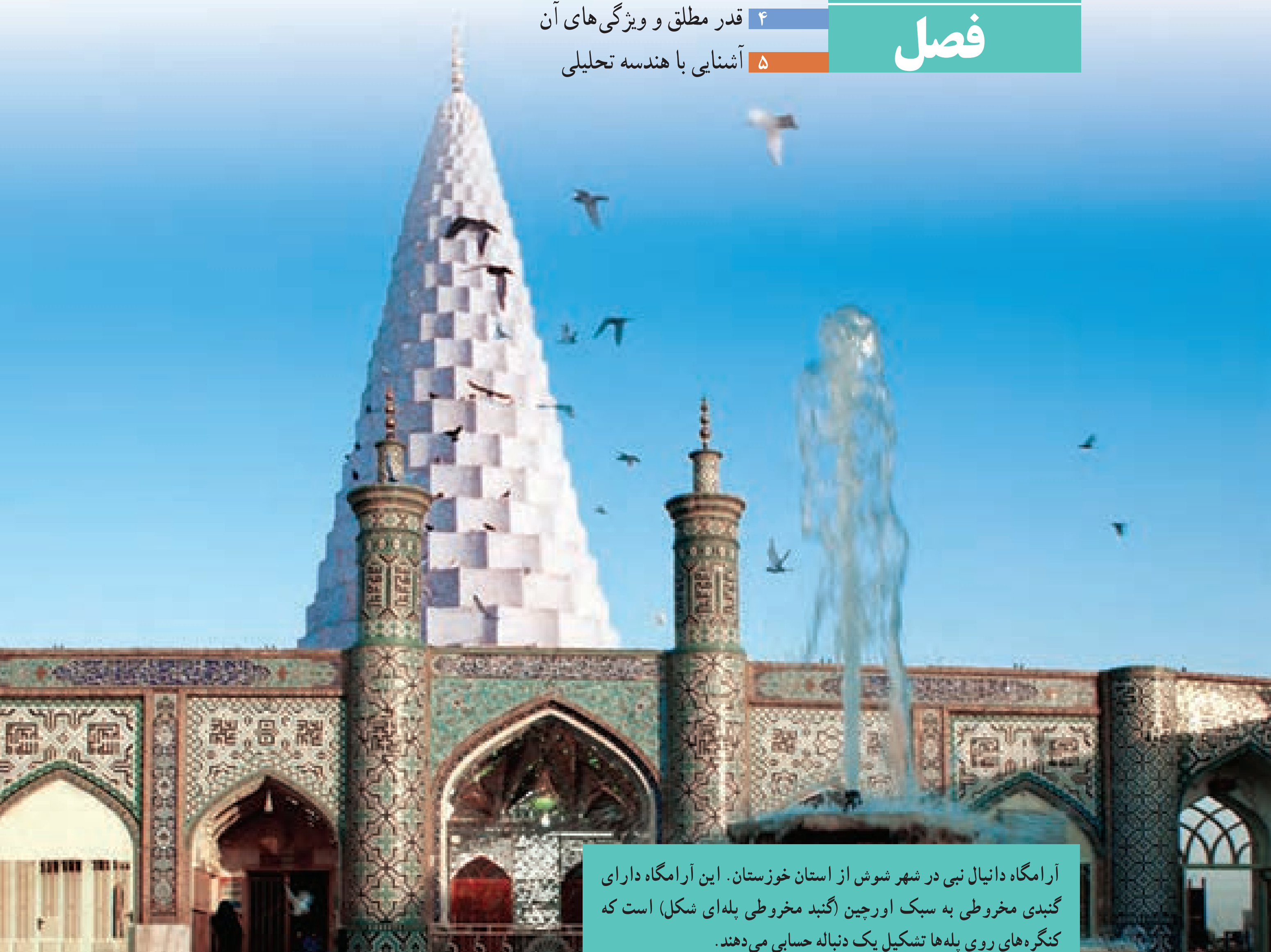
جبر و معادله

فصل ۱

۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
۲ معادلات درجه دوم
۳ معادلات گویا و گنگ
۴ قدر مطلق و ویژگی‌های آن
۵ آشنایی با هندسه تحلیلی



آرامگاه دانیال نبی در شهر شوش از استان خوزستان. این آرامگاه دارای گنبدی مخروطی به سبک اورچین (گنبد مخروطی پله‌ای شکل) است که کنگره‌های روی پله‌ها تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند.

درس ۱

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

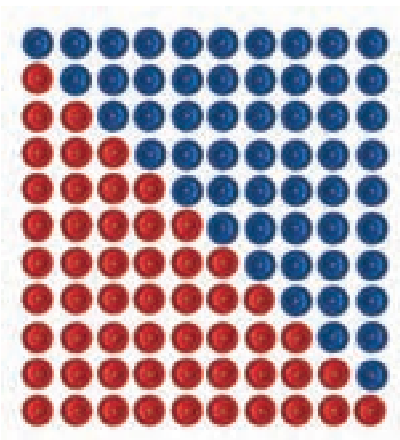
در سال قبل با مفهوم دنباله و دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شدید و می‌دانید که مجموعهٔ اعداد طبیعی ... , ۳ , ۲ , ۱ یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت یک می‌باشد. چگونگی به‌دست آوردن مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n می‌تواند الگوی مناسبی باشد تا به یک دستور برای محاسبهٔ مجموع جملات هر دنبالهٔ حسابی برسیم.

فعالیت

تعدادی دگمه داریم که به شکل روبه‌رو آرایش شده‌اند. تعداد این دگمه‌ها چندتاست؟

۱ یکی از راه‌ها، شمارش تعداد دگمه‌ها در هر ردیف است که مجموع آن برابر است با :

$$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰=\dots$$



۲ راه دیگر استفاده از شهود و تجسم، با استفاده از شکل پایین، است.

در این شکل تعداد ردیف‌ها ... و تعداد دگمه‌ها در هر ردیف ... است، پس تعداد کل دگمه‌ها برابر ... است و چون تعداد دگمه‌های آبی و قرمز برابر است پس :

$$\text{تعداد دگمه‌های قرمز} = \frac{\text{تعداد کل دگمه‌ها}}{۲} = \dots\dots$$

۳ برای محاسبهٔ مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n مراحل زیر را انجام داده‌ایم. چگونگی هر مرحله را توضیح دهید.

$$\begin{array}{l} S = ۱ + ۲ + ۳ + \dots\dots + (n-۱) + n \\ S = n + (n-۱) + \dots + ۳ + ۲ + ۱ \\ \hline ۲S = \underbrace{(n+۱)+(n+۱)+\dots+(n+۱)+(n+۱)}_{n\ \text{تا}} \end{array}$$

$$۲S = n(n+۱)$$

$$S = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

✤ **مثال :** روی محیط دایره‌ای ۲۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به‌دست آورید.

✤ **حل :** نقطه اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل نقطه دوم به نقاط دیگر (به‌غیر از نقطه اول) ۱۸ وتر به‌دست می‌آید. سپس نقطه سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم. ۱۷ وتر حاصل می‌شود. با ادامه این عمل تعداد وترهای حاصل برابر است با :

$$19+18+17+\dots+2+1=\frac{19}{2}(1+19)=190$$

✤ **تذکر :** این مسئله را با استفاده از ترکیبیات نیز می‌توان حل کرد. آن را حل کرده و دو روش را با هم مقایسه کنید.

فعالیت

دنبالهٔ حسابی زیر را، که در آن a جمله اول، d قدر نسبت و n تعداد جملات آن است، در نظر بگیرید.

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \dots,\ a+(n-2)d,\ a+(n-1)d$$

مجموع جملات این دنباله را S_n می‌نامیم و می‌نویسیم :

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\dots+(a+(n-2)d)+(a+(n-1)d)$$

حال، جملات S_n را از آخر به اول بنویسید و با جمع جملات متناظر دو عبارت اخیر، $2S_n$ را به‌دست آورید. نتیجه خواهید گرفت :

$$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

✤ **مثال :** مجموع صد جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی ......,۱۵,۱۱,۷,۳ را به‌دست آورید.

✤ **حل :** جملهٔ اول ۳، تعداد جمله‌ها ۱۰۰ و قدرنسبت جملات ۴ است. با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی می‌توان نوشت :

$$S_{100}=\frac{100}{2}\left[(2\times3)+(99\times4)\right]=50\times402=20100$$

خواندنی

در ریاضیات آنچه مهم است فکر کردن، استدلال کردن و نتیجه گرفتن است. ریاضیات راهی برای اندیشیدن و روشی برای استدلال و درست فکر کردن است. استدلال وسیله‌ای است که به کمک آن می‌توان از روی اطلاعاتی که داریم حقایقی را کشف کنیم. البته ریاضیات به تجربه و مشاهده نیز مربوط می‌شود، ولی قسمت اعظم آن همان اندیشیدن، استدلال کردن و نتیجه گرفتن است. زمانی‌که گاوس ریاضیدان آلمانی ده ساله بود، روزی معلم از دانش‌آموزان کلاس خواست مداد و کاغذ بردارند و حاصل جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ را به‌دست آورند. چند دقیقه نگذشته بود که معلم، گاوس را دید که به کار دیگری مشغول است. از او پرسید : چرا مسئله را حل نمی‌کنی؟ او جواب داد : حل شد! معلم با تعجب گفت : این غیر ممکن است. ولی گاوس گفت : خیلی هم آسان بود. سپس گفت : اول چنین نوشتم :

$$1+2+3+\dots+98+99+100$$

و بعد چنین :

$$100+99+98+97+\dots+3+2+1$$

و جفت جفت از اول تا آخر جمع کردم :

$$101+101+101+\dots+101+101+101$$

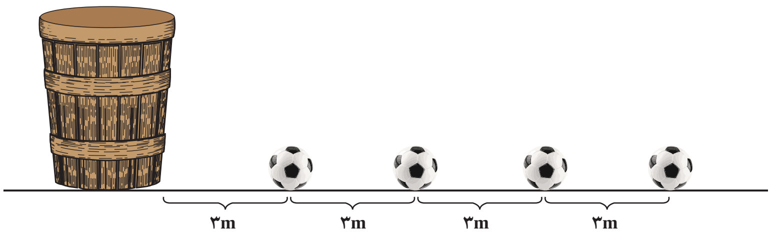
بدین ترتیب ۱۰۰ تا عدد ۱۰۱ بدست آوردم که حاصلضرب آنها ۱۰۱۰۰ می‌شود و چون دو بار مجموع ۱ تا صد را حساب کردم عدد ۱۰۱۰۰ را بر دو تقسیم کردم و ۵۰۵۰ به دست آمد. بنابراین حاصل جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ برابر ۵۰۵۰ می‌شود.

کار در کلاس

۱ نشان دهید در یک دنباله حسابی اگر a_1 و a_n به‌ترتیب جملات اول و آخر باشند آنگاه : $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

۲ مجموع همهٔ عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به‌دست آورید.

مثال : در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هریک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است (شکل زیر). دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده توپ اول را بردارد و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد، سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دونده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد؛ حساب کنید او جمعاً چند توپ در سبد انداخته است؟



حل : دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید مسافت ۶=۳+۳ متر را طی کند؛ برای توپ دوم نیز باید ۱۲متر و برای توپ سوم ۱۸ متر و ... طی کند. بنابراین مسافت‌های طی شده در این مراحل، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدر نسبت ۶ می‌دهد. اگر n تعداد توپ‌های انداخته شده در سبد باشد از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی داریم :

$$S = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$918 = \frac{n}{2}(12 + (n-1)6) \Rightarrow 306 = n(n+1) \Rightarrow 17 \times 18 = n(n+1) \Rightarrow n = 17$$

مجموع جملات دنباله هندسی

فعالیت

۱ قدر نسبت و مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی زیر را به‌دست آورید. $(a \neq 0)$

$a, a, a, \ldots, a$

۲ دنباله هندسی زیر را در نظر بگیرید. $(q \neq 1)$

$a, aq, aq^2, \ldots$

الف) جمله nام دنباله چیست؟

ب) فرض می‌کنیم مجموع n جملهٔ اولیه دنباله هندسی S_n باشد :

$$S_n = a + aq + aq^۲ + \ldots + aq^{n-۲} + aq^{n-۱}$$

طرفین رابطه را در q ضرب می‌کنیم :

$$S_n q = aq + aq^۲ + \ldots + aq^{n-۱} + aq^n$$

اگر $S_n - S_n q$ را تشکیل دهیم، پس از ساده‌سازی، نتیجه می‌گیریم :

$$S_n = a\frac{۱-q^n}{۱-q}$$

کار در کلاس

مجموعه ۱۰ جملهٔ اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید.

$$\frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۲}, \ldots$$

مثال : توپی داریم که از هر ارتفاعی رها شود پس از زمین خوردن به اندازه یک چهارم ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۱۰ متری برسد این توپ پس از چهار بار برخورد با زمین چه مسافتی را طی می‌کند؟

حل : ارتفاع توپ قبل از n امین برخورد با زمین را A_n می‌نامیم. داریم :

$$A_۱ = ۱۰\ ,\ A_۲ = \frac{۱۰}{۴}\ ,\ A_۳ = \frac{۱۰}{۱۶}\ ,\ \ldots\ ,\ A_n = \frac{۱۰}{۴^{n-۱}}$$

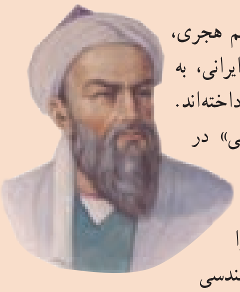
بنابراین مسافت طی شده توسط توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین دنباله زیر را تشکیل می‌دهد.

$$۲۰, \frac{۲۰}{۴}, \frac{۲۰}{۱۶}, \ldots, \frac{۲۰}{۴^{n-۱}}$$

دنباله فوق یک دنباله هندسی با مجموع $S_n = ۲۰ \times \dfrac{۱-(\frac{۱}{۴})^n}{۱-\frac{۱}{۴}}$ داریم :

$$S_۵ = ۲۰ \times \frac{۱-(\frac{۱}{۴})^۵}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۸۰}{۳}\left(۱-(\frac{۱}{۴})^۵\right) = \frac{۸۰}{۳}\left(۱-\frac{۱}{۱۰۲۴}\right) \simeq ۲۶/۶۴ \text{ متر}$$

خواندنی



در سده‌های چهارم و پنجم هجری، بسیاری از ریاضی‌دانان ایرانی، به بررسی دنباله‌های ریاضی پرداخته‌اند. از جمله «ابوریحان بیرونی» در کتاب خود «آثار الباقیه عن‌القرون الخالیه» مسئله معروف صفحه شطرنج را که در واقع یک دنباله هندسی است که جملهٔ اول آن واحد و تعداد جمله‌ها ۶۴ می باشد، حل کرده است. او با استدلال دقیق، مجموع جمله‌های این دنباله را عدد ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵ به‌دست آورده است. دربارهٔ صفحه شطرنج، داستانی وجود دارد؛ وقتی مخترع شطرنج، بازی خود را به شاه عرضه کرد، شاه از او خواست پاداشی بخواهد. دانشمند پاسخ داد : برای خانه اول شطرنج، یک دانه گندم به من بدهید و برای خانه دوم دو دانهٔ گندم و برای خانه سوم چهار دانهٔ گندم و همین طور برای هر خانه دو برابر خانهٔ پیش از آن گندم بدهید تا به خانه شصت و چهارم برسد. شاه با ساده‌لوحی فرمان داد یک کیسه گندم به این مرد بدهید. ولی او نپذیرفت و تقاضا کرد پس از محاسبهٔ دقیق، گندم را به او بدهند. قبول کردند و پس از محاسبه، عددی را که در بالا آوردیم پیدا کردند. سپس معلوم شد که اگر در تمام سطح کره زمین (یعنی هر جا که خشکی باشد) گندم بکارند این مقدار گندم به‌دست نمی‌آید! ابوریحان بیرونی با استدلال ریاضی به این نتیجه رسید که مقدار گندم‌ها برابر $۲^{۶۴}-۱$ دانه است. او برای محسوس کردن این عدد می‌گوید : در سطح کره زمین ۲۳۰۵ کوه را در نظر می‌گیریم، اگر از هر کوه ۱۰۰۰۰ رود خارج شود در طول هر رودخانه ۱۰۰۰ قطار قاطر حرکت کنند. و هر قطار شامل ۱۰۰۰ قاطر باشد و همراه هر قاطر ۸ کیسه گندم قرار داده باشیم که در هر کیسه ۱۰۰۰۰ دانه گندم باشد، باز هم عدد همهٔ این گندم‌ها از تعداد گندم‌های صفحه شطرنج کوچک‌تر خواهد بود.

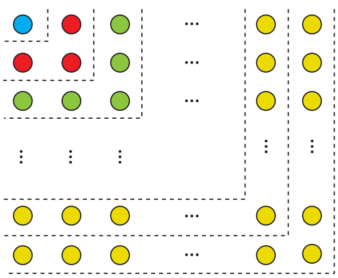
کار در کلاس

در داستان مخترع شطرنج اگر در خانه اول یک دانه گندم و در خانه دوم دو دانه گندم و به همین صورت در هر خانه دوبرابر خانه قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم :

الف) این جایزه چند گرم می‌شود[۱]؟

ب) نشان دهید جایزه او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تُن خواهد شد.

تمرین



۱ الف) به کمک شکل روبه‌رو حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=$$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید.

۲ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می‌شود؟

۳ در دنباله حسابی ... , ۱۱ , ۸ , ۵ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

۴ در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

۵ جمله عمومی یک دنباله به‌صورت $a_n=۲^{n-۱}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟

۶ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

۷ برای عدد حقیقی a $(a\neq۱)$ و عدد طبیعی n ؛

الف) حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$۱+a+a^{۲}+\cdots+a^{n-۱}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که :

$$a^{n}-۱=(a-۱)(a^{n-۱}+\cdots+a^{۲}+a+۱)$$

۱ــ این مسئله به نام مسئله شطرنج معروف است و ابوریحان بیرونی با روش خاص خود آن را حل کرده است. (ترجمه میزان الحکمة، ص ۷۷)

درس ۲

معادلات درجه دوم

در سال‌های قبل با معادله‌های درجه اول و درجه دوم و حل آنها آشنا شده‌اید. صورت کلی معادلات درجه دوم به‌صورت $ax^2+bx+c=0$ است $(a\neq 0)$ که جواب‌های آن، در صورت وجود، از رابطهٔ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ به‌دست می‌آید. اینک، در این بخش، با برخی از انواع معادلات درجه دوم، روابط بین ریشه‌ها و ضرایب این معادلات و دیگر نکات تکمیلی آشنا خواهید شد.

کار در کلاس

۱ معادله $3x^2=5x-2$ را حل کنید.

۲ اگر $x=-1$ یک ریشهٔ معادله $4x^2-mx-7=0$ باشد، ریشه دیگر کدام است؟


پل پارک جزیره (اهواز ـ استان خوزستان)

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

فعالیت

۱ جدول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

$\frac{c}{a}$	$\frac{-b}{a}$	c	b	a	ضرب ریشه‌ها (P)	جمع ریشه‌ها (S)	مقدار هر ریشه $x_۱$ و $x_۲$		$ax^۲+bx+c=۰$
									$۳x^۲-۵x+۲=۰$
$\frac{-۷}{۴}$	—	-۷	-۳	۴	$\frac{-۷}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۷}{۴}$	-۱	$۴x^۲-۳x-۷=۰$
								۱	$x^۲-۲x+۱=۰$
							$\frac{۴}{۵}$		$۵x^۲+۶x-۸=۰$

۲ الف) در جدول بالا بین جمع ریشه‌ها و ضرایب هر معادله چه ارتباطی مشاهده می‌کنید؟

ب) در جدول بالا بین حاصل‌ضرب ریشه‌ها و ضرایب معادله چه ارتباطی وجود دارد؟

۳ اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌ها و S و P به ترتیب حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، نشان دهید :

$$S=x_۱+x_۲=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\cdots=\frac{-b}{a}$$

$$P=x_۱\,x_۲=(\qquad\qquad)(\qquad\qquad)=\qquad\qquad=\frac{c}{a}$$

به‌طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد این روابط برقرار است.

$$S=\frac{-b}{a}\ ,\ P=\frac{c}{a}$$

مثال : اگر $x=-۱$ یک ریشهٔ معادلهٔ $۴x^۲-mx-۷=۰$ باشد ریشه دیگر و مقدار m را با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها به‌دست آورید.

حل : اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های این معادله باشند، داریم :

$$P=x_۱x_۲=\frac{c}{a}\Rightarrow(-۱)x_۲=\frac{-۷}{۴}\Rightarrow x_۲=\frac{۷}{۴}$$

از طرفی با استفاده از جمع ریشه‌ها داریم :

$$S=x_۱+x_۲=\frac{-b}{a}\Rightarrow -۱+\frac{۷}{۴}=\frac{m}{۴}\Rightarrow m=۳$$

فعالیت

۱ برای تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌های آن ۲ و ۳− باشند راه حل زیر ارائه شده است.
مراحل حل را توضیح دهید.

$$\begin{cases} x=۲ \\ x=-۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۰ \\ x+۳=۰ \end{cases} \Rightarrow (x-۲)(x+۳)=۰ \Rightarrow x^۲+x-۶=۰$$

۲ اگر $x_۱=\alpha$ و $x_۲=\beta$ ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، با استفاده از روش قسمت قبل معادله را مشخص کنید.

به‌طور کلی اگر α و β دو عدد دلخواه و $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ باشند، آنگاه α و β جواب‌های معادله $x^۲-Sx+P=۰$ هستند.

کار در کلاس

معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $۲+\sqrt{۳}$ و $۲-\sqrt{۳}$ باشند.

مثال : محیط یک مستطیل ۳۳ سانتی‌متر و مساحت آن ۶۵ سانتی‌مترمربع است. ابعاد مستطیل را به‌دست آورید.

حل : فرض کنید طول و عرض مستطیل به ترتیب $x_۱$ و $x_۲$ باشند، داریم :

$$x_۱+x_۲=\frac{۳۳}{۲} \quad , \quad x_۱x_۲=۶۵$$

معادله درجه دومی تشکیل می‌دهیم که در آن $S=\frac{۳۳}{۲}$ و $P=۶۵$ باشد و آن را حل می‌کنیم.

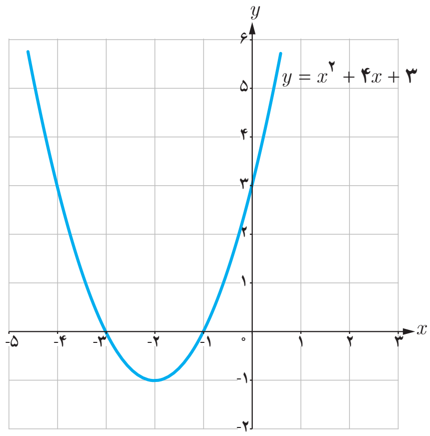
$$x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{۳۳}{۲}x+۶۵=۰ \Rightarrow ۲x^۲-۳۳x+۱۳۰=۰$$

از حل معادله اخیر $x_۱=۱۰$ یا $x_۲=\frac{۱۳}{۲}$ به‌دست می‌آید؛ در نتیجه، طول و عرض مستطیل به‌ترتیب ۱۰ و $\frac{۱۳}{۲}$ خواهد بود.

صفرهای تابع

فعالیت

نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=x^۲+۴x+۳$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.



۱ معادله $f(x)=۰$ را حل کنید و جواب‌های آن را به‌دست آورید.

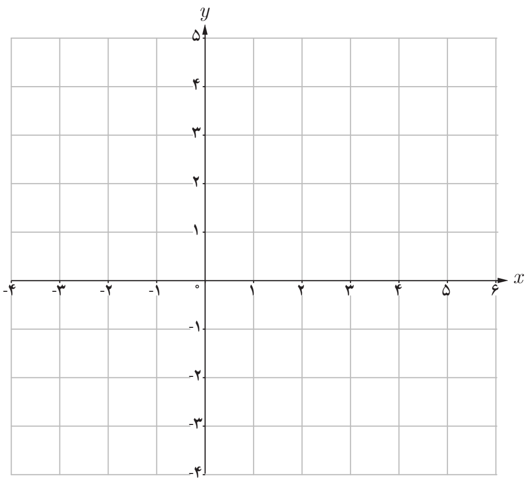
۲ محل تلاقی نمودار تابع f با محور طول‌ها چه رابطه‌ای با جواب‌های معادله $f(x)=۰$ دارد؟

صفرهای تابع

برای هر تابع f جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع f می‌نامیم. به عبارت دیگر، صفرهای تابع f آن مقادیری از x (در دامنه f) هستند که به ازای آنها $f(x)$ برابر صفر می‌شود. اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم صفرهای f طول نقاط تلاقی نمودار با محور xهاست.

کار در کلاس

۱ نمودار سهمی‌های $f(x)=x^۲-۲x+۱$ و $g(x)=x^۲+۱$ را رسم کنید.



۲ با توجه به نمودارهایی که رسم کردید در مورد جواب‌های معادله‌های $f(x)=۰$ و $g(x)=۰$ چه می‌توان گفت؟

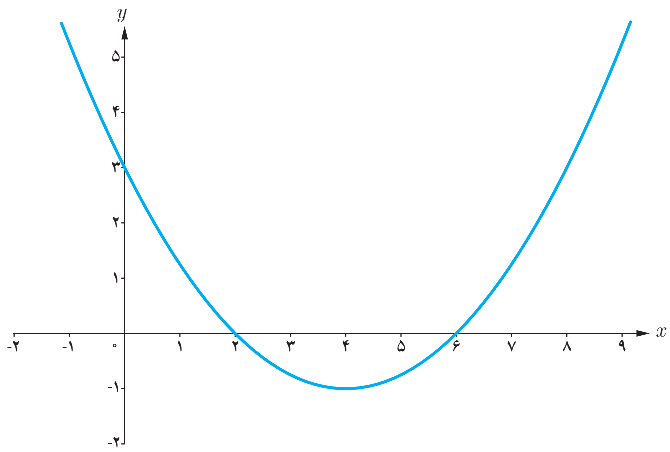
مثال : اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ باشند نشان دهید

$$ax^{۲}+bx+c=a(x-x')(x-x'')$$

حل : از آنجا که x' و x'' صفرهای تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ هستند پس جواب‌های معادله $ax^{۲}+bx+c=۰$ هستند و داریم :

$$a(x-x')(x-x'')=a(x^{۲}-(x'+x'')x+x'x'')$$
$$=a(x^{۲}-Sx+p)$$
$$=a[x^{۲}-(\frac{-b}{a})x+\frac{c}{a}]$$
$$=ax^{۲}+bx+c$$

مثال : اگر نمودار سهمی $y=ax^{۲}+bx+c$ به‌صورت زیر باشد ضابطه سهمی را مشخص کنید.



روش اول : از آنجا که $x'=۲$ و $x''=۶$ صفرهای تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ هستند با استفاده از رابطه‌ای که درمثال قبل آمده است می‌توان نوشت :

$$f(x)=ax^{۲}+bx+c=a(x-۲)(x-۶)$$

می‌دانیم نمودار تابع از نقطه $(۰,۳)$ می‌گذرد پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند و داریم.

$$۳=a(۰-۲)(۰-۶)\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

معادله سهمی به‌صورت $y=\frac{۱}{۴}(x-۲)(x-۶)$ می‌باشد که پس از ساده‌سازی به‌صورت $y=\frac{۱}{۴}x^{۲}-۲x+۳$ نوشته می‌شود.

روش دوم : از آنجا که $f(۰)=۳$ می‌توان نوشت $f(x)=ax^{۲}+bx+۳$ ؛ حال از روابط بین صفرهای تابع استفاده می‌کنیم.

$$\frac{c}{a}=۱۲\Rightarrow\frac{۳}{a}=۱۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

از طرفی از آنجا که $\frac{-b}{a}=۸$ و $a=\frac{۱}{۴}$ پس $b=-۲$ و در نتیجه $y=\frac{۱}{۴}x^{۲}-۲x+۳$

کار در کلاس

هر یک از شکل‌های زیر نمودار یک سهمی به معادلهٔ کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$ است.

۱ با توجه به معادله $f(x)=0$ نمودار یا نمودارهای متناظر با هر یک از ویژگی‌های زیر را مشخص کنید.

الف) دو ریشهٔ متمایز مثبت دارد. (شکل‌های ۸ و ۹)

ب) دو ریشهٔ منفی دارد. (   )

پ) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد. (   )

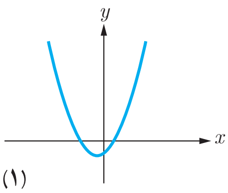
ت) ریشه ندارد. (   )

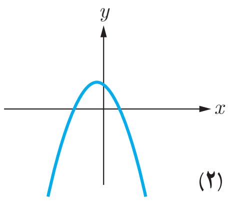
ث) ریشه ندارد و دارای ماکزیمم است. (   )

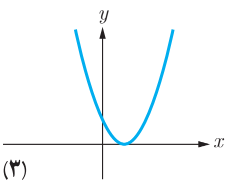
ج) یک ریشه مضاعف دارد. (   )

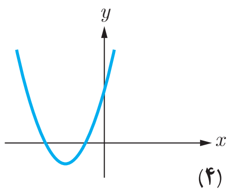
چ) حاصل جمع ریشه‌های متمایز مثبت است. (   )

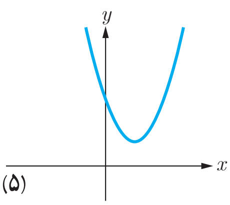
ح) حاصل جمع ریشه‌ها منفی است. (   )

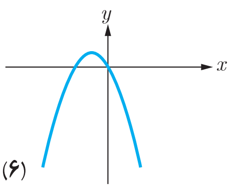

(۱)

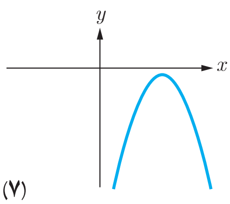

(۲)

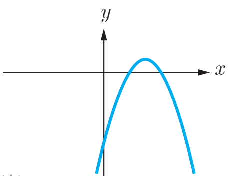

(۳)

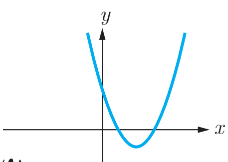

(۴)


(۵)


(۶)


(۷)


(۸)


(۹)

۲ با توجه به نمودارهای داده شده مقابل، جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

شماره شکل / ویژگی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تعداد صفر f	۲				۰				
علامت a	+				+			−	
علامت b	+				−	−			
علامت c	−				+		−		

تذکر : ستون نظیر شکل پنجم را با توجه به استدلال زیر کامل کرده‌ایم. از آنجا که منحنی سهمی محور xها را قطع نکرده است پس تعداد صفرهای تابع متناظر آن صفر خواهد بود؛ و چون شاخه‌های منحنی به سمت بالا هستند علامت a مثبت است. از آنجا که منحنی، محور yها را در نقطه با عرض مثبت قطع می‌کند پس $c > 0$ و طول نقطه مینیمم تابع ، مقداری مثبت است. پس $\frac{-b}{2a} > 0$ و از مثبت بودن a و رابطه اخیر نتیجه می‌شود $b < 0$.

مثال : اگر $x=۲$ یکی از صفرهای تابع $p(x)=x^۳-x^۲-۴x+۴$ باشد سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

حل : از آنجا که $x=۲$ یک صفر تابع $p(x)$ است می‌توان نشان داد که $p(x)$ عاملی به‌صورت $x-۲$ دارد، پس با تقسیم $p(x)$ بر $x-۲$ عامل دیگر $p(x)$ را می‌یابیم.

$$\begin{array}{l|l} x^۳-x^۲-۴x+۴ & x-۲ \\ \hline -x^۳+۲x^۲ & x^۲+x-۲ \\ x^۲-۴x & \\ -x^۲+۲x & \\ -۲x+۴ & \\ ۲x-۴ & \\ ۰ & \end{array}$$

می‌توان نوشت $p(x)=(x-۲)\ (x^۲+x-۲)$. آنگاه از حل معادله $p(x)=۰$ داریم :

$$\begin{cases} x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۲ \\ x=۱ \end{cases} \end{cases}$$

صفرهای تابع p برابر -۲ , ۲ , ۱ می‌باشند.

کار در کلاس

مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^۳+kx^۲-x-۲$ برابر (-۲) باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به‌دست آورید.

مثال : صفرهای تابع f با ضابطه $f(x)=(x^۲-۱)^۲+(x^۲-۱)-۲$ را به‌دست آورید.

حل : هر چند معادله $f(x)=۰$ از درجهٔ چهار است امّا می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب آن را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد. با فرض $t=x^۲-۱$، معادله به‌صورت $t^۲+t-۲=۰$ در می‌آید. اکنون با حل این معادله و یافتن t با استفاده از عبارت $t=x^۲-۱$ مقادیر x را می‌یابیم.

$$t^۲+t-۲=۰ \Rightarrow t=۱ \text{ یا } t=-۲$$

$$\begin{cases} t=۱ \Rightarrow x^۲-۱=۱ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲} \\ t=-۲ \Rightarrow x^۲-۱=-۲ \Rightarrow x^۲=-۱ \quad \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

پس تنها صفرهای قابل قبول برای تابع f، $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ می‌باشد.

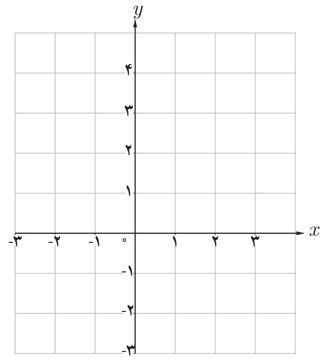
برخی از معادلات را می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب، به یکی از انواع معادلاتی که می‌شناسیم تبدیل کرد و پس از حل آن و با رجوع به تغییرِ متغیر، مقادیر مجهول اصلی معادله اولیه را یافت.

کار در کلاس

همهٔ صفرهای تابع $f(x)=x^۴-۱۰x^۲+۱۶$ را به‌دست آورید.

روش هندسی حل معادلات

فعالیت



۱ معادله $\frac{۱}{۲}x+۱ = (x-۱)^۲$ را حل کنید.

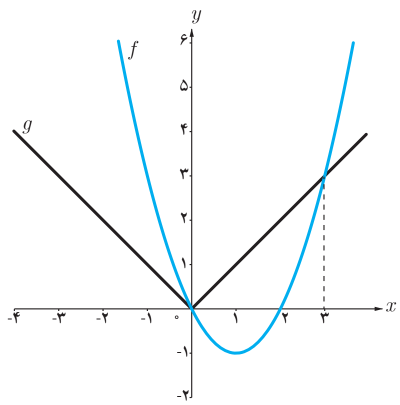
۲ نمودار دو تابع $y=(x-۱)^۲$ و $y=\frac{۱}{۲}x+۱$ را رسم کنید.

۳ چه ارتباطی بین ریشه‌های معادله $\frac{۱}{۲}x+۱ = (x-۱)^۲$ و طول‌های نقاط تلاقی نمودارها وجود دارد؟

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع جواب‌های معادله $f(x)=g(x)$ است و برعکس، هر جواب این معادله طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است.
این روش حل معادله را، که از طریق آن تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است، **روش هندسی (نموداری) حل معادلات** می‌نامیم.

مثال : به روش هندسی معادله $|x|=x^۲-۲x$ را حل کنید.

حل : با فرض $f(x)=x^۲-۲x$ و $g(x)=|x|$، نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم :



با توجه به نمودارهای دو تابع طول نقاط تلاقی دو نمودار عبارت‌اند از : $x=۰$, $x=۳$

که جواب‌های معادله $|x|=x^۲-۲x$ می‌باشند.

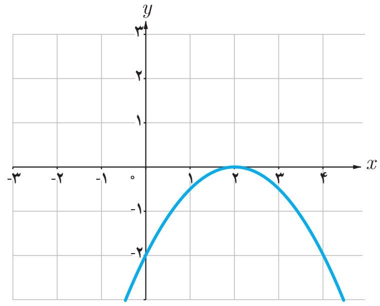
تمرین

۱ معادلهٔ درجه دومی بنویسید که :

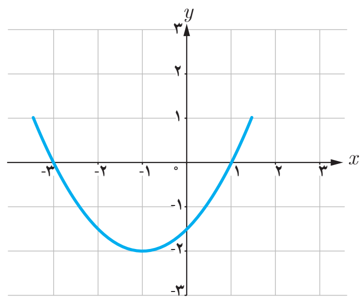
الف) ریشه‌های آن $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ باشند.

ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟).

۲ در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^۲ + bx + c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ و ضابطهٔ آن را مشخص کنید.

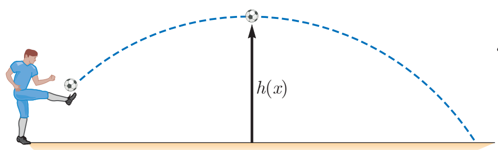


(الف)



(ب)

۳ یک توپ فوتبال بر اثر ضربه بازیکن طبق شکل روبه‌رو حرکت می‌کند تا دوباره به زمین بخورد. در هر لحظه ارتفاع توپ از سطح زمین را می‌توانیم با رابطهٔ $h(x)=-۰/۰۳x(x-۳۶)$ مدل‌سازی کنیم که x فاصله افقی توپ از نقطه اولیه است (x برحسب متر است)



الف) توپ چند متر افقی را طی می‌کند تا دوباره به زمین بخورد.

ب) توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود.

۴ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x) = x^۳ - ۴x$

ب) $g(x) = ۲x^۳ + x^۲ + ۳x$

پ) $h(x) = x^۴ + ۳x^۲ + ۵$

۵ معادلات زیر را حل کنید.

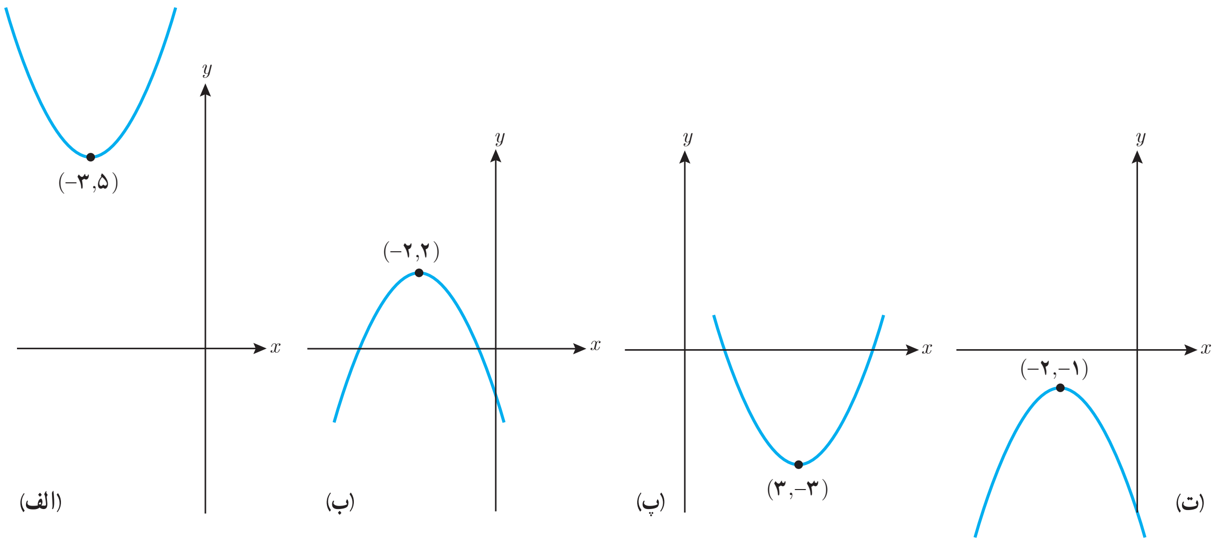
الف) $x^۴ - ۳x^۲ - ۴ = ۰$

ب) $(\frac{x^۲}{۳} - ۲)^۲ - ۷(\frac{x^۲}{۳} - ۲) + ۶ = ۰$

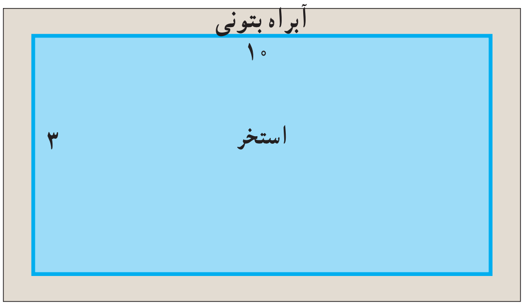
پ) $(۴-x^۲)^۲ - (۴-x^۲) = ۱۲$

۶ تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x-1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به‌دست آورید.

۷ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a| = 1$ است و نقطهٔ رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به‌دست آورید و ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.



۸ یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ مترمربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.



۹ طول یک نوع کاشی یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشانیدن دیواری به مساحت ۵۲/۸ مترمربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی‌متر است؟