درس سوم

چند ضلعی‌های محاطی و محیطی

اهداف درس

۱ درک مفهوم محاطی و محیطی بودن چندضلعی و آشنایی با شرایط لازم و کافی برای محاطی و محیطی بودن چندضلعی (به‌ویژه چهار ضلعی‌ها)؛

۲ آشنایی با نحوه رسم دایره‌های محاطی و محیطی در چندضلعی در صورت وجود؛

۳ آشنایی با دایره محاطی خارجی مثلث و رابطهٔ شعاع دایره محاطی خارجی مثلث با محیط، مساحت و اضلاع آن مثلث.

روش تدریس درس سوم

درس با ارائه تعریفی از چندضلعی محاطی و دایرهٔ محیطی آن چندضلعی آغاز می‌شود. پس از ارائه تعریف، طی یک قضیه دو شرطی، شرط لازم و کافی محاطی بودن چندضلعی بیان می‌شود. انتظار می‌رود دانش‌آموزان، با توجه به تعریف چندضلعی محاطی و دایره محیطی آن، همچنین خواص دایره و ویژگی‌های عمودمنصف پاره‌خط که در کتاب هندسه و در درس گذشته این فصل خوانده‌اند بتوانند این قضیه دو شرطی را اثبات کنند.

در ادامه تعریف چند ضلعی محیطی و دایره محاطی آن را ارائه می‌شود. پس از تعریف فعالیتی ارائه می‌شودکه انتظار می‌رود دانش‌آموزان پس از انجام آن فعالیت، شرط لازم و کافی محیطی بودن یک چندضلعی را درک کنند و بتوانند از این فعالیت در حل مسائل و اثبات قضایا استفاده کنند.

مثلث، به‌عنوان یکی از پرکاربردترین چندضلعی‌ها در هندسه، از منظر محاطی و محیطی بودن، بررسی

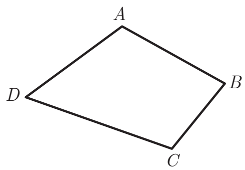
می‌شود و دانش‌آموزان با توجه به خواص مثلث و دایره درمی‌یابند که هر مثلث هم محیطی است و هم محاطی و مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث، نقطهٔ همرسی سه عمود منصف آن و مرکز دایره محاطی هر مثلث، نقطه همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن است.

انتظار می‌رود دانش‌آموزان براساس «کار در کلاس» صفحه ۲۵ که در خصوص رابطه بین مساحت یک n ضلعی محیطی با محیط آن و شعاع دایرهٔ محاطی‌اش است، بتوانند رابطه بین مساحت هر مثلث محیطی با محیط آن و شعاع دایره محاطی‌اش را به‌دست آورند.

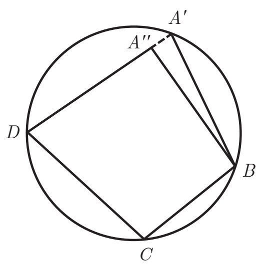
در صفحهٔ ۲۶ دایرهٔ محاطی خارجی نظیر هر رأس مثلث معرفی و فعالیتی ارائه می‌شود که در آن نحوهٔ محاسبهٔ شعاع دایره محاطی خارجی تبیین می‌شود.

در صفحهٔ ۲۷ و ۲۸ طی دو قضیه دو شرطی و اثبات آنها، شرایط لازم و کافی برای محاطی و محیطی بودن هر چهارضلعی بیان می‌شود.

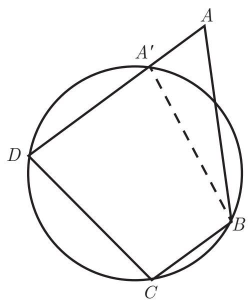
در قضیه اول شرط لازم و کافی برای محاطی بودن هر چهارضلعی، مکمل بودن دو زاویه مقابل آن چهارضلعی ارائه و اثبات می‌شود. برای این قضیه دو شرطی، طرف اول قضیه (فرض : چهارضلعی $ABCD$ محاطی است. حکم : دو زاویه مقابل آن چهارضلعی مکمل هم هستند.) به‌راحتی با استفاده از تعریف زاویه محاطی و دایره اثبات می‌شود.



طرف دوم قضیه (فرض : دو زاویه مقابل چهارضلعی $ABCD$ مکمل هم هستند. حکم : چهارضلعی $ABCD$ محاطی است.) با استفاده از برهان خلف اثبات می‌شود. روند اثبات این‌گونه است که با توجه به اثبات این امر که هر مثلث محاطی است، مطمئناً می‌توان یک دایره محاطی که از سه رأس چهارضلعی می‌گذرد رسم کرد. و این دایره از رأس چهارم چهارضلعی (به‌عنوان مثال A) نمی‌گذرد (فرض خلف). بر این اساس و با توجه به شکل (۱) و (۲).



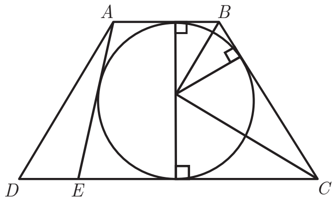
(۱)



(۲)

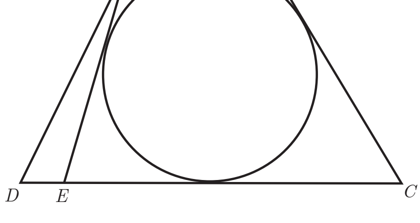
از رأس B به نقطه A' که روی ضلع AD یا در امتداد آن قرار دارد وصل می‌کنیم. چهارضلعی $A'BCD$ یک چهارضلعی محاطی است. سپس با توجه به قسمت اول قضیه، $\hat{C}$ و $B\hat{A'}D$ مکمل هم هستند و با توجه به فرض قضیه که $\hat{C}$ با $\hat{A}$ مکمل هستند، نتیجه گرفته می‌شود که $\hat{A}=B\hat{A'}D$ که این ممکن نیست؛ زیرا در شکل (۱) زاویه $BA'D$ زاویه داخلی غیر مجاور با زاویه خارجی A در مثلث ABA' و در شکل (۲) زاویه A زاویه داخلی غیر مجاور با زاویه خارجی $BA'D$ در مثلث ABA' است که در هر دو مورد دو زاویه A و $BA'D$ با هم مساوی نیستند و این تناقضی است که مبنای اثبات قضیه است.

در قضیه دوم، شرط لازم و کافی برای محیطی بودن چندضلعی بیان می‌شود. قسمت اول قضیه با فرض محیطی بودن چهارضلعی و حکم برابر بودن مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل با مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر، براساس هم اندازه بودن در پاره‌خط مماس رسم شده از یک نقطه بر یک دایره اثبات می‌شود. برای اثبات عکس قضیه، با توجه به شکل ارائه شده، ابتدا با استفاده از رسم نیمساز دو زاویه B و C، رسم دایره‌ای محاطی که بر سه ضلع AB و BC و CD مماس است، نتیجه گرفته می‌شود برای اثبات مماس بودن دایره مفروض بر ضلع AD از برهان خلف استفاده می‌شود.



فرض خلف این است که دایره مفروض بر ضلع AD مماس نیست و پاره‌خط دیگری مانند AE مماس است. با توجه به اینکه E بین دو رأس C و D باشد و یا D بین C و E باشد، دو حالت پیش می‌آید که در ادامه این قسمت قضیه را برای هر دو حالت اثبات می‌کنیم :

حالت اول : E بین C و D قرار دارد :



$$\left.\begin{array}{ll} ۱ \quad AB+CD=BC+AD & \text{بنا بر فرض قضیه} \\ ۲ \quad AB+CE=BC+AE & \text{با توجه به قسمت اول قضیه (شرط محیطی بودن چهارضلعی)} \end{array}\right\} \overset{۱ \text{ و } ۲}{\Longrightarrow}$$

$$CD-CE=AD+AE \xrightarrow{CD=CE+DE} \cancel{CE}+DE-\cancel{CE}=AD+AE$$

$$\Rightarrow AD+AE=DE$$

که این رابطه، با توجه به نامساوی مثلث‌ها، امکان ندارد؛ بنابراین، قضیه اثبات می‌شود.

حالت دوم : D بین C و E قرار دارد :

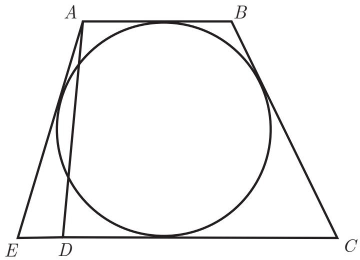
۱ $AB+CD=BC+AD$ فرض قضیه

۲ $AB+CE=BC+AE$ شرط محیطی بودن چهارضلعی

$$۲-۱ \Rightarrow CE-CD=AE-AD \xRightarrow{CE=CD+ED}$$

$$\cancel{CD}+ED-\cancel{CD}=AE-AD \Rightarrow ED+AD=AE$$

که این رابطه نیز با توجه به نامساوی بودن مثلث‌ها امکان ندارد و قضیه در این حالت نیز اثبات می‌شود.



در «کار در کلاس» صفحه ۲۸ انتظار می‌رود که دانش‌آموزان با توجه به قضایای مربوط محاطی و محیطی بودن چهارضلعی‌ها و همچنین ویژگی‌های چهارضلعی‌های مختلف بتوانند محاطی یا محیطی بودن هر یک از آنها را مشخص کنند.

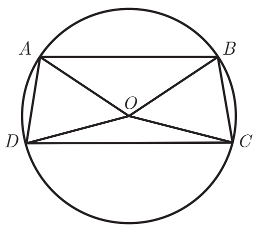
پس از انجام «کار در کلاس» صفحه ۲۸ چندضلعی محدب منتظم تعریف می‌شود. در صفحه ۲۹ فعالیتی ارائه می‌شود که دانش‌آموزان با انجام آن درک می‌کنند که هر چندضلعی محدب منتظم، هم محاطی و هم محیطی است.

مجله ریاضی به‌عنوان مطلبی خواندنی برای علاقه‌مندان در خصوص زاویه‌های دید و کمان شامل (حاوی) پس از تمرین‌های این درس ارائه می‌شود که جزء محتوای درس نیست و فقط جهت مطالعه برای دانش‌آموزان است.

حل تمرین‌های درس

۱ ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد.

فرض : ذوزنقه محاطی است. **حکم :** $AD = BC$



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DC\ ,\ AD \text{ مورب } \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی}} \widehat{A}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ \\ \text{طبق شرط محاطی بودن ذوزنقه} \leftarrow \widehat{A}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \widehat{D}=\widehat{C}$$

$$\text{شرط محاطی بودن ذوزنقه} \leftarrow \left.\begin{cases} \widehat{B}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ \\ \widehat{A}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ \end{cases}\right\} \overset{\widehat{D}=\widehat{C}}{\Rightarrow} \quad \widehat{A}=\widehat{D}$$

در این ذوزنقه،زاویه‌های مجاور به ساق برابرند؛ بنابراین، ذوزنقه، متساوی‌الساقین است.

فرض : ذوزنقه متساوی‌الساقین است. **حکم :** ذوزنقه محاطی است.

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ \xrightarrow[\text{با توجه به فرض متساوی‌الساقین بودن ذوزنقه}]{\widehat{C}=\widehat{D}} \widehat{A}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ \\ \\ \widehat{A}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{A}=\widehat{B}} \widehat{B}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ذوزنقه } ABCD \text{ محاطی است.}$$

۲ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به‌دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.

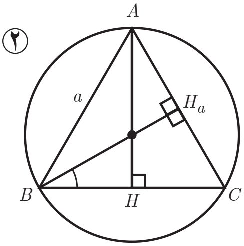
مرکز دایره محیطی مثلث، محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع مثلث است و چون مثلث متساوی‌الاضلاع است، نقطه O محل برخورد نیمسازها نیز است.

بنابراین :

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{AH.BC}{۲}$$

$$AH = OA + OH \Rightarrow AH = R + OH \qquad ①$$

$$O\overset{\Delta}{B}H : \widehat{B}_۱ = ۳۰^\circ \to \sin \widehat{B}_۱ = \frac{OH}{OB} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{OH}{R} \to OH = \frac{R}{۲} \qquad ②$$



$$۱ \text{ و } ۲ \to AH = R + \frac{R}{۲} \Rightarrow AH = \frac{۳}{۲}R$$

$$O\overset{\Delta}{B}H : \widehat{B}_۱ = ۳۰^\circ \Rightarrow \cos \widehat{B}_۱ = \frac{BH}{OB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BH}{R} \Rightarrow$$

$$BH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R \quad \xRightarrow{AH \text{ میانه } BC \text{ نیز است.}} \quad BC = ۲BH \Rightarrow BC = \sqrt{۳}R$$

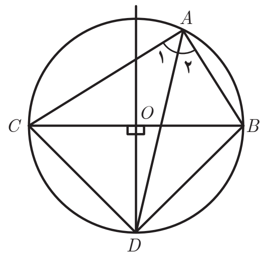
$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{R}{۲} \times \sqrt{۳}R = \frac{\sqrt{۳}}{۴} R^{۲}$$

۳ ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند.

فرض می‌کنیم AD نیمساز زاویه A دایره محیطی مثلث ABC را در نقطه D قطع کند.

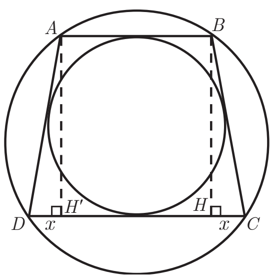
$$\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ \xrightarrow{\text{خواص زاویه محاطی}} \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DB} \Rightarrow \overline{CD} = \overline{DB}$$

بنابراین، فاصله D از دو سر ضلع BC به یک اندازه است و این یعنی اینکه D روی عمود منصف ضلع BC قرار دارد. پس نیمساز زاویه A و عمودمنصف ضلع مقابل به زاویه A یعنی BC همدیگر را روی نقطه‌ای روی دایره محیطی مثلث ABC قطع می‌کند.



۴ یک ذوزنقه هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

چون ذوزنقه $ABCD$ محاطی است، طبق سؤال ۱، متساوی‌الساقین است یعنی رابطه ۱ : $AD=BC$.



از طرفی چون ذوزنقه $ABCD$ محیطی است پس داریم : رابطه ۲ $AB+DC=AD+BC$.

$$BC=\frac{AB+DC}{۲} \Leftarrow ۲BC=AB+DC \Leftarrow ۲ \text{ و } ۱ \quad ۳$$

$$\overset{\Delta}{BHC}: BC^۲=BH^۲+HC^۲ \Rightarrow BC^۲=BH^۲+x^۲ \quad ۴$$

$$\overset{\frown}{ABCD}: DC=۲x+HH' \xrightarrow{HH'=AB} DC=۲x+AB \Rightarrow x=\frac{DC-AB}{۲} \quad ۵$$

$$۵ \text{ و } ۴ \Rightarrow BC^۲=BH^۲+x^۲ \Rightarrow BH=\sqrt{BC^۲-x^۲} \xrightarrow{\text{با جایگذاری ۵ و ۳}}$$

$$BH=\sqrt{\left(\frac{AB+DC}{۲}\right)^۲-\left(\frac{DC-AB}{۲}\right)^۲}=\sqrt{AB.DC}$$

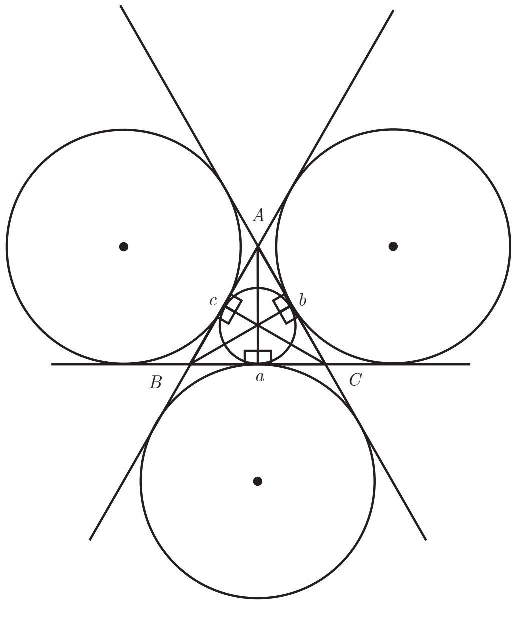
$$S_{\overset{\frown}{ABCD}}=\left(\frac{AB+DC}{۲}\right)\sqrt{AB.DC}$$

۵ اگر r_a، r_b و r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد نشان دهید :

$$\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a، h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید :

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$



اگر محیط مثلث ABC را $۲p$ و S را مساحت آن در نظر بگیریم در دایره محاطی مثلث ABC داریم :

$$S = rp \Rightarrow \frac{۱}{r} = \frac{p}{s}$$

در دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC داریم :

$$\left.\begin{aligned} r_a &= \frac{s}{p-a} \Rightarrow \frac{۱}{r_a} = \frac{p-a}{s} \\ r_b &= \frac{s}{p-b} \Rightarrow \frac{۱}{r_b} = \frac{p-b}{s} \\ r_c &= \frac{s}{p-c} \Rightarrow \frac{۱}{r_c} = \frac{p-c}{s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

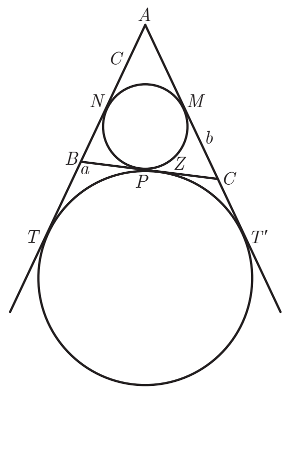
$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{p-a}{s} + \frac{p-b}{s} + \frac{p-c}{s} = \frac{۳p-(a+b+c)}{s} = \frac{۳p-۲p}{s} = \frac{p}{s} = \frac{۱}{r}$$

به همین ترتیب اگر h_a، h_b و h_c اندازه‌های سه ارتفاع مثلث ABC باشند داریم :

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{۱}{۲} a h_a \Rightarrow h_a = \frac{۲s}{a} \Rightarrow \frac{۱}{h_a} = \frac{a}{۲s} \\ s &= \frac{۱}{۲} b h_b \Rightarrow h_b = \frac{۲s}{b} \Rightarrow \frac{۱}{h_b} = \frac{b}{۲s} \\ s &= \frac{۱}{۲} c h_c \Rightarrow h_c = \frac{۲s}{c} \Rightarrow \frac{۱}{h_c} = \frac{c}{۲c} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{a}{۲s} + \frac{b}{۲s} + \frac{c}{۲s} = \frac{a+b+c}{۲s} = \frac{۲p}{۲s} = \frac{p}{s} = \frac{۱}{r}$$

۶ اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M، N و P باشند و T و T' نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند نشان دهید :



$AM = AN = P - a$

$BN = BP = P - b$, $CM = CP = P - C$

$AT = AT' = P$

$AM = AN = P - a$

$$\left.\begin{aligned} AN &= C - BN \\ AM &= b - CM \end{aligned}\right\} \Rightarrow AM + AN = b + c - (BN + CM)$$

$$\xrightarrow[BN=BP\,,\,CM=CP]{AM=AN} ۲AM = b + c - (\underbrace{BP + CP}_{a}) = b + c - a$$

$$\Rightarrow ۲AM = ۲p - ۲b \Rightarrow AM = AN = p - a$$

$BN = BP = P - b$

$$\left.\begin{array}{l} BN = C - AN \\ BP = a - cp \end{array}\right\} \Rightarrow BN + BP = a + c - (AN + CP)$$

$$\xrightarrow[AN=AM,\, CP=CM]{BP=BN} ۲BN = a + C - (\underbrace{AM + CM}_{b}) = a + c - b$$

$$۲BN = ۲p - ۲b \Rightarrow BN = BP = P - b$$

$$CM = CP = P - C$$

$$\left.\begin{array}{l} CM = b - AM \\ CP = a - BP \end{array}\right\} \Rightarrow CM + CP = b + a - (AM + BP)$$

$$\xrightarrow[AN=AM\,,\, BP=BN]{CM=CP} ۲CM = b + a - (\underbrace{AN + BN}_{c}) = b + a - c$$

$$\Rightarrow ۲CM = ۲P - ۲C \Rightarrow CM = CP = P - C$$

$$AT = AT' = P$$

$$AT + AT' = C + BT + b + CT' \xrightarrow[BT=BZ\,,\, CT'=CZ]{AT=AT'}$$

$$۲AT = C + b + \underbrace{BZ + CZ}_{a} = c + b + a = ۲P \Rightarrow$$

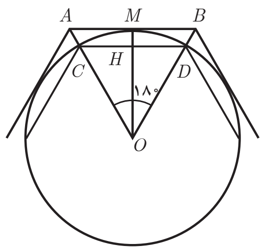
$$AT = AT' = P$$

۷ یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلع‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آنگاه $AB = ۲r\tan\frac{۱۸۰}{n}$ و $CD = ۲r\sin\frac{۱۸۰}{n}$.

$$O\overset{\Delta}{H}D : \widehat{H} = ۹۰^\circ \rightarrow \sin\frac{۱۸۰}{n} = \frac{OH}{OD} \xrightarrow[۲]{OD=r} \sin\frac{۱۸۰}{n} =$$

$$\frac{DH}{r} \overset{\times ۲}{\Rightarrow} ۲\sin\frac{۱۸۰}{n} = \frac{۲DH}{r} \xrightarrow{۲DH=CD} CD = ۲r\sin\frac{۱۸۰}{n}$$

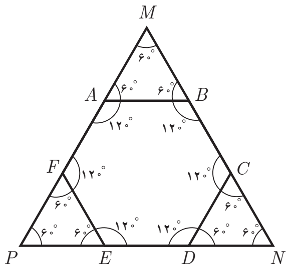
$$O\overset{\Delta}{M}B : \widehat{M} = ۹۰^\circ \rightarrow \tan\frac{۱۸۰}{n} = \frac{MB}{OM} \xrightarrow{OM=r} \tan\frac{۱۸۰}{n} = \frac{MB}{r}$$



$$\overset{\times ۲}{\Rightarrow} ۲\tan\frac{۱۸۰}{n} = \frac{۲MB}{r} \xrightarrow{۲MB=AB} AB = ۲r\tan\frac{۱۸۰}{n}$$

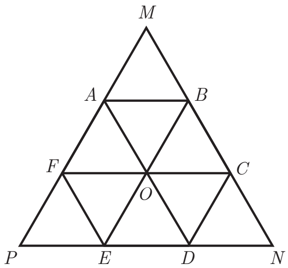
۸ شش‌ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است. با امتداد دادن اضلاع شش‌ضلعی، مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است. با توجه به شکل و با توجه به اینکه اندازه هر زاویه داخلی شش‌ضلعی منتظم 120° است، اندازه زاویه‌های M، N و P 60° است؛ بنابراین مثلث MNP، متساوی‌الاضلاع است.



ب) نشان دهید مساحت شش‌ضلعی دو سوم مساحت مثلث MNP است. اگر قطرهای شش‌ضلعی منتظم را رسم کنیم، شش مثلث متساوی‌الاضلاع داخل شش‌ضلعی و ۹ مثلث متساوی‌الاضلاع در داخل مثلث MNP به‌وجود می‌آید.

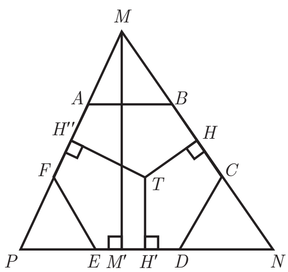
$$\frac{S_{ABCDEF}}{S_{\overset{\triangle}{MNP}}}=\frac{6S_{\overset{\triangle}{OAB}}}{9S_{\overset{\triangle}{OAB}}}=\frac{2}{3}$$



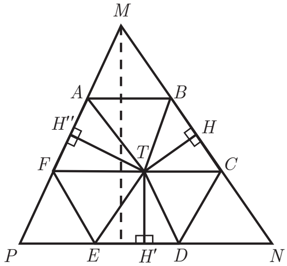
پ) از نقطهٔ دلخواه T درون شش‌ضلعی عمودهای TH، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC، ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسهٔ پایهٔ ۱ می‌دانید، مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

در درون هر مثلث متساوی‌الاضلاع، مجموع فواصل هر نقطه از سه ضلع مثلث برابر طول ارتفاع مثلث است بنابراین :

$$TH+TH'+TH''=MM'$$



ت) مجموع مساحت‌های مثلث TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید :



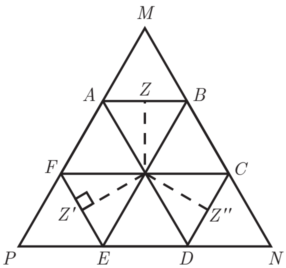
$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = \frac{۱}{۲}\ TH.BC + \frac{۱}{۲}\ TH'\ .\ ED + \frac{۱}{۲}\ TH''.AF \underline{\underline{\underline{BC = ED = AF}}}$$

$$\frac{۱}{۲}BC(\underbrace{TH + TH' + TH''}_{h}) = \frac{۱}{۲}BC.h$$

$$S_{MNP} = \frac{۱}{۲}MN.h \xrightarrow{MN = ۳BC} \frac{S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF}}{S_{MNP}} =$$

$$\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}BC.\cancel{h}}{\cancel{\frac{۱}{۲}}۳BC.\cancel{h}} = \frac{۱}{۳}$$



$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = \frac{۱}{۲}\ BC.h \quad ①$$

$$S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD} = \frac{۱}{۲}\ CD.\ TZ'' + \frac{۱}{۲}\ EF.IZ' + \frac{۱}{۲}\ AB.\ TZ.$$

$$\underline{\underline{\underline{AB = BC = CD = ED = EF = AF}}} \frac{۱}{۲}\ BC\ (TZ + TZ' + TZ'') \underline{\underline{\underline{TZ + TZ' + TZ'' = h}}}$$

$$\frac{۱}{۲}\ BC.h \quad ②$$

$$۱ \text{ و } ۲ \Rightarrow S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD} = \frac{۱}{۲}\ BC.h$$

۹ دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم، چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است؛ چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کند. نشان دهید هشت‌ضلعی $AMBQCPDN$ منتظم است.

$$\left.\begin{array}{l} OB = OA = OD = OC \\ \widehat{O}_1'' = \widehat{O}_2'' = \widehat{O}_3''' = \widehat{O}_4''' = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$O\overset{\Delta}{A}B = O\overset{\Delta}{A}D = O\overset{\Delta}{D}C = O\overset{\Delta}{C}B$$ (ض ز ض)

$$\Rightarrow AB = AD = DC = CB \quad 1$$

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90 \quad 2$$ همچنین (زاویه‌های محاطی رو به رو به قطر)

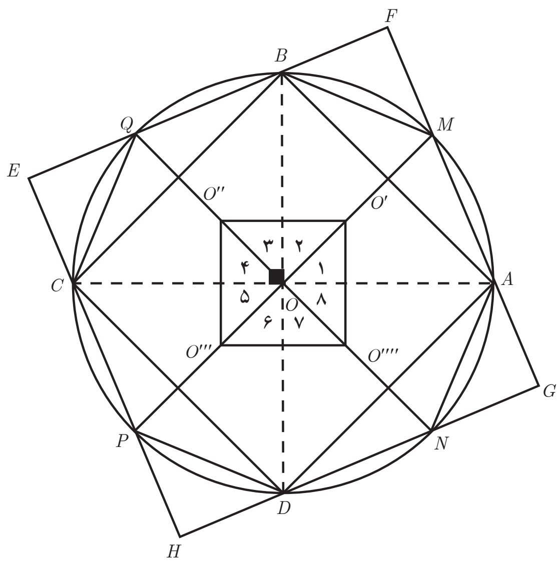
چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است. $\Leftarrow$ ۲ و ۱

عمود منصف هر ضلع در مربع، نیمساز زاویه مقابل ضلع نیز هست، پس :

$$\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \widehat{O}_3 = \widehat{O}_4 = \widehat{O}_5 = \widehat{O}_6 = \widehat{O}_7 = \widehat{O}_8 = 45^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AM = MB = BQ = QC = CP = PD = DN = NA \\ \widehat{M} = \widehat{B} = \widehat{Q} = \widehat{C} = \widehat{P} = \widehat{D} = \widehat{N} = \widehat{A} = \dfrac{7\overset{\frown}{AM}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

هشت‌ضلعی $AMBQCPDN$، منتظم است.



توصیه‌های آموزشی

توصیه می‌شود در تدریس این درس، همانند سایر درس‌ها، نکات آموزشی زیر توسط همکاران محترم لحاظ شود :

۱ تا حد امکان به دانش‌آموزان فرصت بحث و بررسی مسائل و ارائه استدلال و نقد استدلال‌های دیگران داده شود.

۲ تا حد امکان از پاسخ مستقیم به دانش‌آموزان و اثبات کامل قضایا و حل تمرین‌ها خودداری شود و سعی شود دانش‌آموزان با بحث و کار گروهی اثبات‌ها را انجام یا تکمیل نمایند و به حل تمرین‌ها بپردازند.

۳ در صورت امکان سعی شود پس از اثبات یا حل هر مسئله‌ای از دانش‌آموزان خواسته شود به دنبال راه حل جدید یا اثبات جدیدی باشند. طبیعی است این امکان برای تمامی قضایا و سؤالات فراهم نیست، ولی برای برخی قضایا و مسائل مطمئناً این امکان وجود دارد؛ بنابراین، لازم است از این فرصت‌ها برای تقویت قدرت استدلال و اثبات و حل مسئله دانش‌آموزان استفاده شود.

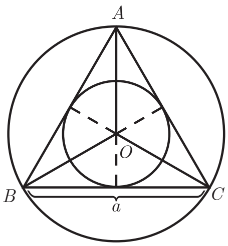
۴ در انجام فعالیت‌ها سعی کنید تا حد امکان دانش‌آموزان بتوانند خود با آن مواجه شوند و آن را حل کنند. شما بر روند انجام فعالیت توسط آنان فقط نظارت کنید. در صورت نیاز، به حداقل راهنمایی اکتفا کنید.

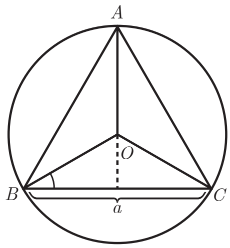
بدفهمی‌ها و اشتباهات رایج دانش‌آموزان :

یکی از رایج‌ترین بدفهمی‌های دانش‌آموزان، استفاده از شرط لازم و کافی برای محاطی بودن یک چندضلعی در خصوص محیطی بودن آن چندضلعی است. شایع‌ترین علت این بدفهمی، درک نادرست از مفهوم محاطی و محیطی بودن و تمایز نگذاشتن بین این دو مفهوم است. برای برطرف کردن این بدفهمی پیشنهاد می‌شود همکاران در این درس با ارائه نمونه‌های مختلف اشکال محاطی و محیطی و بحث در خصوص تمایز بین آنها (محیطی و محاطی بودن یک شکل) موجب درک عمیق در دانش‌آموزان گردند.

نمونه سؤالات تکمیلی درس سوم

۱ با توجه به شکل زیر، اندازه شعاع دایره محیطی و محاطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به‌دست آورید. (راهنمایی : می‌دانیم فاصلهٔ نقطهٔ همرسی میانه‌ها در هر مثلث تا پای هر میانه برابر $\frac{۱}{۳}$ اندازهٔ آن میانه است).





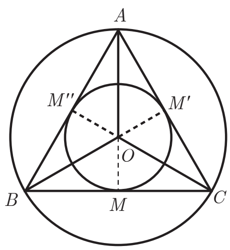
حل :

پیدا کردن اندازه شعاع دایره محیطی : با توجه به متساوی‌الاضلاع بودن مثلث ABC و اینکه هر ارتفاعی، نیمساز، عمود منصف و میانه نیز هست، برای محاسبه شعاع دایره محیطی، کافی است اندازه OA را که $\frac{۲}{۳}$ میانه OM هست، به‌دست آوریم.

$$O\overset{\Delta}{B}M : \cos B_۱ = \frac{BM}{OB} \xrightarrow{\widehat{B}_۱ = ۳۰^\circ} \cos ۳۰^\circ = \frac{\frac{a}{۲}}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} r = \frac{a}{۲} \Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{۳}a}{۳}$$

محاسبه اندازه شعاع دایره محاطی : با توجه به شکل دیده می‌شود که شعاع دایره محیطی $\frac{۲}{۳}$ میانه AM و شعاع دایره محاطی $\frac{۱}{۳}$ میانه AM است و چون $r_{\text{محیطی}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a$ پس : $r_{\text{محاطی}} = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a$



۲ اندازه شعاع‌های دایره محاطی خارجی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به‌دست آورید.

حل : با توجه به اینکه اندازه شعاع‌های دایره محاطی خارجی هر مثلث از فرمول صفحه بعد به‌دست می‌آیند.

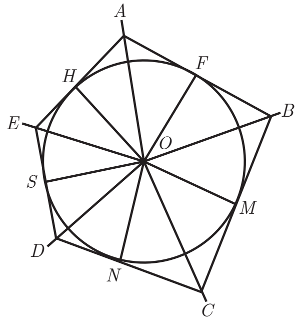
$$\begin{cases} r_a=\dfrac{S}{p-a} \\ r_b=\dfrac{S}{p-b} \\ r_c=\dfrac{S}{p-c} \end{cases} \xRightarrow[\text{مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع : } S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}]{\text{در مثلث متساوی‌الاضلاع : } p=\frac{۳a}{۲}}$$

$$r_a=r_b=r_c=\dfrac{\dfrac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}}{\dfrac{۳a}{۲}-a}=\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

۳ نشان دهید مساحت هر چندضلعی محیطی برابر است با حاصل ضرب نصف محیط در شعاع دایرهٔ محاطی آن.

$S=P\ .\ r$

یک چند ضلعی محیطی را در نظر بگیریم از مرکز دایره به رئوس چندضلعی و نقاط مماس چندضلعی بر دایره وصل می‌کنیم. به‌عنوان نمونه پنج‌ضلعی محیطی دلخواهی را در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه در نقطه مماس، شعاع بر ضلع پنج‌ضلعی عمود است مجموع مساحت مثلث‌های حاصل، برابر مساحت پنج‌ضلعی محیطی مورد نظر است.



$$S_{ABCDE}=\frac{OH.AH}{۲}+\frac{OH.EH}{۲}+\frac{OS.ES}{۲}+\frac{OS.SD}{۲}+\frac{ON.DN}{۲}+\frac{ON.NC}{۲}+\frac{OM.MC}{۲}$$

$$+\frac{OM.MB}{۲}+\frac{OF.FB}{۲}+\frac{OF.FA}{۲}\ \underline{\underline{OH=OF=OM=ON=OS=r}}\ \frac{r}{۲}\ (AH+HE+ES+SD+DN+NC+CM+MB+BF+FA)=\frac{r}{۲}\ .\ ۲P=P\ .\ r$$

۴ توضیح دهید چرا در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، اندازه شعاع دایره محیطی آن، دو برابر اندازه شعاع دایره محاطی‌اش است.

همان‌گونه که در شکل سؤال ۱ مشخص است، شعاع دایره محاطی مثلث متساوی‌الاضلاع، بخش

کوچک میانه، و شعاع دایره محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع، بخش بزرگ‌تر میانه است. با توجه به قضیه‌ای که دانش‌آموزان در خصوص میانه‌ها در سال گذشته خوانده‌اند، نسبت قسمت بزرگ‌تر میانه به قسمت کوچک‌ترش ۲ به ۱ است؛ یعنی شعاع دایره محیطی، ۲ برابر شعاع دایره محاطی است.

۵ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

ـ چهار رأس هر چهارضلعی محاطی بر یک دایره واقع است. ✓

ـ چهار ضلع هر چهارضلعی محیطی بر یک دایره مماس است. ✓

ـ مربع چهار ضلعی محیطی است ولی محاطی نیست. ×

ـ هر متوازی‌الاضلاعی محاطی است ولی محیطی نیست. ×

ـ دایره‌های محاطی و محیطی هر مربع مساوی یکدیگرند. ×

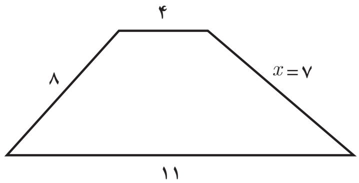
ـ لوزی یک چهار ضلعی محاطی است. ×

ـ مستطیل چهار ضلعی محاطی است ولی هر مستطیلی چهارضلعی محیطی نیست. ×

۶ دو زاویه مجاور از یک چهارضلعی محاطی ۶۰° و ۱۱۰° اند، دو زاویه دیگر چهارضلعی را تعیین کنید. ۶۰ و ۱۱۰

۷ اندازه‌های سه ضلع مجاور یک چهارضلعی محیطی به ترتیب ۴، ۸ و ۱۱ سانتی‌متر است. اندازه ضلع چهارم آن را تعیین کنید.

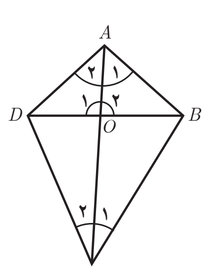
$x + ۸ = ۴ + ۱۱ \rightarrow x = ۷$



۸ ثابت کنید اگر دو ضلع مجاور از یک چهارضلعی محیطی مساوی یکدیگر باشند، دو قطر چهارضلعی بر هم عمودند. آیا یکدیگر را نصف هم می‌کنند؟ با توجه به محیطی بودن چهارضلعی و برابر بودن دو ضلع مجاور داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AB+DC=AD+BC \\ AD=AB \ \text{طبق فرض سؤال} \end{array}\right\} \rightarrow DC=BC$$

$$\left.\begin{array}{l} AD=AB \\ DC=BC \\ AC=AC \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\Delta}{ADC} \cong \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{A}_{۱}=\hat{A}_{۲} \\ \hat{C}_{۱}=\hat{C}_{۲} \end{array}$$



$$\overset{\Delta}{ADO}\ ,\ \ \overset{\Delta}{ABO}:\left.\begin{array}{r}\widehat{A}_1=\widehat{A}_2\\ OA=OA\\ AB=AD\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ADO}\cong \overset{\Delta}{ABO}\Rightarrow \widehat{O}_1=\widehat{O}_2=90^\circ$$

بنابراین قطرها بر هم عمودند.

اما در پاسخ به این پرسش که آیا قطرها همدیگر را نصف نیز می‌کنند باید گفت همیشه این‌گونه نیست؛ مثلاً در شکلی همانند کایت که تمامی این شرایط را دارد، قطرها همدیگر را نصف نمی‌کنند.

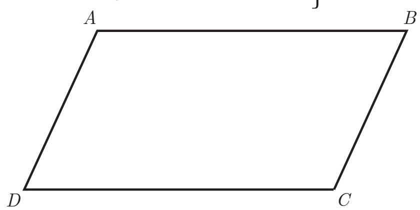
۹ ثابت کنید اگر متوازی‌الاضلاعی در دایره‌ای محاط باشد، آنگاه مستطیل است و اگر متوازی‌الاضلاعی بر دایره‌ای محیط باشد، آنگاه لوزی است.

اثبات قسمت اول : اگر متوازی‌الاضلاعی محاطی باشد $\Leftarrow$ مستطیل است.

$$\left.\begin{array}{lr}\text{با توجه به محاطی بودن}: \widehat{B}+\widehat{D}=180^\circ & 1\\ \widehat{A}+\widehat{C}=180^\circ & 2\\ \text{با توجه به متوازی‌الاضلاع بودن}: \widehat{B}=\widehat{D} & 3\\ \widehat{A}=\widehat{C} & 4\end{array}\right\}\begin{array}{l}1,3\Rightarrow \widehat{B}=\widehat{D}=90^\circ\\ 2,4\Rightarrow \widehat{A}=\widehat{C}=90^\circ\end{array}\Rightarrow \text{چهارضلعی } ABCD \text{ مستطیل است}$$

اثبات قسمت دوم : اگر متوازی‌الاضلاعی محیطی باشد لوزی است.

$$\left.\begin{array}{lr}\text{با توجه به محیطی بودن}: AB+DC=BC+AD & 1\\ \text{با توجه به لوزی بودن}: AB=DC & 2\\ AD=BC & 3\end{array}\right\}1,2,3\Rightarrow AB=BC=DC=AD$$



۱۰ ثابت کنید که در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، دایرهٔ محاطی داخلی بر سه دایرهٔ محاطی برونی مماس است.

با توجه به متساوی‌الاضلاع بودن مثلث ABC داریم که نیمساز هر زاویه داخلی مثلث، عمود منصف ضلع مقابل آن زاویه نیز هست؛ یعنی نقطه F نقطه وسط ضلع AB است.

اگر دایره محاطی خارجی نظیر ضلع AB را در نظر بگیریم، با توجه به اینکه مرکز دایره محاطی خارجی

نظیر ضلع AB، نقطه محل برخورد نیمسازهای خارجی در زاویه A و B است، پس طبق شکل و با توجه به متساوی‌الاضلاع بودن مثلث ABC داریم :

$$A\overset{\Delta}{O'}F\ ,\ B\overset{\Delta}{O'}F : \widehat{A}_1=\widehat{B}_1=60^\circ \quad ①$$

$$\widehat{F}_1=\widehat{F}_2=90^\circ \quad ② \text{ در نقطه مماس بودن بر ضلع } AB$$

$$\widehat{A}_1+\widehat{F}_1+\widehat{O'}_1=\widehat{A}_2+\widehat{F'}_2+\widehat{O'}_2=180^\circ \xRightarrow{\text{۱ و ۲}} \widehat{O'}_1=\widehat{O'}_2=30^\circ$$

$$O'F=O'F$$

$$\xRightarrow{\text{(ز ض ز)}}$$

$$A\overset{\Delta}{O'}F \cong B\overset{\Delta}{O'}F \Rightarrow AF=BF$$

یعنی F نقطه وسط AB است. با توجه به اینکه پاره‌خط AB یک نقطه وسط دارد، بنابراین هم دایره محاطی داخلی و هم دایره محاطی خارجی نظیر ضلع AB، در نقطه وسط بر ضلع AB مماس هستند، پس، دو دایرهٔ مذکور در همان نقطه بر هم مماس هستند. به طریقی مشابه ثابت می‌شود که دایرهٔ محاطی داخلی مثلث بر دو دایرهٔ محاطی خارجی مثلث ABC نیز در دو نقطه وسط ضلع نظیر مماس است؛ بنابراین، در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، دایرهٔ محاطی داخلی بر سه دایرهٔ محاطی برونی مماس است.