat{AL} = 1^\circ x - 1^\circ, \quad \widehat{BT} = 9x + 17, \quad \widehat{N}_2 = 6x + 28$$

$$\widehat{N}_2 = \frac{\widehat{BT} + \widehat{AL}}{2} \Rightarrow 6x + 28 = \frac{(1^\circ x - 1^\circ) + (9x + 17)}{2}$$

$$x = 7 \Rightarrow N = 7^\circ$$



۱۸ در شکل زیر؛ الف) اگر $\widehat{M} = 45$ و $\widehat{C} = 120$ باشد کمان a و b را بیابید.

$$120^\circ + a + b = 360^\circ \Rightarrow a + b = 240^\circ$$

$$\frac{a-b}{2} = \widehat{M} \Rightarrow a-b = 2(\widehat{M}) = 90$$

$$\underline{a = 142/5, \quad b = 97/5}$$

ب) اگر $\frac{a}{6} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ اندازه زاویه M را بیابید.

$$a = 6x$$

$$b = 4x \Rightarrow a + b + c = 15x = 360^\circ \Rightarrow x = 24 \Rightarrow \begin{matrix} a = 144 \\ b = 96 \end{matrix}$$

$$c = 5x$$

$$\widehat{M} = \frac{a-b}{2} = \frac{144-96}{2} = 24$$

