# درس ۲ مجموعه ــ زیر مجموعه

**یادآوری :** در سال‌های قبل با مفهوم مجموعه آشنا شده‌اید؛ برای مثال، مجموعهٔ اعداد اوّل یک‌رقمی به صورت زیر است :

$A=\{۲, ۳, ۵, ۷\}$

می‌توان این مجموعه را با نمادهای ریاضی به صورت $A=\{x \in P \mid x<۱۰\}$ نوشت که در آن $P$ مجموعهٔ اعداد اوّل است. چون عضو ۲ متعلق به مجموعهٔ $A$ است، می‌نویسیم : $۲\in A$، از طرفی واضح است که $۶\notin A$ یعنی عضو ۶ به مجموعهٔ $A$ تعلق ندارد.

## کار در کلاس

۱ فرض کنید $A=\{a , b\}$، درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\{a\} \in A$ ب) $\varnothing \in A$

پ) $\{a\} \subseteq A$ ت) $b\subseteq A$

ث) $a \in A$ ج) $\{a , b\} \subseteq A$

۲ کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر با تهی و کدام یک ناتهی‌اند؟

الف) $\{x \in\mathbb{Z} \mid x^۲=۹ \text{ و } ۲x=۴\}$ ب) $\{x \in\mathbb{Z} \mid x+۸=۸\}$

پ) $\{x \in\mathbb{Z} \mid x \neq x\}$ ت) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^۲=۷x\}$

۳ مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

$A=\{x \in\mathbb{Z} \mid |x| \leq ۲\}$

$B = \{m\in\mathbb{Z} \mid m^۳ = m\}$

$C =\{k\in \mathbb{R} \mid k^۲-۱=۰\}$

$D =\{a\in S \mid$ فضای نمونه پرتاب یک تاس است $S\}$

۴ با توجه به مجموعه‌ها در قسمت ۳، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$A\cap D\subseteq C$ $B\subseteq A$ $B\in A$

$B-D\subseteq A$ $C \nsubseteq A$ $B\subseteq C\cup A$

## تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

**فعالیت**

مجموعه $A=\{a , b , c\}$ را در نظر بگیرید.

۱ همهٔ زیرمجموعه‌های A را بنویسید.

۲ با دو رقم ۰ و ۱ می‌توانیم زیرمجموعه $B=\{b , c\}$ از مجموعهٔ $A$ را با کد سه رقمی ۰۱۱ مشخص کنیم؛ چون $a \notin B$ متناظر با آن کد ۰ و $c \in B$ و $b$ متناظر با آنها کد ۱ را در نظر گرفته‌ایم. همچنین زیرمجموعهٔ $\{a\} \subseteq A$ را با کد ۱۰۰ متناظر می‌کنیم. اکنون شما بقیهٔ زیرمجموعه‌های $A$ را با کدهایی سه رقمی نظیر کنید.

۳ با این روش کدگذاری و به کمک اصل ضرب (سال گذشته در فصل شمارش، بدون شمردن خوانده‌اید) تعداد زیرمجموعه‌های A را تعیین کنید.

رقم سوم　　رقم دوم　　رقم اوّل

۴ فرض کنید $A=\{a_1 , a_2 , a_3 , a_4\}$، با روش کدگذاری با رقم‌های ۰ و ۱ و به کمک اصل ضرب تعیین کنید که $A$ چند زیرمجموعه دارد.

رقم چهارم　　رقم سوم　　رقم دوم　　رقم اوّل

۵ اگر $A=\{a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n\}$ در این صورت، با این روش کدگذاری مشخص کنید که $A$ چند زیرمجموعه دارد.

رقم $n$ام　　...　　رقم سوم　　رقم دوم　　رقم اول

فرض کنید $A$ یک مجموعه $n$ عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های $A$ برابر با $2^n$ است.

**مثال :** مجموعه $A=\{a , \{a\} , \varnothing\}$ را در نظر بگیرید و همهٔ زیرمجموعه‌های $A$ را در یک مجموعه بنویسید.

**خواندنی**

مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های $A$، مجموعهٔ توانی $A$ نامیده می‌شود و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم.

اگر $A$، $n$ عضو داشته باشد، در این صورت $P(A)$، $2^n$ عضو دارد.

اگر $A \subseteq B$ به‌طوری که $A \neq B$، آن‌گاه $A$ زیرمجموعهٔ محض یا سرهٔ $B$ نامیده می‌شود.

**مثال :** مجموعهٔ متناهی $A$ را در نظر بگیرید، اگر ۲ عضو به اعضای $A$ اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، مشخص کنید $A$ چند عضوی است.

**حل :** فرض کنیم $A$، $n$ عضو داشته باشد، پس دارای $۲^n$ زیرمجموعه است؛ اگر ۲ عضو به اعضای $A$ اضافه شود، در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های $A$، ۴۸ واحد افزایش می‌یابد؛ یعنی در این حالت، تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر با $۲^n+۴۸$ است.

از طرفی وقتی ۲ عضو به اعضای $A$ اضافه می‌شود، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید، برابر است با $۲^{n+۲}$ است.

بنابراین داریم :

$$۲^n+۴۸ = ۲^{n+۲} = ۲^n \times ۲^۲$$

$$\Rightarrow ۲^n+۴۸ = ۴\times ۲^n \Rightarrow ۴\times ۲^n - ۲^n = ۴۸$$

$$\Rightarrow ۳\times ۲^n = ۴۸ \Rightarrow ۲^n = ۱۶ = ۲^۴ \Rightarrow n=۴$$

در نتیجه مجموعهٔ $A$، چهار عضوی است.

## افراز یک مجموعه

**فعالیت**

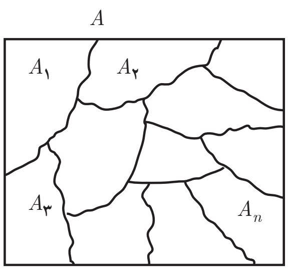
۱ مجموعهٔ $A=\{a , b , c\}$ را در نظر بگیرید. تمام زیرمجموعه‌های $A$ به غیر از $\varnothing$ را بنویسید.

۲ از بین زیرمجموعه‌های ناتهی $A$ که در بالا نوشتید، دو زیرمجموعه چنان در نظر بگیرید که اوّلاً اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً اجتماع آنها برابر با $A$ شود.

۳ همهٔ جواب‌های ممکن برای قسمت قبل را به‌دست آورید.

۴ آیا می‌توان سه زیرمجموعه در قسمت ۱ چنان یافت که اشتراک دوبه‌دوی آنها تهی باشد و اجتماع آنها برابر با $A$ شود؟

فرض کنیم $A\neq\varnothing$ یک مجموعه و $A_۱, A_۲, \dots, A_n$ زیر مجموعه‌های $A$ باشند. مجموعهٔ $A$ به $n$ زیرمجموعه $A_۱, A_۲, \dots, A_n$ افراز شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.




I) $\forall\ ۱ \leq i \leq n ;\ A_i \neq \varnothing$

II) $\forall i, j\ (i\neq j ;\ A_i \cap A_j = \varnothing)$

III) $A_۱ \cup A_۲ \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A$

**کار در کلاس**

مجموعهٔ $A=\{۱, ۲, ۳, \dots, ۹\}$ را در نظر بگیرید، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای $A$ محسوب می‌شود؟

۱ $\{۱, ۳, ۵\}$ و $\{۲, ۶\}$ و $\{۴, ۸, ۹\}$

۲ $\{۱, ۳, ۵\}$ و $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$ و $\{۵, ۷, ۹\}$

۳ $\{۱, ۳, ۵\}$ و $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$ و $\{۷, ۹\}$

## تعریف زیر مجموعه به کمک نمادهای ریاضی

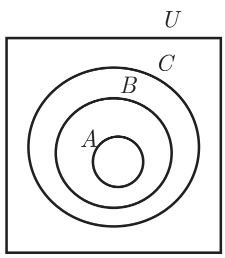
فرض کنید $A$ و $B$ دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو $A$، عضوی از $B$ باشد، در این صورت $A$ را زیرمجموعهٔ $B$ نامیده و می‌نویسند $A\subseteq B$. اگر عضوی در $A$ وجود داشته باشد، به طوری که آن عضو در مجموعهٔ $B$ نباشد، در این صورت $A$ زیرمجموعه $B$ نیست و می‌نویسند $A \nsubseteq B$. با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توان تعریف‌های $A\subseteq B$ و $A \nsubseteq B$ را به صورت زیر نوشت :

$$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x\, ; (x \in A \Rightarrow x\in B)$$

$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\, ; (x \in A \wedge x \notin B)$$

## روش عضوگیری دلخواه

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A\subseteq B$ و اعضای مجموعه‌های $A$ و $B$ در دسترس نباشند،کافی است عضوی دلخواه مانند $x$ از $A$ فرض کنیم، سپس با استفاده از فرض‌های داده شده نشان دهیم که $x$ در $B$ وجود دارد. از آنجا که $x$ دلخواه بوده است در واقع هر عضو $A$ در $B$ است. بنابراین، با توجه به تعریف زیرمجموعه، ثابت کرده‌ایم $A\subseteq B$. در زیر چند ویژگی مهم در مجموعه‌ها با روش عضوگیری دلخواه ثابت شده است.



**ویژگی ۱ــ** فرض کنید $A$ و $B$ و $C$ سه مجموعه با مرجع $U$ باشند، به طوری که $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ ثابت کنید $A\subseteq C$.

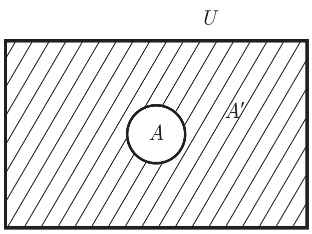
**اثبات** : برای اثبات $A\subseteq C$، باید ثابت کنیم که : $\forall x\, ; (x\in A \Rightarrow x\in C)$

برای این منظور از فرض‌ها یعنی $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ استفاده می‌کنیم.

$$\forall x\, ;\ x\in A \overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} x\in B \overset{B\subseteq C}{\Rightarrow} x\in C$$

در نتیجه داریم :

$$\forall x\, ; (x \in A \Rightarrow x\in C) \Rightarrow A \subseteq C$$



**ویژگی ۲ــ** فرض کنید $A$ و $B$ دو مجموعه با مرجع $U$ باشند و $A\subseteq B$. ثابت کنید $B' \subseteq A'$. ($A'$ و $B'$ به ترتیب متمم‌های مجموعه‌های $A$ و $B$ هستند).

قبل از اثبات این ویژگی، تعریف متمم یک مجموعه را یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم $A$ مجموعه‌ای با مرجع $U$ باشد،متمم مجموعهٔ $A$ برابر با مجموعهٔ اعضایی از $U$ است که متعلق به مجموعهٔ $A$ نباشند و آن را با $A'$ نمایش می‌دهند.

$$A'=\{x \in U \mid x \notin A\}$$

از این تعریف نتیجه می‌گیریم که اگر $x\in A$ آن‌گاه $x\notin A'$ یا اگر $x\in A'$ آن‌گاه $x\notin A$.

**اثبات** : برای اینکه ثابت کنیم $B'\subseteq A'$ باید نشان دهیم که : $\forall x\, ; (x\in B' \Rightarrow x\in A')$ بنابراین داریم :

$$\forall x\, ; (x\in B' \Rightarrow x\notin B \overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} x \notin A \Rightarrow x\in A')$$

در نتیجه داریم :

$$\forall x\, ; (x \in B' \Rightarrow x\in A') \Rightarrow B'\subseteq A'$$

**ویژگی ۳ــ** برای هر مجموعه دلخواه مانند $A$ با مجموعه مرجع $U$ ثابت کنید : $\varnothing \subseteq A$.

**اثبات :** برای اثبات $\varnothing \subseteq A$ باید نشان دهیم که ارزش گزاره شرطی $\forall x\,;\,(x\in\varnothing \Rightarrow x\in A)$ همواره درست است. چون در این گزارۀ شرطی، ارزش مقدّم یعنی $x\in\varnothing$ نادرست است، پس به انتفای مقدّم ارزش گزارۀ شرطی درست است و در نتیجه $\varnothing\subseteq A$.

## کار در کلاس

۱ برای مجموعه‌های $A$ و $B$ با مرجع $U$ ثابت کنید که $A \subseteq A\cup B$.

**اثبات :**

$$\forall x;\ (x \in A \Rightarrow x\in A \vee x\in B) \Rightarrow x \in A\cup B$$

بنابراین داریم :

$$\forall x;(x \in A \Rightarrow x \in A\cup B) \Rightarrow A\subseteq A\cup B$$

درستی استدلال بالا را توضیح دهید.

۲ فرض کنیم $A$ و $B$ و $C$ و $D$ چهار مجموعه با مرجع $U$ باشند، ثابت کنید : اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آن‌گاه $A\cup C\subseteq B\cup D$.

**اثبات :** جاهای خالی را پر کنید :

$$\forall x;[x\in (A\cup C)] \Rightarrow \begin{cases} x\in A \Rightarrow \cdots & (\text{زیرا } A\subseteq B) \\ \vee & \vee \\ \cdots \quad \Rightarrow \quad x\in D & (\text{زیرا } C\subseteq D) \end{cases} \Rightarrow x\in B \ \vee\ x\in D \Rightarrow \ldots\ldots$$

بنابراین داریم :

$$\forall x;\ [x \in(A\cup C)\Rightarrow x\in(B\cup D)] \Rightarrow \cdots\cdots$$

۳ فرض کنیم $A$ و $B$ و $C$ سه مجموعه با مرجع $U$ باشند، ثابت کنید : اگر $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$ آن‌گاه $(A\cup B)\subseteq C$.

**راهنمایی :** از ویژگی قسمت ۲ استفاده کنید.

## دو مجموعه مساوی

فرض کنیم $A$ و $B$ دو مجموعه با مرجع $U$ باشند به طوری که هر عضو $A$، عضوی از $B$ و هر عضو $B$ عضوی از $A$ باشد؛ یعنی $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$، در این صورت $A$ با $B$ مساوی است و می‌نویسیم : $A=B$. به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت :

$$A=B\Leftrightarrow[(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)]$$

## کار در کلاس

فرض کنید $A=\{۱, ۲\}$، کدام یک از مجموعه‌های زیر با $A$ مساوی است؟ (با ذکردلیل).

الف) $\{x\in \mathbb{Q} \mid x^۲-۳x+۲=۰\}$

ب) $\{x\in \mathbb{R} \mid ۱\leq x\leq ۲\}$

پ) $\{x\in \mathbb{Q} \mid ۲x^۲+۳x+۱=۰\}$

ت) $\{x\in \mathbb{N} \mid ۱\leq x\leq ۲\}$

**مثال :** فرض کنیم $A$ و $B$ دو مجموعه با مرجع $U$ باشند، ثابت کنید : $A\cap B=B\cap A$ . (خاصیت جابه‌جایی اشتراک).

**اثبات :** برای اثبات حکم باید درستی دو رابطهٔ زیر را نشان دهیم :

$$A\cap B\subseteq B\cap A \quad (۱) \ ; \quad B\cap A\subseteq A\cap B \quad (۲)$$

اثبات (۱) :

(طبق خاصیت جابه‌جایی $\wedge$) $\forall x;\ [x\in(A\cap B)\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\Rightarrow x\in B\wedge x\in A$

$$\Rightarrow x\in B\cap A]$$

به روش مشابه می‌توان درستی رابطهٔ (۲) را نشان داد.

**مثال :** فرض کنیم $A$ و $B$ دو مجموعه با مرجع $U$ باشند؛ ثابت کنید که اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه $A-B=\varnothing$ .

**اثبات :**

(زیرا $A\subseteq B$) $A-B=\{x\in U\,|\,x\in A\wedge x\notin B\}=\{x\in U\,|\,x\in B\wedge x\notin B\}=\varnothing$

$$\Rightarrow A-B=\varnothing$$

## تمرین

۱ مجموعه‌های زیر را که شامل شکل‌های هندسی در صفحه هستند، در نظر بگیرید :

$C=\{x\,|$ یک لوزی است $x\}$ ‏ ‏ ‏ $A=\{x\,|$ یک چهارضلعی است $x\}$

$D=\{x\,|$ یک مربع است $x\}$ ‏ ‏ ‏ $B=\{x\,|$ یک مستطیل است $x\}$

کدام یک از روابط زیر درست است؟(با ذکر دلیل)

الف) $D\subseteq C$ ‏ ‏ ‏ ب) $B\subseteq D$

پ) $A\subseteq B$ ‏ ‏ ‏ ت) $D\subseteq A$

۲ فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,\ldots,۸,۹\}$ و $B=\{۲,۴,۶,۸\}$ و $C=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ و $D=\{۳,۴,۵\}$ و $E=\{۳,۵\}$ .

در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید : $X$ می‌تواند کدام یک از این مجموعه‌ها باشد؟

الف) $X$ و $B$ عضو مشترکی ندارند. ‏ ‏ ‏ ب) $X\subseteq A$ ولی $X\not\subseteq C$

پ) $X\subseteq D$ ولی $X\not\subseteq B$ ‏ ‏ ‏ ت) $X\subseteq C$ ولی $X\not\subseteq A$

۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\varnothing=\{\varnothing\}$ ‏ ‏ ‏ ب) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$

پ) $\varnothing\notin\{\varnothing\}$ ‏ ‏ ‏ ت) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$

۴ کدام یک از مجموعه‌های زیر باهم مساوی‌اند؟

$B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x^۳=x\}$ ‏ ‏ ‏ $A=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,|m|<۲\}$

$D=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m^۲\leq ۱\}$ ‏ ‏ ‏ $C=\{y\in\mathbb{Z}\,|\,y^۲\leq ۲y\}$

$E=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m^۳+۲m=۳m^۲\}$

۵ مثال‌هایی از مجموعه‌های دلخواه $A$ و $B$ و $C$ بیاورید که برای آنها حکم‌های زیر درست باشند.

الف) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\notin C$

ب) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\in C$

پ) $A\in B$ و $A\subseteq B$

۶ اگر دو عضو از مجموعه $A$ حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود، مجموعهٔ $A$ چند زیرمجموعه دارد؟

۷ اگر $A=\{۲, x+۲y, ۴\}$ و $B=\{۴, ۵, x-y\}$ و $A=B$ در این صورت، مقادیر $x$ و $y$ را بیابید.

۸ ثابت کنید برای مجموعه‌های $A$ و $B$ با مرجع $U$ داریم : $A-B\subseteq A$ .

۹ فرض کنیم $A$ و $B$ و $C$ سه مجموعه با مرجع $U$ باشند، ثابت کنید : اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه :

الف) $A\cup C\subseteq B\cup C$ ب) $A\cap C\subseteq B\cap C$

۱۰ مجموعه‌های $A$ و $B$ و $C$ و $D$ با مرجع $U$ را در نظر بگیرید، ثابت کنید : اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آن‌گاه :

الف) $A\cap C\subseteq B\cap D$ ب) $A\cap C\subseteq B\cup D$

۱۱ الف) فرض کنید : $A\subseteq\varnothing$ ثابت کنید : $A=\varnothing$ . ب) فرض کنید $U\subseteq A$ ثابت کنید : $A=U$ .

۱۲ هرگاه $A$ و $B$ دو مجموعه با مرجع $U$ باشند و $A\cap B=\varnothing$ در این صورت ثابت کنید :

الف) $B-A=B$ ب) $B\subseteq A'$

۱۳ فرض کنید : $X=\{a,b,c,d,e,f,g\}$، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای $X$ محسوب می‌شود.

الف) $\{d,g\}$ و $\{b\}$ و $\{a,c,e\}$ ب) $\{b,e,f\}$ و $\{c,d\}$ و $\{a,e,g\}$

پ) $\{d,f\}$ و $\{c\}$ و $\{a,b,e,g\}$ ت) $\{a,b,c,d,e,f,g\}$

ث) $\{e\}$ و $\{f,g\}$ و $\{d\}$ و $\{b,c\}$ و $\{a\}$