درس دوم

رابطه طولی در دایره

اهداف درس

۱ پیدا کردن طول پاره‌خط‌هایی که در دایره ایجاد می‌شود و پاره‌خط‌هایی که دو وتر متقاطع در دایره می‌سازند یا دو قاطع بر دایره ایجاد می‌کنند؛

۲ رسم خط مماس بر یک دایره از نقطه‌ای خارج دایره بر آن؛

۳ بیان وضعیت دو دایره نسبت به هم و پیدا کردن تعداد مماس‌های مشترک آنها؛

۴ رسم مماس مشترک خارجی و داخلی بر دو دایره؛

۵ حل مسائل کاربردی به کمک روابط طولی در دایره.

تعداد و مباحث جلسات درس دوم :

جلسه اول : ادامه رابطه طولی در دایره، قضایای صفحه ۱۸، رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره، فعالیت «کار در کلاس» صفحه ۲۰ و وضعیت دو دایره نسبت به هم صفحه ۲۰.

جلسه دوم : مماس مشترک‌ها و رسم مماس مشترک داخلی و خارج دو دایره و حل تمرین صفحه ۲۳.

روش تدریس درس دوم

جلسه اول :

در این درس به رابطه بین اندازه پاره‌خط‌های حاصل از دو وتر متقاطع در دایره یا امتداد آن دو در خارج دایره یا پاره‌خط‌هایی که به واسطه یک خط مماس و قاطع از یک نقطه خارج دایره رسم می‌شود می‌پردازیم. هدف این درس، پیدا کردن طول این پاره‌خط‌ها به کمک رابطه بین پاره‌خط‌ها است.

در تدریس این درس بهتر است به تشابه دو مثلث در حالت دو زاویه اشاره، و سپس شکلی رسم شود که دو وتر متقاطع باشد و طول سه پاره‌خط معلوم باشد امّا طول پاره‌خط چهارم مشخص نباشد. از دانش‌آموز سؤال می‌کنیم چگونه می‌توان طول این قسمت مجهول را پیدا کرد. با این مثال، وارد بحث می‌شویم و قضیه صفحه ۱۸ را بیان می‌کنیم. با حل فعالیت صفحه ۱۸، قضیه ثابت می‌شود و دانش‌آموزان یاد می‌گیرند چگونه طول پاره‌خط مجهول را بیابند. به همین ترتیب، ادامه فعالیت به اثبات قضیه دوم (صفحه ۱۹) می‌پردازد. بعد از اثبات آن حتماً به چند مثال اشاره و از دانش‌آموز خواسته شود مثال‌ها را حل کنند. نمونه‌ای از این مثال‌ها در ادامه آمده است.

حل فعالیت صفحه ۱۸

۱ زاویه A و C دو زاویه محاطی هستند. $\hat{A}=\frac{1}{2}\widehat{DB}\ ,\ \hat{C}=\frac{1}{2}\widehat{DB}\Rightarrow \hat{A}=\hat{C}$

$$A\overset{\Delta}{B}M \sim C\overset{\Delta}{M}B\begin{cases}\hat{A}=\hat{C}\\ M_1=M_2\end{cases}\xrightarrow{\text{زز}}\frac{AM}{CM}=\frac{DM}{MB}\Rightarrow AM.MB=CM.DM$$

۲ برای این شکل همانند قسمت (۱) عمل می‌کنیم و به همان نتیجه می‌رسیم.

۳ زاویه MTA یک زاویه ظلی است و اندازه آن برابر است با : $M\hat{T}A=\frac{1}{2}\widehat{AT}$. از طرفی، زاویه TBM یک زاویه محاطی است $T\hat{B}M=\frac{1}{2}\widehat{AT}$ در نتیجه : $M\hat{T}A=T\hat{B}M$

$$M\overset{\Delta}{T}A \sim M\overset{\Delta}{T}B\begin{cases}\hat{M}=\hat{M}\\ M\hat{T}A=T\hat{B}M\end{cases}\xrightarrow{\text{زز}}\frac{MA}{MT}=\frac{MT}{MB}\Rightarrow MA.MB=MT^2$$

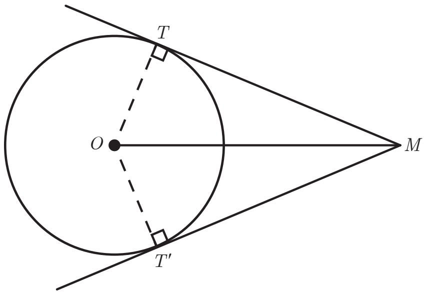
یکی از مباحث مهم دایره، رسم خط مماس از یک نقطه خارج دایره است. برای رسم خط مماس، ابتدا ویژگی خط مماس بیان می‌شود. طریقه رسم خط مماس را بیان می‌کنیم. سعی می‌کنیم به دانش‌آموزان آموزش دهیم به دقت رسم را انجام دهند. سپس به کمک «کار در کلاس» صفحه ۲۰ نشان می‌دهیم طول مماس‌هایی که از یک نقطه خارج دایره بر آن رسم می‌شود، برابر است. «کار در کلاس» را خود دانش‌آموزان حل کنند.

حل کار در کلاس صفحه ۲۰

الف) از O به T و T' وصل می‌کنیم. در مثلث MTO و $MT'O$ ($OM=OM$ و $OT=OT'$) وتر و

یک ضلع قائمۀ همنهشت هستند از همنهشتی نتیجه می‌شود : $MT=MT'$. همچنین از همنهشتی نتیجه می‌شود :

. $M_1=M_2$



حالت‌های دو دایره را نسبت به هم، به کمک رسم شکل، بیان می‌کنیم و به کمک ریاضی نیز نشان می‌دهیم که دو دایره متخارج در چه حالتی اتفاق می‌افتد. به همین ترتیب برای حالت‌های دیگر، بعد از بیان حالت‌ها، از چند مثال استفاده می‌کنیم.

جلسه دوم : مماس مشترک و رسم مماس مشترک دو دایره

دو دایره و چند خط برد و دایره مماس رسم می‌کنیم. آن‌گاه مماس مشترک را تعریف می‌کنیم. سپس به کمک حل فعالیت صفحه ۲۱ طول مماس مشترک دو دایره متخارج را به‌دست می‌آوریم. سپس طریقه رسم مماس مشترک داخلی و خارجی را بیان می‌کنیم که با حل فعالیت نیز به این هدف می‌رسیم. در این قسمت باید دایره به دقت رسم شود. از دانش‌آموزان به عنوان یک کار عملی، خواسته شود تمام مماس مشترک دو دایره در حالت‌های مختلف را دقیق رسم کند و برای جلسه بعدی به کلاس بیاورد. در این فعالیت، طول مماس مشترک دایره را حساب و آنها را رسم می‌کنیم. کتاب در این قسمت اشاره‌ای به مماس مشترک داخلی و خارجی نکرده است. بهتر است مماس مشترک خارجی و داخلی را برای دانش‌آموزان بیان کنید.

حل فعالیت صفحه ۲۱

۱ الف) OT و OT' شعاع‌های دایره‌ها هستند که هر دو بر خط مماس MT عمودند؛ یعنی : $\hat{T}=\hat{T'}=90$ از طرفی $OT\perp TT'$ و $O'H\parallel TT'$ بنابه قضیه خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود. $\hat{H_1}=90$ در نتیجه زاویه چهارم چهار ضلعی $TT'O'H$ قائمه است؛ بنابراین، چهار ضلعی یک مستطیل است. پس : $OT=O'T'=R'$ و $O'H=TT'$.

ب) در مثلث قائم‌الزاویه $OO'H$ بنابه رابطه فیثاغورس داریم :

$$OO'^2=OH^2+O'H^2 \quad , \quad O'H=TT' \quad , \quad d=OO' \quad , \quad OH=R-R'$$

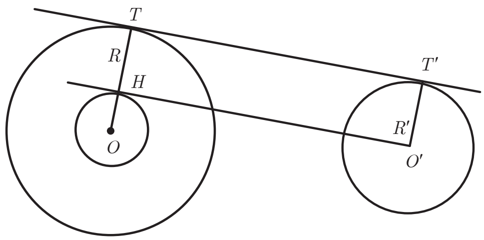
$d^۲ = OH^۲ + TT'^۲ \Rightarrow TT' = \sqrt{d^۲ - OH^۲} = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}$

پ) خط‌های m و n بر هر دو دایره مماس‌اند.

مماس‌های MT و MT'' بر دایره مماس‌اند. بنابه «کار در کلاس» قبل $O'M$ نیمساز زاویه M است. به‌همین دلیل OM نیمساز زاویه M است. از آنجا که زاویه M فقط یک نیمساز دارد، پس OM و $O'M$ بر هم منطبق‌اند؛ یعنی OO' از M می‌گذرد.

ت) خط $O'H$ بر دایره مماس است.

ث) به مرکز O و به شعاع $R-R'$ دایره‌ای رسم می‌کنیم و آن را C'' می‌نامیم. از نقطه O' بر دایره C'' مماس رسم می‌کنیم و نقطه تماس را H می‌نامیم. O را به H وصل کرده و ادامه می‌دهیم تا دایره C را در T قطع کند. حال از T خطی به موازات $O'H$ رسم می‌کنیم. این خط در نقطه T' بر دایره C' مماس است. TT' مماس مشترک خارجی دو دایره است.



۲ مثلث $OO'H$ قائم‌الزاویه است. و چهار ضلعی $O'H\,TT'$ یک مستطیل است.

$TH=O'T=R \quad , \quad O'H=TT'$

بنابه رابطه فیثاغورس در مثلث داریم:

$OO'^۲=O'H^۲+OH^۲ \Rightarrow d^۲=TT'^۲+(R+R')^۲$

$TT' = \sqrt{d^۲ - (R+R')^۲}$

۳ اگر دو دایره مماس خارج باشند، آن‌گاه $d=R+R'$ با جایگذاری در رابطه مماس مشترک خارجی دو دایره داریم.

$TT' = \sqrt{d^۲ - (R-R')^۲} = \sqrt{(R+R')^۲ - (R-R')^۲} = \sqrt{۲RR'}$

۴ $OB=OA=R$ نقطه O از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است؛ پس روی عمودمنصف AB واقع است. به همین ترتیب $O'A=O'B=R'$ نقطه O' هم روی عمودمنصف پاره‌خط AB است. هر پاره‌خط فقط یک عمودمنصف دارد. پس OO' روی عمودمنصف AB واقع‌اند.

حل تمرین‌های صفحه ۲۳ :

۱ $\frac{DM}{MC}=\frac{۱}{۲}$ با توجه به اینکه طول وتر CD برابر ۹ است، پس : $DM=۳$ و $MC=۶$ و طول $MA=x$ آن‌گاه طول $BM=۱۱-x$ است بنابه رابطه طولی در دایره داریم :

$$DM\,.\,CM=AM\,.\,MB\Rightarrow ۳\times۶=x(۱۱-x)\Rightarrow x^۲-۱۱x-۱۸=۰$$

$$x=۲,۹$$

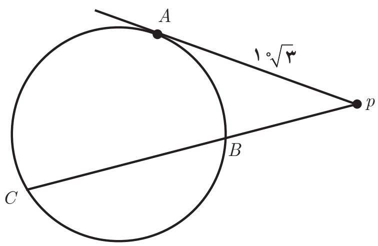
$$\frac{AM}{MB}=\frac{۲}{۹}$$

۲ $PA^۲=PB\,.\,PC$

$$(۱۰\sqrt{۳})^۲=x(x+۲۰)\Rightarrow x^۲+۲۰x-۳۰۰=۰$$

-۳۰ , $x=۱۰$ که $x=-۳۰$ قابل قبول نیست.

$$PB=۱۰\quad,\quad PC=۱۰+۲۰=۳۰$$



۳ شعاع دایره بزرگ را R می‌نامیم. $ON=R-۱۰\quad,\quad OM=R-۱۶$

از طرفی قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند. $ON=ON'=R-۱۰$ بنابه رابطه طولی در دایره داریم :

$$NO\,.\,ON'=OM\,.\,OB\Rightarrow(R-۱۰)^۲=(R-۱۶)R\Rightarrow R=۲۵$$

شعاع دایره کوچک برابر است با نصف MB یعنی $R'=\frac{۱}{۲}(MB)=\frac{۱}{۲}(R+(R-۱۶))=۱۷$

۴ MT و $MT_۳$ بر یک دایره مماس‌اند $MT=MT_۳$ از طرفی MT و $MT_۴$ بر یک دایره مماس‌اند $.MT=MT_۴$

MT و $MT_۱$ بر یک دایره مماس‌اند پس $MT=MT_۱$ به همین ترتیب $.MT=MT_۲$

۵ $d=۸\ ,\ TT'=\sqrt{d^۲-(R-R')^۲}=۳\sqrt{۷}\Rightarrow R-R'=۱$

$$TT'=\sqrt{d^۲-(R+R')^۲}=\sqrt{۱۵}\Rightarrow R+R'=۷$$

از حل دستگاه داریم : $R=۴$

$R'=۳$

۶ هر یک قطاع ۱۲۰ درجه است. پس مجموعه سه قطاع ۱۲۰° داریم یعنی یک دایره کامل داریم پس طول نخ برابر محیط یک دایره به‌علاوه ۳ برابر طول AB که ۲ برابر شعاع دایره است.

طول نخ = محیط دایره + $۳AB=۲\pi r+۳(۲r)=۲\pi r+۶r$

مساحت هاشور برابر است با مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع منهای مساحت ۳ قطاع

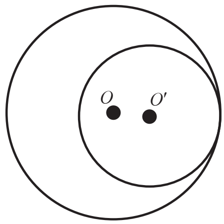
هاشور $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲r)^۲-۳(\frac{\pi(r)^۲\times ۶۰}{۳۶۰})=r\sqrt{۳}-\frac{\pi r^۲}{۲}$

۷ $d=۲$، دو دایره مماس درون برابر است : $d=R-R'=۲$ مساحت محصور به دو دایره برابر است.

$$\pi R^۲-\pi R'^۲=۱۶\pi \Rightarrow R^۲-R'^۲=۱۶$$

$$(R-R')(R+R')=۱۶\Rightarrow R+R'=۸$$

$$\begin{cases} R+R'=۸ \\ R-R'=۲ \end{cases}\Rightarrow \begin{matrix} R=۵ \\ R'=۳ \end{matrix}$$



۸ هاشور $S=$ مساحت قطاع − مساحت مثلث

$$=\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۴)^۲-\frac{\pi(۶۰)(۴)^۲}{۳۶۰}=۴\sqrt{۳}-\frac{۸}{۳}\pi$$

مسائل تکمیلی درس دوم

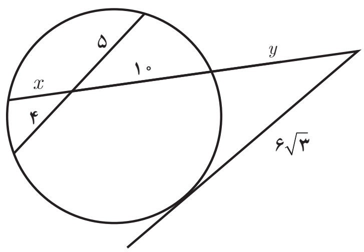
۱ در شکل زیر مقادیر x را بیابید.

الف)

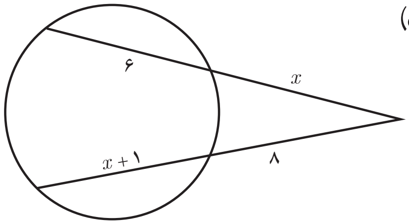
$$x\times ۱۰=۵\times ۴\Rightarrow x=۲$$

$$(۶\sqrt{۳})^۲=y(y+۱۰+x)=y^۲+۱۲y$$

$$y^۲+۱۲y-۱۰۸=۰\Rightarrow \begin{cases} y=-۱۸ & \text{غ ق ق} \\ y=۶ \end{cases}$$



ب)

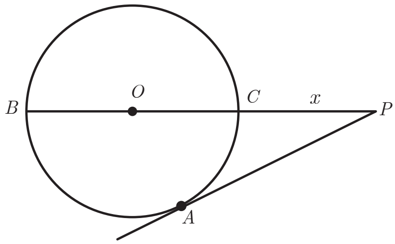


$x(x+6)=8(x+1)$

$x^2+6x-8x-8=0$

$x^2-2x-8=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$

۲ از نقطه P مماس PA به طول ۱۲ بر دایره $C(O,R)$ رسم شده است. اگر دورترین فاصله نقطه P با دایره برابر ۱۶ باشد، قطر دایره چقدر است؟



$PA=12$

$PB=16$

$PA^2=PC.PB \Rightarrow 12^2=x\times 16$

$x=\frac{144}{16}=9$

$2R=16-x=7$

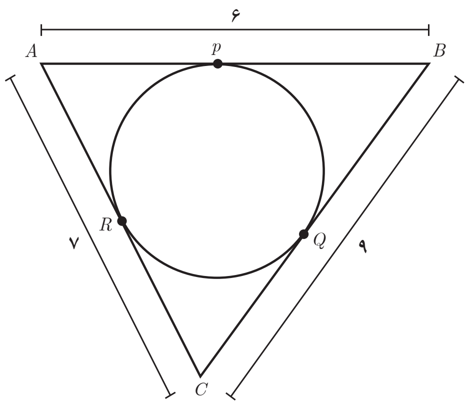
۳ در مثلث با اضلاع $AB=6$ و $AC=7$ و $BC=9$ دایره‌ای محیط کردیم. طول مماسی، که از A بر دایره رسم می‌شود، کدام است؟

$AP=AR=x\ ,\ BP=BQ=6-x\ ,\ CR=CQ=7-x$

$CQ=7-x\ ,\ BQ=6-x$

$CQ+QB=9 \Rightarrow 7-x+6-x=9$

$x=2$



۴ در شکل زیر AE و AF و BC بر دایره مماس هستند. اگر نقطه D از E به سمت F حرکت کند، ثابت کنید با تغییر نقطه D بین E و F محیط مثلث ABC ثابت است.

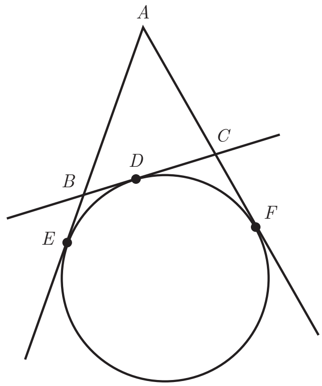
طول مماس بر دایره با هم برابرند.

$$AE=AF\ ,\ CD=CF\ ,\ BD=DE$$

ABC **محیط مثلث** $= AB+BC+AC=AB+(BD+DC)+AC$

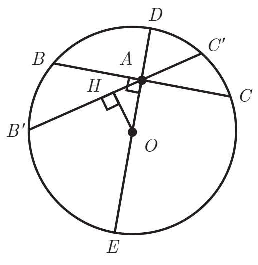
$$=(AB+\underbrace{\cancel{BD}}_{BE})+(\underbrace{\cancel{DC}}_{CF}+AC)=AE+AF=AE$$

محیط مثلث ABC به نقطه D بستگی ندارد.



۵ از نقطه A در داخل دایره $C\ (O,R)$ بی‌شمار وتر می‌گذرد. وتر BC در نقطه A بر قطر عبوری از این نقطه عمود است. ثابت کنید BC کوتاه‌ترین وتر است که از نقطه A می‌گذرد.

فرض می‌کنیم BC کوتاه‌ترین وتری که از نقطه A می‌گذرد نباشد و فرض می‌کنیم وتر دیگر $B'C'$ کوتاه‌ترین وتر عبوری از نقطه A باشند. از O بر $B'C'$ عمود می‌کنیم و در مثلث قائم‌الزاویه OAB طول وتر OA از طول ضلع قائمه OH بزرگ‌تر است. $OH<OA$ ، هرچه فاصله وتر به مرکز دایره کمتر باشد بزرگ‌تر است؛ بنابراین، وتر $B'C'$ از وتر BC بزرگ‌تر است.



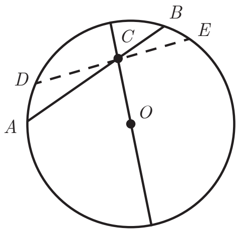
۶ نقطه C بر روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر از دایره گذرنده بر نقطه C کدام است.

$$\frac{BC}{AC}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow BC=۳\ ,\ AC=۶$$

از نقطه C قطر را رسم می‌کنیم. می‌دانیم وتری که بر قطر عمود باشد کوتاه‌ترین وتر است. این وتر توسط قطر دایره نصف می‌شود. $CE=DC=x$ بنابه رابطه طولی در دایره داریم :

$$AC.CB=DC.CE \Rightarrow ۶\times۳=x.x \Rightarrow x^۲=۱۸$$

$AB=۶\sqrt{۲}$ و طول وتر $x=۳\sqrt{۲}$



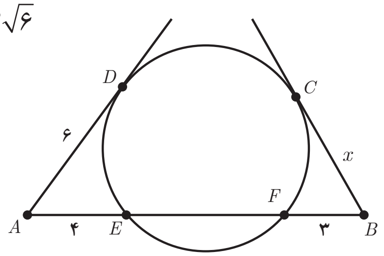
۷ در شکل زیر مقدار x کدام است؟

$$AD^۲=AE.AF \Rightarrow ۳۶=۴(۴+y)$$

$$\Rightarrow y=۵$$

$$BC^۲=BF.BE \Rightarrow x^۲=۳(۳+۵)=۲۴$$

$$x=۲\sqrt{۶}$$



۸ دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۲ مفروض‌اند. در حالت‌های زیر وضعیت دو دایره را بیان کنید.

الف) فاصله دو مرکز دایره ۵

ب) فاصله دو مرکز دایره ۱/۵

الف) دو دایره مماس خارجند، زیرا $d=R+R' \Rightarrow ۵=۳+۲$

ب) دو دایره متقاطع‌اند. $d=۱/۵\ ,\ R+R'=۵\ ,\ R-R'=۱$

$$R-R' < d < R+R'$$

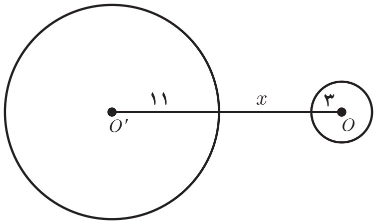
۹ طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۱ و ۳ سانتی‌متر برابر $۳\sqrt{۳۳}$ سانتی‌متر است. کمترین فاصله نقاط این دو دایره از یکدیگر چند سانتی‌متر است؟

$TT'^{۲} = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}}$

$۳\sqrt{۳۳} = \sqrt{d^{۲} - (۱۱ - ۳)^{۲}}$

$d^{۲} = ۳۶۱ \Rightarrow d = ۱۹$

$x = d - (R + R') = ۱۹ - (۱۱ + ۳) = ۵$



۱۰ اگر بین شعاع‌های دو دایره و d طول خط‌المرکزین روابط $r_۱ + r_۲ = \frac{۳d}{۴}$ و $r_۱ - r_۲ = \frac{d}{۴}$ برقرار باشد، شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که بر هر دو دایره مماس است چقدر است؟

دو دایره متخارج هستند. کمترین فاصله دو دایره به‌صورت زیر است: $r_۱ + r_۲ = \frac{۳d}{۴} < d$

$$d - (r_۱ + r_۲) = d - \frac{۳d}{۴} = \frac{d}{۴}$$

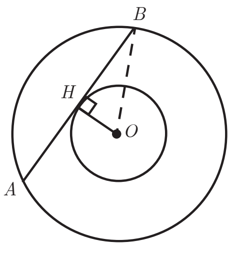
کمترین فاصله دو دایره برابر $\frac{d}{۴}$ است و شعاع دایره‌ای که بر هر دو مماس باشد $\frac{\frac{d}{۴}}{۲}$ یعنی $\frac{d}{۸}$ است.

۱۱ دو دایره هم مرکزند. شعاع دایره بزرگ‌تر ۵ و شعاع دایره کوچک‌تر ۳ سانتی‌متر است. طول وتری را در دایره بزرگ‌تر بیابید که بر دایره کوچک‌تر مماس باشد.

$OH^{۲} + HB^{۲} = OB^{۲} \Rightarrow ۹ + HB^{۲} = ۲۵ \Rightarrow HB = ۴$

می‌دانیم قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند. $AH = HB$

$AB = ۲(۴) = ۸$

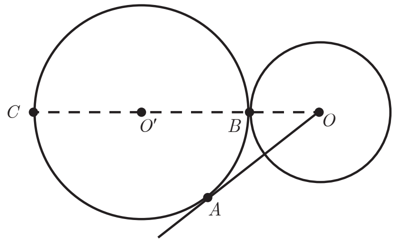


۱۲ دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۱۰/۵ واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایره کوچک‌تر، مماس بر دایره بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعه مماس چقدر است؟

$OA^{۲}=OB.OC \Rightarrow OA^{۲}=۴\times(۲۱+۴)$

$OA^{۲}=۱۰۰$

$OA=۱۰$

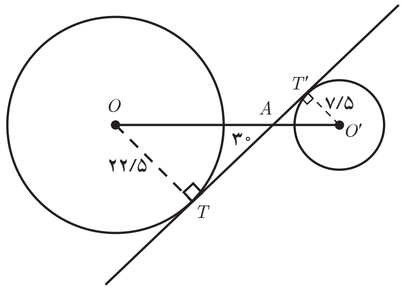


۱۳ شعاع دو دایرهٔ خارج هم به ترتیب ۲۲/۵ و ۷/۵ سانتی‌متر است. اگر زاویه بین مماس داخل و خط‌المرکزین دو دایره ۳۰ درجه باشد، طول خط‌المرکزین دو دایره چند سانتی‌متر است؟

$\overset{\Delta}{OAT}: \sin ۳۰ = \dfrac{OT}{OA} \Rightarrow OA = ۴۵$

$\overset{\Delta}{O'T'A}: \sin ۳۰ = \dfrac{O'T'}{O'A} \Rightarrow O'A = ۱۵$

$OO' = OA + O'A = ۴۵+۱۵=۶۰$



۱۴ سه دایره به شعاع $r_۱=۱$ و $r_۲=۲$ و $r_۳$ برهم مماس خارج هستند. شعاع دایره سوم کدام است؟

$O_۱O_۲=۱+۲=۳$

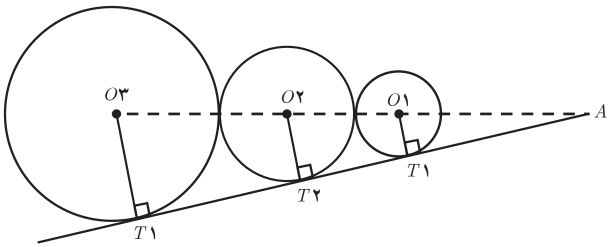
$O_۳O_۲=۲+r_۳$

$O_۱T_۱ \parallel O_۲T_۲ \Rightarrow \dfrac{O_۱A}{O_۲A}=\dfrac{O_۱T_۱}{O_۲T_۲} \Rightarrow \dfrac{x}{x+۳}=\dfrac{۱}{۲}$

$\Rightarrow x=۳$

$O_۱T_۱ \parallel O_۳T_۳ \Rightarrow \dfrac{O_۱A}{O_۳A}=\dfrac{O_۱T_۱}{O_۳T_۳} \Rightarrow \dfrac{x}{x+۳+۲+r_۳}=\dfrac{۱}{r_۳}$

$\Rightarrow \dfrac{۳}{۸+r_۳}=\dfrac{۱}{r_۳} \Rightarrow r_۳=۴$

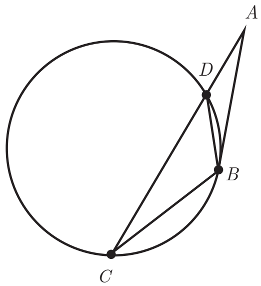


۱۵ دو دایره به شعاع ۵ متخارج‌اند. اگر طول مماس مشترک داخلی آنها $۴\sqrt{۶}$ باشد، طول خط‌المرکزین دو دایره کدام است؟

$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R+R')^{۲}} \Rightarrow ۴\sqrt{۶} = \sqrt{d^{۲} - (۵+۵)^{۲}}$$

$$۹۶ + ۱۰۰ = d^{۲} \Rightarrow d^{۲} = ۱۹۶ \Rightarrow d = ۱۴$$

۱۶ در شکل زیر مماس AB و وتر BC طول برابر دارند. ثابت کنید مثلث ABD متساوی‌الساقین است.



$$AB = BC \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$$

زاویه C یک زاویه محاطی است $\hat{C} = \frac{\widehat{BD}}{۲}$

زاویه DBA ظلی است $D\hat{B}A = \frac{۱}{۲}\frac{\widehat{BD}}{۲}$

در نتیجه $\hat{C} = D\hat{B}A$ بنابراین $\hat{A} = D\hat{B}A$ یعنی مثلث ADB متساوی‌الساقین است.

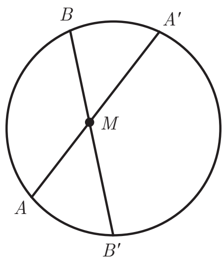
۱۷ دو پاره خط AA' و BB' را در نقطه M همدیگر را قطع می‌کنند. اگر $MA.MA' = MB.MB'$ باشد ثابت کنید دایره از چهار نقطه A و A' و B و B' می‌گذرد.

از سه نقطه A و A' و B یک دایره می‌گذرد. اگر این دایره از B' نگذرد، آن‌گاه از نقطه دیگری مانند D می‌گذرد. آن‌گاه دو وتر AA' و BD در M متقاطع‌اند. بنابه رابطه طولی در دایره داریم:

$$AM.MA' = MB.MD$$

بنابه فرض داریم: $MD = MB'$

یعنی: B' و D برهم منطبق‌اند یعنی دایره از B' می‌گذرد.



۱۸ از نقطه A دو مماس بر دایره $C\ (O,۶)$ رسم می‌کنیم. تا در نقاط T و T' بر دایره مماس باشند. زاویه $A = ۶۰^\circ$

الف) فاصله A تا مرکز دایره را بیابید.

ب) مساحت چهار ضلعی $ATOT'$ را به‌دست آورید.

ج) مساحت محدود به دو خط مماس و دایره را به‌دست آورید.

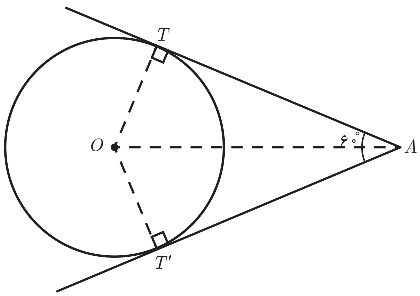
الف) A را به O وصل می‌کنیم.

$$\sin A_۱ = \frac{OT}{OA} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۶}{OA}$$
$$OA = ۱۲$$

ب)
$$AT^۲ = OA^۲ - OT^۲ = ۱۴۴ - ۳۶ = ۱۰۸ \Rightarrow AT = ۶\sqrt{۳}$$
$$S_{ATOT'} = ۲S_{ATO} = ۲(\frac{۱}{۲}(OT.AT)) = ۶\times۶\sqrt{۳} = ۳۶\sqrt{۳}$$

ج) مساحت محدود به دو خط مماس و دایره برابر است با مساحت چهارضلعی $ATOT'$ منهای مساحت قطاع

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{\pi(۶)^۲ ۱۲۰}{۳۶۰} = ۱۲\pi$$
$$\text{مساحت محصور} = ۳۶\sqrt{۳} - ۱۲\pi = ۱۲(۳\sqrt{۳} - \pi)$$



۱۹ از نقطه A دو مماس AT و AT' را بر دایره $C\ (O,R)$ رسم می‌کنیم. ثابت کنید :

الف) $TT'.\ OA = ۲\times R.\ AT$

ب) $R^۲ = OH.\ OA$

الف) مساحت چهار ضلعی

دو مثلث $O\overset{\Delta}{T}H$ و $O\overset{\Delta}{T}A$ با هم متشابه‌اند.

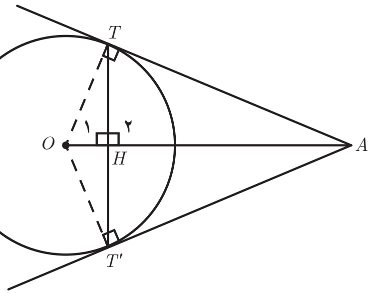
$$O\overset{\Delta}{T}H \sim O\overset{\Delta}{T}A \begin{cases} \hat{O} = \hat{O} \\ H_۱ = T = ۹۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \qquad \frac{OT}{OA} = \frac{TH}{AT} \Rightarrow OT.AT = OA.TH$$

از طرفی قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند. $TH=\frac{۱}{۲}TT'$

$$\Rightarrow R.AT=OA\times\frac{TT'}{۲}\Rightarrow OA.TT'=۲R.AT$$

ب) دو مثلث OTH و OTA متشابه‌اند. $\frac{OT}{OA}=\frac{OH}{OT}\Rightarrow OT^۲=OA.OH$

$$\Rightarrow R^۲=OA.OH$$



دانستنی‌هایی برای دبیران

دایره و کاربردهای آن

اشکال هندسی در زندگی، همواره، کاربردهای فراوان داشته و برای فعالیت‌های انسان الهام‌بخش و سمبل بوده است. دایره یکی از این اشکال است. ابتدایی‌ترین کاربرد دایره، چرخ و چرخ‌دنده‌ها هستند که از قدیم‌الایام کاربرد داشته است. همچنین ابزارآلات زینتی چون تاج، گردنبند، خلخال و حلقه‌ها، کاربردی به اندازه تاریخ بشری دارند. دایره در فرهنگ‌ها، انجمن‌ها،شهرسازی، اندیشه‌های هنری و ریشه‌دار، به‌خصوص در ابزارآلات نجومی، جایگاه نمادین دارد.

۱ **دایره در هنرهای اسلامی ایران :** دایره‌ها در هنرهای اسلامی ایرانی، به شکل شمس و حلقه نورانی در اطراف سر ائمه علیهم‌السلام و بزرگان دین دیده می‌شود. همچنین با توجه به کرامت صورتگری و مجسمه‌سازی در اسلام و ظریف‌اندیشی شیعه، هنرهای اسلامی به شکل‌های اسلیمی، گل وبوته و نقشه‌هایی ختایی سوق داده شد. اشکال و خطوط و ترکیب رنگ در مینیاتورها، تذهیب‌ها و فرش‌ها با زینت و ترکیب و نقش‌ونگار پخته‌تری تکامل یافتند.

بطلمیوس، در دو قرن پیش از میلاد، براساس تفاوت حرارت، سرزمین‌های شناخته شده آن روزگار را به

هفت اقلیم تقسیم کرده است. از آنجا که تقسیم‌بندی بطلمیوس براساس دایره‌های مداری است، اقلیم‌های هفتگانه را «اقلیم‌های هندسی» نیز نامیده‌اند. به نظر صاحب‌نظران، اصطلاح «هفت شهر»، «هفت اقلیم» و «هفت وادی» که در ادبیات و حکمت ایرانی وارد شده است، الهامی از نظریات بطلمیوسی را در خود دارد. اجرام آسمانی به دو دسته ثوابت و اجرام متحرک و متغیر تقسیم شده و اجرام متغیر شناخته شده آن روز، (خورشید، زمین، بهرام، تیر، عطارد، مشتری و زحل) هر یک در مداری و آسمانی تصور شدند. آسمان اول، آسمان دوم، ... تا هفت آسمان (نور راسخون، ۱۳۸۸).

۲ **کاربرد دایره در علوم نجوم** : دایره «هندسی»، که به «دایره هندی» نیز معروف است، دایره‌ای است خط‌دار (دارای خطوط فنی و علمی) بر صفحه‌ای مستوی و تراز، با نصب شاخص مخروطی‌شکل بر مرکز آن، که این خطوط در وهله اول چهار جهت اصلی را نشان می‌دهد. از دایره هندی در هندوستان برای تعیین مختصات جغرافیایی، نصف‌النهار محل و ساعت آفتابی استفاده می‌شده است. با توجه به اینکه استفاده از دایره هندسی برای تعیین مختصات جغرافیایی بسیار ساده است و نیازی به داشتن قواعد ریاضی و به‌کارگیری وسایل و تجهیزات رصدی نیست، لذا ابوریحان بیرونی از این روش برای قبله‌یابی استفاده کرد و دیری نپایید که استفاده از آن مرسوم شد (کانون نجوم زادنس ۱۳۹۴).

۳ **دایره در ورزش‌های باستانی** : دایره، با توجه به نماد آسمانی و قداست افلاکی‌اش در ورزش‌های باستانی از جمله زورخانه و گوی‌بازی ورزشکاران باستانی‌کار نیز کاربرد دارد.

دایره برای رفع مشکلات شهرها و شهرسازی :

توسعه شهرها، تأمین نیازمندی‌های آنان، چاره‌جویی برای توسعه‌های آینده شهر، اتخاذ تصمیماتی که بتواند مشکلات شهری را به حداقل برساند و بالاخره آنکه چگونه رابطه منطقی بین انسان با محیط طبیعتش حفظ شود، به تحولاتی در امر شهرسازی منجر شد. نخستین نظریه در زمینه شهرسازی، مربوط به شخصی به نام هیپوداموس (۴۸۰ سال قبل از میلاد)است و بعد از آن نظریات و راهکارهای متفاوت شهرسازی به‌وجود آمد. ولی پیدایش دانش امروزی شهرسازی به قرن نوزده میلادی می‌رسد. از میان نظریه‌های شهرسازی می‌توان نظریه‌های زیر را نام برد :

۱ **نظریه متحدالمرکز** : در این نظریه، الگوی ساخت شهر بر این اصل استوار است که توسعه شهر از ناحیه مرکزی به طرف خارج شهر صورت گرفته و تعداد مناطق متحدالمرکز را تشکیل می‌دهد. این مناطق با ناحیه مشاغل مرکزی شروع شده و به‌وسیله منطقه در حال تحول احاطه می‌شود.

۲ **نظریه قطاعی** : تعدیل و تغییر در جهات مختلف، مبنای این نظریه است. شهرها برای همیشه نمی‌توانند حالت متحدالمرکزی مناطق را حفظ کنند. ساخت واحدهای گران‌قیمت از کانون اصلی در طول

شبکه‌های رفت و آمد، ساخت واحدهای مسکونی دیگر و ارزان‌تر به سوی فضاهای باز و جابه‌جایی ساختمان‌های اداری و تجاری، توسعه واحدهای مسکونی گران‌قیمت را در جهت عمومی عملی سازد. آپارتمان‌های لوکس در مجاورت بخش‌های تجاری و مسکونی قدیمی به‌وجود آمده و واحدهای گران‌قیمت شهر به‌طور اتفاقی و نامنظم جابه‌جا نمی‌شوند. راه‌های شعاعی از مرکز شهر به اطراف کشیده می‌شود و عامل دسترسی به این راه‌ها و قیمت زمین‌ها را در مناطق مختلف شهر تعیین می‌کند.

۳ **مدل حلقه‌ای** : در این مدل، به‌جای آنکه خطوط اصلی حمل‌ونقل به‌صورت خطی گسترش یابد، به‌شکل دایره‌ای به موازات مرکز شهر، حواشی ناحیه مرکزی و بافت‌های اطراف آن گسترش می‌یابد و دور تا دور بافت را گره‌های شهری به‌وجود می‌آورد و فعالیت‌ها شکل حلقه‌ای یا زنجیره‌ای به خود می‌گیرند.

۴ **طرح مکمل مدل کهکشانی** : این طرح براساس نظریه ویکتورکروئن در بیشتر شهرهای بزرگ کاربرد دارد. شهر از مراکز متعددی تشکیل یافته و هر یک واحدهای دیگری را به‌وجود می‌آورد و به‌وسیله شبکه‌های ارتباطی مشترک و مستقل و منطقه‌ای، بافت‌ها با همدیگر مرتبط می‌شوند. مجموعه این بافت‌ها و شبکه‌ها یک شبکه کهکشانی را به‌وجود می‌آورد. خدمات مرکزی در وسط بافت و جایگاه صنایع در نواحی اطراف شهر و خارج از بافت اصلی پیش‌بینی می‌شود.

این فصل درباره مفهوم دایره است. دانش‌آموزان برای درک بهتر مفاهیم ارائه شده در این فصل باید به پیش‌نیازهای ارائه شده در کتاب‌های درسی سال‌های قبل،به‌خصوص هندسه (۱) تسلط داشته باشند. از مهم‌ترین پیش‌نیازهای این فصل می‌توان به این مباحث اشاره کرد: قضیه تالس، خطوط موازی و حالت‌های تشابه مثلث‌ها و چندضلعی‌ها و ویژگی‌های چندضلعی‌ها.