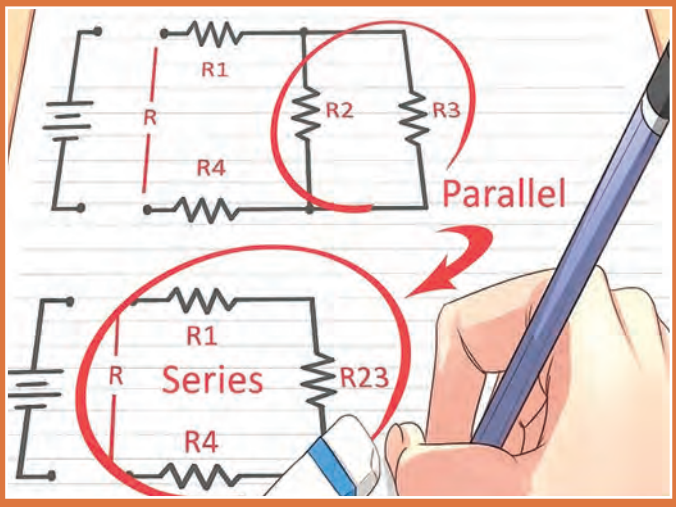
فصل ۲

تحلیل مدارهای الکتریکی



واحد یادگیری ۲

تحلیل مدارهای الکتریکی

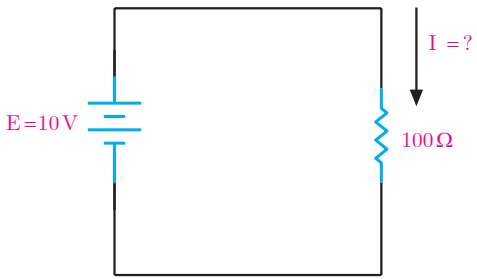
نوع درس: نظری ■ **کل ساعت:** ۳۰ ساعت ■ **ساعت نظری:** ۳۰ ساعت

سؤالات پیشنهادی

- طبق قانون اهم چه رابطه‌ای بین مقاومت و ولتاژ وجود دارد؟
- مدارهای سری و موازی مقاومت‌ها چه مشخصاتی دارند؟
- قوانین کیرشهف در مدارهای الکتریکی چه کاربردی دارند؟
- عناصر فعال و غیرفعال در مدارهای الکتریکی‌چه نقشی دارند؟
- مدارهای جریان مستقیم با چه روش‌هایی تحلیل می‌شوند؟
- منابع ولتاژ و جریان به چه صورت به یکدیگر تبدیل می‌شوند ؟
- معادل تونن و نورتن مدارهای جریان مستقیم چگونه به دست می‌آید؟

کار در کلاس:

به دو سر یک مقاومت ۱۰۰Ω، ولتاژی برابر با ۱۰ ولت وارد می‌کنیم (مطابق شکل زیر)، جریان گذرنده از مدار چند میلی‌آمپر است؟

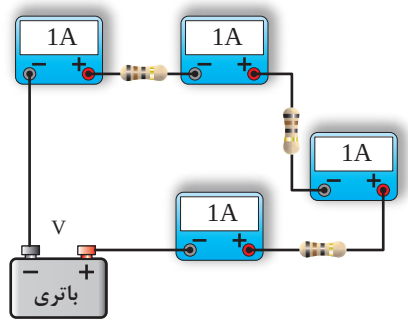


پاسخ:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{۱۰}{۱۰۰} = ۰/۱A = ۱۰۰mA$$

کار در کلاس:

با توجه به آموخته‌های خود دربارهٔ مدار سری، مدار موجود در شکل زیر را بررسی و دربارهٔ آن بحث کنید.

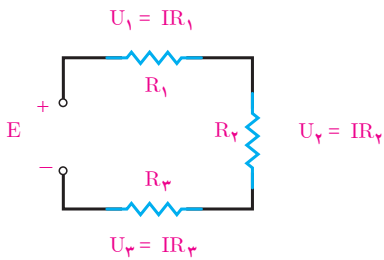


پاسخ

در یک مدار سری شدت جریان، همانند سرعت در قطار، در همهٔ نقاط مدار یکسان است؛ یعنی، جریان وارد شده در هر نقطه از مدار سری با جریان خارج شده از همان نقطه برابر است. بنابراین، اگر، مطابق شکل بالا در نقاط مختلف یک مدار سری آمپرمترهایی قرار دهیم، همه یک جریان را نشان می‌دهند.

کار در کلاس:

درشکل روبه‌رو، مقاومت معادل را اثبات کنید.



پاسخ:

در مدار شکل بالا ولتاژ منبع با جمع افت ولتاژهای دو سر مقاومت‌ها برابر است.

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$E = U_1 + U_2 + U_3 \qquad (1)$$

با توجه به قانون اهم داریم:

(۲)

$$E = I \times R_T \, , \, U_1 = IR_1 \, , \, U_2 = IR_2 \, , \, U_3 = IR_3$$

مقادیر روابط ۲ را در رابطهٔ ۱ قرار می‌دهیم.

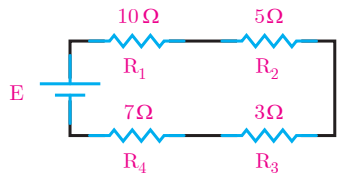
$$IR_T = IR_1 + IR_2 + IR_3$$

با حذف جریان‌ها از طرفین تساوی به رابطه مقاومت معادل می‌رسیم.

$$I(R_T) = I(R_1 + R_2 + R_3) \qquad R_T = R_1 + R_2 + R_3$$

کاردر کلاس:

مقاومت معادل را در مدار شکل زیر به دست آورید.



پاسخ:

$$R_T = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

$$R_T = ۱۰ + ۵ + ۲ + ۳ = ۲۰\Omega$$

تحقیق کنید:

ولتاژ دو سر مقاومت از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

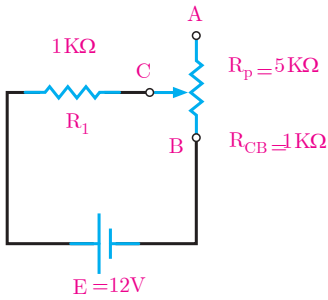
پاسخ:

ولتاژ دوسر مقاومت R_1 را نسبت به ولتاژ کل در مدار سری مشخص می‌کند. مقدار ولتاژ دوسر R_2 برابر است با:

$$U_2 = E\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

کاردر کلاس:

شدت جریان مدار شکل روبه‌رو را در حالت‌های زیر به دست آورید:



۱ سر لغزندهٔ C در نقطهٔ A قرار دارد.

۲ سر لغزندهٔ C در نقطهٔ B قرار دارد.

۳ سر لغزندهٔ بین A و B قرار دارد و آن را دو قسمت می‌کند.

پاسخ:

حالت ۱:

$$R_T = R_۱ + R_P = ۱K\Omega + ۵K\Omega = ۶K\Omega$$

$$I = \frac{۱۲V}{۶\times ۱۰^{۳}} = ۲mA$$

حالت ۲:

$$R_T = R_۱ + R_{CB} = ۱K\Omega + ۱K\Omega = ۲K\Omega$$

$$I = \frac{۱۲V}{۲\times ۱۰^{۳}} = ۶mA$$

حالت ۳:

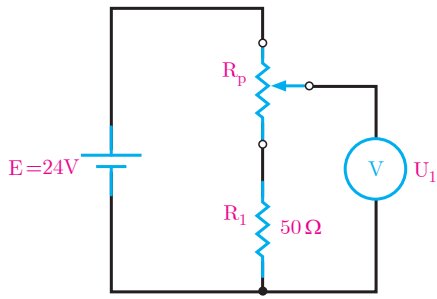
$$R_T = R_۱ + \frac{R_P}{۲} = ۱ + ۲/۵ = ۳/۵K\Omega$$

$$I = \frac{۱۲}{۳/۵} = ۳/۴mA$$

از کار درکلاس فوق مشخص می‌شود که مقاومت مدار در حالت ۱ برابر $۶K\Omega$ و شدت جریان $۲mA$ است. در حالت ۲ مقاومت مدار کاهش یافته و به $۲K\Omega$ رسیده‌است، در نتیجه، شدت جریان افزایش می‌یابد و به $۶mA$ می‌رسد. در حالت ۳ مقدار مقاومت بین حالت ۱ و ۲ قرار دارد و جریان مدار ۳/۴ میلی‌آمپر است. بنابراین، با قرار گرفتن یک رئوستا به‌طور سری در مدار، شدت جریان کنترل می‌شود.

کار در کلاس:

در شکل زیر برای دریافت ولتاژ از ۶ تا ۲۴ ولت، چه پتانسیومتری را در مدار قرار می‌دهید؟



پاسخ:

$$U_1 = E\frac{R_1}{R_1 + R_P}$$

$$U_1(R_1 + R_P) = ER_1 \rightarrow U_1R_1 + U_1R_P = ER_1$$

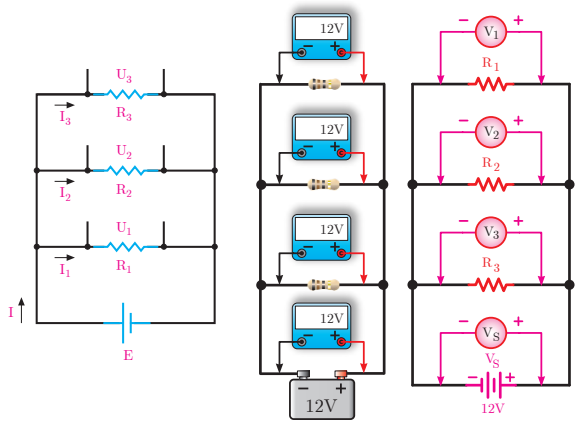
$$U_1R_P = ER_1 - U_1R_1$$

$$R_P = \frac{R_1(E - U_1)}{U_1}$$

$$R_P = ۵۰ \times \frac{(۲۴ - ۶)}{۶} = \frac{۵۰ \times ۱۸}{۶} = ۱۵۰\Omega$$

کار در کلاس:

ویژگی‌های مدارهای سری را بنویسید و در کلاس به بحث بگذارید.



پاسخ:

۱ شدت جریان در تمام نقاط مدار یکسان و برابر $\frac{U_T}{R_T}$ است.

$I_T = I_1 = I_2 = ... = I_n$

۲ مقاومت کل (معادل) از جمع مقاومت‌های جزء مدار حاصل می‌شود و برابر است با:

$R_T = R_1 = R_2 = ... = R_n$

۳ ولتاژ کل از جمع افت ولتاژهای جزء مدار به دست می‌آید.

$E = U_1 = U_2 = ... = U_n$

۴ افت ولتاژ دو سر مقاومت‌های جزء با مقدار مقاومت‌های مدار نسبت مستقیم دارد.

$$U_1 = E\frac{R_1}{R_T} \quad , \quad U_2 = E\frac{R_2}{R_T} \quad , \quad U_n = E\frac{R_n}{R_T}$$

۵ توان کل با جمع توان‌های جزء مدار برابر است.

$P_T = P_1 = P_2 = ... = P_n$

۶ در مقاومت کل (معادل) از بزرگ‌ترین مقاومت مدار نیز بزرگ‌تر است.

۷ قطع (باز) شدن مدار در یک نقطه باعث قطع جریان کل مدار می‌شود.

کار در کلاس:

در شکل کار در کلاس صفحه قبل مدارهای سری مقاومت معادل را اثبات کنید.

پاسخ:

مقاومت معادل:

مقاومت کل (معادل) در مدار موازی، مقاومتی است که به جای مقاومت‌های موازی قرار می‌گیرد و شدت جریان کل مدار را تغییر نمی‌دهد. در مدار موازی، با افزایش شاخه‌های مدار تعداد مسیرهای جریان زیادتر می‌شود و شدت جریان کل افزایش می‌یابد. در شکل ۳۲ جریان کل و جریان شاخه‌ها مشخص شده‌است.

مدار شکل ۱ را با سه مقاومت R_1، R_2 و R_3 در نظر می‌گیریم.

در مدار موازی ولتاژ منبع با ولتاژ دو سر شاخه‌ها برابر است و جریان کل از مجموع

جریان‌های شاخه‌ها به دست می‌آید. با توجه به این نکات می‌توانیم رابطه مربوط به مقدار مقاومت معادل را به‌دست آوریم.

$$E = U_1 = U_2 = U_3 \quad (1)$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (2)$$

طبق قانون اهم می‌توان نوشت:

$$I = \frac{E}{R_t} \ , \ I_1 = \frac{E}{R_1} \ , \ I_2 = \frac{E}{R_2} \ , \ I_3 = \frac{E}{R_3}$$

مقادیر معادل جریان‌ها را در رابطه ۲ می‌گذاریم:

$$\frac{E}{R_t} = \frac{E}{R_1} = \frac{E}{R_2} = \frac{E}{R_3}$$

با فاکتورگیری و حذف E از طرفین تساوی، به رابطه ۳ می‌رسیم.

$$\frac{E}{R_t} = E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$\frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

کار در کلاس:

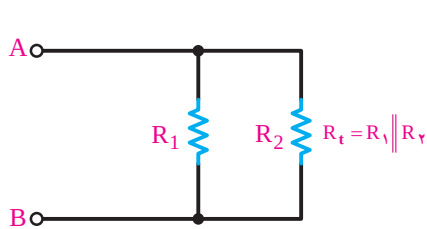
حالات خاص مقاومت معادل بین دو مقاومت موازی را بنویسید.

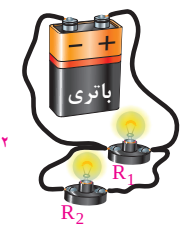
پاسخ:

الف) رابطه مقاومت معادل بین دو مقاومت موازی شکل زیر به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_t} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \rightarrow R_t = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$





ب) در صورتی که مقاومت‌های موازی شده باهم مساوی باشند، مقاومت معادل به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{R_t}=\frac{۱}{R_۱}+\frac{۱}{R_۲}+\frac{۱}{R_۳}+\cdots+\frac{۱}{R_n}$$

تا n

$$\frac{۱}{R_t}=\frac{۱}{R}(۱+۱+\cdots n)$$

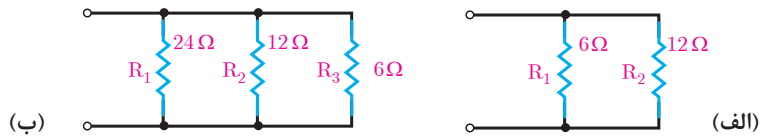
$$\frac{۱}{R_t}=\frac{۱}{R}\times n=\frac{n}{R}$$

$$R_t=\frac{R}{n}$$

n تعداد مقاومت‌های موازی شده و R یکی از مقاومت‌هاست.

کار در کلاس:

مقاومت معادل مدارهای شکل زیر را به‌دست آورید.



پاسخ:

مقاومت معادل مدار الف برابر است با:

$$R_t=\frac{R_۱R_۲}{R_۱+R_۲}=\frac{۶\times۱۲}{۶+۱۲}=\frac{۷۲}{۱۸}=۴\Omega$$

همچنین در مدار ب مقاومت معادل برابر است با:

$$\frac{۱}{R_t}=\frac{۱}{R_۱}+\frac{۱}{R_۲}+\frac{۱}{R_۳}=\frac{۱}{۲۴}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۶}$$

$$\frac{۱}{R_t}=\frac{۱+۲+۴}{۲۴}=\frac{۷}{۲۴}$$

$$R_t=\frac{۲۴}{۷}=۳/۴۳\Omega$$

تحقیق کنید:

با توجه به روش به دست آوردن جریان I_2 بر حسب I و مقادیر مقاومت R_1 و R_2، اثبات کنید که:

$$I_2 = I\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

پاسخ:

I_2 نیز به ترتیب زیر به‌دست می‌آید.

$$I_2 = \frac{E}{R_2}$$

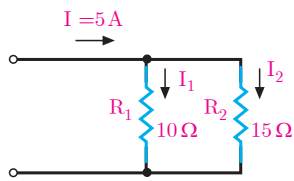
$$I_2 = \frac{I\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}{R_2} = I\frac{R_1R_2}{R_2(R_1 + R_2)}$$

با حذف R_2 از صورت و مخرج داریم:

$$I_2 = I\frac{R_1}{(R_1 + R_2)}$$

کار در کلاس:

شدّت جریان هر شاخه از مدار شکل روبه‌رو را به‌دست آورید.



پاسخ:

رابطه جریان شاخه R_1:

$$I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

جریان شاخه R_1:

$$I_1 = \frac{۵\times۱۵}{۱۵+۱۰}$$

جریان شاخه R_2:

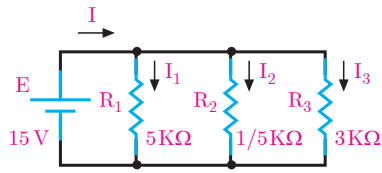
$$I_1 = \frac{۷۵}{۲۵} = ۳A$$

$$I_2 = I - I_1 = ۵ - ۳ = ۲A$$

$$I_2 = I\times\frac{R_1}{R_1 + R_2} = ۵\frac{۱۰}{۲۵} = ۲A$$

کار در کلاس:

در مدار شکل زیر شدّت جریان هر شاخه و شدت جریان کل را به‌دست آورید.



پاسخ:

$$I_۱ = \frac{E}{R_۱} = \frac{۱۵V}{۵\times۱۰^{+۳}} = ۳mA$$

$$I_۲ = \frac{E}{R_۲} = \frac{۱۵V}{۱/۵\times۱۰^{۳}} = ۱۰mA$$

$$I_۳ = \frac{E}{R_۳} = \frac{۱۵V}{۳\times۱۰^{۳}} = ۵mA$$

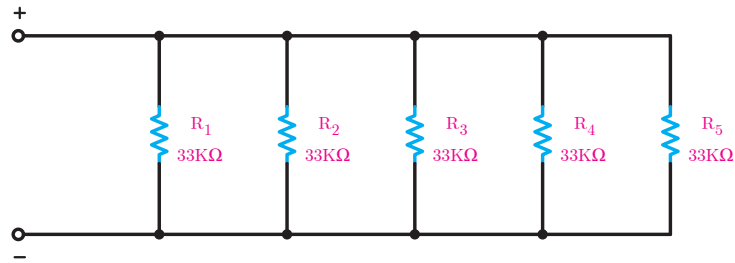
$$I = I_۱ + I_۲ + I_۳$$

$$I = ۳ + ۱۰ + ۵$$

$$I = ۱۸mA$$

ارزشیابی ۱

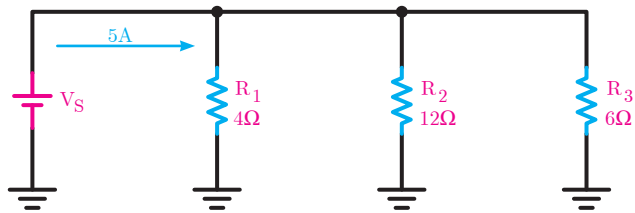
۱ مقاومت معادل را در شکل زیر به دست آورید.



پاسخ:

$$R_T = \frac{۳۳}{۵} = ۶/۶K\Omega$$

۲ با توجه به مدار شکل زیر، مقدار ولتاژ منبع تغذیه و ولتاژ هر یک از مقاومت‌ها را محاسبه کنید.



پاسخ:

$$\frac{۱}{R_T}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}$$

$$\frac{۱}{R_T}=\frac{۱+۳+۲}{۱۲}$$

$$\frac{۱}{R_T}=\frac{۶}{۱۲}$$

$$R_T=\frac{۱۲}{۶}=۲\Omega$$

$$V_S=۲\times۵=۱۰A$$

$$V_S=V_۱=V_۲=V_۳=۱۰V$$

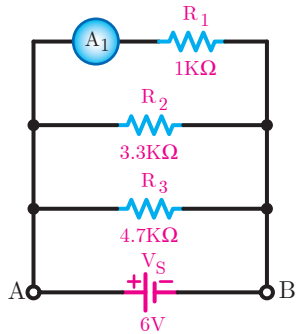
۳ جریان هر یک از مقاومت‌های شکل زیررا به دست آورید.

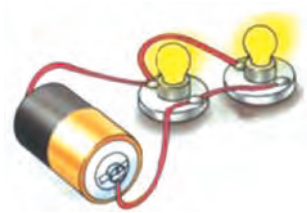
پاسخ:

$$I_۱=\frac{V_۱}{R_۱}=\frac{۶}{۱}=۶mA$$

$$I_۲=\frac{V_۱}{R_۲}=\frac{۶}{۳/۳}=۱/۸mA$$

$$I_۳=\frac{V_۱}{R_۳}=\frac{۶}{۴/۷}=۱/۲۷mA$$





۴ دو لامپ با مقاومت داخلی ۴ اهم مطابق شکل روبه‌رو با هم موازی و به باتری ۱/۵ ولتی متصل شده‌اند. در صورتی که جریان کل عبوری از مدار، ۱/۵ آمپر باشد، جریان هر یک از لامپ‌ها چقدر است؟

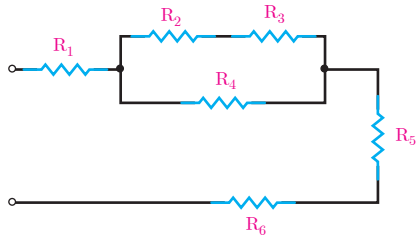
پاسخ:

$$I_C = \frac{۷۴}{RI}$$

$$I_۱ = I_۲ = \frac{۱/۵}{۲} = ۰/۷۵A$$

کار در کلاس:

در مدار شکل زیر مشخص کنید که کدام مقاومت‌ها با هم سری و کدام مقاومت‌ها با هم موازی هستند؟



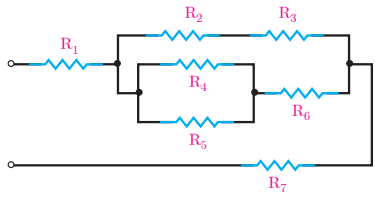
پاسخ:

$R_۲$ و $R_۳$ با هم سری، $R_{۲,۳}$ با $R_۴$ موازی و $R_۱$ و $(R_{۲,۳,۴})$ و $R_۵$ و $R_۶$ با هم سری‌اند.
خلاصه این توضیح را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$R_t = R_۱ + [(R_۲+R_۳)||R_۴] + R_۵ + R_۶$$

کار در کلاس:

در مدار شکل زیر مقاومت‌های سری و موازی را با استفاده از نمادهای تعریف شده بنویسید.

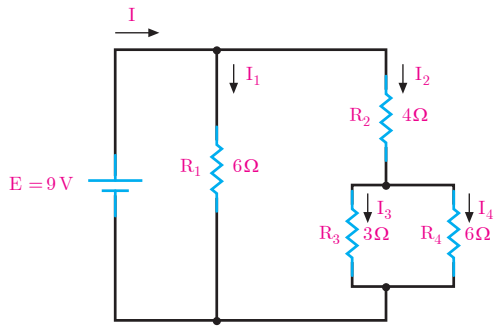


پاسخ:

$$R_t = R_۱ + \{(R_۲+R_۳)||[R_۴||R_۵) + R_۶]\} + R_۷$$

کار در کلاس:

مقاومت معادل، جریان کل و جریان هر شاخه از مدار شکل زیر را به‌دست آورید.



پاسخ:

$$R_{۳,۴} = R_۴ \| R_۳ = \frac{۳ \times ۶}{۳ + ۶} = ۲\Omega$$

$$R_{۳,۴} + R_۲ = ۲\Omega + ۴\Omega = ۶\Omega$$

مقاومت کل

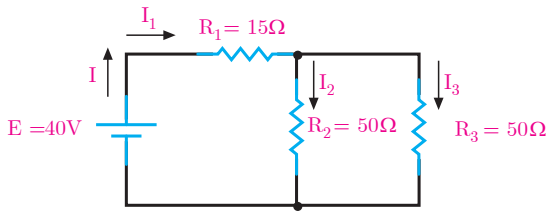
$$R_t = R_۱ \| R_{۲,۳,۴} = \frac{۶\Omega}{۲} = ۳\Omega$$

شدت جریان کل

$$I = \frac{E}{R_t} = \frac{۹V}{۳\Omega} = ۳A$$

کار در کلاس:

افت ولتاژ دوسر $R_۲$ و $R_۱$ را در مدار شکل زیر حساب کنید.



پاسخ:

با محاسبه مقاومت معادل، شدت جریان کل را به‌دست می‌آوریم.

$$R_{۲} \,||\, R_{۳} = \frac{۵۰\Omega}{۲} = ۲۵\Omega$$

$$R_t = R_۱ + R_{۲,۳}$$

$$R_t = ۱۵\Omega + ۲۵\Omega = ۴۰\Omega$$

$$I = \frac{E}{R_t} = \frac{۴۰V}{۴۰\Omega}$$

$$I = ۱A$$

افت ولتاژ دو سر $R_۱$ از حاصل‌ضرب شدت جریان عبوری از آن در مقدار $R_۱$ به‌دست می‌آید.

$$U_{R_۱} = R_۱ I_۱$$

$$I = I_۱ = ۱A$$

$$U_{R_۱} = ۱۵\Omega + ۱A = ۱۵V$$

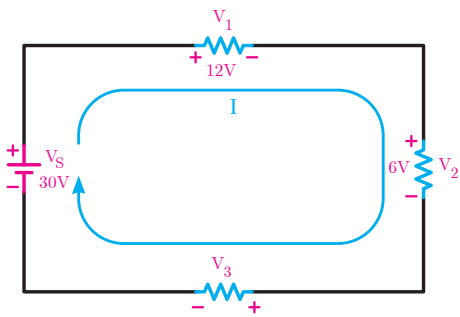
یا

$$U_{R_{۲,۳}} = U_{R_۲} = U_{R_۳} = E - U_{R_۱} = ۴۰ - ۱۵ = ۲۵V$$

قوانین کیرشهف

کار در کلاس:

مقدار ولتاژ $V_۳$ در شکل زیر چند ولت است؟



پاسخ:

$V_۱+V_۲+V_۳-V_s=۰$

$V_۱+V_۲+V_۳=V_s$

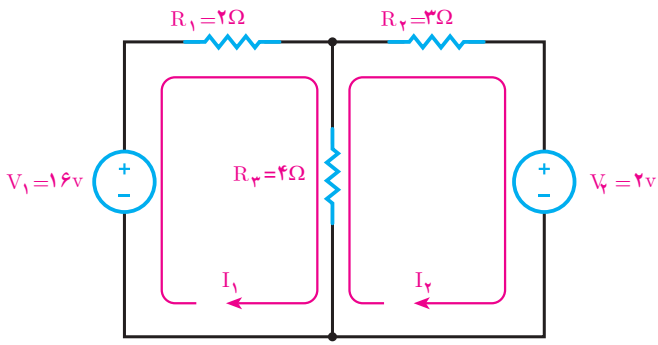
$V_۳ = V_s - (V_۱ +V_۲)$

$V_۳ = ۳۰ - (۱۲ +۶)$

$V_۳ = ۱۲V$

کار در کلاس:

در مدار شکل زیر توان هر یک از مقاومت‌های مدار را حساب کنید.



پاسخ:

الف) برای هر حلقه جریانی را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت منظور می‌کنیم و از یک نقطه در هر حلقه حرکت می‌کنیم و معادلات K.V.L را می‌نویسیم.

حلقه ۱ K.V.L

$R_۱I_۱ + R_۳ (I_۱ - I_۲) - V_۱ = ۰$

$\rightarrow ۲I_۱ + ۴(I_۱ - I_۲) - ۱۶ = ۰$

حلقه ۲ K.V.L

$R_۲I_۲ + V_۲ + R_۳(I_۲ - I_۱) = ۰$

$\rightarrow ۳I_۲ + ۳ + ۴(I_۲ - I_۱) = ۰$

ب) معادله‌ها را مرتب کرده و حل می‌کنیم.

$$\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\begin{cases}۶I_۱ - ۴I_۲ = ۱۶\\ -۴I_۱ + ۷I_۲ = ۲\end{cases} \quad \begin{cases}۱۲I_۱ - ۸I_۲ = ۳۲\\ -۱۲I_۱ + ۲۱I_۲ = -۶\end{cases}$$

$$۱۳I_۲ = ۲۶ \qquad I_۲ = ۲A$$

$$۶I_۱ - ۴\times۲ = ۱۶ \Rightarrow ۶I_۱ = ۲۴ \Rightarrow I_۱ = ۴A$$

پ) برای محاسبه توان هر یک از مقاومت‌ها باید ابتدا جریان‌های هر مقاومت را محاسبه سپس توان‌ها را به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$I_{R۱} = I_۱ = ۴A$$

$$I_{R۲} = I_۲ = ۲A \Rightarrow I_{R۳} = I_۳ = I_۱ I_۲ = ۴ - ۲ = ۲A$$

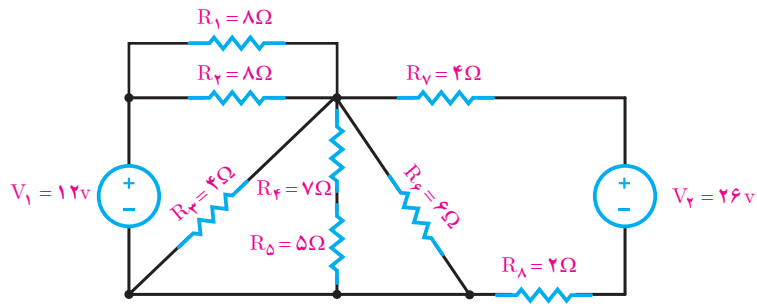
$$P_{R۱} = R_۱ \times I_R^۲ = ۲\times(۴^۲) = ۳۲W$$

$$P_{R۲} = R_۲ \times I_۲^۲ = ۳\times(۲^۲) = ۱۲W$$

$$P_{R۳} = R_۳ \times I_۳^۲ = ۴\times(۲^۲) = ۱۶W$$

کار در کلاس:

در مدار شکل زیر، توانی را که هر منبع به مدار می‌دهد حساب کنید.



پاسخ:

در این مدار چون تعداد مقاومت ها زیاد است و امکان ساده‌سازی را نیز دارد به همین دلیل ابتدا مدار را بر پایه قواعد سری و موازی تا حد امکان ساده می‌کنیم.

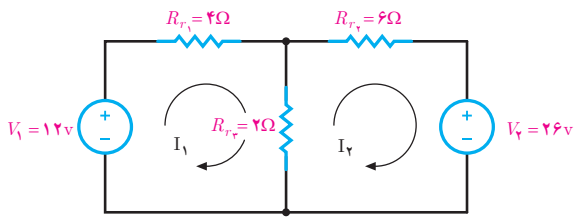
$$R_{T۱} = R_۱ \,||\, R_۲ = \frac{۸\times۸}{۸+۸} = \frac{۶۴}{۱۶} = ۴\Omega$$

$$R_{T۲} = R_۲ + R_۵ = ۷ + ۵ = ۱۲\Omega$$

$$R_{T۳} = R_۳ \,||\, R_{T۲} \,||\, R_۶ = (۱+x)^n = \frac{۱}{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۶}} = \frac{۱}{\frac{۳+۱+۲}{۱۳}} = ۲\Omega$$

$$R_{T۴} = R_۷ + R_۸ = ۴ + ۲ = ۶\Omega$$

شکل مدار پس از ساده‌سازی به‌صورت شکل زیر است.



با کمی دقت مشاهده می‌شود شکل مدار به‌دست آمده مشابه شکل بالا شده به همین خاطر بقیه مراحل را مطابق مثال قبل عمل می‌کنیم.

معادله حلقه ۱ $R_{T۱} \times I_۱ + R_{T۳}\,(I_۱ - I_۲) - V_۱ = ۰$

معادله حلقه ۲ $R_{T۴} \times I_۲ + V_۲ + R_{T۳}\,(I_۲ - I_۱) = ۰$

$۴I_۱ + ۲(I_۱ - I_۲) - ۱۲ = ۰$

$۶I_۲ + ۲۶ + ۲(I_۲ - I_۱) = ۰$

↓↓↓↓↓

$۶I_۱ - ۲I_۲ = ۱۲$

$-۲I_۱ + ۸I_۲ = -۲۶$

پس از مرتب‌سازی معادلات و حل دستگاه داریم:

$I_۱ = ۱A \;,\; I_۲ = -۳A$

علامت منفی جریان $I_۲$ نشان‌دهنده آن است که جهت انتخابی برای حلقه خلاف جهت واقعی فرض شده است.

برای محاسبه توان هر منبع باید به جهت جریان توجه داشت. چرا که بر اساس آن می‌توان مقدار و نوع توان را معین نمود. هر گاه جهت جریان به قطب مثبت منبع وارد شود علامت ولتاژ در رابطه $P = V \times I$ را مثبت و در صورتی که به قطب

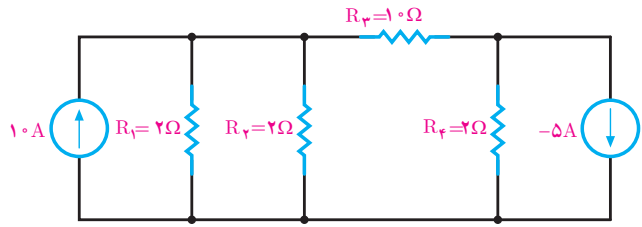
منفی وارد شود علامت آن را منفی منظور می‌کنیم چنان چه حاصل توان منفی باشد یعنی، مولد به شبکه توان می‌دهد و اگر توان مثبت شود، یعنی مولد، خود مصرف‌کننده شده است.

$$P_{V_1} = V_1 \times I_1 = (-12) \times 1 = -12W$$
$$P_{V_2} = V_2 \times I_2 = 26 \times (-3) = -78W$$

پس معلوم می‌شود که منبع ۱۲ ولت، ۱۲ وات و منبع ۲۶ ولت، ۷۸ وات توان به مدار می‌دهد در نتیجه، مشخص است که مقاومت‌های موجود در مدار در مجموع ۹۰ وات توان مصرف می‌کنند.

کار در کلاس:

در مدار شکل زیر، جریان را در مصرف کننده ۱۰ اهم حساب کنید.



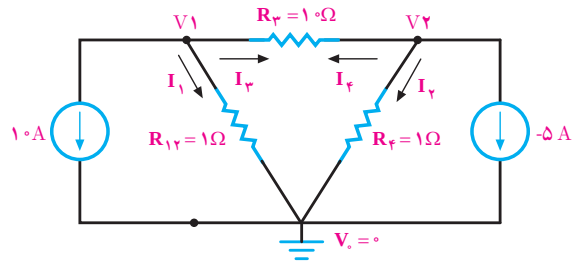
پاسخ:

الف) ابتدا مقاومت R_1 و R_2 را باهم موازی می‌کنیم و مدار را به‌صورت شکل زیر ساده می‌کنیم.

$$R_{12} = (R_1 \| R_2) = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \times 2}{2 + 2} = 1\Omega$$

ب)گره‌های مدار را تعیین می‌کنیم و به هر یک پتانسیلی را نسبت می‌دهیم.

پ) برای هر شاخه یک جهت جریان تعیین می‌کنیم.



ت) در این مدار سه گره داریم. پس KCL را برای گره‌های ۱و۲ می‌نویسیم و برای آنها معادله تشکیل می‌دهیم.

KCL گره ۱ $-۱۰ + I_۱ + I_۳ = ۰$ $\qquad -۱۰+\frac{V_۱}{۱}+\frac{V_۱ - V_۲}{۱۰}=۰$

KCL گره ۲ $+ I_۴ + I_۲ + (-۵) = ۰$ $\qquad +\frac{V_۲ - V_۱}{۱۰}+\frac{V_۲}{۲}+(-۵)=۰$

ث) معادله‌ها را مرتب کرده حل می‌کنیم تا $V_۱$ و $V_۲$ به‌دست آید.

$$\begin{cases} ۱۱V_۱ - V_۲ = ۱۰۰ \\ -V_۱ + ۶V_۲ = ۵۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_۱ = ۱۰V \\ V_۲ = ۱۰V \end{cases}$$

ج) اکنون جریان مقاومت ۱۰ اهم به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$I_{۱۰\Omega} = \frac{V_۱ - V_۲}{۱۰} = \frac{۱۰-۱۰}{۱۰} = ۰A$$

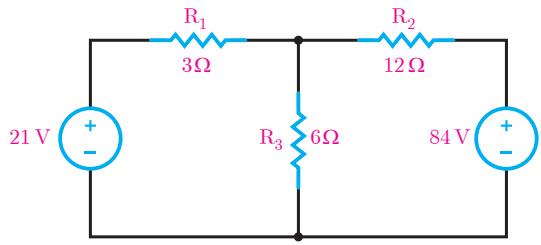
پس در این مدار از مقاومت ۱۰Ω جریانی عبور نمی‌کند. البته در رابطه‌های بالا می‌شد $\frac{V_۲ - V_۱}{۱۰}$ هم نوشت که در این صورت جهت جریان به‌دست آمده از سمت گره ۲ به سمت گره ۱ تعیین می‌شد. به هرحال، در این مثال خاص که مقدار جریان صفر است، هیچ مسئله‌ای نیز در مورد جهت جریان وجود ندارد.

نتیجه:

اگردرمداری تعداد حلقه ها زیاد ولی تعداد گره‌ها کم باشد، استفاده از روش پتانسیل گره مناسب‌تر است، اگر تعداد حلقه‌ها کمتر از تعداد گره‌ها باشد، استفاده از روش جریان حلقه بهتر است؛ زیرا معادلات کمتری تشکیل می‌شود و حل کردن آنها ساده‌تر است.

کار در کلاس:

در مدار شکل زیر جریان را در مقاومت‌های R_1 و R_2 و R_3 و توان و ولتاژ مقاومت ۶ اهم را محاسبه کنید.

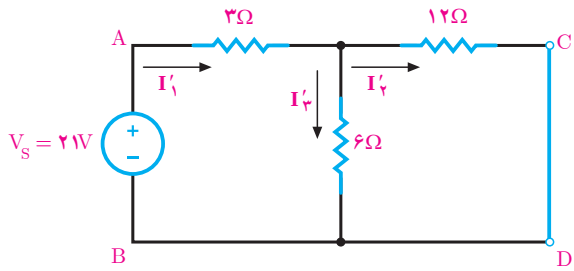


پاسخ:

الف) ابتدا بجز یک منبع (مثلاً ۲۱v) بقیهٔ منابع را از مدار حذف می‌کنیم.

حال برای هرعنصرجریانی رادرنظر می‌گیریم و آنها را مطابق روش‌هایی که قبلاً آموخته‌ایم.

حساب می‌کنیم.



می‌بینیم مقاومت ۶ اهمی به‌صورت موازی با مقاومت ۱۲ اهمی و مجموعه آنها به‌صورت سری با مقاومت ۲ اهمی قرار دارد.

$$R_{AB} = \frac{۱۲ \times ۶}{۱۲ + ۶} + ۳ = ۷\Omega$$

$$I'_۱ = \frac{۲۱}{۷} = ۳A$$

$$I'_۲ = I'_۱ \times \frac{۱۲}{۱۲ + ۶} = ۳ \times \frac{۱}{۳} = ۱A$$

$$I'_۳ = ۳ \times \frac{۱۲}{۱۲ + ۶} = ۲A$$

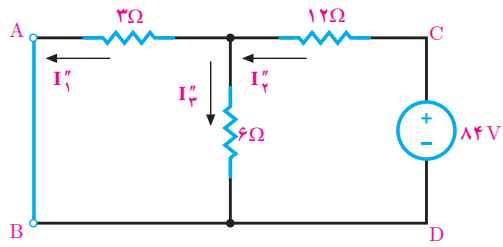
ب) این بار منبع دوم را حذف می‌کنیم و مجدداً جریان عناصر مدار را محاسبه می‌نماییم.

$$R_{CD} = \frac{۳ \times ۶}{۳ + ۶} + ۱۲ = ۱۴\Omega$$

$$I''_۲ = \frac{۸۴}{۱۴} = ۶A$$

$$I''_۳ = ۶ \times \frac{۳}{۳ + ۶} = ۴A$$

$$I''_۱ = ۶ \times \frac{۶}{۳ + ۶} = ۴A$$



اگر جریان‌های هر عنصر را که در دو حالت محاسبه شده با توجه به جهت آنها با یکدیگر جمع کنیم، جریان هر عنصر برای زمانی که هر دو منبع در مدار هستند به‌دست می‌آید.

$$I_۱ = I''_۲ - I'_۱ = ۴ - ۳ = ۱A$$

$$I_۲ = I''_۲ - I'_۲ = ۶ - ۱ = ۵A$$

$$I_۳ = I'_۳ - I''_۳ = ۲ + ۲ = ۴A$$

پ) برای محاسبه ولتاژ مقاومت ۶ اهم، می‌توان به دو صورت زیر عمل کرد.

۱) $V_{۶\Omega} = I_۳ \times ۶ = ۴ \times ۶ = ۲۴[V]$

۲) $V_{۶\Omega} = I'_۳ \times ۶ + I''_۳ \times ۶ = ۲ \times ۶ + ۲ \times ۶ = ۲۴[V]$

ت) توان در مقاومت ۶ اهمی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

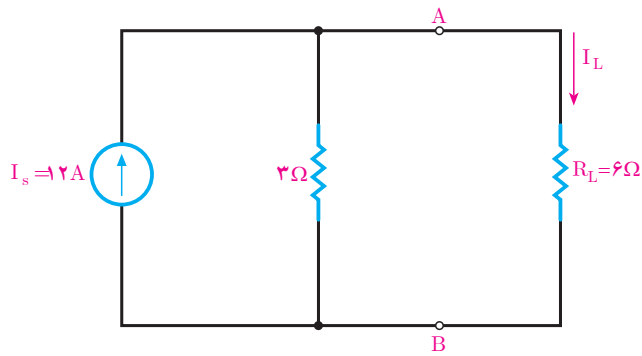
$$P = ۶ \times I_۳^۲ = ۶ \times ۴^۲ = ۹۶\ W$$

توجه کنید که توان این مقاومت را نمی‌توان از رابطهٔ زیر به‌دست آورد؛ زیرا حاصل ۹۶وات نمی‌شود.

$$۶I'^{۲}_۳ + ۶ \times I''^{۲}_۳ = ۶ \times ۲^۲ + ۶ \times ۲^۲ = ۴۸ \neq ۹۶$$

کار در کلاس:

در شکل زیر ابتدا جریان مصرف‌کننده (RL) راحساب کنید. سپس منبع ولتاژ معادل و منبع جریان مدار را محاسبه کرده شکل مدار را رسم کنید و بار دیگر جریان مصرف کننده را محاسبه نمایید.



پاسخ:

$$I_L = ۱۲ \times \frac{۳}{۳+۶} = ۴A$$

$$V_S = ۱۲ \times ۳ = ۳۶V \text{ و } R_S = ۳\Omega$$

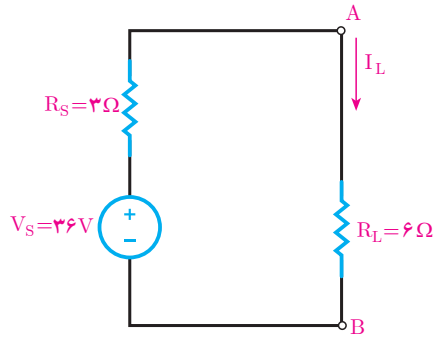
اکنون مدار به‌صورت شکل زیر خواهد شد.

در این حالت جریان I_L را داریم:

$$I_L = \frac{۳۶}{۳+۶} = ۴A$$

ملاحظه می‌کنید که جریان مصرف‌کننده باز هم ۴ آمپر است. بدیهی است ولتاژ و توان مصرفی آن نیز تغییر نمی‌کند.

لازم به یادآوری است که منابع ایده‌ال را نمی‌توان به یکدیگر تبدیل کرد.

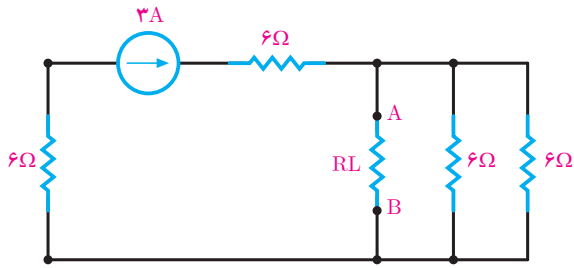


کار در کلاس:

در مدار داده شده مطلوب است:

الف) با محاسبه R_N و I_N، مدار معادل نورتن از دوسربار را رسم کنید.

ب) R_L چه مقدار انتخاب شود تا ماکزیمم توان به آن انتقال یابد؟

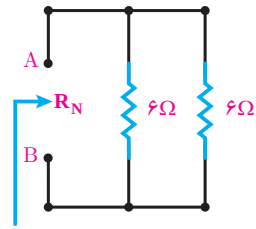


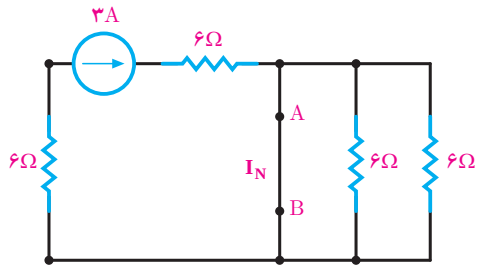
پاسخ:

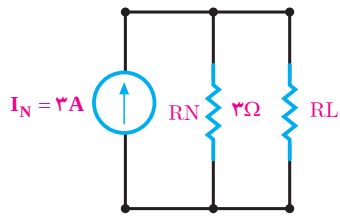
$$R_N = \frac{۶ \times ۶}{۶ + ۶} = ۳\Omega$$

$$I_N = ۳A$$

$$PL_{MAX} \rightarrow R_L = R_N = ۳\Omega$$

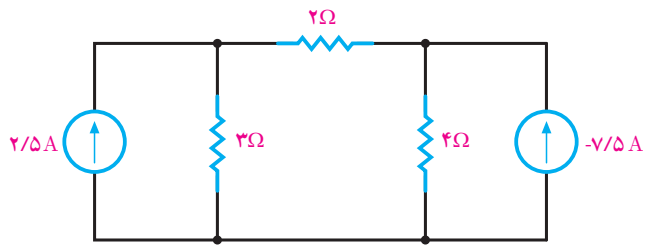




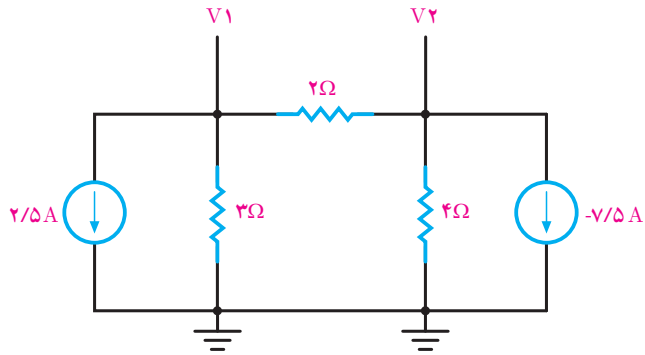


ارزشیابی ۴

۱ با استفاده از روش پتانسیل گره توان مقاومت ۳ اهمی را حساب کنید.



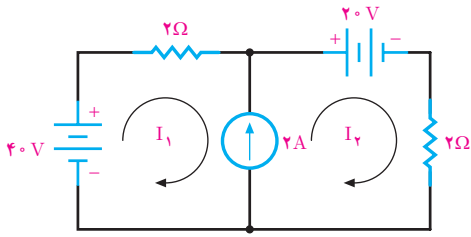
پاسخ:



$$\frac{V_1}{3}+\frac{V_1-V_2}{2}-\frac{2}{5}=0 \Rightarrow 5V_1-3V_2=15$$

$$\frac{V_2}{4}+\frac{V_2-V_1}{2}+(-7/5)=0 \Rightarrow -2V_1+3V_2=30$$

$$V_1=15V \rightarrow P=\frac{V_1^2}{3}=75W$$



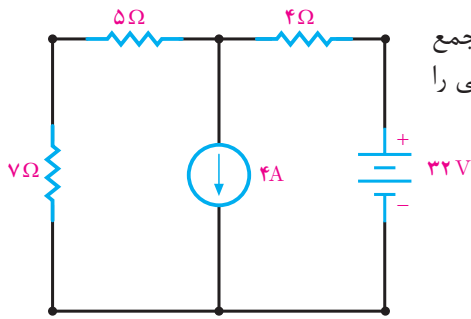
۲ درمدار شکل داده شده به کمک روش جریان حلقه توان مقاومت ۴ اهمی را به‌دست آورید. مقاومت ۲ اهمی دوم ۴ اهم شود.

پاسخ:

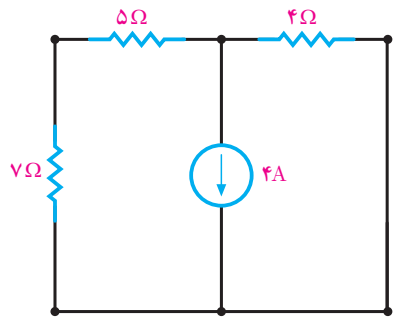
$$\text{حلقه بزرگ}\begin{cases}-۴۰+۲I_۱+۲۰+۴I_۲=۰ \quad (۰/۲۵)\\ I_۲=I_۱+۲ \quad (۰/۲۵)\end{cases}\Rightarrow ۲I_۱+۴I_۲=۲۰$$

$$\rightarrow ۲I_۱+۴(I_۱+۲)=۲۰(۰/۲۵)$$

$$\rightarrow I_۱=۲A\ ,\ I_۲=۲+۲\rightarrow I_۲=۴A \quad (۰/۲۵)\rightarrow P_{۴\Omega}=I_۲^۲\times ۴\Omega=۴^۲\times ۴=۶۴W$$



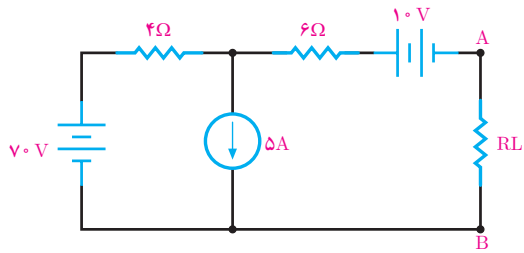
۳ درمدار مقابل به کمک روش جمع آثار افت ولتاژ دوسر مقاومت ۷اهمی را محاسبه کنید.



پاسخ:

$$I_۱=\frac{۳۲}{۴+۵+۷}=۲A \qquad I_۱=\frac{۴\times ۴}{۴+(۵+۷)}=۱A$$

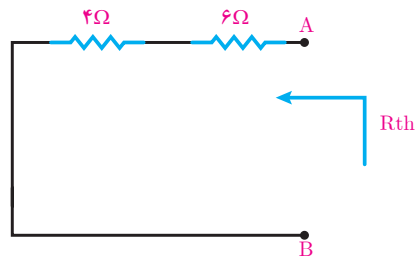
$$\Rightarrow I_۱=I_۱+I_۱=۱+۲=۳A \Rightarrow V_{۷\Omega}=I_۱\times ۷\Omega=۳\times ۷=۲۱V$$



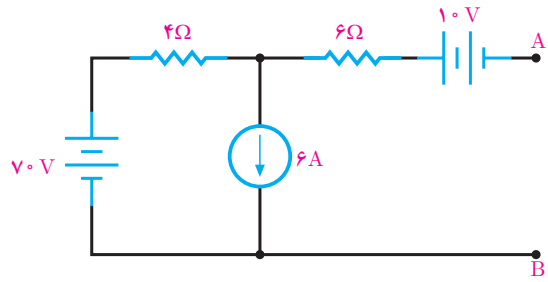
۴ درمدار مطلوب است:
الف) محاسبه R_{th} و V_{th} از دو سربار
ب) رسم مدار معادل تونن
ج) ماکزیمم توان قابل انتقال به بار

پاسخ:

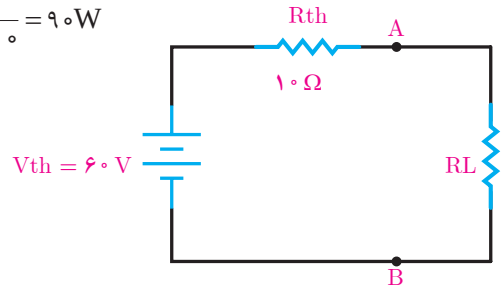
(الف) $R_{th} = ۴ + ۶ = ۱۰\Omega$



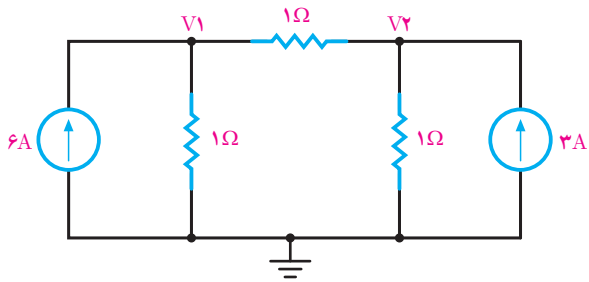
(ب) $-۷۰ + (۴\times ۵) - ۱۰ + Vth = ۰ \longrightarrow Vth = ۶۰V$



(ج)
$$R_L = R_{th} \rightarrow PL_{MAX}$$
$$PL_{MAX} = \frac{V_{th}^{۲}}{۴RL} = \frac{۶۰^{۲}}{۴\times ۱۰} = ۹۰W$$



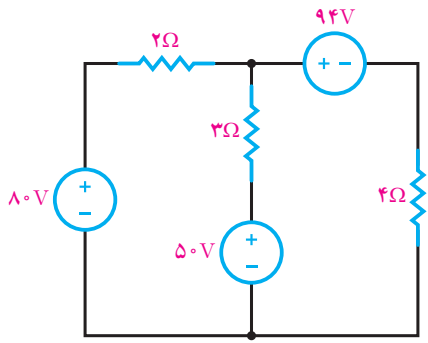
۵ به کمک روش پتانسیل گره، ولتاژهای V_1 و V_2 را به‌دست آورید.



پاسخ:

$$\begin{cases} -۶ + V_۱ + (V_۱ - V_۲) = ۰ \\ -۳ + V_۲ + (V_۲ - V_۱) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲V_۱ - V_۲ \\ -V_۱ + ۲V_۲ = ۳ \end{cases} \Rightarrow ۳V_۲ = ۱۲$$

$$\rightarrow V_۲ = ۴V \rightarrow V_۱ = ۵V$$



۶ در مدار شکل زیر با استفاده از روش جریان حلقه، توان مصرفی در مقاومت ۳ اهمی را حساب کنید.

پاسخ:

$$KVL۱ : -۸۰ + ۲I_۱ + ۳(I_۱ - I_۲) + ۵۰ = ۰$$

$$\times ۳ \ \{۵I_۱ - ۳I_۲ = ۳۰ \Rightarrow \{۱۵I_۱ - ۹I_۲ = ۹۰$$

$$\times ۵ \ \{-۳I_۱ + ۷I_۲ = ۲۴ \Rightarrow \{-۱۵I_۱ + ۳۵I_۲ = -۲۲$$

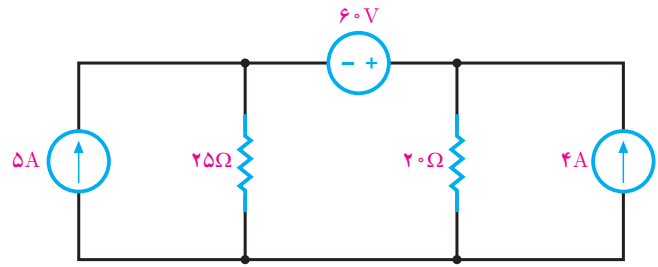
$$۲۶I_۲ = -۱۳۰$$

$$I_۲ = \frac{-۱۳۰}{۲۶} = -۵A$$

$$۵I_۱ - ۳(-۵) = ۳۰ \rightarrow ۵I_۱ + ۱۵ = ۳۰ \rightarrow I_۱ = ۳A$$

$$I_{۳\Omega} = I_۱ - I_۲ = ۳ - (-۵) = ۸A \rightarrow P_{۳\Omega} = RI^۲ = ۳ \times ۸^۲ = ۱۹۲W$$

۷ در مدار شکل زیر با استفاده از روش جریان حلقه و بدون تبدیل منابع، توان منبع ولتاژ را محاسبه کنید.



پاسخ:

$I_1 = 5A$

$I_3 = -4A$

$KVL2 : 25(I_2 - I_1) - 60 + 20(I_2 - I_3) = 0$

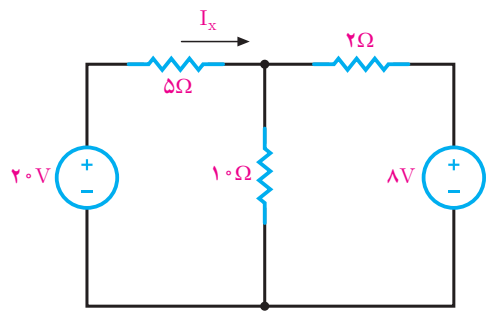
$25I_2 - 125 - 60 + 20I_2 + 80 = 0$

$45I_2 = 105 \rightarrow I_2 = \frac{105 \div 5}{45 \div 5} = 2/33A$

$I_{\text{منبع}} = I_1 + I_2 = 5 + 2/33 = 7/33$

$P = V \times I \rightarrow P = 60 \times 7/33 = 440W$

۸ با استفاده از روش پتانسیل گره و بدون تبدیل منابع، جریان I_x را حساب کنید.



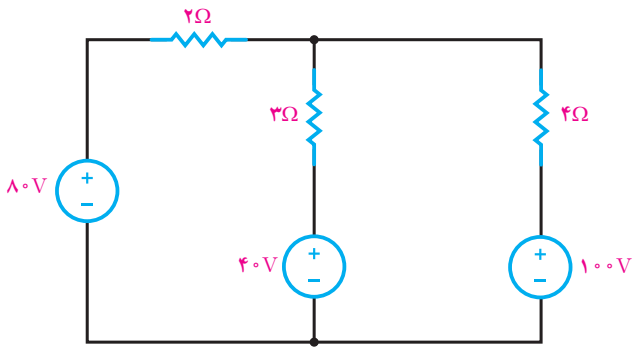
پاسخ:

$$KCL: \frac{V_A - ۲۰}{۶} + \frac{V_A}{۱۰} + \frac{V_A - ۸}{۲} = ۰$$

$$۲V_A - ۴۰ + V_A + ۵V_A - ۴۰ = ۰ \longrightarrow ۸V_A = ۸۰ \rightarrow V_A = ۱۰V$$

$$I_x = \frac{۲۰ - V_A}{۵} = \frac{۱۰ - ۲۰}{۵} = ۲A$$

۹ در مدار شکل زیر با استفاده از روش پتانسیل گره و بدون تبدیل منابع، توان مصرفی در مقاومت ۳ اهمی را محاسبه کنید.



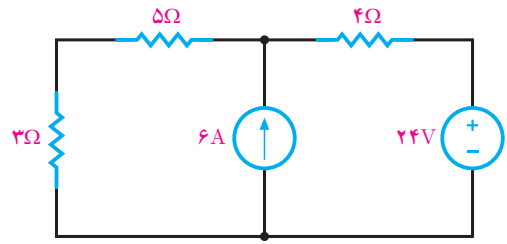
پاسخ:

$$KCL: \frac{V_A - ۸۰}{۲} + \frac{V_A - ۴۰}{۳} = \frac{V_A - ۱۰۰}{۴} = ۰$$

$$۶V_A = ۴۸۰ + ۴V_A - ۱۶۰ + ۳V_A = ۳۰۰ = ۰$$

$$۱۳V_A = \rightarrow V_A = ۷۲/۳V \rightarrow P = \frac{V^۲}{R} = \frac{۷۲/۳^۲}{۳} = ۳۴۷/۷$$

۱۰ در شکل زیر با استفاده از اصل جمع آثار، توان را در مقاومت ۳ اهمی محاسبه کنید.

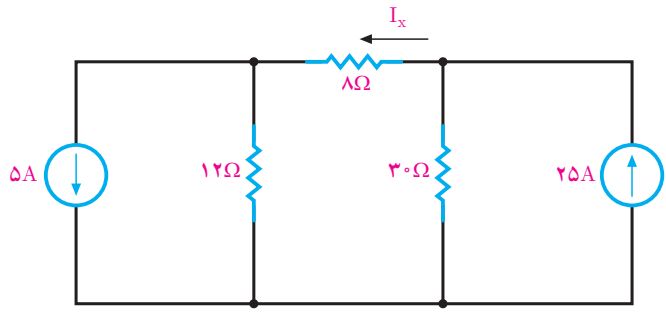


پاسخ:

$$I_1 = \frac{۲۴}{۱۲} = ۲A$$

$$I_2 = ۶ \times \frac{۴}{۴+۸} = ۲A$$

۱۱ با استفاده از روش جمع آثار، جریان I_X را در مدار شکل زیر حساب کنید.



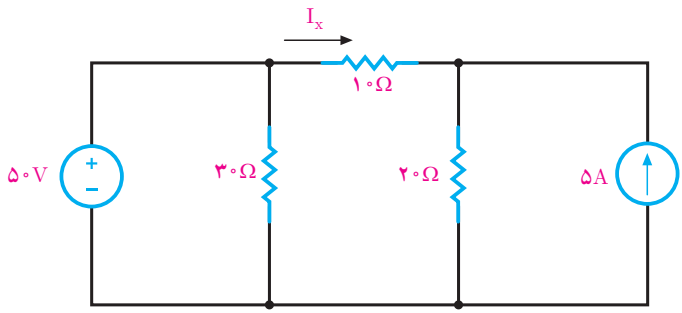
پاسخ:

$$I_1 = ۲۵ \times \frac{۳۰}{۳۰+۲۰} = ۱۵A$$

$$I_2 = ۵ \times \frac{۱۲}{۱۲+۳۸} = ۱/۲A$$

$$I_X = ۱/۲ + ۱۵ = ۱۶/۲A$$

۱۲ در مدار شکل زیر مطلوب است محاسبهٔ جریان I_X با استفاده از روش‌های:



پاسخ:

الف) اصل جمع آثار؛

$$\rightarrow I_1 = 5 \times \frac{20}{20+10} = \frac{100}{30} = \frac{10}{3} \quad \{I_X \frac{5}{3} - \frac{10}{3} = \frac{-5}{3}\}$$

$$\rightarrow I_2 = \frac{50}{3} = \frac{5}{3}$$

ب) پتانسیل گره؛

$$V_A = 50V$$

$$KCL(B): \frac{-5}{1} + \frac{V_B}{20} + \frac{V_V - 50}{10} = 0$$

$$-100 + V_B = 2V_B - 100 = 0 \Rightarrow 3V_B = 200 \rightarrow V_B = \frac{200}{3}$$

$$I_X = \frac{V_A - V_B}{10} = \frac{50 - \frac{200}{3}}{10} = \frac{\frac{-50}{3}}{\frac{10}{1}} = -\frac{5}{3}A$$

ب) جریان حلقه.

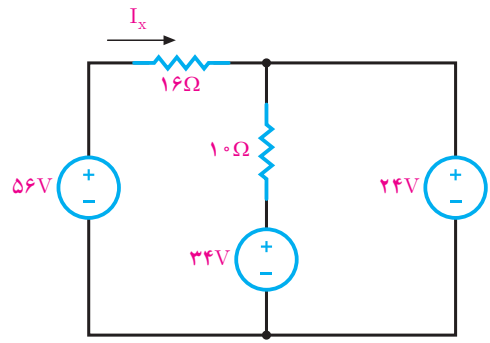
$$I_3 = -5A$$

$$KVL1 : -50 + 30(I_1 - I_2) = 0$$

$$KVL2 : 30(I_2 - I_1) + 10I_2 + 20(I_2 - I_3) = 0$$

$$\begin{cases} 30I_1 - 30I_2 = 50 \rightarrow 30I_2 = -50 \rightarrow I_2 = \frac{-50}{30} = \frac{-5}{3} \\ -30I_1 + 60I_2 = -100 \end{cases}$$

۱۳ در مدار شکل زیر مطلوب است:



پاسخ:

الف) جریان I_X؛

$$V_A = ۲۴V \rightarrow I_X = \frac{۵۶ - ۲۴}{۱۶} = \frac{۳۲}{۱۶} = ۲A$$

$$P_{۱۰\Omega} = \frac{V^۲}{R} = \frac{(۲۴ - ۳۴)^۲}{۱۶} = ۱۰W$$

ب) توان مصرفی در مقاومت ۱۰ اهمی؛

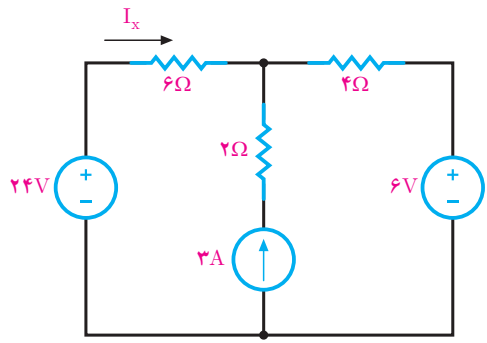
$$I_۱ = \frac{۵۶ - ۲۴}{۱۶} = ۲A$$

$$I_۲ = \frac{۳۴ - ۲۴}{۱۶} = ۱A \rightarrow I_{\text{منبع}} = ۲ + ۱ = ۳A$$

پ) توان منبع ولتاژ ۲۴ ولتی.

$$P = V \times I = (-۲۴) \times (۳) = -۷۲A$$

۱۴ در مدار شکل زیر جریان I_x را از طریق پتانسیل گره محاسبه کنید.

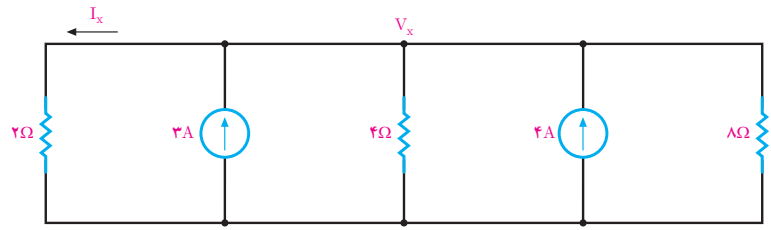


پاسخ:

$$\frac{V_A-۲۴}{۶}=\frac{V_A-۶}{۴}-۳=۰\rightarrow ۲V_A-۴۸=۳V_A-۱۸-۳۶=۰$$

$$۵V_A=۱۰۲\rightarrow V_A=۲۰/۴V\rightarrow I_X=\frac{۲۴-۲۰/۴}{۶}=\frac{۳/۶}{۶}=۰/۶A$$

۱۵ در مدار شکل زیر مطلوب است:



پاسخ:

الف) پتانسیل V_X؛

$$KCL:\frac{V_X}{۳}-۳+\frac{V_X}{۴}-۴+\frac{V_X}{۸}=۰$$

$$۴V_X-۲۴+۲V_X-۳۲+V_X=۰\Rightarrow ۷V_X=۵۶\rightarrow V_X=\frac{۵۶}{۷}=۸V$$

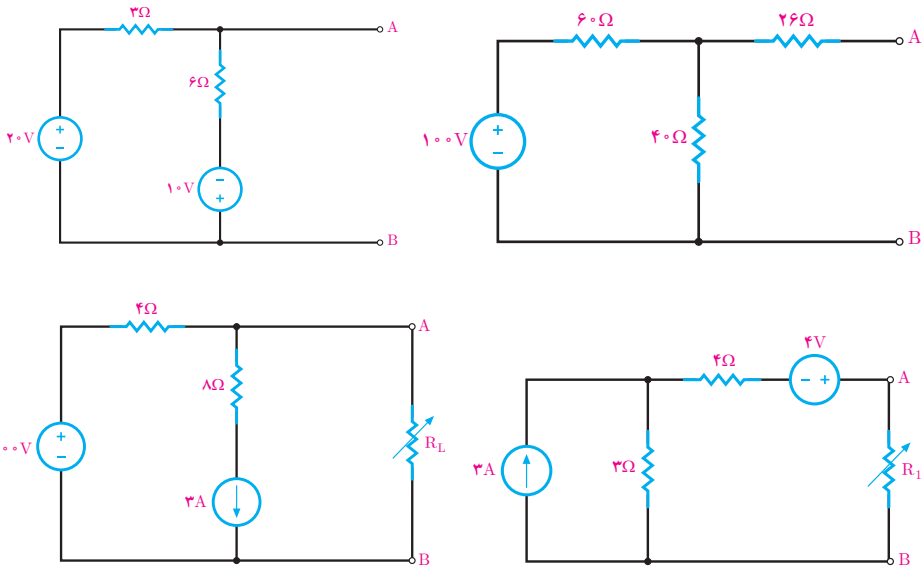
ب) جریان I_X؛

$$I_X=\frac{V_X}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴A$$

پ) توان مقاومت.

$$P=\frac{V_X^۲}{R}=\frac{۸^۲}{۸}=۸W$$

۱۶ در مدارهای زیر مطلوب است:



پاسخ:

الف) معادل تونن مدار از دو پایانه A و B؛

$$V_{th} = ۱۰۰ \times \frac{۴۰}{۴۰+۶۰} = ۴۰V$$

$$R_{th} = ۶۰ \parallel ۴۰ + ۲۶ = ۵۰\Omega$$

$$R_{th} = ۳ \parallel ۶ = \frac{۳ \times ۶}{۳+۶} = ۲\Omega$$

$$V_{th} = \frac{V_{th} - ۲۰}{۳} = \frac{V_{th} - ۱۰}{۶} = ۰ \Rightarrow ۲V_{th} - ۴۰ + V_{th} + ۱۰ = ۰$$

$$۳V_{th} = -۳۰ \rightarrow V_{th} = ۱۰V$$

$$R_{th} = ۴ + ۳ = ۷\Omega$$

$$V_{th} = ۷V$$

$$V_{th} = ۳ \times ۳ + ۴ = ۱۳V$$

$$V_{th} = \frac{V_{th} - ۲۰۰}{۴} = ۳ = ۰ \rightarrow V_{th} - ۲۰۰ + ۱۲ = ۰ \Rightarrow V_{th} = ۱۸۸$$

ب) معادل نورتن مدار از دو پایانه A و B.

$R_N = R_{th} = ۶۰ \| ۴۰ + ۲۶ = ۵۰\Omega$

$R_T = ۴۰ \| ۲۶ + ۶۰ = ۷۵ / ۷۵ \rightarrow] = \frac{۱۰۰}{۷۵ / ۷۵} = ۱ / ۳۲A$

$I_N = ۱ / ۳۲ \times \frac{۴۰}{۴۰ + ۲۶} = ۰ / ۸A$

$I_N = ۳ \| ۶ = ۲\Omega$

$I_۱ = \frac{۲۰}{۳}$

$\rightarrow I_N = \frac{۲۰}{۳} - \frac{۱۰}{۶} = \frac{۳۰}{۶} = ۵A$

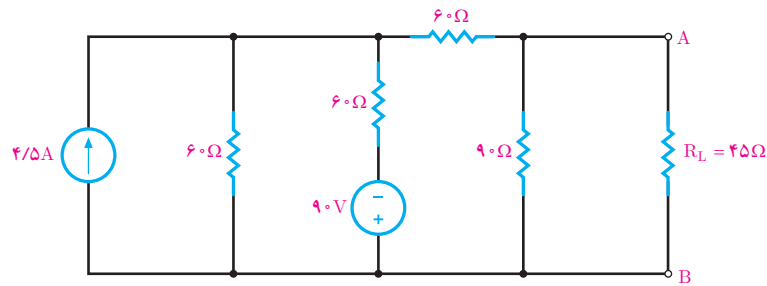
$R_N = ۳ + ۴ = ۷\Omega$

$I_N = \frac{۹ + ۴}{۷} = \frac{۱۳}{۷}A$

$I_N = \frac{۲۰۰}{۴} - ۳ = ۴۷A$

$R_N = ۴\Omega$

۱۷ درشکل زیر توان مقاومت بار (R_L) را با استفاده از معادل تونن مدار به‌دست آورید.



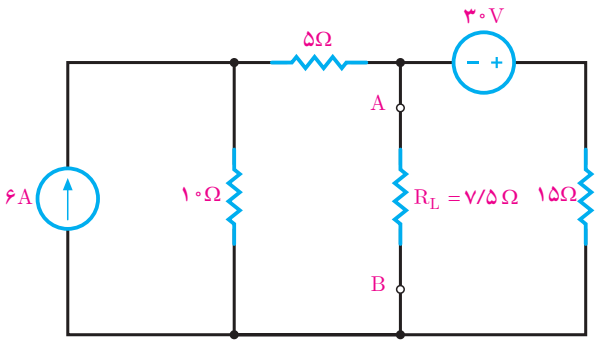
پاسخ:

$R_{th} = ۹۰ \| ۹۰ = ۴۵\Omega$

$V_{th} = ۴۵\ V$

چون $R_L = R_{th} \Rightarrow P_{max} = \frac{V_{th}^۲}{۴R_{th}} = \frac{۴۵^۲}{۴ \times ۴۵} = \frac{۴۵}{۴}$

۱۸ در شکل زیر جریان مقاومت بار (R_L) را با استفاده از معادل نورتن مدار به‌دست آورید.



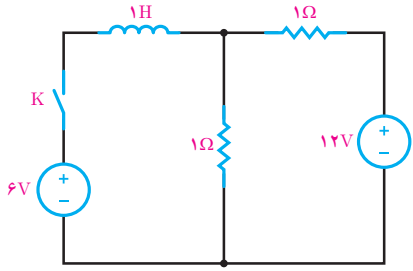
پاسخ:

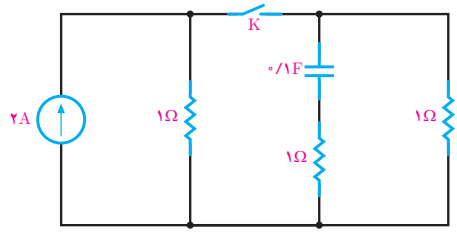
$$R_N = ۱۵ \parallel ۱۵ = ۷/۵\Omega$$

$$I_N = \frac{۶۰}{۱۵} - \frac{۳۰}{۱۵} = ۴ - ۲ = ۲A$$

$$I_L = ۱_A$$

۱۹ در مدارهای زیر پس از وصل شدن کلید وسپری شدن ۵ ثابت زمانی، انرژی ذخیره شده در سلف و خازن را حساب کنید.





پاسخ:

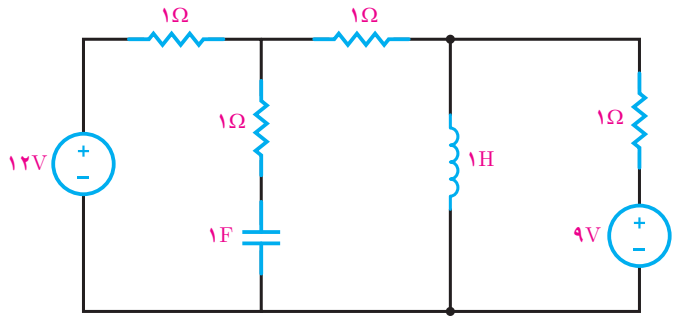
$$\Rightarrow V_C = R \times I = ۰/۵ \times ۲ = ۱V$$

$$W_C = \frac{۱}{۲} CV^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۰/۱ \times ۱۲ = ۰/۰۵J$$

$$I = \frac{۶}{۱} - \frac{۱۲-۶}{۱} = ۰A$$

$$W_L \frac{۱}{۲} LI^۲ = ۰J$$

۲۰ مدار شکل زیر در حالت ماندگاراست. توان هر کدام ازمنابع و انرژی ذخیره شده در سلف وخازن را حساب کنید.



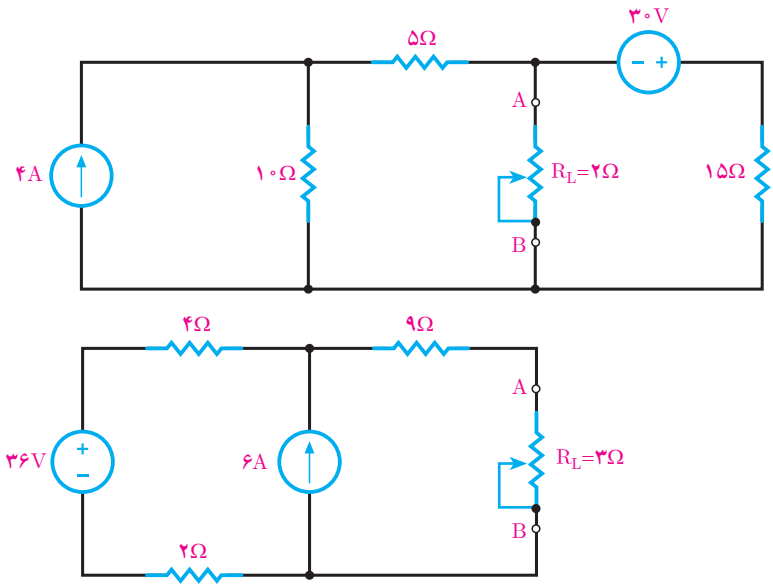
پاسخ:

$$\frac{۱۲}{۲}+\frac{۹}{۱}=۱۵V \rightarrow W_L=\frac{۱}{۲}LI^۲=\frac{۱}{۲}\times۱\times۱۵^۲=۱۱۲/۵j$$

$$V_C = ۱۲ - ۶ = ۶V \rightarrow V_C = \frac{۱}{۱}VC^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۶^۲ - ۱۸J$$

$$P_{۱۲V} = VI = ۱۲ \times ۶ = ۷۲J$$

۲۱ درمدارهای زیر با استفاده از روش نورتن مطلوب است:



پاسخ:

الف) جریان R_L در شرایط فعلی مدار؛

$$R_{th} = ۱۵ \parallel ۱۵ + ۷/۵\Omega$$

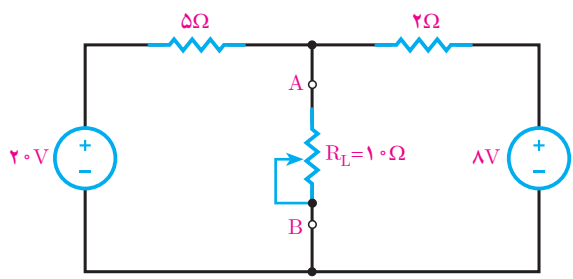
$$\frac{V_{th} - ۴۰}{۱۵} + \frac{V_{th} + ۳۰}{۱۵} = ۰ \rightarrow ۲V_{th} = ۱۰ \rightarrow V_{th} = ۵V$$

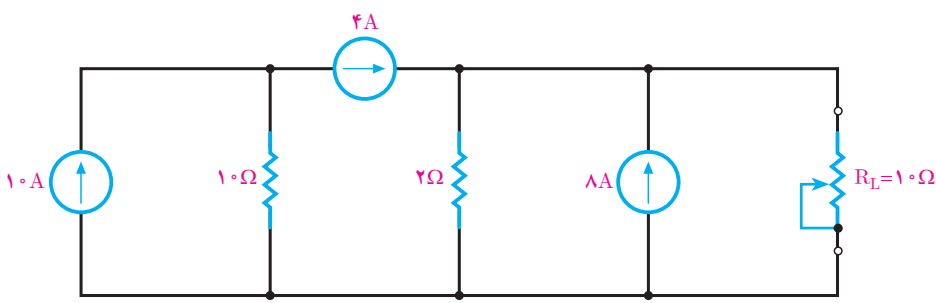
ب) ماکزیمم توان انتقالی به R_L.

$$R_{th} = ۱۵ \parallel ۱۵ = ۷/۷\Omega$$

$$\frac{V_{th} - ۴۰}{۱۵} + \frac{V_{th} - ۳۰}{۱۵} = ۰ \rightarrow ۱۰V_{th} = ۵V$$

۳۲ در مدارهای زیر با استفاده از روش نورتن مطلوب است:





پاسخ:

الف) جریان R_L درشرایط فعلی مدار؛

$$R_N = ۵ \| ۲ = \frac{۱۰}{۷}$$

$$I_N = ۴ + ۴ = ۸A$$

$$I_L = ۸ \times \frac{\frac{۱۰}{۷}}{۱۰ + \frac{۱۰}{۷}} = \frac{\frac{۸۰}{۷}}{\frac{۸۰}{۷}} = ۱A$$

$$P_{max} = \frac{۱}{۴} R_N I_N^۲ = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱۰}{۷} \times ۸^۲ = \frac{۱۶۰}{۷} W$$

ب) ماکزیمم توان انتقالی به R_L.

$$R_N = ۲\Omega$$

$$I_N = ۴ + ۰ + ۸ = ۱۲A$$

$$I_L = ۱۲ \times \frac{۲}{۱۲ + ۲} = ۲A$$

$$P_{max} = \frac{۱}{۴} R_N I_N^۲ = \frac{۱}{۴} \times ۲ \times ۱۲^۲ = ۷۲W$$