

روابط طولی در شکل‌های هندسی



عکس: فرهنگ کولی‌وند

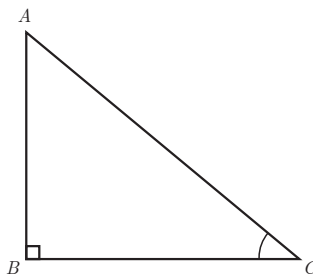
یکی از کاربردهای مهم روابط طولی، محاسبه فاصله‌های غیر قابل دسترس است.

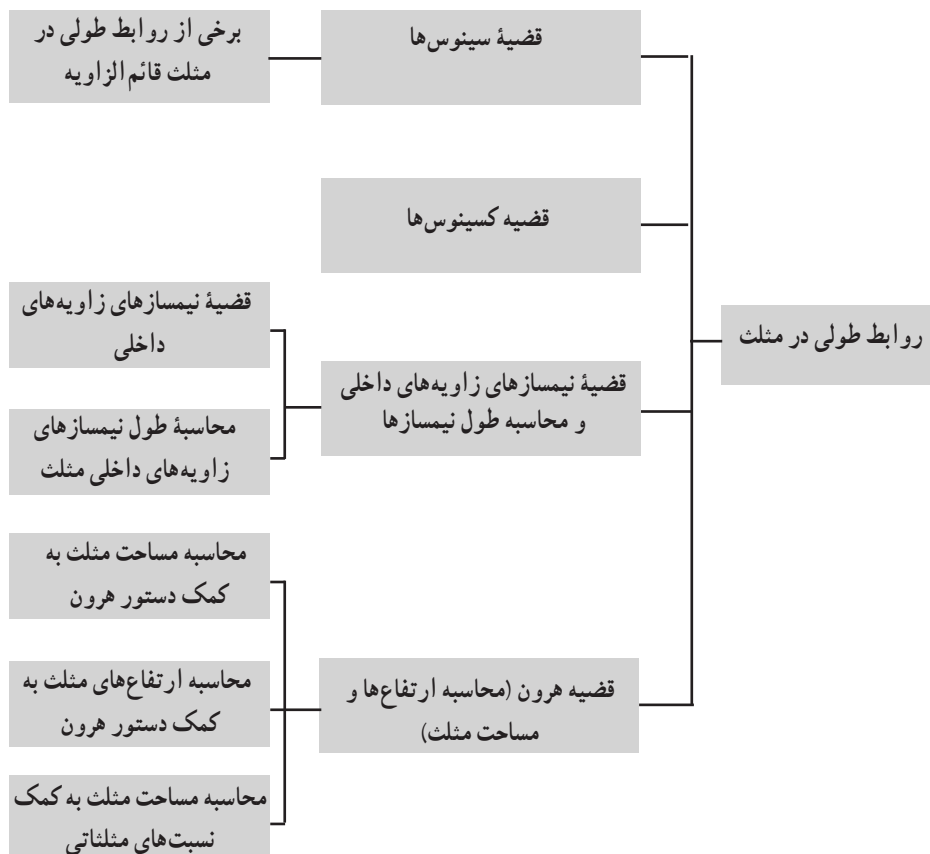
تصویر عنوانی

محاسبه فاصله‌های غیر قابل دسترس، یکی از مهم‌ترین کاربردهای روابط طولی در هندسه است. محاسبه ارتفاع کوه‌های بلند از جمله این محاسبه‌ها است. تصویر ابتدای این فصل، مربوط به اُشتران کوه، معروف به آلپ ایران، رشته کوهی در شرق استان لرستان و یکی از بلندترین رشته کوه‌های زاگرس است. سن‌بران بلندترین قله این رشته کوه به ارتفاع 4150 متر است. این رشته کوه، سرچشمه یکی از سرشاخه‌های رود دز به نام ماربره است که در دوره کوه‌زایی جدید ایجاد شده است. این کوه از جمله کوه‌های جوان است که حدود 30 میلیون سال پیش ایجاد شده است. قله‌های بلند و پربرف، دره‌های ژرف و طولانی، رودهای دائمی، پوشش گیاهی و جانوری بسیار متنوع و روستاهای کوهپایه‌ای از جمله ویژگی‌های اُشتران کوه می‌باشد که، به سبب بلندی، از فاصله 100 کیلومتری نیز به خوبی پیداست. گفته می‌شود این رشته کوه، به سبب وجود قله‌های 8 گانه، که هر یک بلندتر از 4000 متر و مانند کاروانی از شتر به ردیف قرار گرفته است، به شتر کوه و یا اُشتران کوه معروف شده است.

همان‌گونه که در تصویر دیده می‌شود، در مثلث ABC به کمک دوربین زاویه‌سنج (طول‌یاب) زاویه دید AB از نقطه دید C (\hat{C}) و طول AC اندازه‌گیری می‌شود و با استفاده از قضیه سینوس‌ها ارتفاع قله (AB) به دست می‌آید.

$$\frac{AC}{\sin 90^\circ} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin 90^\circ} = AC \cdot \sin C$$





نگاه کلی به فصل

این فصل شامل چهار درس است که در آن به روابط طولی در هر مثلث دلخواه اشاره می‌شود. در هندسه (۱) برخی از روابط طولی در مثلث قائم الزاویه بیان و اثبات شد. در این فصل، قضیه سینوس‌ها، قضیه کسینوس‌ها، قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی و محاسبه طول آنها و قضیه هرون بیان و اثبات می‌شود. در درس چهارم می‌توان با استفاده از دستور هرون، طول ارتفاع‌های نظیر اضلاع هر مثلث را محاسبه کرد. در این درس، دستور دیگری نیز برای محاسبه مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی بیان شده است.

قضیه سینوس ها

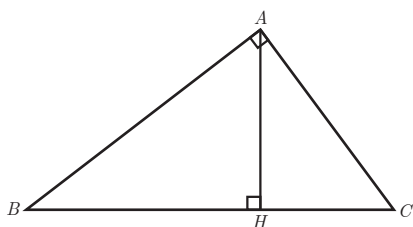
اهداف درس

- در پایان این درس از دانش آموز انتظار می رود بتواند :
- ۱ روابط طولی در مثلث قائم الزاویه را بیان کند؛
 - ۲ با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم الزاویه، مسائل مرتبط را حل کند؛
 - ۳ قضیه سینوس ها در هر مثلث دلخواه را بیان کند؛
 - ۴ نشان دهد قضیه سینوس ها در هر مثلث دلخواه برقرار است؛
 - ۵ در حل مسائل مرتبط، از قضیه سینوس ها استفاده کند؛
 - ۶ نمونه هایی از کاربرد قضیه سینوس ها در زندگی را مثال بزند.

روش تدریس درس اوّل

معلم در ابتدا می تواند، با رسم یک مثلث قائم الزاویه و ارتفاع نظیر وتر، روابط طولی ذکر شده در کتاب هندسه (۱) را یادآوری کند. همچنین می تواند بیان فارسی روابط طولی را از دانش آموزان بخواهد تا این روابط به صورت بهتری در ذهن دانش آموزان ماندگار شود.

۱ و ۲ $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BC \cdot BH}{BC \cdot CH}$ ، در هر مثلث قائم الزاویه، مربع هر ضلع زاویه قائمه برابر است با حاصل ضرب اندازه وتر در اندازه تصویر آن ضلع بر وتر.

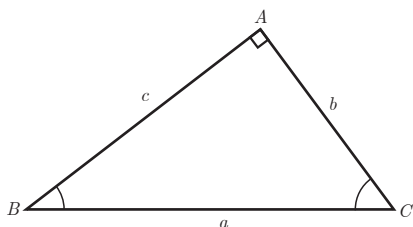


۳ $AH^2 = BH \cdot CH$ ، در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی بین اندازه دو قطعه روی وتر است.

۴ $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ، رابطه فیثاغورس: در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع اندازه وتر برابر است با مجموع مربع‌های اندازه دو ضلع زاویه قائمه.

۵ $AB \cdot AC = BC \cdot AH$ ، در هر مثلث قائم‌الزاویه، حاصل ضرب اندازه‌های اضلاع زاویه قائمه برابر است با اندازه وتر در اندازه ارتفاع وارد بر وتر.

— در ادامه درس، با طرح سه فعالیت، قضیه سینوس‌ها در هر مثلث دلخواه اثبات می‌شود.
— در فعالیت (۱) معلم می‌تواند، با یادآوری تعریف نسبت‌های مثلثاتی و تکمیل جاهای خالی توسط دانش‌آموزان، به این نتیجه برسد که در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه مقابل آن، برابر است با اندازه وتر.



$$\sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = a$$

$$\sin C = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = a$$

$$\sin A = \sin 90^\circ = \frac{a}{a} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = a$$

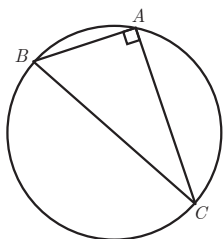
— در ادامه، قضیه سینوس‌ها در سه حالت اثبات می‌شود:

حالت اول: \hat{A} قائمه باشد.

حالت دوم: \hat{A} حاده باشد.

حالت سوم: \hat{A} منفرجه باشد.

حالت اول در فعالیت (۱) و حالت دوم و سوم در فعالیت (۲) بررسی می‌شود.



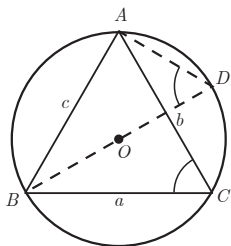
فعالیت (۲): انجام دادن این فعالیت، نیازمند یادآوری دو مطلب توسط معلم است:

۱ عمود منصف‌های اضلاع هر مثلث در یک نقطه هم‌رس‌اند؛

۲ نقطه هم‌رسی عمود منصف‌های اضلاع هر مثلث، مرکز دایره محیطی مثلث است. پس از یادآوری این مطالب، دانش‌آموز به این نتیجه می‌رسد که مرکز دایره محیطی در این شکل، وسط وتر BC در مثلث قائم‌الزاویه ABC است؛ و چون \hat{A} مساوی 90° است و همچنین \hat{A} محاطی است، پس باید روبه‌رو به قطر دایره باشد؛ یعنی وتر مثلث ABC همان قطر دایره است. معلم در پایان، بر نتیجه این فعالیت چنین تأکید می‌کند: «در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌روی آن ضلع، برابر است با اندازه قطر دایره محیطی مثلث.»

فعالیت (۳): دانش‌آموزان در این فعالیت با پاسخ به موارد ۱ و ۲ و ۳ و ۴، حالت دوم قضیه سینوس‌ها

در مثلث دلخواه ABC ($\hat{A} < 90^\circ$) را اثبات می‌کنند.



۱ زاویه‌های \hat{D} و \hat{C} محاطی روبه‌روی کمان AB و اندازه آنها برابر با نصف کمان AB است.

۲ مثلث ABD در رأس A قائم‌الزاویه است؛ چون محاطی روبه‌رو به قطر است.

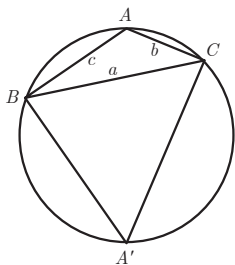
۳ با توجه به قسمت‌های ۱ و ۲ داریم:

$$\sin C = \sin D, \quad \sin D = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \sin C = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = 2R$$

۴ دانش‌آموز در این قسمت به طور مشابه به این نتایج دست می‌یابد:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad \frac{b}{\sin B} = 2R$$

۵ دانش‌آموز با پاسخ‌گویی به سؤالات این قسمت، قضیه سینوس‌ها در



حالت سوم یعنی مثلث ABC ($\hat{A} > 90^\circ$) را اثبات می‌کند؛ نقطه‌ای دلخواه (A') روی کمان BC را در نظر می‌گیرد و آن را به B و C وصل می‌کند. زاویه‌های A و A' نسبت به یکدیگر مکمل‌اند؛ زیرا:

$$\hat{A} + \hat{A'} = \frac{\widehat{BA'C}}{2} + \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{\widehat{BA'C} + \widehat{BAC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

و چون $\hat{A} > 90^\circ$ است پس \hat{A}' حاده است.

$$\sin A = \sin(180^\circ - \hat{A}') = \sin A' \quad \text{می‌دانیم:}$$

اکنون در مثلث $A'BC$ ، طبق نتیجه قسمت (۳)، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{a}{\sin A'} = 2R \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

بنابراین: در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌روی آن، برابر است با قطر دایره محیطی مثلث.

معلم در ادامه، قضیه سینوس‌ها را بیان می‌کند.

قضیه سینوس‌ها: در مثلث ABC با اضلاع a, b, c و $BC = a$ و $AC = b$ و $AB = c$ داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

— مثال ۱: این سؤال به کمک قضیه سینوس‌ها حل می‌شود و برای زاویه B دو جواب به دست می‌آید.

$\hat{B} = 135^\circ$ قابل قبول نیست؛ چون مثلث ABC نمی‌تواند دو زاویه منفرجه داشته باشد.

— مثال ۲: این مثال، یک مثال کاربردی از قضیه سینوس‌هاست که با الگوسازی و رسم مثلث حل می‌شود.

«در کار در کلاس»، مسئله کاربردی دیگری از قضیه سینوس‌ها آورده شده که دانش‌آموزان، با تکمیل

راه‌حل، فاصله دو نقطه A و B در دو طرف رودخانه را به دست می‌آورند:

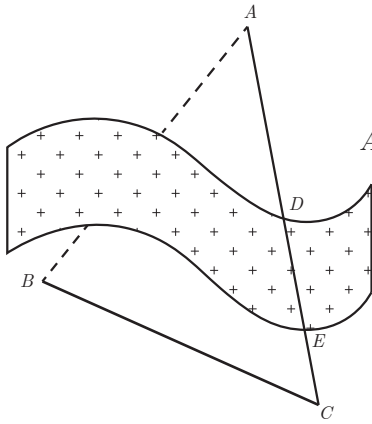
$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{BC}{\sin(180^\circ - (B+C))} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{BC \times \sin C}{\sin(B+C)}$$

در حل این مسئله از این نکته استفاده می‌شود: با توجه به اینکه مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث

180° است، داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C})$$

در ادامه حل سؤال، با جای‌گذاری اندازه‌های داده شده در فرمول، طول تقریبی AB به دست می‌آید:

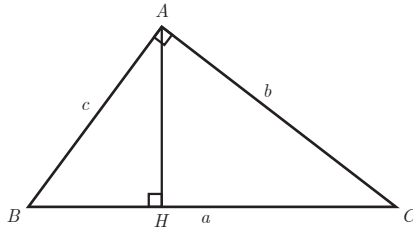


$$AB = \frac{3 \times \sin 6^\circ}{\sin(6^\circ + 7^\circ)} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin(13^\circ - 5^\circ)} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin 5^\circ} \approx 3/39$$

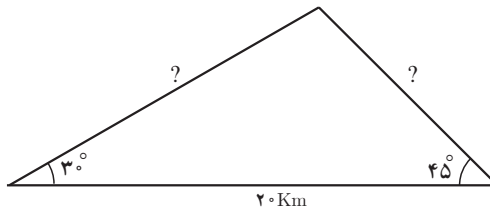
حل تمرین های درس اول

۱ از سمت راست تساوی شروع می کنیم و به سمت چپ تساوی می رسم. در حل این سؤال از روابط طولی در مثلث قائم الزاویه، که در ابتدای درس یادآوری شد، استفاده می کنیم.

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a \cdot HC} + \frac{1}{a \cdot BH} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{HC} + \frac{1}{BH} \right) = \frac{1}{a} \times \frac{HC + BH}{HC \cdot BH} = \frac{1}{a} \times \frac{a}{h_a^2} = \frac{1}{h_a^2}$$



۲ در حل این سؤال باید سینوس 105° را به دست آوریم.



$$\sin 105^\circ = \sin (180^\circ - (30^\circ + 45^\circ)) = \sin (30^\circ + 45^\circ) =$$

$$\sin 30^\circ \times \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{y}{\sin 45^\circ} = \frac{20}{\sin 105^\circ} \Rightarrow x = \frac{20 \times \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{20 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = \frac{20}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}$$

$$= \frac{20(\sqrt{2} - \sqrt{6})}{-4} = 10(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$y = \frac{20 \times \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{20 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = \frac{40\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = 20\sqrt{3} - 20$$

درس دوم

قضیه کسینوس ها

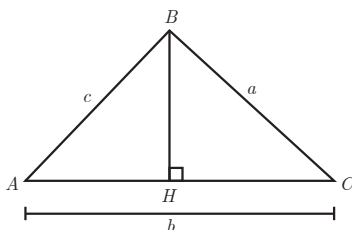
اهداف درس

- در پایان این درس از دانش آموز انتظار می رود بتواند :
- ۱ قضیه کسینوس ها در هر مثلث را بیان کند؛
 - ۲ اثبات قضیه کسینوس ها در هر مثلث را نشان دهد؛
 - ۳ نمونه هایی از کاربرد قضیه کسینوس ها در زندگی را مثال بزند؛
 - ۴ مسائلی را که در حل آنها از قضیه کسینوس ها استفاده می شود از دیگر مسائل تمیز دهد.

روش تدریس درس دوم

در ابتدای تدریس، معلم می تواند با طرح این سؤال، ذهن دانش آموزان را آماده کند: می دانیم در مثلث قائم الزاویه رابطه ای بین اضلاع وجود دارد. آیا تا به حال فکر کرده اید که ممکن است در هر مثلث دلخواه، بین اضلاع رابطه ای باشد.

در فعالیت (۱) هدف این است که دانش آموز با تکمیل جاهای خالی برای هر مثلث دلخواه ABC در



دو حالت ($\hat{A} > 90^\circ$, $\hat{A} < 90^\circ$) به این نتیجه برسد که قضیه کسینوس ها در هر مثلث دلخواه برقرار است.

– در مثلث ABC ($\hat{A} < 90^\circ$)، ارتفاع BH را رسم کرده ایم. دانش آموز به کمک نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه، جاهای خالی را تکمیل می کند.

$$\cos A = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \cdot \cos A, \quad CH = b - AH = b - c \cdot \cos A$$

$$\sin A = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \cdot \sin A$$

$$\Delta BHC: BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (c \cdot \sin A)^2 + (b - c \cdot \cos A)^2$$

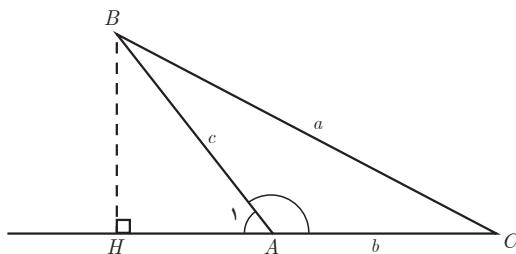
در ادامه به کمک اتحادهای جبری و اتحاد مثلثاتی ($\sin^2 A + \cos^2 A = 1$) رابطه $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ به دست می‌آید.

$$a^2 = (c \cdot \sin A)^2 + (b - c \cdot \cos A)^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cdot \cos^2 A$$

$$= c^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + b^2 - 2bc \cos A \Rightarrow a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A$$

در قسمت بعدی فعالیت (۱) با در نظر گرفتن مثلث ABC ($\hat{A} > 90^\circ$)، ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. با توجه به اینکه زاویه A_1 خارجی رأس A است، داریم:

$$\hat{A}_1 = 180^\circ - \hat{A} \Rightarrow \begin{cases} \sin \hat{A}_1 = \sin A \\ \cos \hat{A}_1 = -\cos A \end{cases} \quad (1)$$



در مثلث ABH با نوشتن تعریف نسبت‌های مثلثاتی داریم:

$$\cos A_1 = \frac{AH}{c}, \sin A_1 = \frac{BH}{c} \Rightarrow AH = c \cdot \cos A_1 = -c \cos A, \quad BH = c \cdot \sin A_1 = c \cdot \sin A$$

$$CH = b + AH = b - c \cdot \cos A$$

$$\Delta BHC: BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (c \cdot \sin A)^2 + (b - c \cdot \cos A)^2 =$$

$$C^2 \sin^2 A + b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cdot \cos^2 A = C^2 (\underbrace{\sin^2 A + \cos^2 A}_1) + b^2 - 2bc \cos A$$

$$\Rightarrow a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A$$

– در پاسخ به سؤال آخر این فعالیت، دانش آموز در می یابد که اگر زاویه A قائمه باشد، پس کسینوس زاویه A صفر می شود و رابطه به صورت $a^2 = c^2 + b^2$ در می آید که همان رابطه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه است.

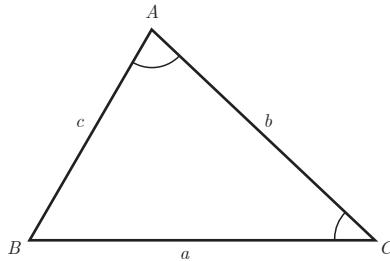
پس از انجام دادن فعالیت توسط دانش آموز، قضیه کسینوس ها توسط معلم بیان می شود.

قضیه کسینوس ها: در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع های اندازه های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها.

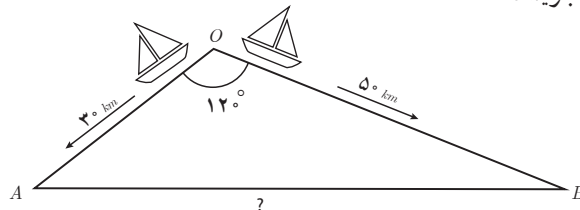
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$



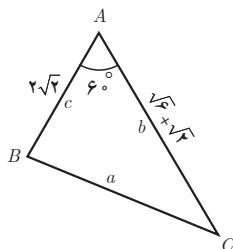
در ادامه، یک مثال کاربردی از قضیه کسینوس ها مطرح و پیشنهاد می شود معلم از ابتدا مسافتی را که هر قایق پس از نیم ساعت طی می کند از دانش آموزان سؤال کند و اعداد حاصل را بر روی شکل (برحسب واحد کیلومتر) بنویسد.



– در سؤال ۱ «کار در کلاس»، دانش آموز به این نتیجه می رسد که اگر در مثلثی اندازه دو ضلع و زاویه بین آنها مشخص باشد، آنگاه به کمک قضیه کسینوس ها می توان اندازه ضلع سوم را به دست آورد.

$$BC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow BC^2 = 8 + (8 + 2\sqrt{12}) - 2\sqrt{12} - 4 \Rightarrow BC^2 = 12, BC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$



– در سؤال ۲ «کار در کلاس» به کمک قضیه سینوس‌ها، اندازه \hat{C} به دست می‌آید.

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 6^\circ} \Rightarrow \sin C = \frac{2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - (6^\circ + 45^\circ) = 129^\circ$$

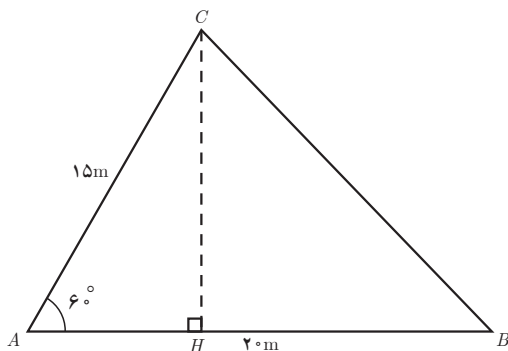
حل تمرین‌های درس دوم

الف ۱

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$BC^2 = 20^2 + 15^2 - 2 \times 20 \times 15 \times \cos 6^\circ \Rightarrow$$

$$BC^2 = 400 + 225 - 300 = 325, BC = \sqrt{325} = 5\sqrt{13} \text{ (m)}$$



ب) قسمت ب سؤال را می‌توان به دو روش حل کرد :

روش اول) استفاده از قضیه سینوس‌ها

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{15}{\sin B} = \frac{5\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \sin B = \frac{15 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{5\sqrt{13}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{13}} \approx 0.72$$

به کمک ماشین حساب

$$\Rightarrow \sin B \approx 0.72 \xrightarrow{\quad} \hat{B} \approx 46^\circ$$

روش دوم) استفاده از قضیه کسینوس‌ها

$$15^2 = 20^2 + (5\sqrt{13})^2 - 2 \times 20 \times (5\sqrt{13}) \cdot \cos B \Rightarrow 225 = 400 + 325 - 200\sqrt{13} \cos B \Rightarrow$$

$$200\sqrt{13} \cos B = 500 \Rightarrow \cos B = \frac{5}{2\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{26} \approx 0.69$$

$$\cos B \approx 0.69 \xrightarrow{\text{به کمک ماشین حساب}} \hat{B} \approx 46^\circ$$

ب)

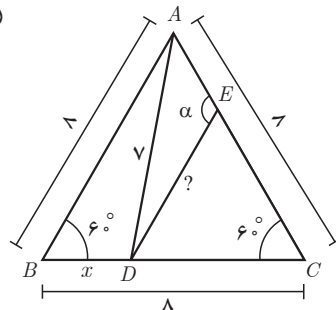
$$\sin A = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 15 = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

۲

$$\triangle ABD, \quad \vec{V} = \vec{A} + \vec{x} - 2 \times 8 \times x \times \cos 60^\circ$$

$$49 = 64 + x^2 - 8x \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-5) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=3 \\ x=5 \end{cases} \xrightarrow{CD > BD} x=3 \text{ ق ق} \Rightarrow DC = 8-3 = 5$$



برای به دست آوردن فاصله نقطه E از D ، دو روش مطرح می شود:
روش اول)

$$EC = DC = 5 \Rightarrow \triangle EDC \text{ متساوی الساقین}, \hat{C} = 6^\circ \Rightarrow \hat{E} = \hat{D} = \frac{180^\circ - 6^\circ}{2} = 6^\circ \Rightarrow \\ \triangle EDC \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow ED = 5$$

روش دوم)

$$ED^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \times 5 \times 5 \times \cos 6^\circ = 25 + 25 - 25 = 25 \Rightarrow ED = 5$$

$$\hat{AED} = 180^\circ - 6^\circ = 174^\circ$$

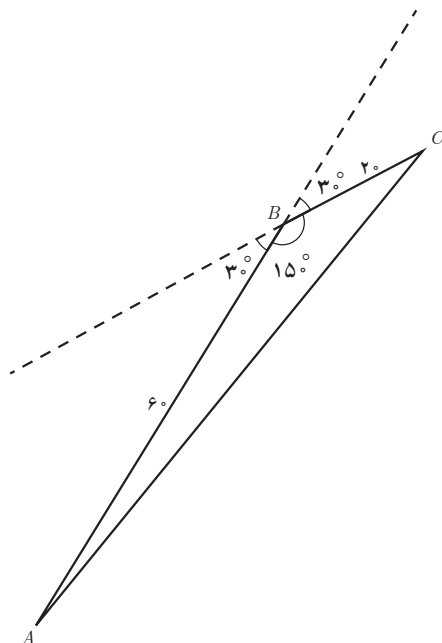
۳

$$d = V.t \Rightarrow \begin{cases} AB = 60 \times 1 = 60 \text{ km} \\ AC = 40 \times 0.5 = 20 \text{ km} \end{cases}$$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos 15^\circ$$

$$BC^2 = 60^2 + 20^2 - 2 \times 60 \times 20 \times \cos(180^\circ - 30^\circ) = 3600 + 400 + 2400 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 4000 + 1200\sqrt{3} \Rightarrow BC = \sqrt{4000 + 1200\sqrt{3}} \approx 77.96$$



$$\Delta AMC, b^2 = AM^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \times AM \times \frac{a}{2} \times \overbrace{\cos(180^\circ - \alpha)}^{-\cos \alpha} \quad (1)$$

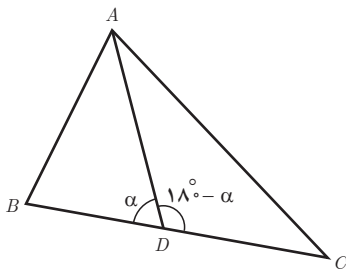
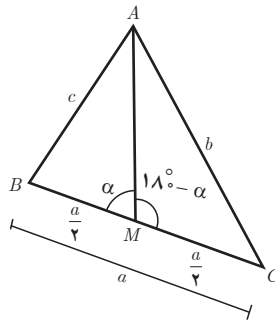
$$\Delta AMB, c^2 = AM^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \times AM \times \frac{a}{2} \times \cos \alpha \quad (2)$$

طرفین تساوی های ۱ و ۲ را با یکدیگر جمع می کنیم. اکنون داریم :

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (\text{قضیه میانه ها})$$

حالت خاص: $BC=8$ و $AC=6$ و $AB=4$

$$6^2 + 4^2 = 2AM^2 + \frac{8^2}{2} \Rightarrow 36 + 16 = 2AM^2 + 32 \Rightarrow 2AM^2 = 20 \Rightarrow AM^2 = 10 \Rightarrow AM = \sqrt{10}$$



۵ برای اثبات قضیه استوارت: از طرف راست تساوی شروع

می کنیم و با جایگذاری، به طرف چپ تساوی می رسم.

می دانیم :

$$\Delta ADB, AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

$$\Delta ADC, AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \underbrace{\cos(180^\circ - \alpha)}_{-\cos \alpha} \quad (2)$$

$$\text{طرف راست: } AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB \stackrel{\text{جایگذاری}}{=} \quad (1 \text{ و } 2)$$

$$(AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos \alpha) \cdot DC + (AD^2 + DC^2 + 2AD \cdot DC \cdot \cos \alpha) \cdot DB =$$

$$AD^2 \cdot DC + BD^2 \cdot DC - 2AD \cdot BD \cdot DC \cdot \cos \alpha + AD^2 \cdot DB + DC^2 \cdot DB + 2AD \cdot DC \cdot DB \cdot \cos \alpha =$$

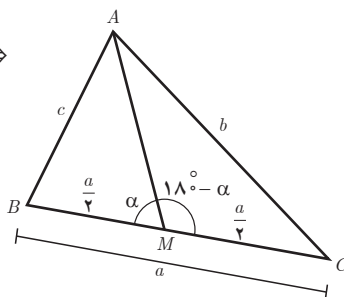
$$AD^2(DC + DB) + BD \cdot DC(BD + DC) = AD^2 \cdot BC + BD \cdot DC \cdot BC$$

به کمک قضیه استوارت، درستی قضیه میانه‌ها را نتیجه می‌گیریم، چون AM میانه است پس

$$BM = MC = \frac{a}{2}$$

$$AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB = AM^2 \cdot BC + BM \cdot MC \cdot BC \xrightarrow{BM=MC=\frac{a}{2}}$$

$$c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} = AM^2 \cdot a + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a \Rightarrow$$



قضیه میانه‌ها:

$$\frac{d}{2}(c^2 + b^2) = \frac{d}{2}\left(2 \cdot AM^2 + \frac{a^2}{2}\right) \Rightarrow b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2}$$

۶ حل مسئله ۲، با استفاده از قضیه استوارت

$$ABC \text{ مثلث استوارت در مثلث } \Rightarrow 8^2 \times DC + 8^2 \times BD = 7^2 \times 8 + BD \cdot DC \times 8 \Rightarrow$$

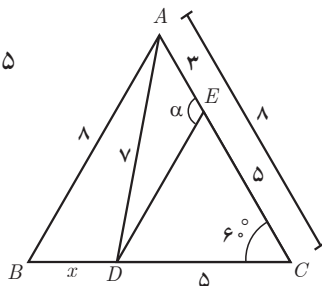
$$8^2(\underbrace{DC + BD}_8) = 7^2 \times 8 + BD \cdot (8 - BD) \times 8 \xrightarrow{\div 8}$$

$$64 = 49 + 8BD - BD^2 \Rightarrow BD^2 - 8BD + 15 = 0 \Rightarrow$$

$$(BD - 3)(BD - 5) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} BD = 3 \\ BD = 5 \end{matrix} \xrightarrow{DC > BD} \begin{matrix} BD = 3 \\ DC = 8 - 3 = 5 \end{matrix}$$

$$ADC \text{ مثلث استوارت در مثلث } \Rightarrow 5^2 \times 3 + 7^2 \times 5 = DE^2 \times 8 + 3 \times 5 \times 8 \Rightarrow 75 + 245 = 8DE^2 + 120 \Rightarrow$$

$$8DE^2 = 200 \Rightarrow DE^2 = \frac{200}{8} = 25 \Rightarrow DE = \sqrt{25} = 5$$



قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی و محاسبه طول نیمسازها

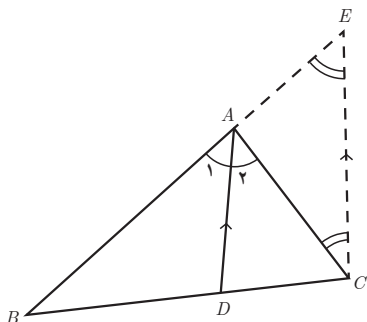
اهداف درس

- در پایان این درس از دانش آموز انتظار می‌رود که بتواند :
- ۱- قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث را بیان کند؛
 - ۲- قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث را اثبات کند؛
 - ۳- با استفاده از قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث، مسائل مرتبط را حل کند؛
 - ۴- قضیه طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث را بیان کند؛
 - ۵- با استفاده از قضیه طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث، مسائل مرتبط را حل کند.

روش تدریس درس سوم

در این درس معلم دو مطلب را آموزش می‌دهد : ۱- قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث؛ ۲- قضیه محاسبه طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث.

- ۱- برای اثبات قضیه نیمسازهای زاویه‌های داخلی، از نقطه C خطی موازی با نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند.



الف و ب)

$$\left. \begin{array}{l} AD \parallel EC \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{E} \\ AD \parallel EC \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C} \\ AD \parallel EC \Rightarrow \hat{A}_3 = \hat{A}_4 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{E} = \hat{C} \Rightarrow A\hat{E}C \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow AE = AC \quad ①$$

طبق فرض AD نیمساز است

ج) با توجه به قضیه تالس در مثلث EBC داریم:

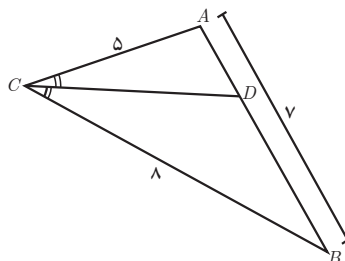
$$AD \parallel EC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} \xrightarrow{(1)} \frac{AB}{AC}$$

مثالی که در ادامه آورده شده است، نشان می‌دهد که با معلوم بودن اندازه‌های سه ضلع هر مثلث، می‌توان طول قطعاتی که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند را محاسبه کرد.
حل «کار در کلاس» نیز مشابه مثال داده شده است. با رسم نیمساز زاویه C داریم:

$$\frac{8}{5} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{8+5}{5} = \frac{BD+AD}{AD} \Rightarrow \frac{13}{5} = \frac{7}{AD}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{7 \times 5}{13} = \frac{35}{13}$$

$$BD = 7 - \frac{35}{13} = \frac{91-35}{13} = \frac{56}{13}$$

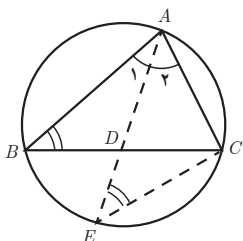


۲ محاسبه طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث

در مثلث ABC برای محاسبه طول نیمساز داخلی زاویه A ، AD را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در E قطع کند و E را به C وصل می‌کنیم.
اکنون داریم:

الف) $\hat{E} = \hat{B}$ زیرا محاطی رو به یک کمان است.

ب) مثلث‌های AEC و ABD متشابه‌اند؛ زیرا:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{B} = \hat{E} = \frac{\widehat{AC}}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{(ز, ز)} \triangle ABD \sim \triangle AEC$$

ب) نسبت های اضلاع متناظر: $\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{EC}{BD}$
 ت) از تناسب اول نتیجه می گیریم:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE \stackrel{\text{جایگذاری}}{=} AD(AD + DE) = AD^2 + AD \cdot DE$$

می دانیم $AD \cdot DE = BD \cdot DC$ زیرا طبق قضیه فصل (۲)، از تشابه دو مثلث ABD و CDE داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{E} = \frac{\widehat{AC}}{2} \\ \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \text{ متقابل به رأس اند} \end{array} \right\} \xrightarrow{(ز, ز)} \triangle ABD \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{DE} \Rightarrow AD \cdot DE = BD \cdot DC$$

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

بنابراین:

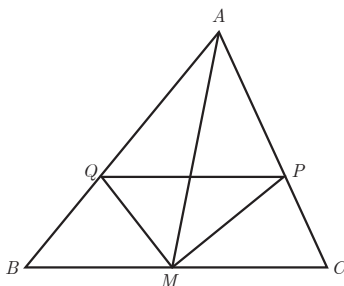
و این یعنی (قضیه ۲): در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می کند. برای حل مثالی که در ادامه مطرح می شود از دو قضیه ۱ و ۲ استفاده می شود.

حل تمرین های درس سوم

۱) MP نیمساز زاویه AMC و MQ نیمساز زاویه AMB است: فرض و M وسط BC ($MB = MC$)

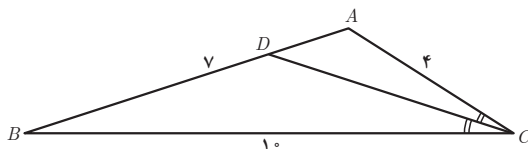
حکم: $PQ \parallel BC$

$$\left. \begin{array}{l} MP \text{ نیمساز زاویه } AMC \text{ است} \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC} \\ MQ \text{ نیمساز زاویه } AMB \text{ است} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QB} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PQ \parallel BC$$



$$CD: \text{نیمساز زاویه } C \text{ است} \quad \frac{4}{10} = \frac{AD}{DB} \Rightarrow \frac{4+10}{10} = \frac{AD+DB}{DB} \Longrightarrow$$

$$\frac{14}{10} = \frac{v}{DB} \Rightarrow DB = \frac{v \times 10}{14} = 5 \quad AD = v - 5 = 2$$



۳ AD نیمساز زاویه A است.

الف) چون نقطه D روی نیمساز زاویه A قرار دارد. طبق خاصیت نیمساز، از دو ضلع زاویه A به یک

فاصله است؛ یعنی $DH = DH'$

ب)

$$\left. \begin{aligned} \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} &= \frac{\frac{1}{2} DH' \times AB}{\frac{1}{2} DH \times AC} = \frac{AB}{AC} \quad (I) \\ \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} &= \frac{\frac{1}{2} BD \times AH''}{\frac{1}{2} CD \times AH''} = \frac{BD}{CD} \quad (II) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

