



«قُلْ هَاتُوا بُرْهَانَكُمْ إِن كُنْتُمْ صَادِقِينَ»  
آیه ۶۴ سوره نمل  
«بگو اگر راست می‌گویید  
دلیل خود را بیاورید»

# آشنایی با مبانی ریاضیات



۱ آشنایی با منطق ریاضی

۲ مجموعه - زیر مجموعه

۳ قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها - جبر مجموعه‌ها

# دوس ۱ آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی که عده‌ای به آن منطق نمادین<sup>۱</sup> نیز می‌گویند، دستور زبان ریاضی، یا مطالعه ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند. امروزه منطق ریاضی در علوم مربوط به رایانه نیز به کار گرفته می‌شود. در این درس، کار ما بسیار شبیه بیان قواعد دستور زبان برای یک زبان معین است.

## گزاره

استدلال ساده‌ی زیر را در نظر بگیرید :

تیم ملی فوتبال ایران، یا تیم ملی فوتبال استرالیا به جام جهانی می‌رود.

تیم ملی فوتبال استرالیا به جام جهانی نمی‌رود.

نتیجه : تیم ملی فوتبال ایران به جام جهانی می‌رود.

این استدلال از چند جمله خبری به دست می‌آید، اگر دو

جمله اول این استدلال را درست در نظر بگیریم، در این صورت، نتیجه‌گیری جمله سوم منطقی به نظر می‌رسد. در منطق ریاضی به دو جمله خبری نخست، مفروضات استدلال و به جمله خبری سوم، نتیجه استدلال گفته می‌شود. یک استدلال می‌تواند از چندین جمله خبری تشکیل شود که یکی از آنها نتیجه استدلال و بقیه، مفروضات استدلال‌اند.

## کار در کلاس

نتیجه استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

۱ هیچ عدد مرکبی، عددی اول نیست.

۴ عددی مرکب است

نتیجه : .....

۲ اگر وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم باشد، آن گاه مدارس تعطیل است.

فردا وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم پیش بینی شده است.

نتیجه : .....

این استدلال‌ها، از جمله‌های خبری تشکیل شده است. به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست<sup>۱</sup> یا دروغ<sup>۲</sup>) باشد، گزاره<sup>۳</sup> می‌گوییم. معمولاً گزاره‌ها را با حروف  $p, q, r$  و ... نمایش می‌دهند.

درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا « $T$ » و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا « $F$ » نمایش می‌دهیم.

یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد؛ یعنی گزاره فقط یک ارزش دارد. برای مثال، گزاره زیر یک حدس در ریاضیات است.

«هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت»؛

مانند :

$$۴=۲+۲ ; ۶=۳+۳ ; ۸=۳+۵ ; ۱۰=۵+۵ ; ۱۲=۵+۷ ; \dots$$

این حدس تاکنون اثبات نشده است؛ از طرفی هم برای آن مثال نقضی یافت نشده است. در هر صورت، این گزاره فقط یک ارزش دارد. اگر ارزش این گزاره درست نباشد، پس ارزش آن حدس، نادرست است.

## خواندنی

حدس‌ها در ریاضیات به مسائل حل نشده‌ای می‌گویند که پرونده آنها در جهان علم باز است. این گونه مسائل علاوه بر اینکه درستی آنها اثبات نشده است، تاکنون هم برای آنها مثال نقضی پیدا نشده است، حدس گلدباخ نمونه‌ای از این مسائل است.

جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهنده احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند؛ زیرا خبری را بیان نمی‌کنند. جمله‌های زیر هیچ خبری را بیان نمی‌کنند؛ بنابراین، گزاره محسوب نمی‌شوند.

■ چه هوای خوبی! (ابراز احساسات)

■ لطفاً در کلاس را ببندید. (امری)

■ اینجا آشپز کیست؟ (پرسشی)

## کار در کلاس

از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید. ■ ایران کشور آسیایی است.

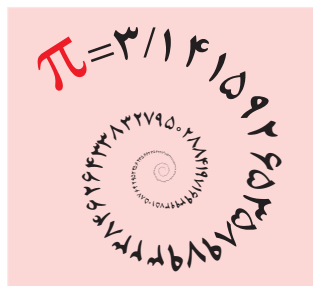
■ در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید، برابر با  $\frac{1}{۳}$  است.

۱- Truth

۲- False

۳- Proposition

۴- حدس گلدباخ



■ ای کاش می توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم.

■ آیا  $3+2$  برابر با  $5$  است؟

■ هر عدد فرد بزرگ تر از  $5$  را می توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت.

■ هر معادله درجه دوم دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

■ صدمین رقم بعد از ممیز عدد  $\pi$  برابر با  $5$  است.

## جدول ارزش گزاره‌ها

هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است؛ بنابراین، هر گزاره  $p$  مانند فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را طبق جدول روبه‌رو می‌گیرد.

$p$
د
ن

$p$	$q$
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

ارزش‌های دو گزاره  $p$  و  $q$ ، طبق جدول روبه‌رو چهار حالت دارد.

## کار در کلاس

ارزش‌های سه گزاره  $p$ ،  $q$  و  $r$ ، طبق جدول روبه‌رو  $2^3=8$  حالت دارد. جاهای خالی را پر کنید.

$p$	$q$	$r$
د	د	د
د	...	ن
...	ن	...
د	ن	ن
ن	د	...
...	د	ن
ن	...	...
...	...	...

– به نظر شما جدول ارزش‌های چهار گزاره، چند حالت دارد؟

– با توجه به اینکه هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش «د» یا «ن» را داشته باشد و با توجه به اصل ضرب، اگر  $n$  گزاره داشته

باشیم، در این صورت، جدول ارزش‌های آن گزاره‌ها چند حالت دارد؟

## گزاره‌نما

### فعالیت

عبارت‌های خبری زیر را در نظر بگیرید :  
الف)  $a$  عددی فرد است.

ب) در پرتاپ یک تاس، احتمال آنکه پیشامد  $A$  رخ دهد برابر با  $\frac{1}{4}$  است.

پ) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر با ۶ است.  $(3x+2y=6)$

۱ ارزش کدام یک از جملات بالا را می‌توانید تعیین کنید؟

۲ اگر به جای متغیر در جمله « $a$  عددی فرد است» قرار دهیم  $a=3$  در این صورت، ارزش آن را تعیین کنید.

اگر در آن  $a=4$  قرار دهیم، در این صورت ارزش آن چیست؟

هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به کار رفته در آنها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

### کار در کلاس

جاهای خالی را پر کنید :

اگر در جمله «ب» قرار دهیم  $\{ \quad , \quad , \quad \}$  در این صورت، ارزش گزاره حاصل درست می‌شود. به نظر شما چه مجموعه‌هایی را به جای  $A$  قرار دهیم، تا اینکه ارزش گزاره حاصل درست شود.

اگر در جمله «ب» قرار دهیم  $\{ \quad \}$  در این صورت ارزش گزاره حاصل، نادرست است.

اگر در جمله «پ» قرار دهیم  $x=0,000,000$  و  $y=0,000,000$  در این صورت، ارزش گزاره حاصل درست و در حالتی که  $x=0,000,000$  و  $y=0,000,000$  در این صورت، ارزش گزاره حاصل نادرست است.

## دامنه متغیر گزاره‌نما

در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آنها را به جای متغیرهای آن قرار داد، تا اینکه گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر<sup>۱</sup> گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف  $D$  نمایش می‌دهند.

برای مثال، دامنه متغیر گزاره‌نمای « $P$  عددی اول است» مجموعه اعداد طبیعی، دامنه متغیر گزاره‌نمای « $x$  عددی زوج است» مجموعه اعداد صحیح و دامنه متغیر گزاره‌نمای « $4x^2+x-5=0$ » مجموعه اعداد حقیقی می‌توان در نظر گرفت.

در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آنها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب<sup>۲</sup> گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف  $S$  نمایش می‌دهند و همواره داریم:  $S \subseteq D$ .

دامنه متغیر گزاره‌های زیر داده شده است. مجموعه جواب هریک از آنها را مشخص کنید.

(الف)  $x$  مضرب ۷ است. ( $D = \mathbb{Z}$ )

(ب)  $15x^2 - 7x - 8 = 0$  ( $D = \mathbb{R}$ )

(پ) تاس را پرتاب می‌کنیم و  $P(\{x\}) = \frac{1}{6}$  ( $D = \{1, 2, \dots, 6\}$ )



## ترکیب گزاره‌ها

### فعالیت

۱ هریک از این جمله‌های زیر، از چند گزاره تشکیل شده است؟

۲ آیا می‌توانید با توجه به ارزش گزاره‌های به کار رفته در هر جمله، ارزش آن جمله را تعیین کنید.

■ عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است.

■ عدد ۲ زوج است، یا عدد ۵ مضرب ۳ است.

■ اگر عدد ۲ زوج باشد، آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است.

■ چنین نیست که عدد ۲ زوج باشد.

■ اگر عدد ۲ زوج باشد، آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است و برعکس.

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط)، گزاره‌های مرکب به دست می‌آیند.

در ادامه ادات ربط را برای ترکیب گزاره‌ها معرفی می‌کنیم. با در دست داشتن ارزش گزاره‌های  $p$ ،  $q$ ،  $r$  و ... و معرفی

ادات ربط، می‌توان گزاره‌های مرکب را تعریف کرد که ارزش گزاره‌های مرکب فقط به ارزش گزاره‌های  $p$ ،  $q$ ،  $r$  و ... و

ادات ربط بین آنها بستگی دارد.

## نقیض یک گزاره

نقیض گزارهٔ  $p$  به صورت  $\sim p$  نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که  $p$ » می‌خوانیم. اگر ارزش گزارهٔ  $p$  درست باشد، در

این صورت، ارزش گزارهٔ  $\sim p$  نادرست است و وقتی که  $p$  نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است. به علامت « $\sim$ » ناقض

گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود.

مثال: نقیض گزارهٔ «۲ عددی گنگ است» را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت.

«چنین نیست که ۲ عددی گنگ باشد»، یا «۲ عددی گنگ نیست.»

جدول ارزش برای نقیض یک گزاره که تمام حالت‌های ممکن را برای درستی یا

نادرستی گزاره در نظر می‌گیرد، به صورت روبه‌روست:

$p$	$\sim p$
د	ن
ن	د

مثال: جدول ارزش گزاره  $(\sim p)$  را تشکیل دهید و ارزش آن را در هر حالت، با ارزش گزاره  $p$  مقایسه کنید.

حل:

$p$	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در هر حالت از جدول، ارزش  $p$  با ارزش  $(\sim p)$  یکسان است. در این حالت می‌گوییم: دو گزاره  $p$  و  $(\sim p)$  هم‌ارز منطقی هستند و می‌نویسیم:  $(\sim p) \equiv p$ .

در حالت کلی اگر دو گزاره  $p$  و  $q$  هم‌ارز باشند می‌نویسیم:  $p \equiv q$  و می‌خوانیم:  $p$  هم‌ارز است با  $q$ .

## ترکیب فصلی دو گزاره

گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید.

$p$ :  $\sqrt{3}$  عددی حقیقی است.

$q$ : ۲ عددی اول نیست.

گزاره مرکب « $\sqrt{3}$  عددی حقیقی است، یا ۲ عددی اول نیست» که از ترکیب دو گزاره ساده  $p$  و  $q$  با رابط منطقی «یا» تشکیل شده است، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. هرگاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p$  یا  $q$ » را که به صورت « $p \vee q$ » می‌نویسند، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی « $\vee$ » فاصل گفته می‌شود. گزاره مرکب زیر را در نظر بگیرید: «پدر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می‌آید، یا مادر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می‌آید».

اگر پدر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، در این صورت ارزش گزاره مرکب بالا درست است. اگر مادر علی هم برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب درست است. در حالتی که هم پدر علی و هم مادر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیایند، ارزش گزاره مرکب درست است.

گزاره مرکب بالا وقتی نادرست است که پدر و مادر علی به مدرسه برای گرفتن کارنامه مراجعه نکنند.

$p$	$q$	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

بنابراین، ارزش گزاره مرکب  $p \vee q$  وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره  $p$  و  $q$  نادرست باشند و در بقیه حالات، ارزش  $p \vee q$  درست است. جدول ارزش گزاره  $p \vee q$  به صورت روبه‌رو است.

مثال: هرگاه  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند به طوری که  $a \times b = 0$  در این صورت  $a = 0$  یا  $b = 0$  یعنی:

$$a, b \in \mathbb{R}, a \times b = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$$

از ویژگی مثال قبل، برای حل معادله‌ها استفاده می‌کنیم:

$$x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x + 7) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$$

## ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \wedge q$ » که خوانده می‌شود « $p$  و  $q$ » را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی « $\wedge$ » عاطف گفته می‌شود.

### فعالیت

گزاره مرکب زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید.

«سوگند فارغ التحصیل شد و پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.»

■ آیا ارزش این گزاره مرکب درست است؟

فرض کنید:

$p$ : سوگند فارغ التحصیل شد.

$q$ : پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.

■ اگر ارزش  $p$  درست و ارزش  $q$  نادرست باشد، ارزش  $p \wedge q$  چیست؟

■ اگر ارزش  $p$  نادرست و ارزش  $q$  درست باشد، ارزش  $p \wedge q$  چیست؟

■ هرگاه ارزش دو گزاره  $p$  و  $q$  نادرست باشد، ارزش  $p \wedge q$  چیست؟

■ هرگاه ارزش دو گزاره  $p$  و  $q$  درست باشد، ارزش  $p \wedge q$  چیست؟

بنابراین، ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره  $p$  و  $q$  درست باشند و در بقیه حالات ارزش  $p \wedge q$  نادرست است. جدول ارزش  $p \wedge q$  به صورت روبه‌رو است:

$p$	$q$	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

### کار در کلاس

۱ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره $p$	گزاره $q$	ارزش $p$	ارزش $q$	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
هفته هفت روز دارد.	ماه شهریور ۳۱ روز دارد.				
.....	عدد ۷ مضرب ۵ نیست	ن			
۲ عددی اول است	.....		ن		
.....	.....	ن	ن		
(-۷) اول است	.....			د	



۲ با کامل کردن جدول ارزش‌ها، نشان دهید که گزاره‌های  $(p \vee q) \sim$  و  $(\sim p \wedge \sim q)$  هم‌ارز منطقی هستند.

$p$	$q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	د	ن		ن	
د	ن	د	ن		د	
ن	د	د		د		ن
ن	ن	ن		د		د

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، همهٔ حالت‌های ارزش‌های گزارهٔ  $(p \vee q) \sim$  و  $(\sim p \wedge \sim q)$  یکسان‌اند پس  $(p \vee q) \sim \equiv \sim p \wedge \sim q$  در منطق ریاضی به این هم‌ارزی قانون دموورگان گفته می‌شود.

۳ با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که  $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ .

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$

مثال: مقادیر  $x$  و  $y$  را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$(2x - y)^2 + (x - 1)^2 = 0$$

حل: چون  $(x - 1)^2 \geq 0$  و  $(2x - y)^2 \geq 0$  بنابراین، تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$\left[ (2x - y)^2 = 0 \right] \wedge \left[ (x - 1)^2 = 0 \right] \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 2$$

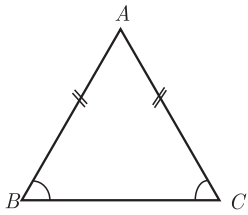
## ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب « $p \Rightarrow q$ » که خوانده می‌شود «اگر  $p$  آن‌گاه  $q$ » را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی  $p$  را مقدم (فرض) و  $q$  را تالی (حکم) می‌نامیم.

### خواندنی

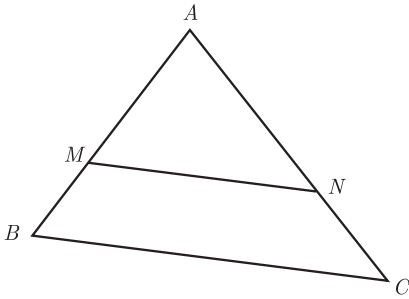
گزارهٔ مرکب « $p \Rightarrow q$ » را به صورت‌های « $p$  شرط کافی برای  $q$  است» و « $q$  شرط لازم برای  $p$  است» نیز می‌خوانیم.

تا به حال در ریاضیات و هندسه با گزاره‌های شرطی بسیاری مواجه بوده‌اید، در زیر چند نمونه می‌آوریم.  
**۱** اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد. آن‌گاه دو زاویهٔ مجاور به قاعده برابرند.



$$\triangle ABC : AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

**۲** اگر در مثلث  $ABC$ ، داشته باشیم  $MN \parallel BC$  آن‌گاه  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ .



**۳** اگر  $A$  پیشامدی در فضای نمونه  $S$  باشد، آن‌گاه  $A \subseteq S$ .

جدول ارزش گزارهٔ شرطی  $p \Rightarrow q$  به صورت زیر است.  
 با توجه به جدول ملاحظه می‌کنید که:

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	ن	د
ن	د	د

**۱** هرگاه ارزش  $p$  (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزارهٔ مرکب « $p \Rightarrow q$ » همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزارهٔ  $q$  بستگی ندارد.  
 در این حالت می‌گویند: ارزش « $p \Rightarrow q$ » به انتفای مقدم درست است.

**۲** ارزش گزارهٔ  $p \Rightarrow q$  وقتی نادرست است که  $p$  درست و  $q$  درست نباشد.

**مثال:** ارزش گزارهٔ «اگر ۲ فرد است، آن‌گاه  $2 < 5$ » به انتفای مقدم درست است.

## کار در کلاس

**۱** با پر کردن جاهای خالی در جدول زیر؛ نشان دهید که گزاره‌های  $p \Rightarrow q$  و  $\sim p \vee q$  هم‌ارز منطقی‌اند.

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د		
د	ن	ن		
ن	ن	د		
ن	د	د		

۲ گزاره « $q \Rightarrow p$ » عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » و گزاره « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » عکس نقیض ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » است. با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر نشان دهید که  $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$  یعنی، هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$

۳ با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید:

(الف)  $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$       (ب)  $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د		
د	ن		
ن	د		
ن	ن		

(ب)

$p$	$q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د		
د	ن		
ن	د		
ن	ن		

(الف)

گزاره‌هایی نظیر  $(p \Rightarrow p)$  یا  $(p \vee \sim p)$  را گزاره‌هایی همیشه درست و گزاره‌هایی نظیر  $(p \wedge \sim p)$  را همیشه نادرست می‌نامیم.

مثال: ثابت کنید اگر  $a \in \mathbb{Z}$  و  $a^2$  عددی فرد باشد، آن‌گاه  $a$  عددی فرد است.

حل: به جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم (اثبات عکس نقیض آن ساده‌تر است).

$(a^2$  عددی زوج است  $\Rightarrow a$  عددی زوج است)  $\equiv (a$  عددی فرد است  $\Rightarrow a^2$  عددی فرد است)

اگر  $a$  عددی زوج باشد، یعنی  $a = 2k$ ، خواهیم داشت:

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(\underbrace{2k^2}_{k' \in \mathbb{Z}}) = 2k'$$

در نتیجه  $a^2$  عددی زوج است.

## ترکیب دو شرطی دو گزاره

هرگاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزاره مرکب  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی  $p$  و  $q$  می‌نامیم. گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » را به صورت زیر می‌خوانیم:

«اگر  $p$ ، آن‌گاه  $q$  و برعکس»، « $p$  شرط لازم و کافی برای  $q$  است» و « $p$  اگر و تنها اگر  $q$ »

مثال: گزاره‌های زیر، نمونه‌ای از ترکیب دو شرطی گزاره‌هاست.

(الف)  $6$  عدد اول است  $\Leftrightarrow 2 > 5$

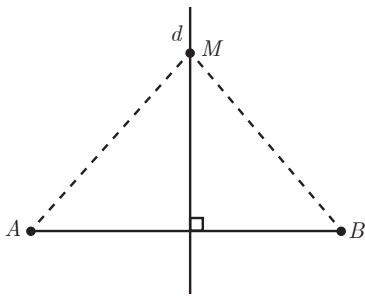
(ب)  $99$  عدد اول نیست  $\Leftrightarrow \sqrt{2}$  عددی گویاست.

(پ) در پرتاب یک تاس، شرط لازم و کافی برای آنکه احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد، آن است که پیشامد تهی باشد.

(ت) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای واقع بر عمود منصف یک پاره خط

باشد، آن است که فاصله آن نقطه تا دو سر پاره خط برابر باشد.

$$[M \in d(AB \text{ پاره خط منصف})] \Leftrightarrow MA = MB$$



### کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزاره مرکب « $p \Leftrightarrow q$ » را از جدول ارزش گزاره مرکب  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  نتیجه بگیرید.

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د			
د	ن			
ن	د			
ن	ن			

با توجه به اینکه  $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ، جدول ارزش گزاره  $p \Leftrightarrow q$  به صورت زیر است:

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

۲ با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را مانند نمونه اثبات کنید.

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

الف) قوانین جابه‌جایی

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

ب) قوانین شرکت‌پذیری

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

پ) قوانین توزیع‌پذیری

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

در زیر یکی از قانون‌های توزیع‌پذیری اثبات شده است.

$p$	$q$	$r$	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

چون دو ستون آخر جدول یکسان شده است، پس  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

## سورها

به جملات زیر دقت کنید :

«همه دانش‌آموزان کلاس در سال گذشته قبول شده‌اند». «هر گردویی گرد است». «هر مستطیلی یک مربع است». «هر مثلث متساوی‌الاضلاعی یک مثلث متساوی‌الساقین است». «بعضی از تیم‌های دسته یک به دسته برتر صعود می‌کنند». «بعضی از اعداد اول، زوج‌اند». «بعضی از دوزنقه‌ها، مستطیل‌اند».

عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به سوره معروف‌اند. این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره نماها قرار گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.

سور کلمه‌ای عربی است و به معنای «بارو» حصار یا دیوار گرداگرد شهر است. نام‌گذاری عبارت‌های «به‌ازای هر» و «به‌ازای بعضی مقادیر» با سور به این جهت است که آنها قلمرو اعضای موضوع مورد بحث را مشخص می‌کنند. از نظر منطق دانان وجه تشابه سور با دیوار شهر آن است که دیوار گرداگرد شهر، محدوده و قلمرو شهر را مشخص می‌کند و الفاظ به کار رفته در گزاره‌نماها، مرز و قلمرو اشیاء مورد استفاده در گزاره‌نماها را تعیین می‌کنند.

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به جای «به‌ازای هر»، یا «به‌ازای جمیع مقادیر» از نماد  $\forall$  و به جای «وجود دارد»، یا «به‌ازای بعضی مقادیر» از نماد  $\exists$  استفاده می‌کنیم. نماد  $\forall$  سور عمومی و نماد  $\exists$  سور وجودی نامیده می‌شود.

## کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

عبارت با زبان طبیعی	عبارت با زبان ریاضی
برای هر عدد حقیقی $x$ داریم: $x \geq 0$	$\forall x \in \mathbb{R}; x \geq 0$
	$\forall a \in \mathbb{E}; a = 2k \ (k \in \mathbb{Z})$
	$\exists p \in \mathbb{P}; p = 2k \ (k \in \mathbb{Z})$
بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.	

در جدول فوق، مجموعه اعداد زوج را با  $E$ ، مجموعه اعداد فرد را با  $O$  و مجموعه اعداد اول را با  $P$  نمایش داده‌ایم.

گزاره‌نمای شامل متغیر  $x$  که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند؛ به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

مثال: ارزش گزاره  $\forall x \in \mathbb{R}; x \geq x$

نادرست است؛ زیرا  $x = \frac{1}{p}$  برای آن مثال نقض محسوب می‌شود.

مثال: کدام یک از عبارت‌های زیر، گزاره‌هایی درست‌اند؟

(ب)  $\forall x \in \mathbb{R}; \tan x \times \cot x = 1$

(الف)  $\forall x \in \mathbb{Z}; x(x+1) = 2k \ (k \in \mathbb{Z})$

حل (الف) چون حاصل ضرب هر دو عدد متوالی صحیح، عددی زوج است. بنابراین، برای هر عضو از دامنه متغیر  $(\mathbb{Z})$  گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود، پس این عبارت درست است.

۱- نماد  $\forall$  از حرف اول کلمه All گرفته شده است.

۲- نماد  $\exists$  از حرف اول کلمه Exist گرفته شده است.

ب) نادرست است؛ زیرا  $x = \frac{\pi}{4}$ ، گزاره‌نما را به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌کند.

گزاره‌نمای شامل متغیر  $x$  که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

مثال: گزاره  $\exists x \in \mathbb{Z}; |x| - 1 < 0$

درست است؛ زیرا حداقل یک عضو  $x=0$  وجود دارد که به ازای آن، گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود.

مثال: کدام یک از عبارتهای زیر درست اند:

الف)  $\exists x \in P; x = 2k$       ب)  $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 = 0$

حل. الف) درست است؛ زیرا ۲ عددی اول و زوج است، پس مجموعه جواب گزاره‌نما  $\{2\}$  و ناتهی است.

ب) نادرست است؛ زیرا مجموعه جواب گزاره‌نما مجموعه تهی است.

### کار در کلاس

درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد اول، فرد است.

ب)  $\exists x \in \mathbb{N}; 2x^2 + 3x + 1 = 0$

پ)  $\exists x \in \mathbb{Z}; 2x^2 + 3x + 1 = 0$

ت) هر عدد زوج، غیر اول است.

ث) در آمار، هر متغیر ترتیبی یک متغیر کیفی است.

ج) در احتمال، هر مجموعه پیشامد زیر مجموعه فضای نمونه است.

چ) در فضای نمونه  $S$ ، پیشامدی مانند  $A$  وجود دارد به طوری که  $P(A) > 1$ .

ح) طول هر پاره خط، عدد حقیقی است.

### نقیض گزاره‌های سوری

گزاره «علی به مدرسه رفت» را در نظر بگیرید و نقیض آن را در زیر بنویسید.

.....

معمولاً برای نقیض کردن یک گزاره، فعل آن را منفی می‌کنند. اکنون گزاره

زیر را در نظر بگیرید و نقیض آن را بنویسید.

هر آسیایی، ایرانی است.

.....

در زبان طبیعی معمولاً این اشتباه رخ می‌دهد که برای نوشتن نقیض این گزاره،

فقط فعل آن را منفی می‌کنند و می‌نویسند:

هر آسیایی، ایرانی نیست.



همان طور که ملاحظه می کنید، ارزش دو گزارهٔ قبل («هر آسیایی، ایرانی است» و «هر آسیایی، ایرانی نیست») نادرست است و این غیر ممکن است (چرا؟) بنابراین، جملهٔ دوم نمی تواند نقیض جملهٔ اول باشد.

برای رفع این مشکل؛ فرض کنیم  $A$  مجموعه مردمان آسیا و ایرانی بودن  $x$  را با  $P(x)$  نمایش دهیم؛ بنابراین، گزارهٔ «هر آسیایی، ایرانی است» به صورت  $\forall x \in A; P(x)$  بیان می شود.

چون ارزش این گزاره: « $\forall x \in A; P(x)$ » نادرست است، پس ارزش گزارهٔ نقیض آن، یعنی:  $\sim (\forall x \in A; P(x))$  باید درست باشد. از آنجا که ارزش گزارهٔ  $(\forall x \in A; P(x))$  نادرست است، پس وجود دارد  $x \in A$  به طوری که  $P(x)$  نادرست است؛ بنابراین ارزش  $\sim P(x)$  درست می باشد، در نتیجه ارزش گزارهٔ  $\exists x \in A; \sim P(x)$  درست است و ارزش این گزاره با ارزش گزارهٔ  $\sim (\forall x \in A; P(x))$  یکسان است، بنابراین داریم:

$$\sim (\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x)$$

در این صورت، نقیض گزارهٔ «هر آسیایی، ایرانی است» به صورت زیر است:

«بعضی از آسیایی ها، ایرانی نیستند»

به همین ترتیب می توان نقیض گزاره ای را که سور وجودی دارد، به صورت زیر نوشت:

$$\sim (\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \sim P(x)$$

مثال: ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید و سپس نقیض هریک را بنویسید.

$$\text{الف) } \forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0 \quad \text{ب) } \exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1$$

حل الف) ارزش این گزاره نادرست است؛ چون  $x=0$ ، مثالی نقض برای آن است.

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^2 \not> 0 \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0$$

ب) درست است؛ زیرا  $y = -1$  در آن صدق می کند، پس مجموعهٔ جواب آن ناتمامی است.

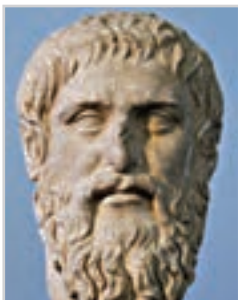
$$\sim (\exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1) \equiv \forall y \in \mathbb{R}; \sim (y < 0 \wedge y^2 \leq 1)$$

$$\equiv \forall y \in \mathbb{R}; y \geq 0 \vee y^2 > 1$$

## خواندنی

گفتیم که سور به معنای بارو یا حصار یا دیوار گرداگرد شهر است و سورها قلمرو اعضای مورد بحث را مشخص می کنند. کلمهٔ سوره در قرآن کریم هم به همین معنا استفاده شده است. «سوره» از سور گرفته شده است و به مجموعه آياتی گفته می شود که ابتدا و انتهای آن مشخص باشد.





۱ از جملات زیر کدام یک گزاره است، ارزش گزاره‌ها را مشخص کنید.

الف) خیام پزشک ایرانی است. (ب) افلاطون فیلسوف یونانی است.

پ)  $3+5 > 6$  (ت) تخته سیاه را پاک کنید.

ج) چه باران شدیدی می‌آید. (ث)  $\{1\} \in \{1, 2, 3, 4\}$

ح)  $\emptyset \notin \mathbb{R}$  (چ) عدد ۱۹۱۷ عددی اول است.

د) عدد  $5^1 + 8$  عددی اول است. (خ)  $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$

ز) به امید کامیابی شما. (را) آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

۲ در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید، به طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند.

الف)  $-7 \times \square = -7$  (ب)  $5 + \square \notin \mathbb{Z}$

پ)  $\frac{8 \times \square}{4} \in \left\{2, \frac{1}{3}\right\}$  (ت)  $\frac{10 \times 9}{3} \square 5 \times 3$

ث)  $\square \times \sqrt{2} = 0$  (ج)  $1 \square \{1\}$

ج)  $5(\square - 3) = 20$  (ح)  $7(\square - 3) = 35$

۳ دامنه متغیر هر یک از گزاره‌های زیر، مجموعه اعداد صحیح است، مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

الف)  $x$  مربع کامل است. (ب)  $a$  یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است.

پ)  $\frac{2x+1}{3} \leq -1$  (ت)  $\{n(n+1) = 0 \mid n \in W\}$

۴ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف)  $4 \leq 3$

ب) ابوالوفای بوزجانی، ریاضی‌دان ایرانی است.

پ)  $a \in \{b, c, d\}$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد  $\pi$  گویاست.

ث) خورشید به دور زمین می‌چرخد و سندج مرکز استان کردستان است.

ج) اگر ۳ زوج باشد، آن گاه ۲ فرد است.

۵ ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف)  $(2 < 3) \wedge (4 + 3 = 10)$

ب)  $(5 > 3) \vee ((-1)^2 + 1 = 0)$

پ)  $\left(\frac{1}{p} \neq \frac{3}{q}\right) \vee (1 \in \{2, 3, 4\})$

ت) اگر عدد ۴ فرد باشد، آن گاه ۴ مربع کامل نیست.

ث) در لوزی مفروض دو قطر با هم برابرند.

ج)  $2 > 3 \Leftrightarrow -2 < -3$  (ح) اگر  $a \in \{b\}$  آن گاه  $a = b$  و برعکس.



۶ جدول زیر را کامل کنید.

ارزش $(p \wedge q)$	ارزش $(p \Rightarrow q)$	ارزش $q$	ارزش $p$	گزاره $q$	گزاره $p$
د					عدد ۲ زوج است.
	ن			$1 \notin \mathbb{Z}$	
ن					$2 \in \{1, 2\}$
	د			عدد ۷ اول است.	

۷ جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

$\sim p \wedge p$ (ب)	$p \wedge \sim q$ (الف)
$(p \vee q) \wedge \sim p$ (ت)	$\sim p \vee p$ (پ)
$\sim p \Leftrightarrow \sim q$ (ج)	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$ (ث)

۸ با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید که:

$p \vee F \equiv p$ (ب)	$p \Rightarrow p \equiv T$ (الف)
$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ (ت)	$p \wedge T \equiv p$ (پ)
$p \vee (q \wedge p) \equiv p$ (ج)	$p \wedge (q \vee p) \equiv p$ (ث)
$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$ (ح)	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ (چ)

۹ ثابت کنید هرگاه  $n$  عددی صحیح و  $n^2$  مضرب ۳ باشد، آن‌گاه  $n$  نیز مضرب ۳ است.

۱۰ گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای  $\exists, \forall$  بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

(الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

(ب) برای بعضی از مقادیر  $a$  در مجموعه اعداد حسابی داریم:  $a^2 < 0$ .

(پ) همه اعداد اول فرداند.

(ت) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند  $x$  به طوری که  $1 - 2x > 5$ .

(ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ تر یا مساوی ۲ است.

(ج) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم  $x^2 = x$ .

۱۱ هرگاه  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 5\}$  دامنه متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

$\forall x \in A; x + 2 \leq 9$ (ب)	$\exists x \in A; x + 4 = 10$ (الف)
$\forall x \in A; x + 1 \geq 6$ (ت)	$\exists x \in A; x + 3 \leq 4$ (پ)

۱۲ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

$\forall n \in \mathbb{N}; (2^n + 1) \in P$ (ب)	$\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ (الف)
$\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y - 3}{5} = 0$ (ت)	$\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$ (پ)