فصل ۱

استاتیک و دینامیک کاربردی

نوع درس: نظری

کل ساعات: ۳۰ساعت

ساعات نظری: ۳۰ ساعت

کمیت‌های فیزیکی معمولاً برداری یا نرده‌ای هستند. با توجه به شناخت خود از این نوع کمیت‌ها، جای خالی را در عبارت‌های زیر کامل کنید.

۱ کمیت نرده‌ای

کمیتی را گویند که فقط دارای مقدار باشد و محاسبات روی مقادیر آنها از اعمال جبری تبعیت کند.

مانند: جرم، طول، زمان، بارالکتریکی.

کمیت‌های نرده‌ای نیز مانند اعداد محاسبه می‌شوند ولی در محاسبات باید یکای آنها نیز در نظر گرفته شود و برای تمام کمیت‌های یک رابطه از یک دستگاه یکا استفاده شود.

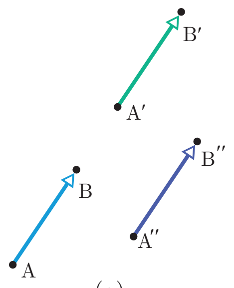
۲ کمیت برداری

به کمیت‌هایی که دارای مقدار ، راستا و جهت بوده و از محاسبات برداری تبعیت کنند ، کمیت‌های برداری گویند. جابه‌جایی، سرعت، شتاب، نیرو و... از کمیت‌های برداری هستند.

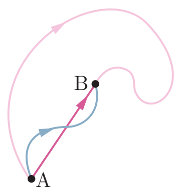
یک **بردار** دارای جهت و بزرگی است و از قواعد خاصی پیروی می‌کند. یک کمیت برداری، کمیتی است که جهت و بزرگی دارد و بنابراین، می‌تواند با استفاده از بردار نمایش داده شود. برخی کمیت‌های برداری در فیزیک عبارت‌اند از؛ جابه‌جایی، سرعت و شتاب.

همهٔ کمیت‌های فیزیکی شامل جهت نیستند. برای مثال دما، فشار، انرژی، جرم و زمان از جملهٔ این کمیت‌ها هستند. ما این کمیت‌ها را **اسکالر** می‌نامیم. قواعد حاکم بر این کمیت‌ها از همان جبر معمولی پیروی می‌کند.

ساده‌ترین کمیت برداری جابه‌جایی یا تغییر مکان است. برداری که جابه‌جایی را نشان می‌دهد، **بردار جابه‌جایی** نامیده می‌شود. اگر ذره‌ای از مکان A به مکان B جابه‌جا شود (شکل صفحهٔ بعد)، بردار جابه‌جایی آن با یک پیکان که از A به B کشیده شده است نشان داده می‌شود. در شکل(a) صفحهٔ بعد، سه بردار نشان داده شده از نظر بزرگی و جهت یکسان هستند. بنابراین بردار نشان داده شده نمایشگر تغییر مکان یکسانی برای ذره است. بردار جابه‌جایی چیزی دربارهٔ مسیر حرکت به ما نمی‌گوید. برای مثال شکل(b)صفحهٔ بعد، مسیرهای متفاوتی را نشان می‌دهد که بردار جابه‌جایی آن یکی است.



(a)



(b)

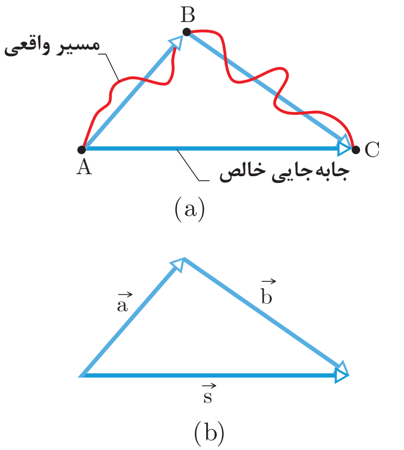
(a هر سه بردار بزرگی و جهت یکسان دارند. **(b** هر سه مسیر توسط یک بردار جابه‌جایی نشان داده شده است.

جمع بردارها

فرض کنید که در نمودار برداری شکل صفحهٔ بعد، یک ذره از A به B و سپس از B به C حرکت می‌کند. ما می‌توانیم این جابه‌جایی را با دو بردار جابه‌جایی AB و BC نشان دهیم. جابه‌جایی خالص ناشی از این دو بردار، یک جابه‌جایی از A به C است. ما AC را بردار حاصل جمع یا بردار برآیند بردارهای AB و BC می‌نامیم.
یک روش برای نشان دادن بردارها، استفاده از حروف و قرار دادن یک پیکان بالای سر آنهاست (شکل (b)). هنگامی که ما فقط می‌خواهیم به بزرگی بردارها اشاره کنیم، فقط حروف (بدون پیکان بالای آنها) را به کار می‌بریم.
ما می‌توانیم روابط بین سه بردار شکل (b)، را به صورت معادلهٔ برداری زیر بنویسیم:

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

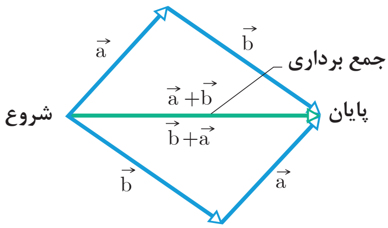
شکل صفحهٔ بعد، روش جمع دو بردار را به صورت هندسی پیشنهاد می‌کند. (۱) بردار a را با همان بزرگی و جهت ترسیم کنید. (۲) بردار b را به گونه‌ای که دم آن در راس بردار a باشد رسم کنید. (۳) بردار حاصل جمع s برداری است که دم a را به رأس b متصل می‌کند.



a) بردار **AC** جمع دو بردار **AB** و **BC** است. **(b** نمایش همان بردارها با نماد جدید

جمع برداری شرح داده شده به روش بالا، دو ویژگی مهم دارد. اول اینکه، ترتیب اضافه کردن بردارها اهمیتی ندارد (شکل زیر). به عبارت دیگر:

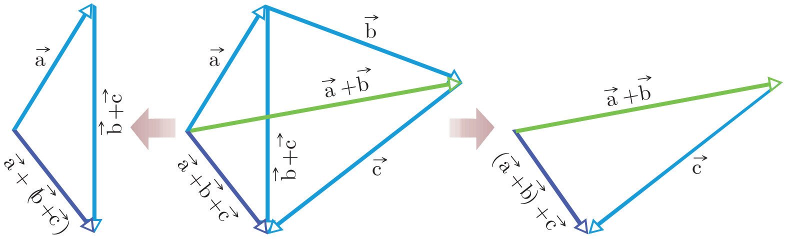
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$



ترتیب در جمع برداری اهمیتی ندارد.

دوم اینکه، وقتی بیش از دو بردار وجود داشته باشد، می‌توانیم به هر ترتیبی آنها را با هم جمع کنیم.بنابراین برای بردارهای شکل صفحهٔ بعد، در روش اول ما می‌توانیم ابتدا دو بردار a و b را با هم جمع کنیم و سپس حاصل جمع را با بردار c جمع کنیم. همچنین در روش دوم ما می‌توانیم ابتدا بردارهای b و c را با هم جمع کنیم، سپس حاصل جمع این دو بردار را با بردار a جمع کنیم. با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم که در هر دو روش نتیجهٔ یکسانی حاصل می‌شود:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

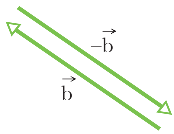


سه بردار نشان داده شده به هر روشی می‌توانند با هم جمع شوند.

تفاضل بردارها

بردار b- برداری است با بزرگی برابر با بردار b اما در جهت مخالف آن (شکل زیر).
با جمع کردن دو بردار نشان داده شده در شکل ۵، خواهیم داشت:

$$\vec{b}+(-\vec{b})=0$$



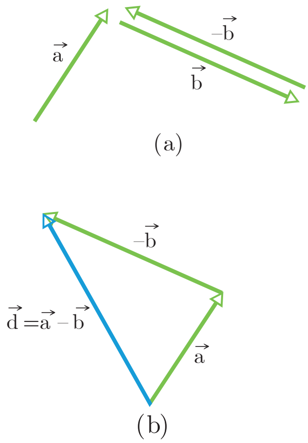
نمایش بردارهای b و b-

بنابراین ما می‌توانیم از این ویژگی برای تعریف تفاضل (تفریق) بردارها استفاده کنیم:

$$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

شکل روبه‌رو، نمایش هندسی این تفاضل را نشان می‌دهد. همانند جبر معمولی، ما می‌توانیم با تغییر علامت بردارها، آنها را از یک طرف تساوی به طرف دیگر جابه‌جا کنیم

$$\vec{a}=\vec{d}+\vec{b} \quad \text{یا} \quad \vec{d}+\vec{b}=\vec{a}$$



نمایش هندسی تفاضل بردارها

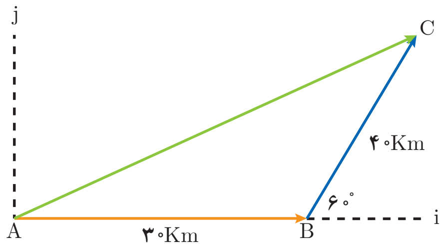
یادآوری می‌کنیم که، قواعد جمع و تفاضل بردارها فقط برای بردارهای همنوع برقرار است. به عبارت دیگر ما می‌توانیم این قواعد را فقط برای بردارهای همنوع به کار ببریم. برای مثال، ما می‌توانیم دو بردار جابه‌جایی یا دو بردار سرعت را با هم جمع کنیم. اما نمی‌توانیم یک بردار جابه‌جایی را با بردار سرعت جمع کنیم.

حل تمرین

کشتی حامل بار از جزیره A به اندازه ۳۰ کیلومتر در جهت شرق حرکت کرده و به جزیره B می‌رسد و بعد از آن ۴۰ کیلومتر در جهت شمال و به سمت شرق (با زاویه ۶۰ درجه نسبت به شرق) حرکت کرده و به جزیره C می‌رسد. (شکل زیر)

۱ بردار جابه‌جایی AC را محاسبه کنید.

۲ اگر کشتی بخواهد به طور مستقیم از جزیره A به C برود، باید با چه زاویه‌ای نسبت به محور افق حرکت کند و چه مسافتی را طی کند؟



برای به‌دست آوردن بردار جابه‌جایی AC، دو بردار AB و BC را به‌صورت مؤلفه‌های i و j می‌نویسیم:

$AB = ۳۰i$

$BC = ۴۰ \cos(۶۰°)\, i + ۴۰ \sin(۶۰°)\, j$

به دلیل اینکه ابتدای بردار BC در انتهای بردار AB رسم شده است در نتیجه برای به دست آوردن بردار جابه‌جایی AC به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$AC = AB + BC$

اگر $\sqrt{۳} \cong ۱/۷$

$$AC = ۳۰i + \left((۴۰ \times \frac{۱}{۲})i + (۴۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲})j \right) = ۵۰i + ۳۴j$$

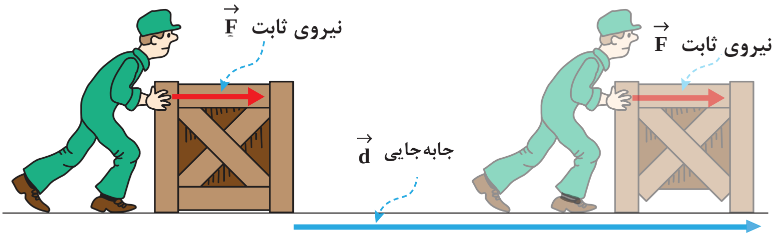
زاویه حرکت و مسافت طی شده از A و C به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\theta = \text{Arc}\tan\left(\frac{۳۴}{۵۰}\right) = ۳۴/۲۱^\circ$$

$$|AC| = \sqrt{(۵۰)^۲ + (۳۴)^۲} = ۶۰/۴۶$$

کار نیروی ثابت

برای حالتی که نیروی وارد شده به جسم (F)، ثابت و با جابه‌جایی جسم (d) در یک جهت باشد، کار نیروی ثابت از رابطه زیر به‌دست می‌آید:



$$W = F.d$$

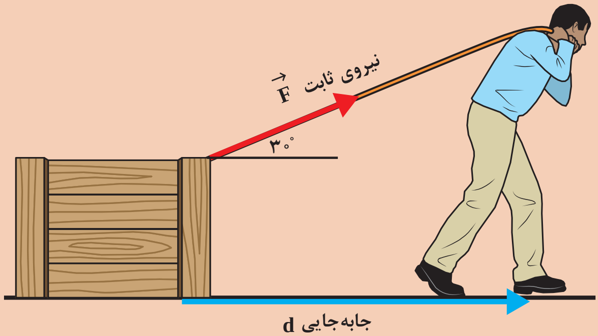
مثال

مطابق شکل بالا، کارگری جعبه‌ای را با نیروی ثابت ۲۲۵ نیوتن، به اندازه ۱۴ متر روی سطح افقی جابه‌جا می‌کند. کار انجام شده توسط این نیرو چقدر است؟

حل مثال

$$W = Fd = (۲۲۵N)(۱۴/۰m) = ۳/۱۵ \times ۱۰^۳J$$

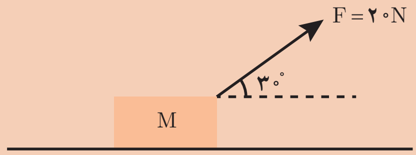
برای حالتی که نیروی وارد بر جسم (F) با جابه‌جایی (d) زاویه بسازد، کار نیرو در این جابه‌جایی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:



$$W = F.d.\cos\theta$$

مثال

مطابق شکل زیر نیرویی ۲۰ نیوتنی با زاویه ۳۰ درجه به جسمی به جرم ۴ کیلوگرم وارد می‌شود و آن را به اندازه ۴ متر جابه‌جا می‌کند. کار نیروی F چقدر است؟



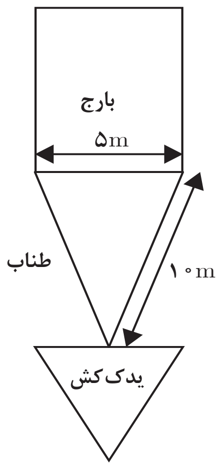
$$W = F\cos ۳۰\, d = ۲۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴ = ۴۰\sqrt{۳}\ N.m$$

حل تمرین

برای حمل ۵۰۰۰ تن زغال سنگ بین دو جزیره A و B به مسافت ۲۰ کیلومتر، از یک یدک‌کش استفاده شده که با دو طناب به قطر $۳cm^۲$ و طول ۱۰m به بارج وصل شده است. اگر یدک‌کش با نیروی ۲۰ کیلو نیوتن بارج را یدک کند:

۱ کار انجام شده توسط یدک‌کش چه مقدار می‌باشد؟

۲ در صورتی که فاصله بسته شدن طناب‌ها به بارج ۵ متر باشد، نیروی وارده بر هر یک از طناب‌ها چه مقدار خواهد بود؟



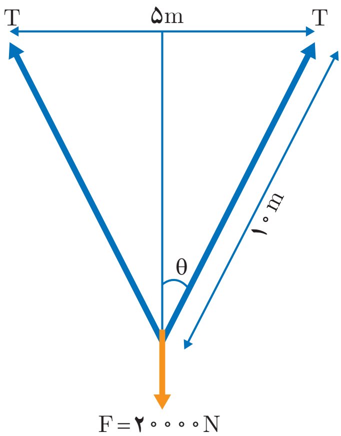
۳ مقاومت کششی این طناب‌ها حداقل چه مقدار باید باشد؟

در این تمرین نیز جهت جابه‌جایی نیرو با هم یکی است در نتیجه مقدار کار انجام شده برابر است با:

$F = ۲۰\ KN = ۲۰۰۰۰\ N \qquad d = ۲۰\ Km = ۲۰۰۰۰\ m$

$W = F.d = ۲۰۰۰۰ \times ۲۰۰۰۰ = ۴ \times ۱۰^{۸}\ N.m$

برای به‌دست آوردن نیروی وارد بر هر طناب به صورت زیر عمل می‌شود:



$$F = ۲T\cos\theta$$

$$\theta = \text{Arcsin}(\frac{۲/۵}{۱۰}) \cong ۱۴/۵^\circ$$

$$۲۰۰۰۰ = ۲ \times T \times \cos(۱۴/۵)$$

$$T = ۱۰۳۲۹N$$

مقاومت کششی نهایی یا مقاومت کششی عبارت است از بیشینه تنشی که یک جسم در هنگام کشیده شدن از طرفین، تا قبل از اینکه مقطع نمونه، به صورت قابل‌توجهی باریک شود، می‌تواند تحمل کند. مقاومت کششی همانند تنش تعریف می‌شود که یکای اندازه‌گیری آن برحسب نیرو بر واحد سطح است.

$$P = \frac{T}{A}(\frac{N}{m^۲})$$

در این تمرین مقدار حداقل مقاومت کششی طناب از فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$$P = \frac{T}{A} = \frac{T}{\pi r^۲} = \frac{۱۰۳۲۹}{\pi \times (۳)^۲} \cong ۳۶۵/۵(\frac{N}{cm^۲}) = ۳۶۵/۵ \times ۱۰^۶(\frac{N}{m^۲})$$

تعادل اجسام

واژه تعادل به معنی حالتی از سکون (عدم تغییر) یا توازن به‌علت برابری عمل نیروهای مخالف با هم است. در سیستمی که دو یا چند عامل متضاد در حال رقابت با هم هستند و شرایط حاکم بر سیستم به گونه‌ای است که با پیشرفت نتیجه به نفع یک عامل، شرایط برای پیشرفت بیشتر نتیجه به نفع آن عامل دشوارتر می‌شود، در نهایت سیستم به تعادل یا به حالتی از توازن خواهد رسید که در آن

نیروهای مخالف در حال رقابت با هم اثر همدیگر بر روی کمیت‌های بیان‌کننده یا توصیف‌کننده حالت سیستم را خنثی خواهند کرد.
اجسامی که در حال سکون‌اند یا با سرعت ثابت و بدون چرخش در حال حرکت‌اند، در حال تعادل می‌باشند.
شرط‌های لازم و کافی برای تعادل یک جسم صلب:
در حالت تعادل، سیستم نیروهای خارجی وارد بر جسم صلب نه می‌تواند آن را انتقال دهد و نه به حرکت دورانی وادارد.

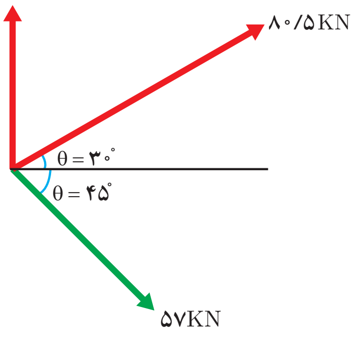
$$\sum F = 0 \quad \sum M_O = \sum (r \times F) = 0$$

با تجزیه نیروها و گشتاورها به مؤلفه‌های قائم، شش معادله تعادل داریم:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

حل تمرین
برآیند نیروهای وارد بر نبشی‌های پایه یک دکل نفتی در خلیج فارس را به دست آورید.

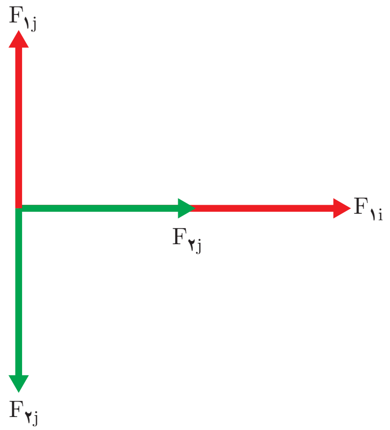


$$F_1 = 80/5 KN$$

$$F_1 = 80/5\cos(30°)i + 80/5\sin(30°)j$$

$$F_2 = 57 KN$$

$$F_2 = 57\cos(-45°)i + 57\sin(-45°)j$$



$$F_{۱۲} = (F_۱ + F_۲)i + (F_۱ + F_۲)j$$

$$F_{۱۲} = (۸۰/۵\cos(۳۰°)i + ۵۷\cos(-۴۵°)i) + (۸۰/۵\sin(۳۰°) + ۵۷\sin(-۴۵°)j)$$

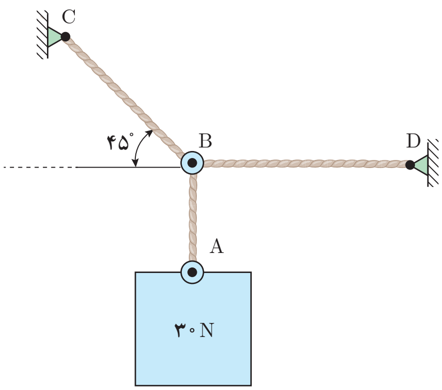
$$= F_{۱۲} = (۱۱۰/۰۲)i + (۰/۰۵)j$$

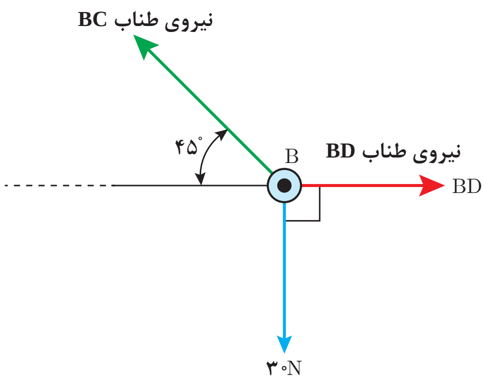
روش حل مسائل تعادل

به منظور بررسی تعادل اجسام، لازم است ابتدا جسم را از محیط اطراف خود جدا نموده و نیروهای وارد بر آن را در راستاهای موجود نمایش دهیم که به این عمل، ترسیم پیکر آزاد جسم گفته می‌شود.

حل تمرین

در شکل زیر وزنهٔ ۳۰N توسط سه طناب AB و BC و BD نگهداری شده است. مقدار نیروی وارد بر هریک از رشته‌ها را به‌دست آورید.





$$\sum F_x = ۰ \rightarrow BD\cos ۴۵ - BC = ۰ \rightarrow BC = BD\cos ۴۵$$

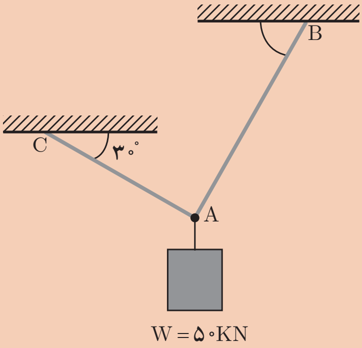
$$\sum F_y = ۰ \rightarrow BD\cos ۴۵ - ۳۰ = ۰ \rightarrow BD \cong ۴۲/۵N$$

$$\rightarrow BC = BD\cos ۴۵ \rightarrow BC \cong ۳۰/۰۵N$$

هنرآموزان می‌توانند از مثال زیر نیز استفاده کنند.

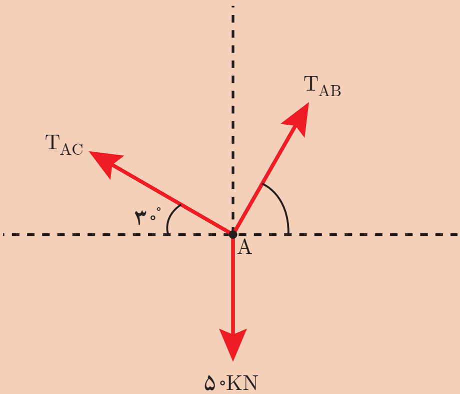
مثال

کشش کابل‌های AC و AB را در سامانهٔ در حال تعادل زیر به دست آورید.

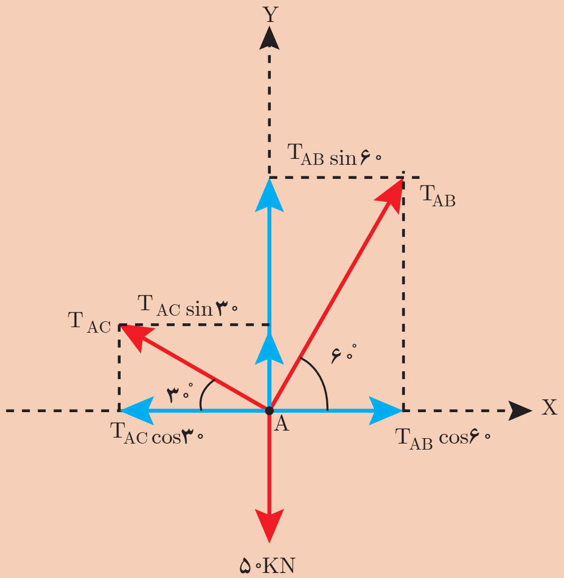


حل

گام اول: با توجه به این موضوع که تمامی نیروها به نقطه A وارد می‌شوند بنابراین پیکر آزاد نقطه A ترسیم می‌گردد. می‌دانیم که کابل‌ها همیشه رفتار کششی دارند بنابراین نیروی کابل‌های AB و AC را به ترتیب با T_{AB} و T_{AC} به صورت کششی و زوایای هر کدام را نمایش می‌دهیم.



گام دوم: تعیین محورهای مختصات x و y روی نقطه A و تجزیه نیروها در این دستگاه مختصات



گام سوم: تشکیل معادلات تعادل و حل آنها تا رسیدن به خواسته‌های مسئله

رابطه I: $\sum \overset{+}{\rightarrow} F_x = ۰ \Rightarrow T_{AB}\cos ۶۰^\circ - T_{AC}\cos ۳۰^\circ = ۰$

رابطه II: $+\!\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow T_{AB}\sin ۶۰^\circ + T_{AC}\sin ۳۰^\circ - ۵۰ = ۰$

چون حل هر یک از معادلات فوق با وجود دو مجهول امکان‌پذیر نیست بنابراین آنها را در یک دستگاه دو معادله دو مجهولی قرار داده که با استفاده از روش‌های مختلف قابل حل است.

در اینجا از معادله اول یکی از مجهولات را برحسب دیگری محاسبه و در معادله دوم قرار می‌دهیم تا یکی از مجهولات حذف شود:

رابطه III:

از رابطه I نتیجه می‌شود $\Rightarrow T_{AB} = \dfrac{T_{AC}\cos ۳۰}{\cos ۶۰} \Rightarrow T_{AB} = ۱/۷۳\, T_{AC}$

مقدار T_{AB} را در رابطه II قرار داده خواهیم داشت:

$$1/73T_{AC} \times \sin 60^\circ + T_{AC}\sin 30^\circ - 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2T_{AC} - 50 = 0$$

$$T_{AC} = \frac{50}{2}$$

$$\Rightarrow T_{AC} = 25kN$$

حال مقدار T_{AC} را در رابطهٔ III قرار می‌دهیم:

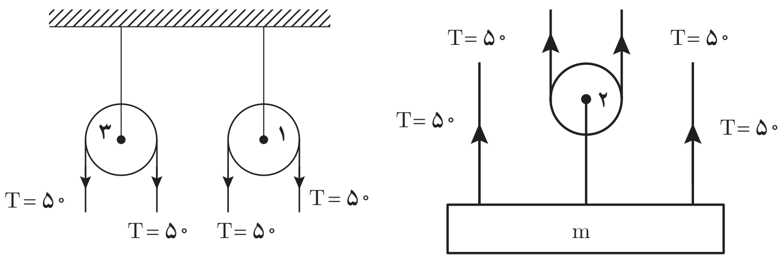
از رابطهٔ III $\Rightarrow T_{AB} = 1/73 \times 25$

$$\Rightarrow T_{AB} = 43/25\ kN$$

حل تمرین

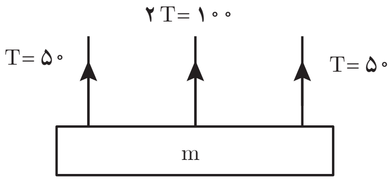
در شکل نشان داده شده جسمی به جرم m به وسیله سیستم قرقره‌ها ثابت نگه داشته می‌شود جرم جسم را به‌دست آورید.

به دلیل اینکه جسم در حال تعادل است در نتیجه با در نظر گرفتن جسم آزاد و نیروهای کنش و واکنش در قرقره و طناب می‌توان مقدار وزن جسم را به‌دست آورد.



(۱) (۲)

در نتیجه مقدار وزن جسم (mg) برابر ۴T و ۲۰۰ نیوتن خواهد بود.



تعادل جسم صلب

برای اینکه یک جسم صلب در حال تعادل باشد باید شرایط زیر برقرار باشد.

۱ برای اینکه جسم در راستای محور x جابه‌جایی نداشته باشد باید: $\leftarrow\ \sum F_x = ۰$

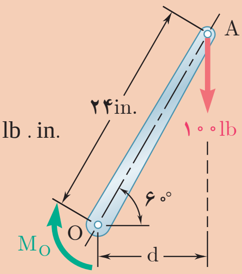
۲ برای اینکه جسم در راستای محور y جابه‌جایی نداشته باشد باید: $\leftarrow\ \sum F_y = ۰$

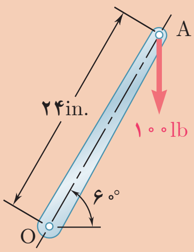
۳ برای اینکه جسم چرخش نداشته باشد باید: $\leftarrow\ \sum M = ۰$

هنرآموزان می‌توانند از مثال زیر نیز استفاده کنند.

مثال

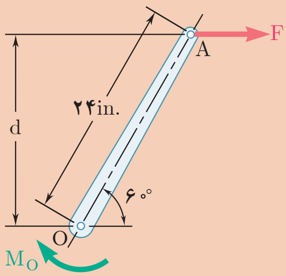
به سر اهرمی که به محوری در نقطه O متصل شده است، یک نیروی عمودی ۱۰۰lb وارد می‌شود. (الف) گشتاور این نیرو حول O چقدر است؟ (ب) به A چه نیروی افقی وارد شود تا همان گشتاور را حول نقطه O ایجاد کند؟ (ج) کوچک‌ترین نیروی وارد به نقطه A چقدر باید باشد تا همان گشتاور را حول نقطه O ایجاد کند؟ (د) به چه فاصله از محور نیروی عمودی ۲۴۰lb بایستی وارد شود تا همان گشتاور را حول نقطه O ایجاد کند؟





d = (۲۴ in.) cos ۶۰° = ۱۲in.

M_O = Fd = (۱۰۰ lb)(۱۲in.) = ۱۲۰۰ lb . in.

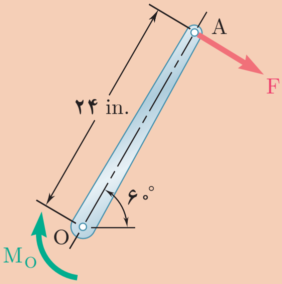


d = (۲۴ in.) sin ۶۰° = ۲۰/۸ in.

M_O = Fd

۱۲۰۰ lb . in. = F(۲۰/۸ in.)

F = ۵۷/۷ lb

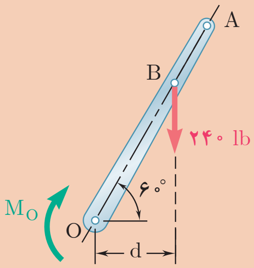


M_O = Fd

۱۲۰۰ lb . in. = F(۲۴ in.)

F = ۵۰ lb

F = ۵۰ lb C۳۰°



۱۲۰۰ lb . in. = (۲۴۰ lb)d　　　d = ۵ in.

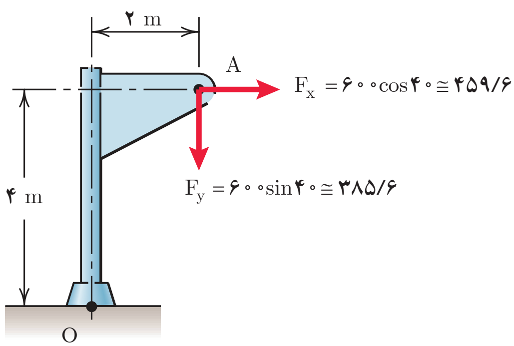
OB cos ۶۰° = d

OB = ۱۰ in.

حل تمرین

مطابق شکل نیرویی به اندازه ۶۰۰N به ستون وارد می‌شود. گشتاور حاصل از این نیرو را در نقطه O به دست آورید.

ابتدا نیروی ۶۰۰ نیوتن را به دو مؤلفه افقی و عمودی تقسیم می‌کنیم.



حال برای به‌دست آوردن مقدار گشتاور از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

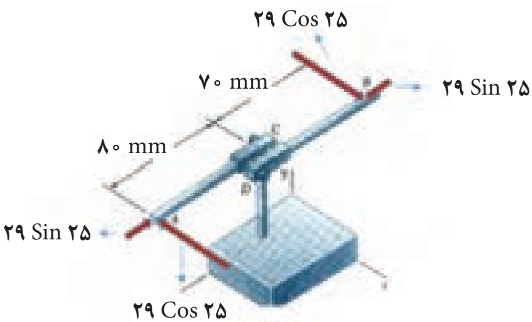
$$\sum M_O = F_x \times ۴ + F_y \times ۲ = ۴۵۹/۶ \times ۴ + ۳۵۸/۶ \times ۲ = ۲۵۵۶/۲\ N.m$$

راه‌حل دوم این است که فاصله عمودی نیروی ۶۰۰ نیوتنی را از نقطه O به‌دست آوریم؛ با ضرب نیروی ۶۰۰ نیوتنی در این فاصله مقدار گشتاور به‌دست خواهد آمد.

حل تمرین

مکانیکی با اعمال نیروی افق نشان داده شده بر دسته قلاویز، در حال قلاویزکردن سوراخی است. برایند نیروها و گشتاور اعمالی به قلاویز چه مقدار خواهد بود:

ابتدا نیروی ۲۹ نیوتن را به دو مؤلفه تقسیم می‌کنیم که مؤلفه ۲۹cos۲۵ عمود بر دسته قلاویز است و مؤلفه ۲۹sin۲۵ در راستای دسته قلاویز است. از این دو مؤلفه فقط مؤلفه ۲۹cos۲۵ باعث ایجاد گشتاور می‌شود.



$$\sum M_O = ۲۹\cos ۲۵ \times ۸۰ + ۲۹\cos ۲۵ \times ۷۰ = ۲۱۰۲/۶ + ۱۸۳۹/۸ = ۳۹۴۲/۴ \ N/mm$$

محاسبه عکس‌العمل تکیه‌گاهی اجسام صلب

- برای یک جسم صلب در حال تعادل استاتیکی، نیروهای خارجی و گشتاورها به یک توازنی دست پیدا می‌کنند که هیچ‌گونه حرکت انتقالی و یا چرخشی در جسم ایجاد نشود.
- شرایط لازم و کافی برای تعادل استاتیکی یک جسم، تشکیل سیستم معادل نیرو و گشتاور برآیند برابر صفر در اثر اعمال همه نیروهای خارجی است.

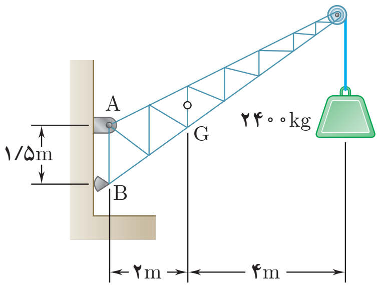
$$\sum \vec{F} = ۰ \qquad \sum \vec{M}_O = \sum \left(\vec{r} \times \vec{F} \right) = ۰$$

- با تجزیه تمام نیروها و گشتاورها به مؤلفه‌های متعامد، ۶ معادله اسکالر برای توصیف شرایط تعادل به دست می‌آید:

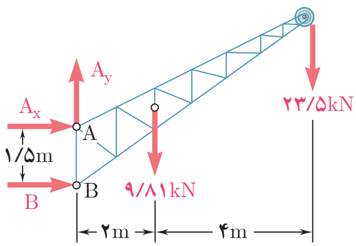
$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0$$
$$\sum M_x = 0 \qquad \sum M_y = 0 \qquad \sum M_z = 0$$

برای به‌دست آوردن نیروها مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

- اولین گام در تحلیل تعادل استاتیک، تشخیص تمام نیروهای وارد بر جسم با استفاده از نمودار پیکره آزاد جسم است.
- ابتدا جسم را از زمین و تمامی اجسام دیگر جدا کنید.
- نقطه اثر، اندازه و جهت نیروهای خارجی از جمله وزن جسم صلب را مشخص کنید.



- نقطه اثر و جهت نیروهای اعمالی نامعلوم را مشخص کنید. این نیروها معمولاً عکس‌العمل از طرف زمین و یا اجسام دیگری است که از حرکت احتمالی جسم صلب جلوگیری می‌کنند.
- اندازه طول‌های لازم برای محاسبه گشتاورهای نیرو مشخص شود.



برای محاسبه نیروی تکیه‌گاهی یک مثال به طور کامل در کتاب آورده شده است و هنرآموزان می‌توانند از این دو مثال نیز استفاده کنند.

مثال

قابی برای نگهداری بخشی از سقف یک ساختمان کوچک به‌کار رفته است. چنانچه کشش کابل ۱۵۰kN باشد، عکس‌العمل در تکیه‌گاه ثابت E را تعیین کنید.

$$\sum F_x = ۰: \quad E_x + \frac{۴/۵}{۷/۵}(۱۵۰kN) = ۰$$

$E_x = -۹۰/۰\ kN$

$$\sum F_y = ۰: \quad E_y - ۴(۲۰kN) - \frac{۶}{۷/۵}(۱۵۰kN) = ۰$$

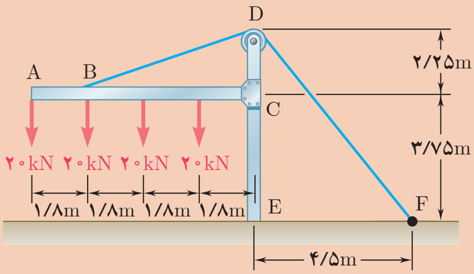
$E_y = +۲۰۰\ kN$

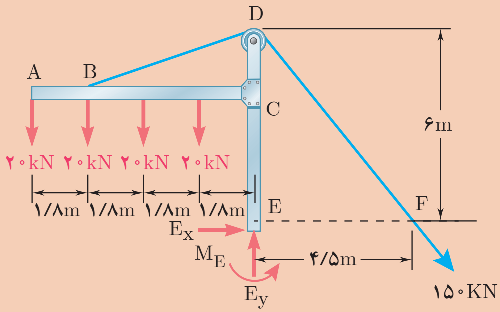
$$\sum M_E = ۰: \quad +۲۰kN(۷/۲m) + ۲۰kN(۵/۴m)$$

$$+ ۲۰kN(۳/۶m) + ۲۰\ kN(۱/۸m)$$

$$-\frac{۶}{۷/۵}(۱۵۰kN)۴/۵m + M_E = ۰$$

$M_E = ۱۸۰kN.m$





مثال

یک جرثقیل ثابت با جرم ۱۰۰۰kg برای بالا بردن جعبه‌ای به جرم ۲۴۰۰kg به کار می‌رود. یک تکیه‌گاه پین در نقطه A و یک تکیه‌گاه گهواره‌ای در نقطه B قرار دارد. اگر مرکز ثقل این جرثقیل در نقطه G باشد مؤلفه‌های عکس‌العمل در تکیه‌گاه‌های A و B را پیدا کنید.

$$\sum M_A = ۰: +B(۱/۵m) - ۹/۸۱kN(۲m)$$

$$-۲۳/۵kN\ (۶m) = ۰$$

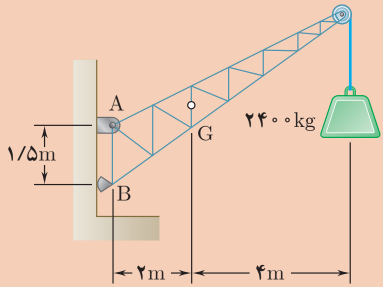
$$B = +۱۰۷/۱kN$$

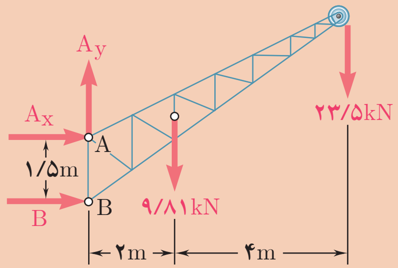
$$\sum F_x = ۰: \ A_x + B = ۰$$

$$A_x = -۱۰۷/۱kN$$

$$\sum F_y = ۰: \ A_y - ۹/۸۱kN - ۲۳/۵kN = ۰$$

$$A_y = +۳۳/۳kN$$

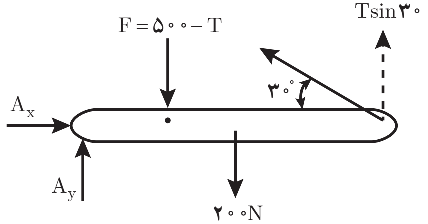




حل تمرین

جسم C به وزن ۵۰۰N بر روی تیر AB به وزن ۲۰۰N مطابق شکل تکیه کرده است کشش در طناب را حساب کنید.

نیروی تکیه‌گاهی در نقطه A را به‌دست آورید.



$$\sum M_A^{+} = ۰$$

$$\cancel{T\sin ۳۰^\circ}^{\,۰/۵} \times ۴ - ۲۰۰ \times ۲ - (۵۰۰ - T) \times ۱ = ۰$$

$$۲T - ۴۰۰ - ۵۰۰ + T = ۰ \Rightarrow ۳T = ۹۰۰ \Rightarrow \boxed{T = ۳۰۰}$$

$$\sum F_x = ۰$$

$$-T\cos ۳۰^\circ + A_x = ۰$$

$$-۳۰۰ \times ۰/۸۶ + A_x = ۰ \Rightarrow \boxed{A_x = ۲۵۸N}$$

$$\sum F_y = ۰ \qquad \boxed{۵۰۰ - T = ۲۰۰}$$

$$T\sin ۳۰^\circ - ۲۰۰ - ۲۰۰ + A_y = ۰ \Rightarrow \boxed{A_y = ۲۵۰N}$$

خرپا

خرپا (**Truss**) سازه‌ای صلب و مثلثی شکل می‌باشد که اعضای آن مستقیم و بدون انحنا بوده و اتصال اعضای آن با یکدیگر به صورت مفصل (لولا) می‌باشد.

خرپاها توانایی تحمل نیروهای کششی و فشاری را دارند و تحت اثر نیروهای وارد شده تغییر هندسی نمی‌دهند مگر آنکه یکی از اعضای آن خم شود یا بشکنند.

به دلیل نوع اتصال **اعضای خرپا** به صورت مفصل با یکدیگر نیروی گشتاور در **خرپا** تأثیری ندارد و به همین دلیل **خرپاها** جزء سازه‌های سادهٔ باربر محسوب

می‌شوند که در پل‌ها، سقف‌ها، در سواله‌هایی با دهانه‌های بلند و سازه‌های هوافضا کاربرد دارند. **خرپاها** به دلیل سه عضوی و مثلثی شکل بودنشان پایدار می‌باشند ولی اشکالی که دارای چهار عضو یا بیشتر باشند ناپایدار بوده و تحت اثر نیروهای وارد شده فرو می‌ریزند.

هر خرپا برای حمل بارهای درون صفحهٔ خود طراحی شده است، بنابراین، ممکن است به‌عنوان سازهٔ دوبُعدی رفتار کند. به‌طور کلی، اعضای خرپا باریک‌اند و می‌توانند خمش کمی را تحمل کنند (خمش‌هایی که به‌دلیل بارهای جانبی ایجاد می‌شوند). بنابراین، تمام بارها به جای اینکه مستقیماً بر اعضا وارد شوند، باید بر اتصالات مختلف اعمال شوند. این طور فرض می‌شود که وزن اعضای خرپا بر محل اتصالت وارد می‌شوند؛ نصف وزن هر عضو به هر کدام از دو اتصال عضو وارد می‌شود. در اغلب تجزیه و تحلیل‌های اولیهٔ خرپا، وزن اعضا، به این دلیل که در مقایسه با بارهای وارده کوچک هستند، نادیده گرفته می‌شود.

به طور خلاصه، در تجزیه و تحلیل اولیهٔ خرپا موارد زیر فرض می‌شود:

۱ اعضا خطی هستند.

۲ اعضا دارای اتصالات مفصلی هستند.

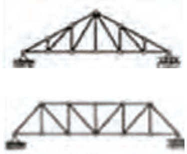
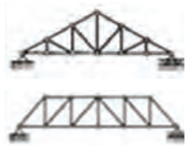
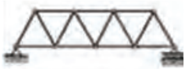
۳ وزن اعضای خرپا اغلب نادیده گرفته می‌شود.

۴ بارها فقط بر محل اتصال اعضا وارد می‌شوند.

۵ تنش ثانویه در اتصالات نادیده گرفته می‌شود.

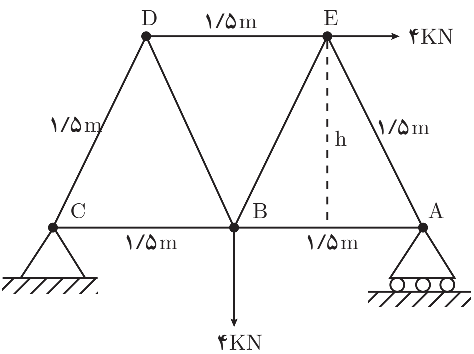
بنابراین، هر عضو خرپا ممکن است به عنوان عضو دونیرویی رفتار کند، و کل خرپا به عنوان گروهی از اعضای دونیرویی با اتصال مفصلی در نظر گرفته شود. این‌طور فرض می‌شود که بارهای اعضای دونیرویی فقط بر مفصل انتهایی آنها وارد می‌شوند؛ نیروی برآیند در عضو، باید در راستای محور عضو باشد. هر عضو ممکن است در معرض نیروهایی فشاری یا کششی باشد.

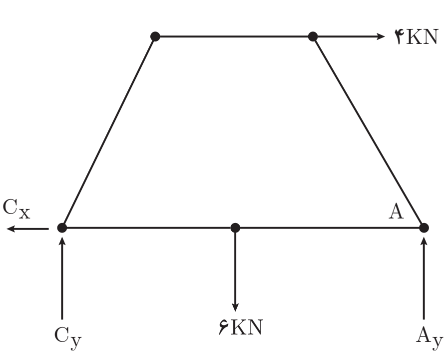
مدل‌های خرپا

نوع خرپا	شکل خرپا	جنس خرپا	محل استفاده	توضیحات
پرات (Pratt)		معمولاً فولاد، در بعضی موارد چوب	معمولاً در سقف و پل	دهانه حداکثر در حدود ۳۰ الی ۶۰ متر
هاو (Howe)		معمولاً چوب	معمولاً در سقف، در گذشته برای سخت پل نیز مورد استفاده بود	دهانه حداکثر حدود ۳۰ متر
فینک (Fink)		معمولاً فولاد	معمولاً در سقف	معمولاً دهانه در حدود ۲۰ متر
قوسی (Bowst ring)		معمولاً فولاد	معمولاً در سقف	معمولاً برای سقف انبارها و گاراژها، دهانه ممکن است به ۳۰ متر برسد.
وارن (Warren)		فولاد	معمولاً در پل	دهانه تا حدود ۶۰ متر

حل تمرین

نیروهای داخلی اعضای خرپای نشان داده شده را به‌دست آورید.





چون در مثلث‌ها سه ضلع برابر است زوایای آنها ۶۰ درجه می‌باشد.

$h = ۱/۵ \times \sin ۶۰^\circ = ۱/۵ \times ۰/۸۶ = \boxed{۱/۳}$

$\sum M_c^{+} = ۰$

$-۴ \times ۱/۳ + A_y \times ۳ - ۶ \times ۱/۵ = ۰$

$-۵/۲ + ۳_y - ۹ = ۰ \Rightarrow A_y = \frac{۱۴/۲}{۳} = \boxed{۴/۷۳}$

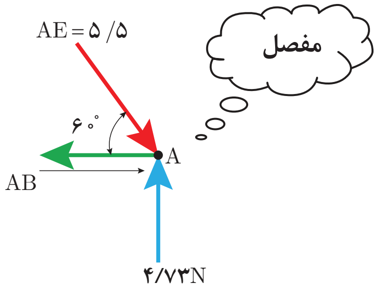
$\sum F_x = ۰$

$\sum F_y = ۰$

$C_y - ۶ + ۴/۷۳ = ۰$

$C_x + ۴ = ۰ \Rightarrow \boxed{C_x = -۴N}$

$C_y = ۶ - ۴/۷۳ = \boxed{۱/۱۷}$



$\sum F_y = ۰$

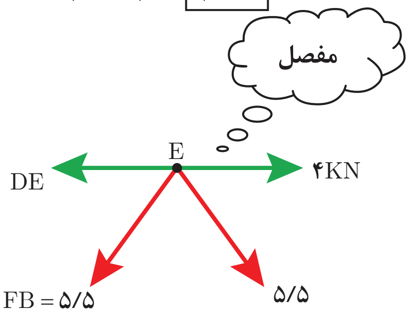
$AE \sin ۶۰^\circ + ۴/۷۳ = ۰$

$AE = \frac{-۴/۷۳}{۰/۸۶} = \boxed{-۵/۵}$

$\sum F_x = ۰$

$-AB + AE \cos ۶۰^\circ = ۰$

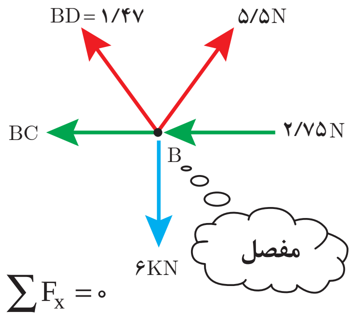
$AB = ۵/۵ \times ۰/۵ = \boxed{۲/۷۵N}$



$\sum F_y = ۰$

$۵/۵ \sin ۶۰^\circ - EB \sin ۶۰^\circ = ۰$

$\boxed{EB = ۵/۵}$



$$\sum F_y = ۰$$

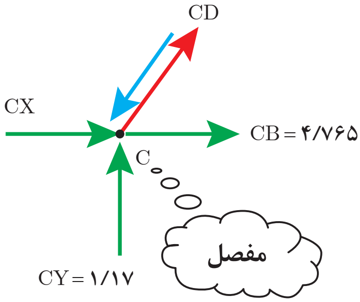
$$۵/۵\sin۶۰^\circ - ۶ + BD\sin۶۰^\circ = ۰$$

$$BD = \frac{-۵/۵ \times ۰/۸۶ + ۶}{۰/۸۶} = \boxed{۱/۴۷KN}$$

$$\sum F_x = ۰$$

$$۲/۷۵ + ۵/۵\cos۶۰^\circ - ۱/۴۷\cos۶۰^\circ - BC = ۰$$

$$BC = ۴/۷۶۵$$



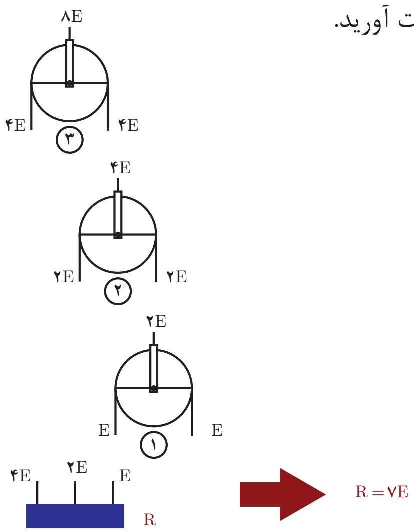
$$\sum F_y = ۰$$

$$۱/۱۷ + CD\sin۶۰^\circ = ۰$$

$$CD = \frac{-۱/۱۷}{۰/۸۶} = \boxed{-۱/۳۶N}$$

حل تمرین

در دستگاه زیر بهره مکانیکی را به‌دست آورید.



$$MA = \frac{R}{E} = \frac{۷E}{E} = ۷$$