فصل دوم

۲

تبدیل‌های هندسی و کاربردها

عکس: محمدرضا دومیری گنجی

تبدیل‌های هندسی با بسیاری از مفاهیم هندسی از جمله هم نهشتی ارتباط نزدیکی دارند. همچنین کاربردهای فراوانی در صنعت، معماری و هنر دارند. خلق بناهای تاریخی که از دستاوردهای با ارزش بشر به شمار می‌آید، بدون به کارگیری تبدیل‌های هندسی میسر نمی‌شد. عمارت مسجد نصیرالملک در شیراز نمونه‌ای زیبا از این مطلب است.

تصویر عنوانی

ـ معماران ایرانی از دانش هندسه در ساخت بناهای تاریخی استفاده می‌کرده‌اند و با دیدن این بناها می‌توان به میزان آگاهی و دانش ریاضی ایرانیان پی برد.

تصویر عنوانی این فصل از کتاب، یکی از زیباترین مساجد ایران از لحاظ کاشی‌کاری و مقرنس و یکی از مساجد قدیمی شهر شیراز به نام مسجد نصیرالملک است که در محله گود عربان (محله اسحق بیگ) واقع در جنوب خیابان لطفعلی‌خان زند در نزدیکی شاهچراغ در کوچه نصیرالملک قرار دارد.

این بنا، به دستور «میرزا حسن‌علی‌خان»، ملقب به «نصیرالملک» که از اعیان و اشراف شیراز بود، ساخته شد و معماری آن کار محمد حسن معمار بوده است. شیشه‌های رنگی، طاق‌های بلند و کاشی‌کاری‌های فوق‌العاده آن بسیار زیباست. کاشی‌های فیروزه‌ای کف، نقش گل و بوته و آیات قرآنی سقف و ستون‌های سنگی، نمای داخلی آن را بسیار دل‌انگیز کرده است. در ساعات اولیه صبح، بخصوص در فصل پاییز و زمستان، تابش آفتاب از پس شیشه‌های رنگی درهای ورودی بر کاشی‌کاری‌ها و ستون‌ها و کف و دیواره شبستان، منظره‌ای فوق‌العاده را می‌آفریند که در هیچ تابلوی نقاشی یافت نمی‌شود و به همین علت به آن «مسجد صورتی» نیز می‌گویند.

به دلیل وجود تقارن‌های زیبای هندسی در بنای این مسجد، به عنوان تصویر عنوانی این فصل انتخاب گردیده است.


نقشهٔ مفهومی فصل دوم
تبدیل‌های هندسی و کاربردها
تبدیل‌های هندسی
بازتاب
انتقال
دوران
تجانس
طولپایی
(ایزومتری)
نقاط ثابت تبدیل
تبدیل همانی
کاربرد تبدیل‌ها
کاربردهای بازتاب
کاربرد انتقال
تقسیم شکل به دو
نیمه مساوی
حل مسائل
هم‌محیطی
پیدا کردن
کوتاه‌ترین مسیر

نگاه کلی به فصل

هندسه، مطالعه ویژگی‌هایی از یک مجموعه است که تحت یک گروه از تبدیل‌ها، روی آن مجموعه حفظ می‌شوند. **(فلیکس کلاین)**

اقلیدس سعی کرد انطباق مثلث‌ها را، با حرکت دادن یک مثلث و منطبق کردن آن بر مثلث دیگر، ثابت کند.

اواین حرکت‌ها را تعریف نکرده بود و فقط به‌طور شهودی آنها را در شکل‌ها نشان داده بود. در سال ۱۸۲۷.

ریاضی‌دان و ستاره‌شناس آلمانی، «موبیوس»، به‌وسیله تعمیم حرکت در تمام صفحه، مفهومی از ترکیب حرکت‌ها را ارائه کرد.

تبدیل‌ها در صفحه، نوعی از تابع روی نقاط هستند که نقطه‌هایی از صفحه تحت آنها به نقاط دیگری از آن صفحه نظیر می‌شوند. «فلیکس کلاین» یکی از هندسه‌دانان بزرگ اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم در دانشگاه «ارلانگر» آلمان، برنامه‌ای در سال **۱۸۷۲** ارائه کرد که بر اساس آن هندسه باید به‌صورت مطالعه تبدیل‌ها و اشیائی که تحت تبدیل‌ها تغییر نمی‌کنند یا ثابت می‌مانند تعریف شود. این دیدگاه به نام «برنامه ارلانگر» شناخته می‌شود.

اگر برنامه ارلانگر را در هندسه اقلیدسی به‌کار ببریم، در این هندسه، تبدیل‌ها چه ویژگی‌هایی باید داشته باشند؟ یعنی تحت چه تبدیل‌هایی، شکل‌های اساسی هندسه اقلیدسی مانند خط‌ها، پاره‌خط‌ها،مثلث‌ها و دایره‌ها پایا می‌مانند؟ پاره‌خط‌ها ساختار اصلی بیشتر شکل‌های هندسی هستند؛ بنابراین، تبدیل‌های اقلیدسی باید حداقل، اندازه پاره‌خط‌ها را حفظ کنند؛ یعنی باید طول را ثابت نگه دارند.

بنابراین روشی جدید در هندسه وجود دارد که در آن می‌توان هدف اقلیدس را به روش دقیق ریاضی منظم کرد. این کار با تعریف مفهوم کلی حرکت صلب یا طولپا به کمک تبدیل‌های هندسی انجام می‌گیرد و «**هندسه تبدیلاتی**» نام دارد.

در این فصل ابتدا تبدیل‌های هندسی بازتاب، انتقال و دوران به شکل شهودی مرور می‌شود و سپس ویژگی‌های آنها به شکل استنتاجی بررسی خواهد شد. تبدیل تجانس نیز در ادامه، معرفی و بررسی خواهد شد.

درس اوّل

تبدیل‌های هندسی

اهداف درس

۱ آشنایی با تبدیل‌های هندسی و یادآوری اطلاعات قبلی؛
۲ شناخت تبدیل به عنوان تابع؛
۳ درک مفهوم طولپایی (ایزومتری) و تعریف آن؛
۴ شناخت ویژگی‌های تبدیل‌های طولپا؛
۵ شناخت بازتاب، انتقال، دوران و تجانس و ویژگی‌های هر یک از آنها؛
۶ آشنایی با نقطه ثابت تبدیل و تعریف آن؛
۷ آشنایی با ویژگی‌های تجانس مستقیم و معکوس، انقباض و انبساط؛
۸ شناخت تبدیل همانی و تعریف آن.

توصیه‌های آموزشی

۱ برای انجام فعالیت اول فصل، زمان کافی در نظر بگیرید تا فرصت تأمل و تفکر به دانش‌آموزان داده شود؛ چون در قسمت‌های بعدی نیاز به صرف وقت زیاد نخواهید داشت.

۲ در این کتاب، تمرکز اصلی بر روی دیدگاه هندسی است. لذا از ورود به مباحث تحلیلی و جبری اجتناب کنید.

۳ در ابتدای تدریس هر یک از تبدیل‌ها و بیان ویژگی‌های آن، سعی شود هر ویژگی، در تبدیل‌های قبلی یادآوری و از دانش‌آموزان سؤال شود تا بتوانند مقایسه بین تبدیل‌ها را به خوبی یاد بگیرند.

۴ استفاده از تصاویر مربوط به بناهای تاریخی و معماری ایرانی می‌تواند هم در آموزش بهتر مطالب راهگشا باشد و هم باعث افزایش عشق به هنر و میهن گردد.

روش تدریس درس اوّل

ایجاد انگیزه

با نمایش دادن تصاویری از معماری ایرانی، که تبدیل‌های هندسی در آنها به‌کار رفته است، از دانش‌آموزان بخواهیم ویژگی‌های تصاویر را بیان کنند. این ویژگی‌ها را به‌طور شهودی بررسی کنیم.

آموزش تبدیل‌های هندسی در این کتاب با مرور مفاهیم سال‌های قبل شروع می‌شود. کتاب می‌کوشد، ضمن یادآوری مفهوم بازتاب، دوران و انتقال، ویژگی‌های آنها را به‌طور شهودی بیان کند.

در اولین فعالیت فصل، مفهوم بازتاب، انتقال و دوران، ضمن حل چند سؤال، یادآوری شده، در ادامه با طرح سؤالات متنوع، این مفاهیم و ویژگی‌های تبدیل‌های فوق بررسی می‌شوند. پس از انجام این فعالیت، تعریف دقیق تبدیل T، به عنوان یک تابع روی نقاط صفحه، بیان می‌گردد و با چند مثال ویژگی‌های تابع بودن T نشان داده می‌شود. آنگاه پس از تعریف طولپایی (ایزومتری) به فعالیت بعدی می‌پردازیم که در آن اولین ویژگی تبدیل‌های طولپا بررسی شده است و سپس قضیه مربوط به آن نتیجه‌گیری می‌شود. محتوای این درس در یک جلسه ارائه می‌شود.

در جلسه بعد، تبدیل‌های بازتاب، انتقال و دوران معرفی و بررسی می‌شود.

۱ **بازتاب**: ابتدا روش به‌دست آوردن بازتاب یک نقطه را از دانش‌آموزان سؤال می‌کنیم و از آنان می‌خواهیم، با رسم شکل روی تابلو، مفهوم بازتاب را بیان کنند و خود به تعریف دقیق آن می‌پردازیم و همچنین خط بازتاب یا محور بازتاب را معرفی می‌کنیم.

در ادامه، یک نقطه روی محور بازتاب می‌گذاریم و از دانش‌آموزان می‌خواهیم بازتاب این نقطه را نسبت به محور فوق پیدا کنند و سپس نقطه ثابت تبدیل را تعریف می‌کنیم.

حال از دانش‌آموزان در مورد تعداد نقطه‌های ثابت بازتاب سؤال می‌کنیم و با راهنمایی، آنان را به پاسخ «بی‌شمار نقطه ثابت» می‌رسانیم. در ادامه یک «فعالیت» برای اثبات طولپا بودن بازتاب طراحی شده و فعالیت بعدی به بررسی این ویژگی اختصاص دارد که آیا بازتاب، شیب‌خط را حفظ می‌کند یا خیر. «کار در کلاس» بعدی نکات بیشتری درباره ویژگی‌های آن را دربردارد.

۲ در جلسه بعد، بحث «تبدیل انتقال» را مطرح می‌کنیم. در ابتدا «بردار و ویژگی‌های آن» و «دو بردار برابر» یادآوری می‌شوند. سپس انتقال یک شکل به کمک بردار انتقال توضیح داده شده، تعریف انتقال بیان

می‌شود. با انجام «فعالیت» بعد از آن، طولپا بودن انتقال بررسی شده، قضیه مربوط به آن نیز بیان می‌شود. در ادامه فعالیت، قضیه حفظ شیب خط در حالت‌های مختلف مطرح می‌شود که می‌توان از فراگیران خواست آن را به عنوان تمرین انجام و در جلسه بعدی ارائه دهند.

۳ تبدیل بعدی، دوران است. با نشان دادن تصاویر کتاب، تعریف دوران و نحوه و جهت دوران یک شکل توضیح داده می‌شود. در فعالیت بعدی قضیه طولپا بودن دوران بررسی شده، با حل «کار در کلاس» مفاهیم تثبیت می‌شود.

تمرین‌های صفحه بعد به عنوان تکلیف در منزل در نظر گرفته شده، این مبحث در این جلسه آموزشی به پایان می‌رسد. در جلسه بعد، بحث تبدیل تجانس اولین بار برای دانش‌آموزان مطرح می‌شود. با نمایش تصاویر کتاب و ارتباط دادن آن با تشابه می‌توان ذهن دانش‌آموزان را به مطلب جدید نزدیک و سپس تجانس را تعریف کرد و نحوه پیدا کردن تصویر یک نقطه را در تجانس توضیح داد.

در فعالیت بعدی حالت‌های مختلف تجانس با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای نسبت تجانس بررسی شده است. دقت داشته باشید که در قسمت اول این فعالیت دانش‌آموز هنوز از رابطهٔ $\frac{A'B'}{AB}=K$ اطلاع ندارد و لذا نسبت تجانس را به کمک صفحه شطرنجی و طبق تعریف تجانس از مقایسه OA' و OA تشخیص می‌دهد.

در ادامهٔ این فعالیت و با پر کردن جدول داده شده، برای مقادیر مختلف نسبت تجانس، ویژگی‌های تجانس جمع‌بندی می‌شود. دقت داشته باشید که تجانس همواره (حتی برای مقادیر منفی از نسبت تجانس) جهت شکل را حفظ می‌کند.

در دو «فعالیت» بعدی، دو قضیه مربوط به حفظ شیب خط و اندازه زاویه در تجانس ثابت شده‌اند. در این فعالیت نسبت تجانس مثبت است و مرکز تجانس بیرون خط و زاویه در نظر گرفته شده. اثبات در حالتی که نسبت تجانس منفی است، به دانش‌آموز واگذار شده است.

در «کار در کلاس» بعدی نیز، ویژگی‌های دقیق‌تری از تجانس طرح و بررسی می‌شود.

در فعالیت بعدی، «تبدیل همانی» تعریف شده و در شرایط مختلف بازتاب، انتقال، دوران و تجانس بررسی می‌شود.

طولپایی تبدیل همانی، سؤالی است که می‌توان به عنوان تحقیق برای دانش‌آموزان در نظر گرفت که آن را در جلسه بعدی ارائه دهند.

درس دوم

کاربرد تبدیل‌ها

اهداف درس

۱ آشنایی با کاربرد تبدیل‌ها در محیط اطراف؛
۲ آشنایی با کاربرد بازتاب در حل مسئله تقسیم یک شکل به قطعه‌های مساوی؛
۳ آشنایی با کاربرد بازتاب در حل مسئله هم‌پیرامونی؛
۴ آشنایی با کاربرد بازتاب در حل مسئله کوتاه‌ترین مسیر؛
۵ حل مسئله‌های نمونه مثال‌های کتاب.

توصیه‌های آموزشی

۱ از دانش‌آموزان بخواهید در این درس به شکل‌های کتاب توجه کرده، آنها را توضیح دهند.
۲ از دانش‌آموزان بخواهید کاربردهایی از تبدیل‌ها، به‌خصوص بازتاب را که با آن برخورد داشته‌اند، بیان کنند.

روش تدریس درس دوم

در این درس چند کاربرد از «تبدیل هندسی بازتاب» مطرح شده است. در ابتدا با نمایش تصاویری از هنر و معماری ایرانی، کاربرد تبدیل‌ها را در تصاویر بررسی کنید و از دانش‌آموزان بخواهید آنها را تفسیر کنند دقت داشته باشید که در این قسمت اشاره دقیق به تبدیل‌های به کار رفته مدنظر نیست و تنها سعی شده است که از جلوه‌های هنری برای جلب توجه و تقویت انگیزه دانش‌آموزان استفاده شود. سپس با طرح سه مسئله «تقسیم کیک به قطعه‌های مساوی»، «هم‌پیرامونی یا هم‌محیطی» و «پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر»،

کاربرد بازتاب را بررسی می‌کنیم. در ادامه، با حل مسئله‌های «کار در کلاس» و تمرین مربوط به آن، یادگیری عمیق می‌شود.

کج‌فهمی‌ها و اشتباهات رایج

مواردی که ممکن است دانش‌آموزان در آنها دچار کج‌فهمی یا اشتباه در درک مطلب شوند و لازم است معلمان بر آن تأکید بیشتر کنند عبارت‌انداز :

۱ **درک مفهوم نقطه ثابت تبدیل** : بهتر است با استفاده از تصاویر مختلف و نمایش نقاط ثابت تبدیل در آن، به درک بهتر مفهوم آن کمک کنید؛

۲ زاویه منفی در درس مثلثات معرفی می‌شود در این کتاب زاویه منفی نداریم؛

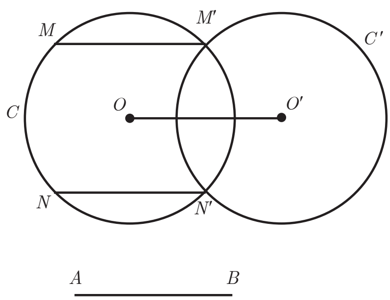
۳ **تجانس مستقیم و معکوس** : با مثال‌ها و تصاویر مختلف نشان دهیم که به ازای همه مقادیر k، تجانس جهت شکل را حفظ می‌کند و حتی در تجانس معکوس هم جهت تغییر نمی‌کند.

۴ **انقباض و انبساط** : در این بخش با شکل نشان دهیم که برای $|k|<1$ در شکل انقباض صورت می‌گیرد و تصویر مجانس نسبت به شکل اولیه کوچک‌تر می‌شود. همچنین برای $|k|>1$ انبساط صورت می‌گیرد و مجانس نسبت به شکل اولیه بزرگ‌تر می‌شود. استفاده از جدول‌های صفحه ۴۶ و ۴۷ به درک بهتر و تمایز بین این حالت‌ها کمک می‌کند.

سؤالات ارزشیابی

۱ دایره C و پاره‌خط AB مفروض‌اند. چند وتر مساوی و موازی AB در دایره رسم می‌شود؟

حل : اگر C' انتقال‌یافته دایره C تحت بردار $\overrightarrow{AB}$ باشد و C و C' در نقاط M' و N' متقاطع باشند، جواب‌های مسئله MM' و NN' است؛ پس مسئله، حداکثر، دو جواب دارد.



۲ مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC با نسبت تجانس ۳ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر با ۱۰ باشد، مساحت مثلث $A'B'C'$ چقدر است؟

حل: $\frac{S'}{S} = K^{2} \rightarrow \frac{S'}{10} = 9 \rightarrow S' = 90$

۳ دو دایره متساوی مماس خارج‌اند. این دو دایره با چه نسبتی مجانس یکدیگرند؟

حل : K=−۱ و مرکز تجانس آنها نقطه تماس دو دایره است.

۴ دو دایره C و C' مفروض‌اند. چند مثلث متساوی‌الاضلاع با رأس ثابت A وجود دارد که به رأس دیگرش روی دو دایره باشد؟

حل : اگر دایره C را به مرکز A و زاویه α=۶۰° دوران دهیم حداکثر در دو نقطه با دایره C' متقاطع خواهد بود. پس حداکثر دو مثلث متساوی‌الاضلاع با شرایط فوق قابل رسم است.

۵ در شکل زیر نقطه O مرکز تجانس و A مجانس B است. حدود نسبت تجانس را تعیین کنید؟

حل :

$$\overrightarrow{OA} = K\overrightarrow{OB} \Rightarrow K < 0 \quad , \quad |K| > 1 \Rightarrow K < -1$$

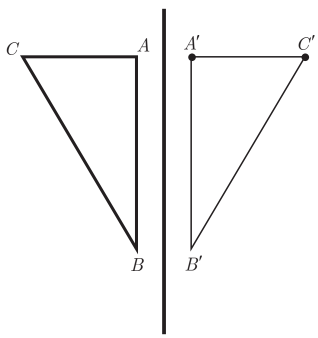
پاسخ «فعالیت‌ها» «کار در کلاس»ها و تمرین‌ها

فعالیت صفحه ۳۴

۱

الف) ۲ ب) ۳ و ۱ پ) ۱ و ۳

۲



الف) از رأس‌های مثلث بر خط d عمود کرده، به اندازه آن پاره‌خط، امتداد می‌دهیم تا تصویرش به‌دست آید. سپس نقاط تصویر یعنی A' و B' و C' را به هم وصل می‌کنیم. مثلث $A'B'C'$ تصویر مثلث ABC است.

خط d عمود منصف پاره‌خط‌هایی است که هر نقطه را به تصویرش وصل می‌کند.

ب) موقعیت را تغییر می‌دهد، ولی اندازه‌ها را تغییر نمی‌دهد.

پ) خیر؛ شیب پاره‌خط BC با شیب پاره‌خط متناظرش $B'C'$ برابر نیست.

ت) اگر خط مورد نظر، موازی یا عمود بر محور بازتاب باشد،

آن‌گاه شیب آن حفظ می‌شود؛ مثلاً در شکل صفحهٔ قبل، پاره‌خط AC بخشی از خط عمود بر d است و تصویر آن هم روی همان خط عمود قرار دارد و به همین دلیل شیب پاره‌خط‌های AC و $A'C'$ برابر است. همچنین پاره‌خط AB موازی محور بازتاب است و تصویرش هم با آن موازی است؛ پس شیب هر دو یکی است.

۳

الف) با توجه به اندازه بردار $\vec{V}$ رأس‌های مربع را ۵ واحد به سمت راست و ۳ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم و نقاط تصویر را به‌دست می‌آوریم. سپس نقاط تصویر را به ترتیب به هم وصل می‌کنیم. مربع $A'B'C'D'$ انتقال یافته مربع $ABCD$ تحت بردار V است. پاره‌خط‌هایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می کند با هم و با بردار V موازی و مساوی‌اند.

ب) موقعیت شکل را حفظ نمی‌کند، ولی اندازه‌ها را حفظ می‌کند.

پ) بله ت) بله

۴

ب) موقعیت شکل را حفظ نمی کند، ولی اندازه‌ها را حفظ می‌کند.

پ) خیر، شیب پاره‌خط اولیه با شیب پاره‌خط تصویرش برابر نیست.

ت) اگر زاویه دوران مضارب π باشد (۰، ۱۸۰، ۳۶۰) دوران تحت آن شیب خط را حفظ می کند.

فعالیت صفحه ۳۶

دقت داشته باشید که این فعالیت یک تبدیل را در حالت کلی نشان می‌دهد و انتقال نیست. با توجه به طولپایی تبدیل داریم :

$$\begin{cases} AB = A'B' \\ OA = O'A' \\ OB = O'B' \end{cases} \xRightarrow{\text{ض‌ض‌ض}} O\overset{\Delta}{A}B \cong O'\overset{\Delta}{A'}B' \xRightarrow{\text{اجزای متناظر}} A\hat{O}B = A'\hat{O'}B' = \alpha$$

فعالیت صفحه ۳۸

الف) می‌دانیم مستطیلی چهار ضلعی است که همه زاویه‌های آن قائمه است. AB موازی d است

$\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{r} AH = BH' \Rightarrow ۲AH = ۲BH' \xrightarrow[BH'=B'H']{AH=A'H} AA' = BB' \\ \left.\begin{array}{l} AA' \perp d \\ BB' \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow AA' \parallel BB' \end{array}\right\}$$ دو ضلع روبه‌رو موازی و مساوی پس $\Rightarrow ABB'A'$ متوازی‌الاضلاع است

و بنابراین $AB = A'B'$

$$\left.\begin{array}{r} A'B' \parallel AB \\ AB \parallel d \end{array}\right\} \Rightarrow A'B' \parallel d$$

از طرفی متوازی‌الاضلاع $ABB'A'$ زاویه قائمه دارد. پس چهار ضلعی $ABB'A'$ یک مستطیل است.

ب) اگر هر دو نقطه ابتدا و انتهای پاره‌خط روی خط بازتاب باشند در این حالت بازتاب پاره‌خط MA بر روی خودش منطبق است.

$$\begin{matrix} S(M)=M \\ S(A)=A \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad MA=MA$$

همنهشتی مثلث‌ها

$$\left.\begin{matrix} AH=A'H \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ \\ MH=MH \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} M\overset{\Delta}{A}H \cong M\overset{\Delta}{A'}H \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} MA=MA'$$

خاصیت عمود منصف یک پاره‌خط : خط d عمود منصف پاره‌خط AA' است؛ بنابراین، هر نقطه مثل M روی خط d از دو سر پاره خط AA' به یک فاصله است؛ یعنی $MA=MA'$

پ) قبلاً اشاره شد که تبدیل یافته هر خط راست البته یک خط راست است. بنابراین تبدیل یافته خط MB خط MB' است و هر نقطه مثل A روی خط MB بازتابی مثل A' دارد که روی خط MB' قرار دارد.

پس :

$$\left.\begin{matrix} AB=MB-MA \\ A'B'=MB'-MA' \\ MB=MB', MA=MA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB=A'B'$$

از قسمت ب داریم

ت) طبق آنچه در (پ) گفته شد بازتاب خط AB خطی مثل $A'B'$ است.

حال داریم :

$$\left.\begin{matrix} AB=AM+MB \\ A'B'=A'M+B'M \\ MB=MB' \;,\; AM=A'M \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB=A'B'$$

فعالیت صفحه ۳۹

الف) خط n موازی خط بازتاب d است. دو نقطه دلخواه مانند A و B را روی n انتخاب می‌کنیم. طبق قسمت (الف) در فعالیت صفحه قبل می‌دانیم که تصویر پاره‌خط AB نسبت به خط بازتاب d یعنی پاره‌خط $A'B'$ با پاره‌خط AB و خط d موازی است. از طرفی چون خط n' تصویر خط n است، پس نقاط A' و B' نیز روی n' قرار دارند؛ در نتیجه خط n' موازی n و d خواهد بود.

وقتی دو خط موازی باشند، در صورت وجود شیب، شیب‌ها با هم برابرند؛ پس شیب خط حفظ می‌شود. وقتی شیب برای یکی از خط‌ها تعریف نشود، برای دیگری نیز تعریف نمی‌شود؛ پس در این حالت، بازتاب شیب خط را حفظ می کند.

ب) حفظ نمی‌کند.

بدیهی است که اگر خط داده شده در راستای عمود بر محور بازتاب باشد، در این حالت بازتاب شیب خط را حفظ می‌کند.

کار در کلاس صفحه ۴۰

الف) A

چون خط d عمود منصف پاره‌خط AA' است، بنابراین : $d \perp AA'$ و $A'H = AH$

پس اگر از A' بر خط d عمود کنیم و به اندازه خودش امتداد دهیم، نقطه A به‌دست می‌آید.

ب) خود آن نقطه است.

$$S(S(A))=S(A')=A \qquad\qquad (A')'=A$$

پ) مثلث ــ همنهشت

ت) موازی یا عمود

ث) روی خط d ــ بی‌شمار

فعالیت صفحه ۴۱

الف) A' تصویر A است، پس بنا به تعریف انتقال $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{V}$ یعنی اندازه پاره‌خط AA' مساوی طول بردار $\overrightarrow{V}$ و با آن موازی است. B' تصویر B است و به‌طور مشابه $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{V}$ درنتیجه AA' و BB' موازی و مساویند و با توجه به راهنمایی فوق چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است؛ پس $AB = A'B'$

ب)

۱)

$$\begin{cases} AB = AA' + A'B \\ A'B' = A'B + BB' \\ AA' = BB' \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$

۲)

$$\begin{cases} AB = AA' - BA' \\ A'B' = BB' - BA' \\ AA' = BB' \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$

۲ در هر یک از حالت‌های فوق نشان می‌دهیم انتقال، شیب خط را حفظ می‌کند. در حالت الف) نتیجه گرفتیم که چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است؛ پس $AB \| A'B'$ درنتیجه شیب پاره‌خط‌ها یکی است.

در حالت (ب) و (پ) هر پاره‌خط با تصویرش بر روی یک خط قرار دارند؛ (به عبارت دیگر نقاط A، B، A'، B' روی یک خط قرار دارند) پس شیب آنها با هم برابر است.

فعالیت صفحه ۴۲

الف) $O_1 + O_2 = O_3 + O_2 = \alpha \quad \Rightarrow \quad AOB = A'OB'$

همنهشتی دو مثلث :

$$\begin{cases} OA = OA' \\ OB = OB' \\ AOB = A'OB' \end{cases} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} A\overset{\Delta}{O}B \cong A'\overset{\Delta}{O}B' \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} AB = A'B'$$

ب) با توجه به شکل داریم :

$$\begin{cases} A\hat{O}B = \hat{\alpha} + A'\hat{O}B \\ A'\hat{O}B' = \hat{\alpha} + A'\hat{O}B \end{cases} \Rightarrow AOB = A'OB' \Rightarrow \begin{cases} OA = OA' \\ OB = OB' \\ A\hat{O}B = A'\hat{O}B' \end{cases} \overset{\text{ض‌زض}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow A\overset{\Delta}{O}B \cong A'\overset{\Delta}{O}B' \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} AB = A'B'$$

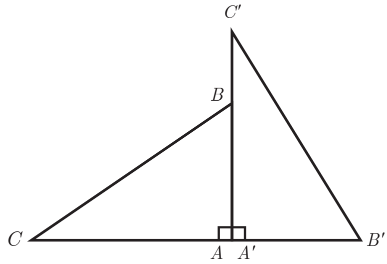
پ)

$$\left.\begin{array}{l} AB = AO + OB \\ A'B' = A'O + OB' \\ AO = A'O \ , \ OB = OB' \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

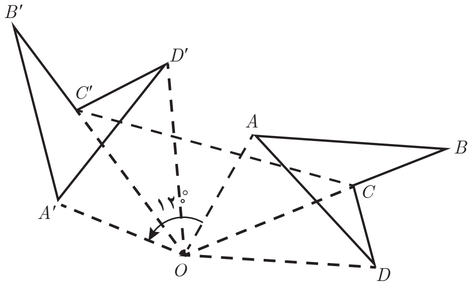
ت)

$$\left.\begin{array}{l} AB = AO - OB \\ A'B' = A'O - OB' \\ AO = A'O \ , \ OB = OB' \end{array}\right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

کار در کلاس صفحه ۴۳



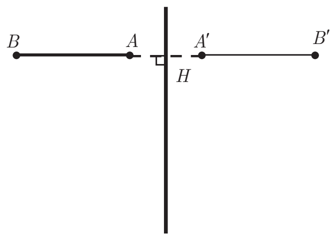
(الف)



(ب)

تمرین صفحه ۴۴

۱ $BH = B'H \Rightarrow AB + AH = B'A' + A'H \xrightarrow{AH = A'H} AB = A'B'$ از تعریف بازتاب



۲ در بازتاب این نقاط، جهت حرکت خلاف عقربه‌های ساعت است. خیر؛ می‌توان گفت که بازتاب جهت شکل را حفظ نمی‌کند.

۳

الف) $AA'' = AH + HA' + A'H' + H'A'' \xrightarrow[A'H' = H'A'']{AH = HA'} AA'' = ۲HA' + ۲A'H'$

$\Rightarrow AA'' = ۲(\underbrace{HA' + A'H'}_{m}) \Rightarrow AA'' = ۲m$

ب) بنابر قسمت (الف) به روش مشابه می‌توان نتیجه گرفت :

$BB'' = CC'' = ۲m$

پ) با یک انتقال تحت برداری که اندازه آن دو برابر فاصله بین دو خط بازتاب $d_۱$ و $d_۲$ یعنی $۲m$ و راستای آن عمود بر این دو خط است، می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث ABC دانست.

نتیجه : دو بازتابی که محورهای بازتاب موازی داشته باشند، یک انتقال را نتیجه می‌دهند.

۴

الف) خط d_1 محور بازتاب است؛ پس نیمساز زاویه AOA' است؛ یعنی $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$

خط d_2 محور بازتاب است؛ پس نیمساز زاویه $A'OA''$ است؛ یعنی : $\hat{O}_۳ = \hat{O}_۴$

$$A\hat{O}A'' = \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ + \hat{O}_۴ \xrightarrow[\hat{O}_۳=\hat{O}_۴]{\hat{O}_۱=\hat{O}_۲} A\hat{O}A'' = ۲\hat{O}_۲ + ۲\hat{O}_۳$$

$$\Rightarrow A\hat{O}A'' = ۲(\hat{O}_۲ + \hat{O}_۳) \Rightarrow AOA'' = ۲\theta$$

ب) طبق قسمت (الف) و به‌طور مشابه ثابت می‌شود : $B\hat{O}B'' = C\hat{O}C'' = ۲\theta$

پ) با توجه به برابری OA ، OA' و OA'' با یک دوران به مرکز O (نقطه برخورد دو خط بازتاب d_1 و d_2) و زاویه‌ای به اندازه دو برابر زاویه بین دو خط (۲θ) می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث ABC دانست.

نتیجه : دو بازتابی که محورهای بازتاب متقاطع داشته باشند، یک دوران را نتیجه می‌دهند.

پاسخ چرا در پایین صفحه ۴۵

اگر در تجانس به مرکز O و نسبت K، نقطه M' مجانس نقطه M به نسبت K باشد، آنگاه :

$$K > ۰ \Rightarrow OM' = KOM \overset{\times(\frac{۱}{K})}{\Rightarrow} \frac{۱}{K}OM' = OM$$

$$K < ۰ \Rightarrow OM' = |K|OM \overset{\times\left|\frac{۱}{K}\right|}{\Rightarrow} \left|\frac{۱}{K}\right|.OM' = OM$$

بنابراین نقطه M مجانس نقطه M' به نسبت $\frac{۱}{K}$ است.

فعالیت صفحه ۴۶

الف) ۱ با توجه به تعریف تجانس نقاط B و B' در یک طرف O قرار دارند پس $K>۰$ در نتیجه :

$OB' = K.OB \Rightarrow K = \frac{OB'}{OB} \Rightarrow K = \frac{۳\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} \Rightarrow K = ۳$ (بدون محاسبه دقیق هم به کمک صفحه شطرنجی واضح است که OB' سه برابر OB است.)

$$OC' = K.OC \Rightarrow K = \frac{OC'}{OC} \Rightarrow K = \frac{۱۰}{۵} \Rightarrow K = ۲$$

ب)

خیر؛ زیرا اندازه پاره‌خط‌ها حفظ نمی‌شود.

پ) **در مربع :** طول تصویر هر پاره‌خط ۳ برابر شده و در واقع این عدد همان نسبت تجانس است. همچنین

$$A'B' = ۳AB \qquad B'C' = ۳BC$$

$$C'D' = ۳CD \qquad D'A' = ۳DA$$

در مثلث : طول تصویر هر پاره‌خط ۲ برابر شده و در واقع این عدد همان نسبت تجانس است.

$$A'B' = ۲AB \qquad B'C' = ۲BC$$

$$AC = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳} \qquad A'C' = \sqrt{۱۶+۳۶} = \sqrt{۵۲} = ۲\sqrt{۱۳} \Rightarrow A'C' = ۲AC$$

ت) **در مربع :** $\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{۳۶}{۴} = ۹ = ۳^۲$ **در مثلث :** $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۶}{\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۳} = ۴ = ۲^۲$

در نتیجه مساحت تصویر نسبت به مساحت هر شکل برابر با توان دوم نسبت تجانس است.

۲

الف) از رأس‌های هر شکل به مرکز O وصل می‌کنیم و به اندازه نسبت تجانس K امتداد می‌دهیم. اگر K مثبت باشد، نقطه و تصویرش در یک طرف نقطه O، و اگر K منفی باشد، نقطه و تصویرش در دو طرف نقطه O قرار دارند.

ب)

تجانس

ن	د	د	د	ن
د	د	د	د	د
ن	د	د	د	ن
ن	د	د	د	ن
د	د	د	د	د
ن	د	د	د	ن

پ) $K = ۱$ یا $K = -۱$ به عبارتی $|K| = ۱$

ت) این خطوط در مرکز تجانس یعنی نقطه O همرس‌اند.

فعالیت صفحه ۴۸

ب) بنابر عکس قضیه تالس $OB' = K.OB \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = K \Rightarrow AB \parallel A'B'$

فعالیت صفحه ۴۸

با توجه به شکل و قضیه قبل داریم :

۱ $AB \parallel A'B'$, OB' مورب $\xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}}$ $\hat{B}_۱ = \hat{B}'_۱$

۲ $BC \parallel B'C'$, OB' مورب $\xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}}$ $\hat{B}_۲ = \hat{B}'_۲$

از جمع دو طرف رابطه ۱ و ۲ داریم :

$$\hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = \hat{B}'_۱ + \hat{B}'_۲ \Rightarrow A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$$

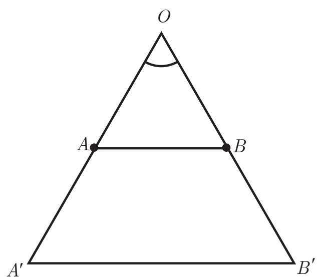
کار در کلاس صفحه ۴۹

۱ الف)

حالت اول : برای سادگی مسئله را تنها برای حالتی بررسی می‌کنیم که نقطه O روی پاره‌خط AB قرار ندارد. اگر $K > ۰$ در نتیجه :

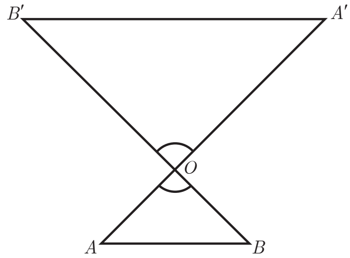
$$\left.\begin{aligned} OA' &= K.OA \\ OB' &= K.OB \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = K \xrightarrow{\text{عکس ق تالس}} AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{قضیه تالس}}$$

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = K$$



حالت دوم : در این حالت نقطه O روی پاره‌خط AB قرار ندارد و $K<0$ در نتیجه :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}OA'=K.OA\\OB'=K.OB\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=K\\[2ex] A'\hat{O}B'=A\hat{O}B\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{مثلث}]{\text{ق ۲ تشابه دو}} A\overset{\Delta}{O}B\sim A'\overset{\Delta}{O}B'\Rightarrow \frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{A'B'}{AB}=K$$



۱ ب)

فرض کنیم $A_1\ A_2\ \ldots\ldots\ A_n$ یک n ضلعی و نقطه O مرکز تجانس و K نسبت تجانس و چندضلعی $A'_1\ A'_2\ \ldots\ldots\ A'_n$ مجانس آن باشد، بنابر تعریف تجانس داریم :

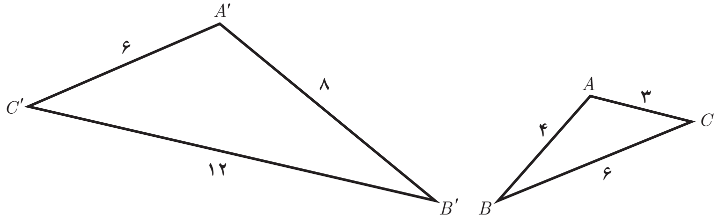
طبق الف:

$$\left.\begin{array}{l}OA'_1=|K|.OA_1\\OA'_2=|K|.OA_2\\\vdots\\OA'_n=|K|.OA_n\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{OA'_1}{OA_1}=\frac{OA'_2}{OA_2}=\frac{OA'_3}{OA_3}=\cdots=\frac{OA'_n}{OA_n}=|K|$$

چون اضلاع دو چند ضلعی متناسب هستند، و تجانس اندازه زاویه‌ها را ثابت نگه می‌دارد پس دو nضلعی متجانس حتماً مشابه هستند.

۲ تجانس شیب خط را حفظ می‌کند. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند، ولی چون شیب خط‌هایی که شامل ضلع‌های مثلث‌ها می‌باشند حفظ نشده است، پس دو مثلث متجانس نیستند.

$K=2$



فعالیت صفحه ۴۹

الف) انتقال در صورتی همانی است که بردار انتقال با بردار صفر برابر باشد.

دوران در صورتی همانی است که زاویه دوران صفر درجه یا ۳۶۰ درجه باشد.

تجانس در صورتی همانی است که در آن $K = 1$.

ب) بله؛ زیرا هر نقطه را به خود آن نقطه تصویر می‌کند. $T(A) = A\ ,\ T(B) = B \Rightarrow AB = AB$

پ)

۱ خیر؛ زیرا هر نقطه باید تحت یک بردار غیرصفر در صفحه بلغزد؛ بنابراین، نمی تواند بر روی خودش بلغزد.

۲ مرکز دوران تحت هر دورانی ثابت می‌ماند؛ پس نقطه ثابت تبدیل است.

۳ مرکز تجانس، تصویرش روی خودش قرار می‌گیرد؛ پس نقطه ثابت تبدیل است.

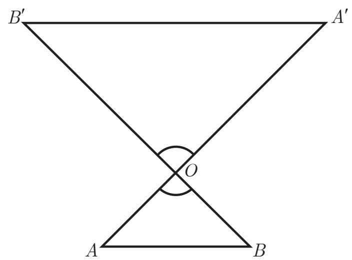
کار در کلاس صفحه ۵۰

	طول پاره‌خط	اندازه زاویه	شیب‌خط	جهت شکل	مساحت شکل
بازتاب	د	د	ن	ن	د
انتقال	د	د	د	د	د
دوران	د	د	ن	د	د
تجانس	ن	د	د	د	ن

تمرین صفحه ۵۰

۱ الف) اگر نقاط A' و B' مجانس‌های A و B باشند داریم:

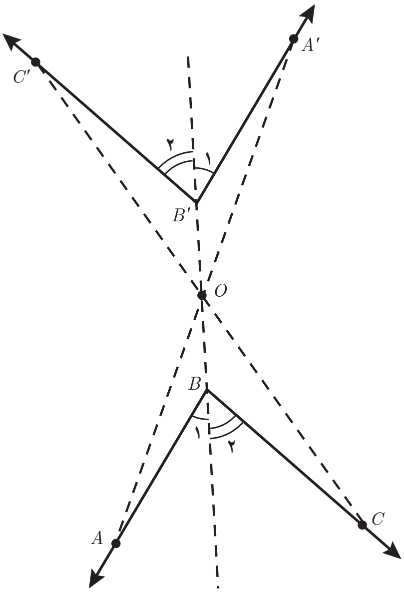
$$\left.\begin{array}{l} OA' = K.OA \\ OB' = K.OB \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = K \Rightarrow AB \parallel A'B' \Rightarrow \text{شیب دو خط مساوی است}$$



ب) چون تجانس شیب‌خط را حفظ می‌کند، پس داریم :

$$AB \parallel A'B' \ , BB' \text{ مورب } \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{B}'_۱$$

$$BC \parallel B'C' \ , BB' \text{ مورب } \Rightarrow \hat{B}_۲ = \hat{B}'_۲$$

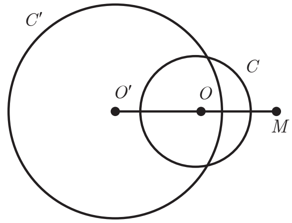


از جمع طرفین دو رابطه خواهیم داشت :

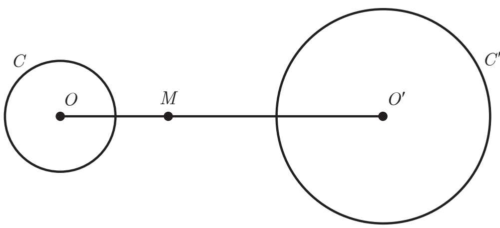
$$\hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = \hat{B}'_۱ + \hat{B}'_۲$$

$$\hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$$

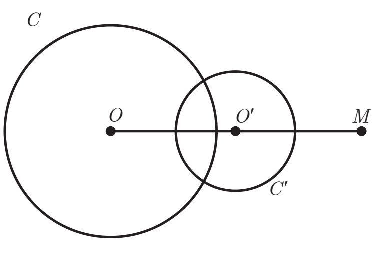
۲ الف) $K = ۲$



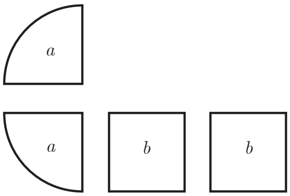
ب) $K = -۲$



پ) $K = \frac{۱}{۲}$



سؤال صفحه ۵۲ (مسئله تقسیم کیک)



شکل‌های a، نسبت به محور بازتاب، قرینه‌اند؛ پس با هم همنهشت‌اند. همچنین شکل‌های b هم نسبت به محور بازتاب خود قرینه‌اند و در نتیجه همنهشت‌اند. پس به هر نفر یک سهم a و یک سهم b می‌دهیم.

سؤال صفحه ۵۲ (مسئله هم پیرامونی)

در شکل از نقطه B به D وصل می‌کنیم. سپس آن را به عنوان محور بازتاب در نظر می‌گیریم و تصویر نقاط B، C و D را نسبت به این محور به‌دست می‌آوریم. واضح است که تصویر نقاط B و D روی خودشان منطبق است ولی تصویر نقطه C نقطه C' است.

یکسان بودن محیط‌ها : با توجه به اینکه بازتاب یک تبدیل طولپاست پس داریم :

$$BC = BC' \text{ و } CD = C'D$$

$$P_{ABCDE} = AB + BC + CD + DE + EA$$

$$P_{ABCDE} = AB + BC' + C'D + DE + EA \Rightarrow P_{ABCDE} = P_{ABC'DE}$$

مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر صفحه ۵۳

۱ زیرا با توجه به تعریف بازتاب خط d عمودمنصف پاره‌خط AA' است و نقاط M و M_1 روی این خط هستند. بنابر خاصیت عمودمنصف $AM = A'M$ و $AM_1 = A'M_1$

۲ بنابر قضیه نامساوی مثلثی، در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر است.

ادعای هرون (اثبات)

$$\left.\begin{array}{l} A'B = A'M + MB \xrightarrow{A'M=AM} A'B = AM + MB \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A'B < A'M_1 + M_1B \end{array}\right\} \Rightarrow AM + MB < A'M_1 + M_1B$$

و چون نقطه M_1 دلخواه است، پس ادعای هرون ثابت می‌شود.

مسئله صفحه ۵۵

مسئله هرون، مردی که می‌خواهد از رودخانه آب بردارد و به اسطبل ببرد.

۲ در واقع نقطه C تحت بردار انتقالی به طول ۴ به D منتقل شده و نقطه B' نیز تحت همان بردار به B

منتقل شده است؛ بنابراین، با توجه به خواص تبدیل انتقال چهارضلعی $CDBB'$ متوازی‌الاضلاع است؛ پس :

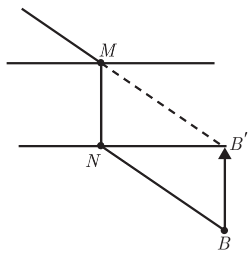
$$\text{مسیر } ACDB = AC + CD + DB \xrightarrow[CB'=DB]{CD=B'B} \text{مسیر } ACDB = AC + CB' + B'B = ACB'B$$

۱ ابتدا نقطه B را تحت بردار انتقالی به طول ۴ و موازی رودخانه و در جهت شهر A به نقطه B' انتقال می‌دهیم. حال مسئله شبیه مسئله اسطبل می‌شود. بازتاب نقطه A را نسبت به خط کنار رودخانه به دست می‌آوریم؛ یعنی نقطه A' سپس A' به B' وصل می‌کنیم و نقطه C به دست می‌آید. از نقطه C موازی رودخانه به سمت شهر B و به طول ۴ متر حرکت می‌کنیم تا نقطه D به دست آید. به این ترتیب، کوتاه‌ترین مسیر رسم می‌شود.

کار در کلاس صفحه ۵۵

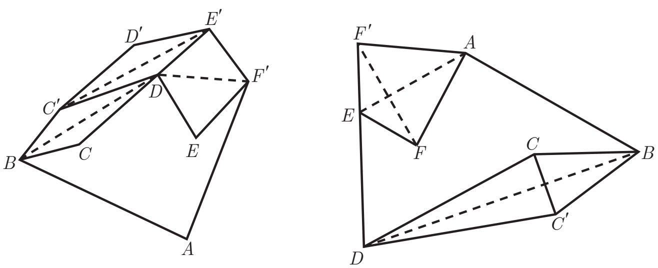
نقطه B را تحت برداری مساوی و عمود بر راستای رودخانه در جهت شهر A به نقطه B' انتقال می‌دهیم. سپس از B' به A وصل می‌کنیم تا نقطه M به دست آید. به این ترتیب، محل احداث پل MN به دست می‌آید، به طوری که مسیر $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر است. مشابه مسئله قسمت (پ) می‌دانیم که مسیر $AMB'B$ کوتاه‌ترین است پس :

$$\text{مسیر } AMB'B = AM + MB' + BB' \xrightarrow[MN=BB']{MB'=NB} \text{مسیر } AMB'B = AM + NB + MN = AMNB$$

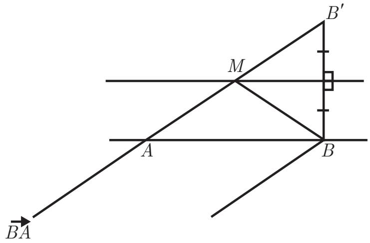


تمرین صفحه ۵۶

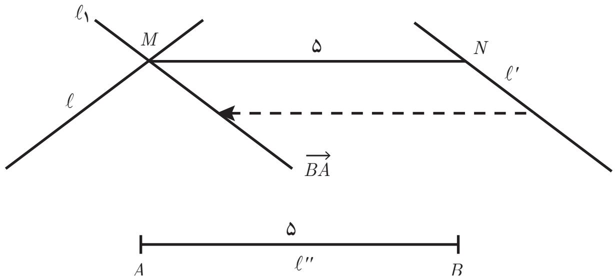
۱



۲ با توجه به شکل، واضح است که عرض رودخانه در طول مسیر ثابت در نظر گرفته شده است. پس از نقطه B یا A روش هرون را برای پیدا کردن نقطه M اجرا می‌کنیم.



۳ خط L' را تحت بردار $\overrightarrow{BA}$ (برداری به موازات خط L'' و به طول ۵ واحد) انتقال می‌دهیم تا خط L_1 به‌دست آید. این خط، خط L را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند. از نقطه M موازی خط L'' خطی رسم می‌کنیم تا خط L' را در نقطه N قطع کند. پاره‌خط MN جواب مسئله است.



۴

الف) A' وسط BC، B' وسط AC و C' وسط AB قرار دارند. با توجه به خاصیت مرکز ثقل می‌دانیم که $GA' = \frac{1}{2} GA$ همچنین نقطه G بین A و A' قرار دارد؛ پس نقطه A' مجانس نقطه A به مرکز تجانس G و نسبت تجانس $K = -\frac{1}{2}$ است. همین مطلب در مورد نقاط B' و C' نیز صدق می‌کند.

ب) با توجه به ویژگی تجانس مساحت مثلث $A'B'C'$، $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث ABC است.