درس چهارم

قضیهٔ هرون (محاسبهٔ ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)

اهداف درس

از دانش‌آموز انتظار می‌رود که در پایان این درس بتواند :

۱ قضیه هرون را تبیین کند؛

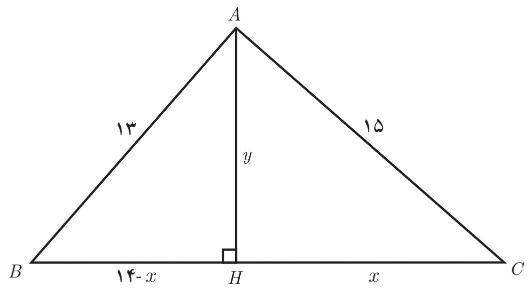
۲ توضیح دهد چه موقع از قضیه هرون استفاده می‌شود؛

۳ نشان دهد مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازه‌های هر دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها؛

۴ با معلوم بودن اندازه مساحت هر مثلث و اندازه هر ضلع، اندازه ارتفاع نظیر آن ضلع را به‌دست آورد.

روش تدریس درس چهارم

ــ در این درس معلم می‌تواند با یادآوری مسئله‌ای از کتاب هندسه (۱)، که در آن اندازه‌های اضلاع مثلث معلوم است، مساحت مثلث و سپس اندازه ارتفاع‌های مثلث را به‌کمک دانش‌آموزان محاسبه کند.



ــ با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث‌های AHB و AHC اندازه‌های x و y به‌دست می‌آیند.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta AHC: CH^{۲}+AH^{۲}+۱۵^{۲}\\ \Delta AHB: BH^{۲}+AH^{۲}=۱۳^{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x^{۲}+y^{۲}=۲۲۵\\ (۱۴-x)^{۲}+y^{۲}=۱۶۹\end{array}\right.\xrightarrow[\text{از هم کم می‌کنیم}]{\text{طرفین تساوی‌ها را}} x^{۲}-(۱۴-x)^{۲}=۵۶\Rightarrow$$

$$x^{۲}-۱۹۶-x^{۲}+۲۸x=۵۶\Rightarrow ۲۸x=۵۶+۱۹۶=۲۵۲\Rightarrow x=\frac{۲۵۲}{۲۸}=۹$$

$$y=\sqrt{۱۵^{۲}-۹^{۲}}=\sqrt{۱۴۴}=۱۲$$

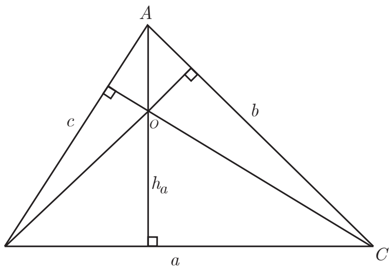
$$S=\frac{۱}{۲}BC.AH=\frac{۱}{۲}\times۱۴\times۱۲=۸۴$$

پس از حل مسئله، معلم اشاره می‌کند که با به‌کار بردن همین روش در مثلث دلخواه ABC، که $BC=a$، $AB=c$ و $AC=b$ نتیجه‌ای برای محاسبه مساحت مثلث به‌دست می‌آید که به قضیه هرون معروف است.

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}\quad \text{(دستور هرون)}$$

که در این دستور $P=\frac{a+b+c}{۲}$ نصف محیط مثلث است.
با به‌دست آوردن مساحت مثلث، می‌توان ارتفاع نظیر هر ضلع را به‌دست آورد.

$$S=\frac{۱}{۲}.a.h_b\Rightarrow h_a=\frac{۲S}{a}\ \text{و}\ h_b=\frac{۲S}{b}\ \text{و}\ h_c=\frac{۲S}{c}$$



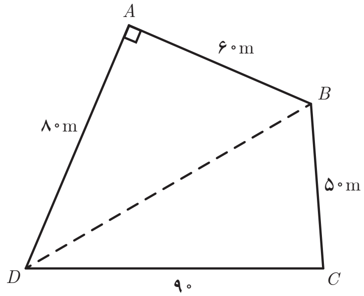
در ادامه مثالی آورده شده که در آن به کمک دستور هرون، مساحت و ارتفاع‌های مثلث به‌دست می‌آید.

$$h_b=\frac{۲\times۸۴}{۱۵}=۱۱/۲\qquad h_c=\frac{۲\times۸۴}{۱۳}\simeq۱۲/۹\qquad c=۱۳\ ,\ b=۱۵\ ,\ a=۱۴$$

ــ «کار در کلاس» یک سؤال کاربردی است که در آن مزرعه کشاورزی به شکل چهارضلعی‌ای است که تنها دو ضلع آن برهم عمودند. با مشخص نمودن طول اضلاع این زمین، و با استفاده از دستور هرون، مساحت زمین به‌دست می‌آید.

الف) B را به D وصل می‌کنیم. طول BD با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث ABD به‌دست می‌آید.

$BD^{۲} = ۶۰^{۲} + ۸۰^{۲} = ۳۶۰۰ + ۶۴۰۰ = ۱۰۰۰۰ \Rightarrow BD = ۱۰۰$



ب) $S_{\overset{\Delta}{ABD}} = \frac{۸۰\times۶۰}{۲} = ۲۴۰۰$

پ) مساحت مثلث CBD به کمک دستور هرون به‌دست می‌آید.

$P = \frac{۱۰۰+۵۰+۹۰}{۲} = ۱۲۰$

$S_{CBD} = \sqrt{۱۲۰\times۲۰\times۷۰\times۳۰} = \sqrt{۲^{۳}\times۵\times۳\times۲^{۲}\times۵\times۲\times۵\times۷\times۲\times۵\times۳}$

$= \sqrt{۲^{۷}\times۵^{۴}\times۳^{۲}\times۷} = ۲^{۳}\times۵^{۲}\times۳\sqrt{۱۴} = ۶۰۰\sqrt{۱۴}$

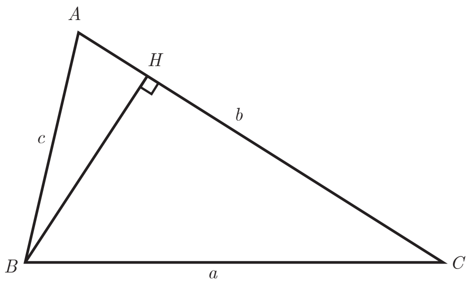
ت) مساحت زمین کشاورزی برابر است با :

$S = ۲۴۰۰ + ۶۰۰\sqrt{۱۴} \simeq ۴۶۴۵ \ (m^{۲})$

ــ در فعالیت دستور دیگری برای محاسبه مساحت مثلث، به کمک نسبت‌های مثلثاتی به‌دست می‌آید.

در مثلث ABC، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم.

۱ $\sin A = \frac{BH}{C} \Rightarrow BH = C.\sin A \ (۱)$



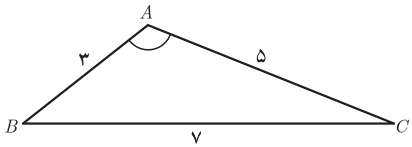
۲ مساحت مثلث ABC به کمک ارتفاع BH و جایگذاری رابطه (۱) به‌دست می‌آید.

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} BH \times AC \overset{(۱)}{=} \frac{۱}{۲}.c.b.\sin A$$

در نتیجه، مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازه‌های هر دوضلع در سینوس زاویه بین آنها.

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} bc\sin A = \frac{۱}{۲} ab.\sin C = \frac{۱}{۲} ac.\sin B$$

ـ در «کار در کلاس» سؤالی مطرح شده است که در آن مساحت مثلث به دو روش به‌دست می‌آید :



۱ با استفاده از دستور هرون داریم؛

$$P = \frac{۵+۷+۳}{۲} = \frac{۱۵}{۲}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{\frac{۱۵}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۵}{۲} \times \frac{۹}{۲}} = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۴}$$

۲ با استفاده از دستور $S = \frac{۱}{۲} AB.AC.\sin A$ مساحت مثلث ABC را می‌نویسیم :

$$\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۳ از مقایسه نتایج ۱ و ۲، اندازه زاویه منفرجه A به‌دست می‌آید :

$$\sin A = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۱۲۰^\circ$$

حل تمرین‌های درس چهارم

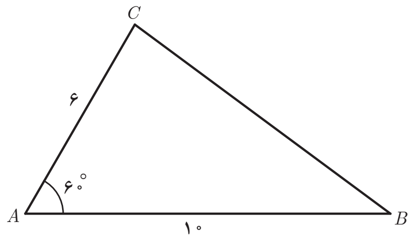
۱

$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲AC.AB\cos A = ۶^۲ + ۱۰^۲ - ۲ \times ۶ \times ۱۰ \times \frac{۱}{۲} = ۳۶ + ۱۰۰ - ۶۰ = ۷۶$$

$$BC = \sqrt{۷۶} = ۲\sqrt{۱۹}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲} \times AC \times AB \times \sin A = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۵\sqrt{۳}$$

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow\frac{۶}{\sin B}=\frac{۲\sqrt{۱۹}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\Rightarrow\sin B=\frac{۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۱۹}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۱۹}}\times\frac{\sqrt{۱۹}}{\sqrt{۱۹}}=\frac{۳\sqrt{۵۷}}{۳۸}$$



۲

$$P_{۱}=\frac{۴+۱۵+۱۳}{۲}=۱۶ \qquad S_{۱}=\sqrt{۱۶\times۱۲\times۱\times۳}=۲۴$$

$$P_{۲}=\frac{۱۱+۱۳+۲۰}{۲}=۲۲ \qquad S_{۲}=\sqrt{۲۲\times۱۱\times۹\times۲}=۶۶$$

$S_{کل}=۲۴+۶۶=۹۰$

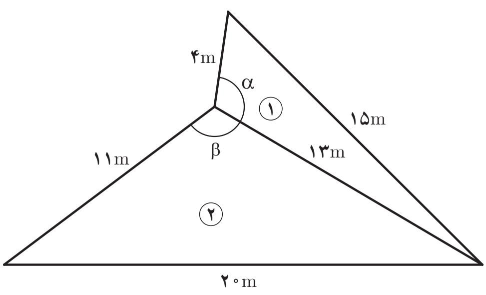
$$۱۵^{۲}=۴^{۲}+۱۳^{۲}-۲\times۴\times۱۳\times\cos\alpha\Rightarrow۲۲۵=۱۶+۱۶۹-۱۰۴\cos\alpha$$

$$\Rightarrow-۱۰۴\cos\alpha=۴۰\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{۴۰}{۱۰۴}=-\frac{۵}{۱۳} \quad ۱$$

$$۲۰^{۲}=۱۱^{۲}+۱۳^{۲}-۲\times۱۱\times۱۳\times\cos\beta\Rightarrow۴۰۰=۱۲۱+۱۶۹-۲۸۶\cos\beta$$

$$\Rightarrow-۲۸۶\cos\beta=۱۱۰\Rightarrow\cos\beta=\frac{۱۱۰}{-۲۸۶}=-\frac{۵}{۱۳} \quad ۲$$

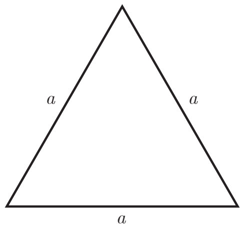
$$\overset{۱ \text{ و } ۲}{\Rightarrow}\alpha=\beta$$



۳

$$P=\frac{۳a}{۲}$$

$$S=\sqrt{\frac{۳a}{۲}(\frac{۳a}{۲}-a)(\frac{۳a}{۲}-a)(\frac{۳a}{۲}-a)}=\sqrt{\frac{۳a}{۲}(\frac{۳a}{۲}-a)^{۳}}=\sqrt{\frac{۳a}{۲}\times\frac{a^{۳}}{۸}}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$$



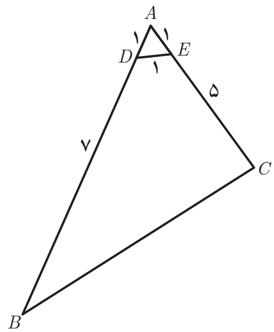
۴

متساوی الاضلاع $\overset{\Delta}{ADE}\Rightarrow\hat{A}=۶۰^\circ$

$$BC^{۲}=۸^{۲}+۶^{۲}-۲\times۸\times۶\times\cos۶۰=۶۴+۳۶-۴۸=۵۲ \qquad BC=\sqrt{۵۲}=۲\sqrt{۱۳}$$

$$S_{DECB}=S_{\overset{\Delta}{ABC}}-S_{\overset{\Delta}{ADE}}=(\frac{۱}{۲}\times۸\times۶\times\sin۶۰^\circ)-\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times۱^{۲}=\frac{۱}{۲}\times۸\times۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$=۴۸\frac{\sqrt{۳}}{۴}-\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۴۷}{۴}\sqrt{۳}$$



۵ با نوشتن مساحت مثلث ABC به‌صورت مجموع مساحت‌های دو مثلث ABD و ADC، دستور دیگری برای محاسبه طول نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث به‌دست می‌آید.

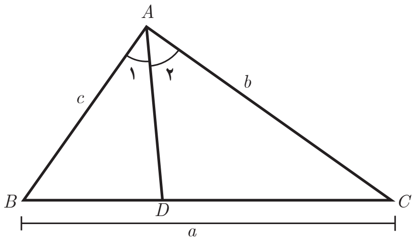
$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{ABD}+S_{ACD}\Rightarrow\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin A=\frac{۱}{۲}AB.AD.\sin\frac{A}{۲}+\frac{۱}{۲}AC.AD.\sin\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow AB.AC.\sin A=AD.\sin\frac{A}{۲}(AB+AC)$$

$$\Rightarrow AD=\frac{AB.AC.\sin A}{(AB+AC).\sin\frac{A}{۲}}=\frac{۲AB.AC.\sin\frac{A}{۲}.\cos\frac{A}{۲}}{(AB+AC).\sin\frac{A}{۲}}\Rightarrow AD=\frac{۲AB.AC.\cos\frac{A}{۲}}{AB+AC}$$

$\Rightarrow$ (نیمساز رأس A) $d_a=\dfrac{۲bc.\cos\frac{A}{۲}}{b+c}$

(نیمساز رأس B) $=d_b=\dfrac{۲ac.\cos\frac{B}{۲}}{a+c}$ (نیمساز رأس C) $=d_c=\dfrac{۲ab\cos\frac{C}{۲}}{a+b}$

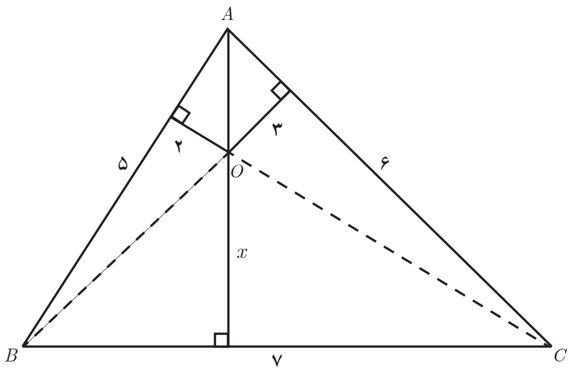


۶ با نوشتن مساحت مثلث ABC به‌صورت مجموع مساحت‌های سه مثلث AOB و BOC و COA، فاصله نقطه O از رأس بزرگ‌تر به دست می‌آید.

$$P=\frac{۵+۶+۷}{۲}=۹ \qquad S=\sqrt{۹\times ۴\times ۳\times ۲}=۶\sqrt{۶}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=S_{\overset{\Delta}{AOB}}+S_{\overset{\Delta}{BOC}}+S_{\overset{\Delta}{COA}}=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۵+\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۶+\frac{۱}{۲}\times ۷\times x=۱۴+\frac{۷}{۲}x$$

$$\Rightarrow ۶\sqrt{۶}=۱۴+\frac{۷}{۲}x\Rightarrow \frac{۷}{۲}x=۶\sqrt{۶}-۱۴\Rightarrow ۷x=۱۲\sqrt{۶}-۲۸\Rightarrow x=\frac{۱۲\sqrt{۶}-۲۸}{۷}$$



۷ B را به D وصل می‌کنیم. سپس با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در مثلث BCD، طول ضلع BD را به‌دست می‌آوریم. به کمک قضیه کسینوس‌ها در مثلث BAD اندازه زاویه A به‌دست می‌آید. مساحت چهارضلعی $ABCD$ نیز از تفاضل مساحت‌های مثلث‌های ABD و BCD به‌دست می‌آید.

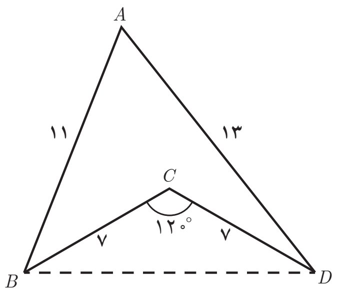
$$BD^۲ = ۷^۲ + ۷^۲ - ۲\times۷\times۷\times\cos۱۲۰^\circ = ۴۹+۴۹+۹۸\times\frac{۱}{۲} = ۹۸+۴۹ = ۱۴۷، BD = \sqrt{۱۴۷} = ۷\sqrt{۳}$$

$$BD^۲ = ۱۱^۲ + ۱۳^۲ - ۲\times۱۱\times۱۳\times\cos A \Rightarrow ۱۲۱+۱۶۹-۲۸۶\cos A = ۱۴۷ \Rightarrow ۱۴۳ = ۲۸۶\cos A$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{۱۴۳}{۲۸۶} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{CBD} = \frac{۱}{۲}\times۱۱\times۱۳\times\underbrace{\sin۶۰}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} - \frac{۱}{۲}\times۷\times۷\times\underbrace{\sin۱۲۰}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

$$= \frac{۱۴۳\sqrt{۳}}{۴} - \frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۹۴\sqrt{۳}}{۴}$$

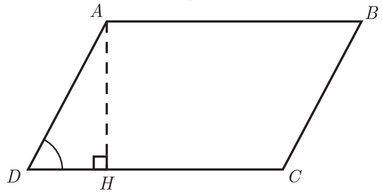


۸

روش اوّل

ارتفاع AH در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را رسم می‌کنیم. با استفاده از دستور مساحت متوازی‌الاضلاع و استفاده از نسبت‌های مثلثاتی برای پیدا کردن طول ارتفاع متوازی‌الاضلاع، به حکم مسئله می‌رسیم.

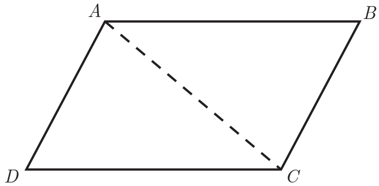
$$\left.\begin{array}{l} S_{ABCD} = DC\times AH \\ \Delta ADH; \sin D = \dfrac{AH}{AD} \Rightarrow AH = AD.\sin D \end{array}\right\} \Rightarrow S_{ABCD} = DC.AD.\sin D$$



روش دوم : با استفاده از رسم قطر متوازی‌الاضلاع و این نکته که مساحت دو مثلث حاصل با هم برابرند و همچنین دستور مساحت مثلث، به حکم مسئله می‌رسیم :

$$\left.\begin{array}{l} S_{ADC} = \frac{۱}{۲} AD.DC.\sin D \\ S_{ABCD} = ۲ \times S_{ADC} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{ABCD} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times AD.DC.\sin D$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = AD.DC.sinD$$



۹ به کمک قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC، موارد الف و ب و پ ثابت می‌شود. توجه شود که قسمت‌ها به‌صورت دو شرطی مطرح شده است؛ پس لازم است دو طرف اثبات شود :

الف) اگر $\hat{A} > ۹۰^\circ$ آنگاه $a^۲ > b^۲ + c^۲$

$$\left.\begin{array}{r} \hat{A} > ۹۰^\circ \Rightarrow \cos A < ۰ \\ -۲bc < ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow -۲bc\cos A > ۰ \qquad ①$$

از طرفی طبق قضیه کسینوس‌ها داریم :

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A \xRightarrow{①} a^۲ > b^۲ + c^۲$$

بالعکس؛ اگر $a^۲ > b^۲ + c^۲$ باشد آنگاه $\hat{A} > ۹۰^\circ$

طبق فرض $a^۲ > b^۲ + c^۲$ است. از طرفی طبق قضیه کسینوس‌ها داریم $a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A$

پس :

$$a^۲ > b^۲ + c^۲ \Rightarrow b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A > b^۲ + c^۲ \Rightarrow -۲bc\cos A > ۰$$

$$\Rightarrow CosA < ۰ \Rightarrow \hat{A} > ۹۰^\circ$$

ب) اگر $\hat{A} < ۹۰^\circ$ آنگاه $a^۲ < b^۲ + c^۲$

$$\left.\begin{array}{r} \hat{A} < ۹۰^\circ \Rightarrow \cos A > ۰ \\ -۲bc < ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow -۲bc\cos A < ۰ ①$$

از طرفی طبق قضیه کسینوس‌ها داریم :

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A \xrightarrow{①} a^۲ < b^۲ + c^۲$$

بالعکس) اگر $a^۲<b^۲+c^۲$ آنگاه $\hat{A}<۹۰^\circ$

$$a^۲<b^۲+c^۲ \xrightarrow[\text{کسینوس‌ها}]{\text{قضیه}} b^۲+c^۲-۲bc\cos A<b^۲+c^۲ \Rightarrow -۲bc\cos A<۰$$

$$\Rightarrow \cos A>۰ \Rightarrow \hat{A}<۹۰^\circ$$

پ) اگر $\hat{A}=۹۰^\circ$ آنگاه $a^۲=b^۲+c^۲$

$$\hat{A}=۹۰^\circ \Rightarrow \cos A=\cos ۹۰^\circ=۰ \Rightarrow -۲bc\cos A=۰ \quad (۱)$$

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A \xrightarrow{(۱)} a^۲=b^۲+c^۲$$

بالعکس؛ اگر $a^۲=b^۲+c^۲$ آنگاه $\hat{A}=۹۰^\circ$

$$a^۲=b^۲+c^۲ \xrightarrow[\text{کسینوس‌ها}]{\text{قضیه}} b^۲+c^۲-۲bc\cos A=b^۲+c^۲ \Rightarrow -۲bc\cos A=۰ \Rightarrow \cos A=۰ \Rightarrow \hat{A}=۹۰^\circ$$

۱۰ به کمک نتیجه تمرین ۹، حاده، قائمه یا منفرجه بودن زاویه A در هر یک از مثلث‌ها مشخص می‌شود.

الف) $AB=۱۰$ و $AC=۶$ و $BC=۹$

$$\left.\begin{array}{l} a^۲=۹^۲=۸۱ \\ b^۲+c^۲=۶^۲+۱۰^۲=۳۶+۱۰۰=۱۳۶ \end{array}\right\} \Rightarrow a^۲<b^۲+c^۲ \Rightarrow \hat{A}<۹۰^\circ$$

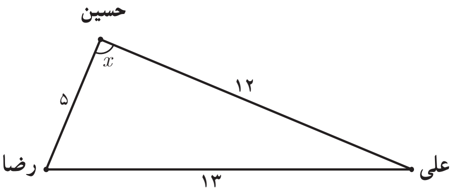
ب) $AB=۸$ ، $AC=۴$ ، $BC=۹$

$$\left.\begin{array}{l} a^۲=۹^۲=۸۱ \\ b^۲+c^۲=۴^۲+۸^۲=۱۶+۶۴=۸۰ \end{array}\right\} \Rightarrow a^۲>b^۲+c^۲ \Rightarrow \hat{A}>۹۰^\circ$$

پ) $AB=۸$ ، $AC=۱۵$ ، $BC=۱۷$

$$\left.\begin{array}{l} a^۲=۱۷^۲=۲۸۹ \\ b^۲+c^۲=۱۵^۲+۸^۲=۲۲۵+۶۴=۲۸۹ \end{array}\right\} \Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow \hat{A}=۹۰^\circ$$

سؤالات ارزشیابی

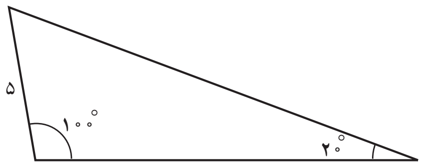


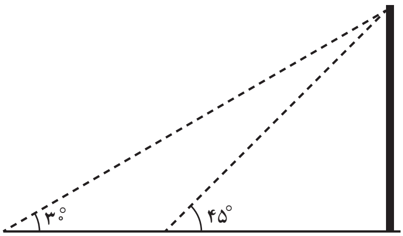
۱ علی، حسین و رضا، مطابق شکل مقابل و با فاصله‌های مشخص، در حیاط مدرسه ایستاده‌اند؛

الف) اندازه زاویه x را به‌دست آورید.

ب) اگر این سه نفر روی محیط یک دایره در وسط حیاط قرار گرفته باشند. شعاع دایره را به‌دست آورید.

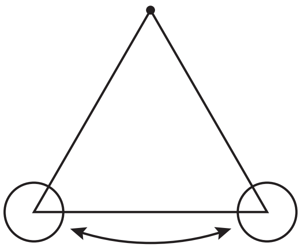
۲ با استفاده از ماشین حساب اندازه اضلاع مثلث زیر را به‌دست آورید.





۳ مهندسی می‌خواهد دو سیم را مانند شکل روبه‌رو به نوک میله عمود بر زمین وصل کند. اگر فاصله بین دو سیم روی زمین ۱۰ متر باشد، چند متر سیم نیاز است؟

راهنمایی : ابتدا زاویه‌های مثلثی که دارای زاویه منفرجه است را پیدا کنید و سپس با استفاده از قضیه سینوس‌ها طول اضلاع مثلث را به‌دست آورید.

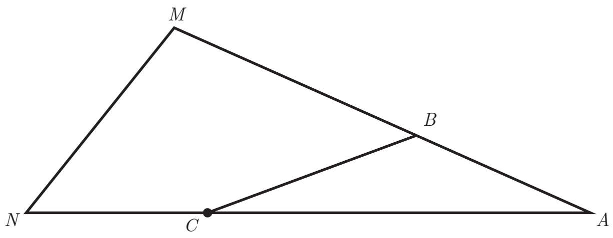


۴ پاندول ساعتی به طول $۴۰\,cm$ با زاویه ۳۰° جابه‌جا می‌شود. اندازه مسیری که به‌صورت مستقیم در یک بار حرکت طی شده را به‌دست آورید.

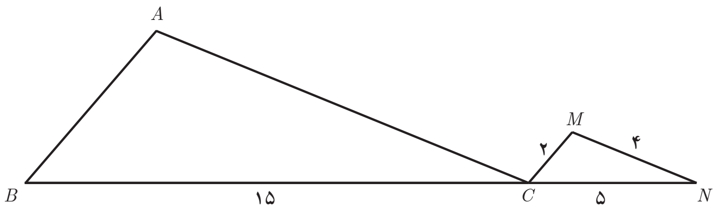
راهنمایی : مثلث را در نظر گرفته و از رابطه کسینوس‌ها استفاده کنید.

۵ در شکل زیر $\frac{AB}{AM}=\frac{CN}{AN}=\frac{۱}{۳}$ است. مساحت مثلث AMN چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

راهنمایی : از $\frac{CN}{AN}=\frac{۱}{۳}$ نتیجه می‌شود که $\frac{AC}{AN}=\frac{۲}{۳}$

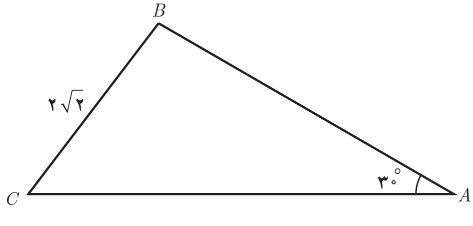


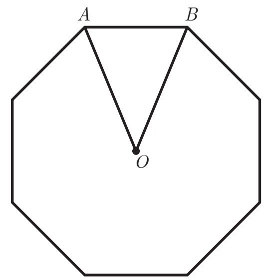
۶ دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{MNC}$ متشابه‌اند. اگر نیمساز زاویه C در مثلث ABC ضلع AB را در نقطه P قطع کند، طول AP و CP را به‌دست آورید.



۷ در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ نیمساز زاویه B ضلع AC را در D قطع می‌کند. اگر $\hat{B}=۶۰^\circ$ و $\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{۴}$ و $AB=۸cm$ باشد، ضلع‌های مثلث را به‌دست آورید.

۸ شعاع دایره‌ای که از رأس‌های مثلث زیر می‌گذرد را به‌دست آورید.

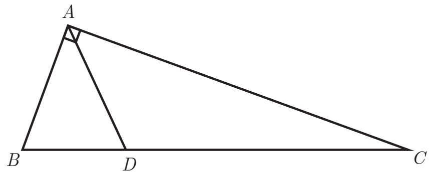




۹ در مثلثی به اضلاع ۳ و ۵ و ۷ زاویه مقابل بزرگ‌ترین ضلع را حساب کنید.

۱۰ در هشت ضلعی منتظم روبه‌رو $OA=OB=6$ است. مساحت هشت ضلعی را محاسبه کنید.

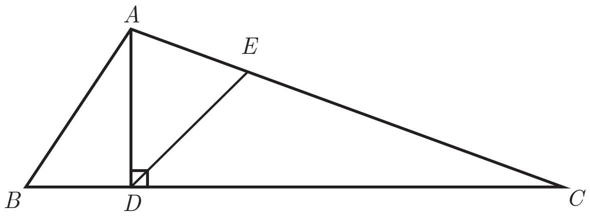
راهنمایی: زاویه O را در مثلث OAB حساب کنید سپس مساحت مثلث را بیابید.



۱۱ مثلث روبه‌رو در رأس A قائمه است. اگر طول اضلاع قائمه ۳ و ۴ سانتی‌متر باشد، طول نیمساز AD را حساب کنید.

۱۲ در شکل زیر AD نیمساز زاویه A است و $DE \parallel AB$ است.
اگر $AB=8$ و $AC=12$ باشد، اندازه AE را حساب کنید.

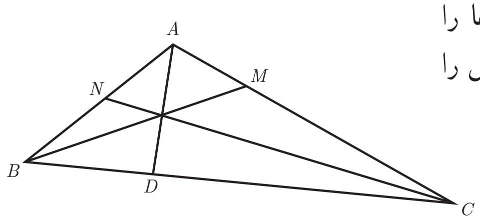
راهنمایی: از قضیه نیمساز و نسبت تالس هم‌زمان استفاده کنید.



۱۳ محیط مثلثی ۳۰ سانتی‌متر است. نیمساز یکی از زاویه‌های این مثلث را رسم می‌کنیم. این نیمساز، ضلع مقابل زاویه را به پاره خط‌هایی به اندازه ۷/۸ و ۶/۲ تقسیم می‌کند. اندازه کوچک‌ترین ضلع مثلث را حساب کنید.

۱۴ اگر AD و BM و CN نیمسازهای زاویه‌های مثلث باشند، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{AM}{CM}\times\frac{CD}{BD}\times\frac{BN}{AN}$$

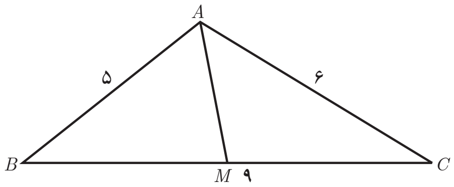


راهنمایی: برای سه نیمساز، قضیه نیمسازها را بنویسید و با جایگذاری در صورت سؤال، حاصل را حساب کنید.

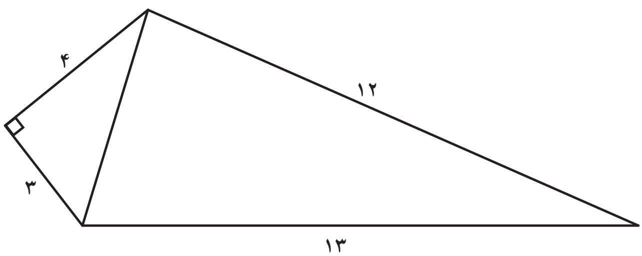
۱۵ در مثلث زیر طول میانه AM را حساب کنید.

راهنمایی : از رابط میانه‌ها استفاده کنید.

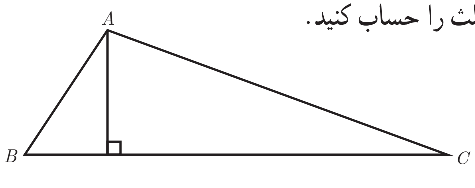
$$AB^۲ + AC^۲ = ۲AM^۲ + \frac{BC^۲}{۲}$$



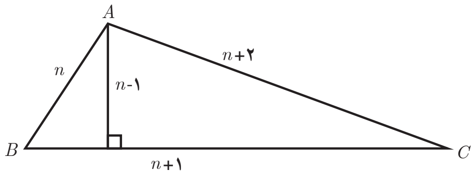
۱۶ مساحت شکل زیر را به‌دست آورید.



۱۷ در یک مثلث، طول‌های سه ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع متوسط، چهار عدد طبیعی متوالی است طول‌های ضلع‌های مثلث را حساب کنید.



راه‌حل : اگر n طول یک ضلع مثلث باشد و اندازه ضلع‌های دیگر $n+۱$ و $n+۲$ باشد، اندازه ارتفاع وارد بر ضلع متوسط $n-۱$ خواهد شد زیرا باید از n کوچک‌تر باشد.



$$۲P = n+(n+۱)(n+۲) = ۳n+۳$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \qquad P=\frac{۳n+۳}{۲}$$

$$S=\sqrt{\frac{۳n+۳}{۲}(\frac{۳n+۳}{۲}-n)(\frac{۳n+۳}{۲}-(n+۱)(\frac{۳n+۳}{۲}-(n+۲)))}$$

$$S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\sqrt{(n+۱)(n+۳)(n+۱)(n-۱)}=\frac{\sqrt{۳}(n+۱)}{۴}\sqrt{(n+۳)(n-۱)} \quad (۱)$$

از طرفی $S=\dfrac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{۲}=\dfrac{(n+۱)(n-۱)}{۲} \quad (۲)$

$$(۱)=(۲)\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۴}(n+۱)\sqrt{(n+۳)(n-۱)}=\frac{(n+۱)(n-۱)}{۲} \qquad \left(\begin{array}{c} n\text{عدد طبیعی است} \\ n+۱\neq ۰ \end{array}\right)$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sqrt{n^۲+۲n-۳}=n-۱$$

$$\sqrt{۳n^۲+۶n-۹}=۲n-۲$$

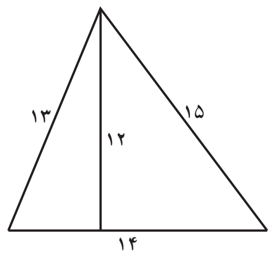
$$۳n^۲+۶n-۹=۴n^۲+۴-۸n$$

$$n^۲-۱۴n+۱۳=۰$$

$n=۱۳$ $\qquad$ قابل قبول نیست (غ ق ق) $n-۱=۱-۱=۰$

$$(n-۱۳)(n-۱)=۰$$

$n=۱$



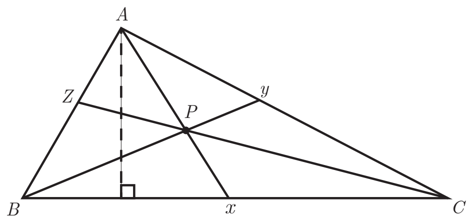
دانستنی‌هایی برای معلمان

در این بخش، ابتدا «قضیه ژان سوا» را بیان می‌کنیم و سپس، برای آشنایی بیشتر با دستاوردهای هرون اسکندرانی، یادداشتی تاریخی درباره او می‌آوریم.

قضیه ژان سوا

اگر در مثلث ABC سه خط سوایی Ax و By و Cz در نقطه P متقارب (همرس) باشند، رابطه زیر برقرار است :

$$\frac{Bx}{xc}\times\frac{Cy}{yA}\times\frac{Az}{zB}=۱$$



حل : می‌دانیم اگر دو مثلث دارای ارتفاع‌های برابر باشند، نسبت مساحت‌های آنها برابر نسبت قاعده‌هاست.

$$\frac{Bx}{xc}=\frac{S_{ABx}}{S_{Axc}}=\frac{S_{BPx}}{S_{Pxc}}=\frac{S_{ABx}-S_{BPx}}{S_{Axc}-S_{Pxc}}=\frac{S_{ABP}}{S_{APC}}$$

همچنین می‌توان نوشت :

$$\frac{Cy}{yA}=\frac{S_{BPC}}{S_{ABP}},\frac{Az}{zA}=\frac{S_{APC}}{S_{BPC}}$$

$$\frac{Bx}{xC}\times\frac{Cy}{yA}\times\frac{Az}{zB}=\frac{S_{ABP}}{S_{APC}}\times\frac{S_{BPC}}{S_{ABP}}\times\frac{S_{APC}}{S_{BPC}}=۱$$

حال اگر این سه خط سوایی، نیمساز، ارتفاع یا میانه باشند، طبق قضیه صفحهٔ قبل تساوی برقرار است.

هرون اسکندرانی

یکی از ریاضی‌دانانی که دستاوردهای علمی‌اش در ریاضیات کاربردی چشمگیر داشت، هرون اسکندرانی است. در مورد دوره زندگی این دانشمند اختلاف زیاد است.

او در نیمه دوم قرن اول بعد از میلاد می‌زیسته و حدود ۱۴ مقاله در ریاضیات کاربردی نوشته است. آثار هرون را به دو دسته تقسیم می‌کنند : مباحث هندسی و مباحث مکانیکی.

مهم‌ترین اثر هرون، «متریکا» است که در سه مقاله نوشته شده است. موضوع این اثر، اندازه‌گیری مساحت مربع‌ها، مستطیل‌ها، مثلث‌ها، ذوزنقه‌ها، چهارضلعی‌های خاص دیگر، دایره و قطعه‌های آن و ... است. فرمول بسیار استادانه این دانشمند در مورد محاسبه مساحت مثلث به‌وسیله اضلاع آن، در همین اثر آمده است.

آثار این دانشمند عبارت‌اند از :

۱ پنوماتیکا : هرون در این اثر از ۱۰۰ ماشین زمان خود یاد کرده و در مورد آنها مطالبی را نوشته است.

۲ دیوپترا : این کتاب، توصیف مهندسی یک زاویه‌یاب مساحی است.

۳ کاتوپتریکا : در این کتاب درباره خواص مقدماتی آینه‌ها، ساختن انواع آنها و استفاده از ریاضی بحث شده است.

بدفهمی‌ها

بدفهمی‌ها یا همان برداشت‌های ناقص یا نادرست دانش‌آموزان از یک مفهوم، باعث سردرگمی و موفق نشدن دانش‌آموزان در حل مسائل ریاضی می‌شود. گاهی نیز، به دلیل ماهیت به هم پیوسته مفاهیم ریاضی، بدفهمی‌ها باعث ایجاد مشکل در یادگیری‌های بعدی دانش‌آموزان می‌شود.

آگاهی درست دانش‌آموزان از اشتباهات و بدفهمی‌هایی که در یادگیری و حل مسئله‌های ریاضی دارند، عامل تعیین‌کننده برای رشد عملکرد و پیشرفت ریاضی آنان است. وقتی دانش‌آموز به درستی دریابد که دلایل و ریشه‌های بدفهمی و راه‌حل غلط او در کجا است و خود با راهنمایی‌های معلم درصدد تصحیح آنها برآید، بدون شک تجربه مهمی را در یادگیری ریاضی کسب کرده است که در موقعیت‌های دیگر یادگیری و حل مسائل ریاضی به او کمک خواهد کرد.

در ادامه، سؤالاتی که معمولاً دانش‌آموزان، به دلیل بدفهمی، در پاسخ به آنها در این فصل دچار مشکل‌اند، بیان می‌شود. ایجاد فرصت آشنایی با بدفهمی‌ها و مثال‌هایی از این گونه، به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا درک بهتری از مفهوم به‌دست آورند و بدفهمی خود را اصلاح کنند و دانش خود درباره فرایندها را افزایش دهند.

۱ ضلع مثلثی برابر با $۲\sqrt{۳}$ سانتی‌متر و زاویه مقابل آن ۳۰° است. اگر ضلع دیگر مثلث برابر با ۶ سانتی‌متر باشد، زاویه مقابل آن را به‌دست آورید.

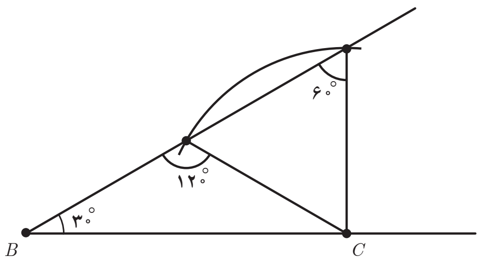
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{۶}{\sin A}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sin ۳۰^\circ}\Rightarrow\frac{۶}{\sin A}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\sin A=\frac{۶}{۴\sqrt{۳}}=\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

زاویه مورد نظر چند درجه است؟

دانش‌آموزان اغلب پاسخ می‌دهند که زاویه ۶۰ درجه است. اما دو زاویه (بین ۰ و ۱۸۰) وجود دارد که سینوس آن $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است؛ بنابراین، این زاویه می‌تواند ۶۰ و یا ۱۲۰ درجه باشد.

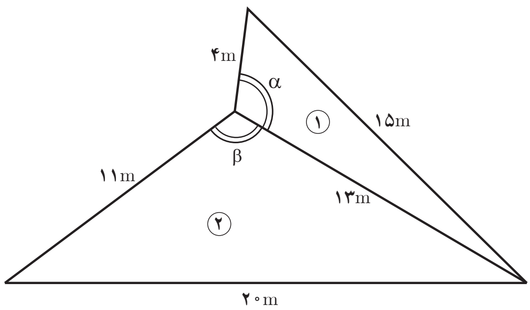
در رسم زیر وجود این دو زاویه را نشان می‌دهیم. ابتدا یک زاویه ۳۰° رسم می‌کنیم و یک ضلع آن را ۶ سانتی‌متر جدا می‌کنیم. از نقطه C به شعاع $۲\sqrt{۳}$ کمانی می‌زنیم. این کمان در دو نقطه ضلع دیگر زاویه را قطع می‌کند.



۲ دو زمین کوچکی به شکل مثلث، با یک دیوار به طول ۱۳ متر، مطابق شکل، از هم جدا شده است. ابعاد زمین‌ها در شکل مشخص شده است. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر است؟

نشان دهید دیوار مشترک، با لبه‌های ۴ متری و ۱۱ متری، زاویه‌های برابر می‌سازد. $(\alpha=\beta)$ (تمرین ۲ درس چهارم)

حل : حل زیر توسط دانش‌آموز انجام شده است :



$$P_۱ = \frac{۱۱+۱۳+۲۰}{۳} = ۲۲$$

$$S_۱ = \sqrt{۱۲\times۱۱\times۹\times۲} = ۶۶$$

$$P_۲ = \frac{۴+۱۵+۱۳}{۲} = ۱۶$$

$$S_۲ = \sqrt{۱۶\times۱۲\times۱\times۳} = ۲۴$$

$$S=S_۱+S_۲=۶۶+۲۴=۹۰$$

$$\begin{aligned} S_۱ &= \frac{۱}{۲}\times۱۳\times۱۱\times\sin\beta \\ S_۲ &= \frac{۱}{۲}\times۱۳\times۴\times\sin\alpha \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} ۶۶ = \frac{۱}{۲}\times۱۳\times۱۱\times\sin\beta \\ ۲۴ = \frac{۱}{۲}\times۱۳\times۴\times\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{۶۶}{۲۴} = \frac{۱۱\sin\beta}{۴\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{۶۶\times۴}{۲۴\times۱۱} = ۱$$

پس از اینکه دانش‌آموز در حل مسئله به نتیجه فوق رسید، به اشتباه از تساوی سینوس‌های دو زاویه، تساوی زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرد :

$$\sin\beta = \sin\alpha \Rightarrow \alpha=\beta$$

در اینجا لازم است معلم به این مهم اشاره کند که در این دو مثلث اگر $\sin\alpha = \sin\beta$ آنگاه نمی‌توان نتیجه گرفت که $\alpha=\beta$ زیرا امکان دارد زاویه‌های α و β مکمل یکدیگر باشند.

منابع

۱ کتاب هندسه، مویزوادنز، ترجمه محمود دیانی، انتشارات فاطمی، چاپ چهارم، ۱۳۸۲.
۲ دایرةالمعارف هندسه، رستمی، محمدهاشم، انتشارات مدرسه، جلد هشتم، ۱۳۷۲.
۳ هندسه متوسطه، مبانی و مفهوم‌ها، نصیری، محمود، انتشارات مبتکران، ۱۳۹۴.
۴ تبدیل‌های هندسی، ریاضیات پیش‌دانشگاهی ــ۸ــ ای.م. یاگلم، ترجمه اسدالله کارشناس و عمیدرسولیان، مرکز نشر دانشگاهی، ۳ جلد.
۵ رستمی، محمدهاشم، دایرةالمعارف هندسه، انتشارات مدرسه وابسته به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، جلد پنجم.
۶ قراگزلو، جلیل‌ا...، مثلثات پایه، انتشارات فاطمی.

۷ Byer, O., Lazebnik, F., & Smeltzer, D. L. (2010). Methods for Euclidean geometry. MAA.

۸ Dodge, C. W. (2012). Euclidean geometry and transformational. Courier Corporation.

۹ Hvidsten. M. (2005). Geometry with geometry explorer™. McGraw-Hill.

۱۰ Kinsey, L. C., Moore. T. E., & Prassidis. S. (2011). Geometry & symmetry. John Wiley & Sons.

۱۱ Libeskind, S. (2008). Euclidean and transformational geometry: A deductive inquiry. Jones & Bartlett Publishers.

۱۲ Martin, G. E. (2012). The foundations of geometry and the non-Euclidean plane. Springer Science & Business Media.

۱۳ O'Leary, M.L. (2010). Revolutins of Geometry (Vol. 87). John Wiley & Sons.

۱۴ Posamentier. A. S. (1984). Excursions in advanced Euclidean geometry Addison - Wesley.

۱۵ Tapp, K. (2011). Symmetry: a mathematical exploration. Springer Science & Business Media.

۱۶ Umble, R. N., & Han, Z. (2014). Transformational Plane Geometry. CRC Press.