درس ۳ قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)

در این درس به بررسی قوانین و خواص مربوط به اعمال اجتماع و اشتراک می‌پردازیم، شما در اعداد حقیقی و برای دو عمل جمع (+) و ضرب (×) قوانینی چون جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیریِ ضرب نسبت به جمع را می‌شناسید؛ یعنی می‌دانیم :

خاصیت جابه‌جایی $\text{I)}\forall\ a,b\in\mathbb{R}\ ;\ a+b=b+a$

خاصیت شرکت‌پذیری $\text{II)}\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}\ ;\begin{cases}a+(b+c)=(a+b)+c\\ a\times(b\times c)=(a\times b)\times c\end{cases}$

خاصیت توزیع‌پذیری «×» نسبت به «+» $\text{III)}\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}\ ;\ a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$

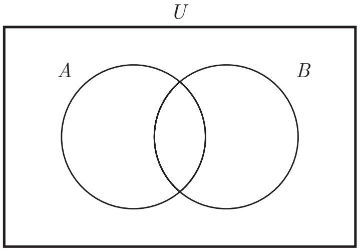
توجه دارید که عمل + نسبت به عمل × توزیع‌پذیر نیست، (با ذکر یک مثال نقض این مطلب را نشان دهید).

در مجموعه‌ها دو عمل ∪ و ∩ خواصی مشابه خواص فوق داشته و این خواص با توجه به خواصی که در گزاره‌ها برای دو ترکیب «∨» و «∧» بیان شد قابل بررسی و اثبات می‌باشند. در فعالیت زیر، ابتدا توسط نمودار ون برقراری این خواص را مشاهده می‌کنید.

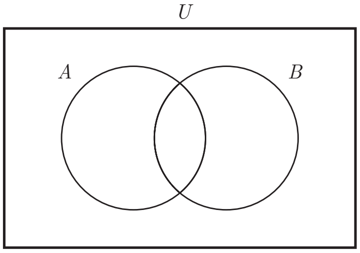
فعالیت

۱ در هر یک از حالت‌های زیر مجموعه‌های خواسته شده را هاشور بزنید. (برای هاشور زدن مانند حالت (ت) از دو رنگ استفاده کنید).

الف)

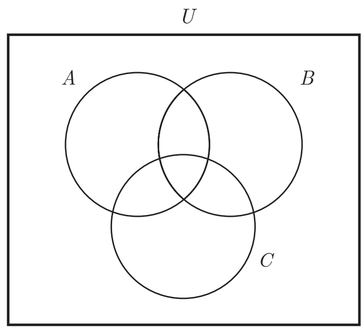


$A\cup B$

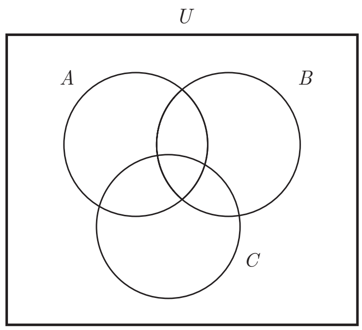


$B\cup A$

ب)

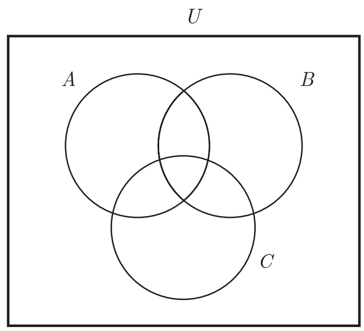


$A\cup(B\cup C)$

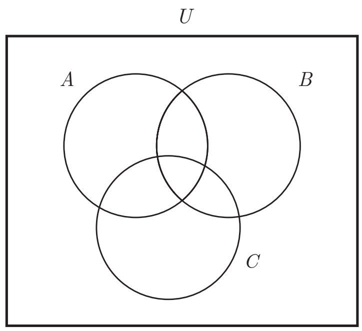


$(A\cup B)\cup C$

پ)

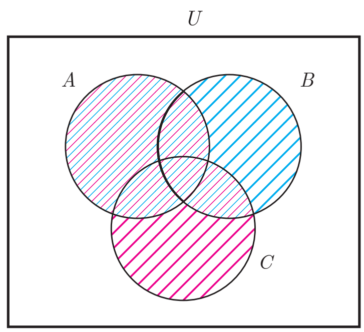


$(A\cap B)\cup(A\cap C)$

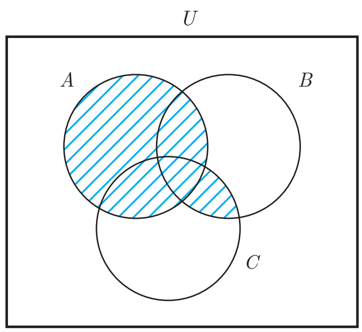


$A\cap(B\cup C)$

ت)



$(A\cup B)\cap(A\cup C)$



$A\cup(B\cap C)$

۲ با فرض اینکه $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۱,۲,۵,۶\}$ در این صورت، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A\cap B=B\cap A$

ب) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

پ) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

یادآوری : برای اثبات تساوی بین دو مجموعه A و B می‌بایست ثابت کنیم : $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$.

کار در کلاس

با توجه به تعریف اعمال اجتماع و اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری دو ترکیب فصلی و عطفی می‌خواهیم این خواص یا قوانین را برای «$\cup$» و «$\cap$» اثبات کنیم، شما این اثبات‌ها را کامل کنید :

۱ ثابت کنید، برای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B از مجموعهٔ مرجع U، داریم : $A\cup B=B\cup A$

$A\cup B=\{x\in U \mid x\in A \vee \ldots\}$	تعریف اجتماع
$=\{x\in U \mid x\in B \vee \ldots\ldots\}$	جابه‌جایی «$\vee$»
$=B\cup A$	تعریف اجتماع

۲ ثابت کنید، برای سه مجموعهٔ دلخواه A، B، C از مجموعهٔ مرجع U، داریم :

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cup(B\cup C)=\{x\in U \mid \ldots \vee x\in(B\cup C)\}$	تعریف اجتماع
$=\{x\in U \mid x\in A \vee (x\in B \vee \ldots\ldots)\}$	تعریف اجتماع
$=\{x\in U \mid (\ldots\ldots \vee x\in B) \vee x\in C\}$	شرکت‌پذیری «$\vee$»
$=\{x\in U \mid x\in(\ldots\ldots) \vee x\in C\}$	تعریف اجتماع
$=(A\cup B)\cup C$	تعریف اجتماع

۳ با استفاده از روش عضوگیری دلخواه، خاصیت توزیع‌پذیری «$\cup$» نسبت به «$\cap$» را ثابت کنید.

یعنی ثابت کنید : $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$\forall x$ ؛ فرض کنیم $x\in[A\cup(B\cap C)]$

$\Rightarrow [x\in A \vee (x\in\ldots\ldots]$	تعریف اجتماع
$\Rightarrow[(x\in A \vee (x\in B \wedge x\in\ldots\ldots)]$	تعریف اشتراک
$\Rightarrow[(x\in A \vee\ldots\ldots)\wedge(\ldots\ldots\vee x\in C)]$	توزیع‌پذیری «$\vee$» نسبت به «$\wedge$»
$\Rightarrow[x\in\ldots\ldots \wedge x\in\ldots\ldots]$	تعریف «$\cup$»
$\Rightarrow x\in[(A\cup B)\cap\ldots\ldots]$	تعریف اشتراک
$\Rightarrow A\cup(B\cap C)\subseteq\ldots\ldots$	

و به همین ترتیب ثابت می‌شود $\ldots\ldots\subseteq(A\cup B)\cap(B\cup C)$ بنابراین، دو مجموعه با هم برابرند. (توجه داریم که از طرف دیگر، خاصیت توزیع‌پذیری اصطلاحاً همان فاکتورگیری است؛ یعنی رسیدن از سمت راست تساوی به سمت چپ تساوی به معنای فاکتورگیری از «$A\cup$» است.)

تذکر : با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های مرجع و تهی تساوی‌های زیر برقرارند :

۱) $A\cup A'=U$ ۲) $A\cap A'=\varnothing$

۳) $A\cup U=U$ ۴) $A\cap U=A$

مثال ۱ : با استفاده از خواص فوق ثابت کنید : (U مجموعهٔ مرجع فرض شده است.)

الف) $(A\cup B)\cap(B'\cup A)=A$ ب) $(C\cap A)\cup(A'\cap C)=C$

پ) $A\cup(B\cup A')=U$ ت) $A-B=A\cap B'$

الف) $(A\cup B)\cap(B'\cup A)=(A\cup B)\cap(A\cup B')$ جابه‌جایی

$=A\cup(B\cap B')$ خاصیت توزیع‌پذیری(به اصطلاح فاکتورگیری)

$=A\cup\varnothing$

$=A$

ب) $(C\cap A)\cup(A'\cap C)=(C\cap A)\cup(C\cap A')$ جابه‌جایی

$=C\cap(A\cup A')=C\cap U=C$ توزیع‌پذیری

پ) $A\cup(B\cup A')=A\cup(A'\cup B)$ جابه‌جایی

$=(A\cup A')\cup B=U\cup B=U$ شرکت‌پذیری

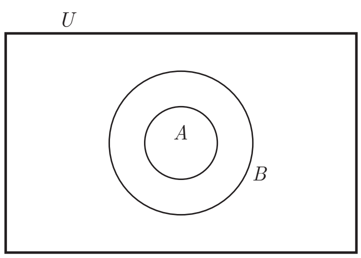
ت) $A-B=\{x\in U|x\in A\wedge x\notin B\}=\{x\in U|x\in A\wedge x\in B'\}$ تعریف متمم

$=A\cap B'$ تعریف اشتراک

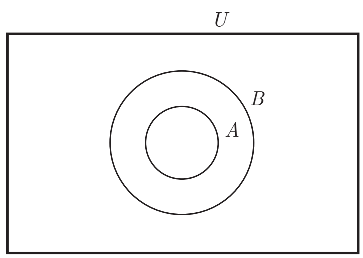
قضیه : برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U، داریم :

الف) $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B$ ب) $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B=A$

برهان : قبل از اثبات دقیق، ابتدا در نمودارهای زیر $(A\cup B)$ و $(A\cap B)$ را هاشور بزنید.
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید هر یک از حالت‌های الف و ب، قضیه‌هایی دو شرطی بوده و برای اثبات هر یک از آنها باید



$(A\cup B)$



$(A\cap B)$

دو قضیهٔ شرطی را ثابت کنیم.

الف) فرض کنیم : $A\subseteq B$ و ثابت می‌کنیم : $A\cup B=B$ برای این منظور باید ثابت کنیم : $(A\cup B)\subseteq B$ و $B\subseteq(A\cup B)$،
رابطهٔ $B\subseteq(A\cup B)$ (۱) با توجه به تعریف اجتماع بدیهی است؛ بنابراین، به اثبات رابطه $(A\cup B)\subseteq B$ می‌پردازیم :

$B\subseteq B$:می‌دانیم

$A\subseteq B$:طبق فرض

$\Rightarrow (A\cup B)\subseteq(B\cup B)\Rightarrow(A\cup B)\subseteq B$ (۲)

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A\cup B=B$ اثبات شده و حکم به دست می‌آید.)

(۱) و $(۲) \Rightarrow (A\cup B)=B$

حال فرض کنیم $A\cup B=B$، ثابت می‌کنیم $A\subseteq B$؛

با توجه به تعریف اجتماع می‌دانیم : $A\subseteq(A\cup B)\xrightarrow[\text{فرض}]{A\cup B=B} A\subseteq B$

ب) ابتدا فرض کنیم $A\subseteq B$، تساوی $A\cap B=A$ را اثبات می‌کنیم :

(۱) با توجه به تعریف اشتراک داریم : $(A\cap B)\subseteq A$

(۲) $\begin{cases} \text{می‌دانیم} : A\subseteq A \\ \text{طبق فرض} : A\subseteq B \end{cases} \Rightarrow (A\cap A)\subseteq(A\cap B)\Rightarrow A\subseteq(A\cap B)$

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A\cap B=A$، به‌دست می‌آید.)

(۱) و $(۲) \Rightarrow (A\cap B)=A$

حال فرض می‌کنیم : $A\cap B=A$، ثابت می‌کنیم $A\subseteq B$؛

با توجه به تعریف اشتراک می‌دانیم : $(A\cap B)\subseteq B\xrightarrow[\text{فرض}]{A\cap B=A} A\subseteq B$

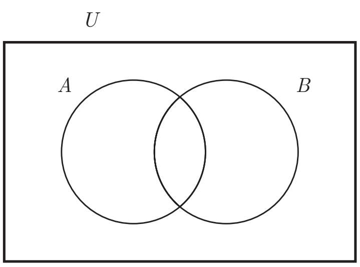
کار در کلاس

(قوانین جذب یا همپوشانی) اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشند، می‌خواهیم تساوی‌های زیر را که به قوانین جذب معروف‌اند، با استفاده از قضیهٔ قبل و تعاریف اجتماع و اشتراک اثبات کنیم :

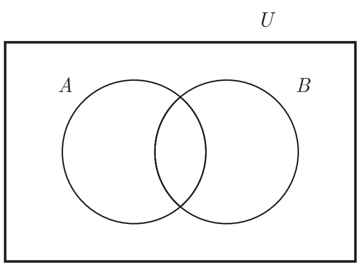
الف) $A\cup(A\cap B)=A$

ب) $A\cap(A\cup B)=A$

ابتدا با استفاده از نمودار وِن و هاشور زدن، درستی قوانین جذب را نشان دهید :



$A\cup(A\cap B)$



$A\cap(A\cup B)$

در قضیهٔ قبل ملاحظه کردید که اگر $C\subseteq D$ در این صورت $(C\cup D)=D$ و $(C\cap D)=C$ است.

(اثبات الف) طبق تعریف اشتراک می‌دانیم : $(A\cap B)\subseteq A \xrightarrow{\text{قضیه}} A\cup(\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots$

(اثبات ب) طبق تعریف اجتماع می‌دانیم : $A\subseteq(A\cup B) \xrightarrow{\text{قضیه}} A\cap(\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots$

روش دیگری برای اثبات قوانین جذب نیز وجود دارد که شما با پرکردن جاهای خالی اثبات را کامل کنید.

الف) $A\cup(A\cap B)=(A\cap U)\cup(A\cap B)$

توزیع‌پذیری $=A\cap(\ldots\ldots)$

$=A\cap\ldots\ldots=A$

ب) $A\cap(A\cup B)=(A\cup\ldots)\cap(A\cup B)$

توزیع‌پذیری $=A\cup(\ldots\ldots)$

$=A\cup\ldots\ldots=A$

مثال : عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف) $(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[(B\cup A)\cap B])$

$$(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[\underbrace{(B\cup A)\cap B}_{\text{جذب}}])=(A\cap B)\cup[\underbrace{(B\cup C)\cap\ldots}_{\text{جذب}}]$$

$$=\underbrace{(A\cap B)\cup\ldots}_{\text{جذب}}=\ldots\ldots$$

ب) $(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]$

جابه‌جایی

$$(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]=\underbrace{(A\cup B')}_{E}\cap[\underbrace{(B\cap C)}_{D}\cup\underbrace{(A\cup B')}_{E}]$$

جذب $=\underbrace{(A\cup B')}_{E}$

مثال : درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A-B=B'-A'$

ب) $(X\subseteq A)\wedge(X\subseteq A')\Rightarrow X=\varnothing$

پ) $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

ت) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

ث) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B$

حل :

الف) $A-B=A\cap B'=B'\cap A=B'-A'$

ب) $\begin{cases}X\subseteq A\\ X\subseteq A'\end{cases}\Rightarrow(X\cap X)\subseteq(A\cap A')\Rightarrow X\subseteq\ldots\ldots$ (۱)

از طرفی می‌دانیم $\varnothing\subseteq X$ و بنابراین : $X=\varnothing$

پ) $(A-B)\cap(B-A)=(A\cap B')\cap(B\cap A')$

شرکت‌پذیری $=[(A\cap B')\cap B]\cap A'$

شرکت‌پذیری $=[A\cap(B'\cap B)]\cap A'$

تعریف متمم $=(A\cap\varnothing)\cap A'$

$=\varnothing\cap A'=\varnothing$

ت) $(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap C'$

توزیع‌پذیری «$\cap$» نسبت به «$\cup$» $=(A\cap C')\cup(B\cap C')$

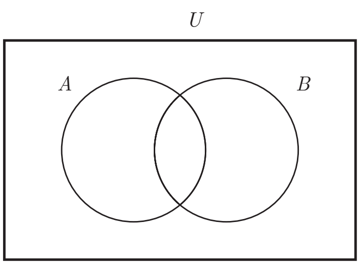
تبدیل اشتراک به تفاضل $=(A-C)\cup(B-C)$

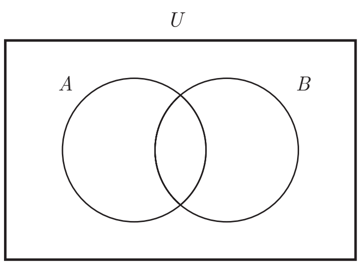
ث) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$	
$=[(A-B)\cup(A\cap B)]\cup(B-A)$	شرکت‌پذیری اجتماع
$=[(A\cap B')\cup(A\cap B)]\cup(B\cap A')$	تبدیل تفاضل به اشتراک
$=[A\cap(\ldots\ldots\cup\ldots\ldots)]\cup(B\cap A')$	توزیع پذیری
$=(A\cap U)\cup(B\cap A')$	تعریف متمم
$=A\cup(B\cap A')$	تعریف مرجع
$=(A\cup\ldots\ldots)\ \ldots\ldots\ (A\cup\ldots\ldots)$	توزیع پذیری
$=(A\cup B)\cap U$	تعریف متمم
$=A\cup B$	تعریف مرجع

قوانین دمورگان

فعالیت

۱ فرض کنیم A و B دو مجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند،روی شکل سمت چپ، $(A\cup B)'$ و روی نمودار سمت راست، $(A'\cap B')$ را هاشور بزنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟





۲ اگر فرض کنیم : $U=\{$۱ و ۲ و .... و ۱۰$\}$ و $A=\{$۲ و ۳ و ۵ و ۸$\}$ و $B=\{$۳ و ۴ و ۶ و ۸$\}$ هر یک از مجموعه‌های $(A\cap B)'$ و $(A'\cup B')$ را تشکیل داده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تساوی‌های زیر را که به **قوانین دمورگان** معروف‌اند برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U برقرارند :

الف) $(A\cup B)'=(A'\cap B')$

ب) $(A\cap B)'=(A'\cup B')$

با استفاده از روش عضوگیری دلخواه وتعریف تساوی بین دو مجموعه،تساوی $(A\cup B)'=(A'\cap B')$ را اثبات کنید.
(باید ثابت کنید،$(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$ و $(A'\cap B')\subseteq(A\cup B)'$)

$\forall x\,;[x\in(A\cup B)'\Rightarrow x\notin(A\cup B)\Rightarrow\ldots\ldots\wedge x\notin B$

$\Rightarrow x\in A'\wedge\ldots\ldots\Rightarrow x\in(A'\cap B')]\Rightarrow(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$

روابط صفحهٔ قبل برگشت‌پذیرند، شما به طریق مشابه نشان دهید که $(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$ که در این صورت، تساوی الف اثبات می‌شود.

کار در کلاس

با استفاده از قوانین و خواص (جبر مجموعه‌ها) درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $(A-B)'=(A'\cup B)$ ‌ ‌ ‌ ‌ ب) $(A-B)-C=(A-C)-B$

پ) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

مثال : با استفاده از جبر مجموعه‌ها درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ ‌ ‌ ‌ ‌ ب) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

پ) $A-(B-C)=(A-B)-C$ ‌ ‌ ‌ ‌ ت) اگر $(A\cup B)=(A\cap B)$ آنگاه $A=B$

حل :

الف) $(A-B)\cap(A-C)=(A\cap B')\cap(A\cap C')$ ‌ ‌ تبدیل تفاضل به اشتراک

$=[(A\cap B')\cap A]\cap C'$ ‌ ‌ شرکت‌پذیری

$=[A\cap(A\cap B')]\cap C'$ ‌ ‌ جابه‌جایی

$=[(A\cap A)\cap B']\cap C'$ ‌ ‌ ....

$=(A\cap B')\cap C'$ ‌ ‌ $A\cap A=A$

$=A\cap(B'\cap C')$ ‌ ‌ شرکت‌پذیری

$=A-(B'\cap C')'$ ‌ ‌ تبدیل اشتراک به تفاضل

$=A-(B\cup C)$ ‌ ‌ قانون ....

ب) $(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$ ‌ ‌ تبدیل تفاضل به اشتراک

$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')$ ‌ ‌ قانون دمورگان

$=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$ ‌ ‌ توزیع‌پذیری

$=[(A\cap A')\cap B]\cup[A\cap(B\cap C')]$ ‌ ‌ قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری

$=(\varnothing\cap B)\cup[A\cap(B-C)]$ ‌ ‌ تبدیل اشتراک به تفاضل و تعریف متمم

$=\varnothing\cup[A\cap(B-C)]$

$=A\cap(B-C)$

پ) با کمی تأمل پی می‌بریم که برای رسیدن از یک طرف تساوی به طرف دیگر، دچار مشکل می‌شویم و این کار انجام نمی‌شود، ولی برای اینکه ادعا کنیم این تساوی همواره برقرار نیست، کافی است مثال نقض بزنیم :

$A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۵,۶,۷\}$ و $U=\{۱,۲,.......,۱۰\}$

$A-(B-C)=\{۱,۲,۳,۴,۵\}-\{۳,۴\}=\{۱,۲,۵\}$

$(A-B)-C=\{۱,۲\}-\{۵,۶,۷\}=..............$

ت) وقتی می‌نویسیم : $C=D$ ، یعنی C و D یک مجموعه‌اند، با دو نام و لذا وقتی بین مجموعه‌ها تساوی به کار می‌بریم، می‌توان نوشت طرفین تساوی را با هر مجموعه‌ای اجتماع، یا اشتراک بگیریم، یعنی از اینکه $C=D$ نتیجه می‌شود : $A\cup C=A\cup D$ و $A\cap C=A\cap D$

$$A\cup B=A\cap B \Rightarrow A\cap(A\cup B)=A\cap(A\cap B)$$

$$\xRightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اشتراک}} A=(A\cap B) \xRightarrow{\text{قضیه}} A\subseteq B \qquad (۱)$$

$$(A\cup B)=(A\cap B)\Rightarrow A\cup(A\cup B)= \dots\cup(A\cap B)$$

$$\xRightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اجتماع}} (A\cup B)=A \xRightarrow{\text{قضیه}} \dots\dots\subseteq\dots\dots \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow A=B$$

روش دوم : دربارهٔ روش زیر که به اختصار نوشته شده است، با هم‌کلاسی خود گفت‌وگو کنید و توضیح دهید :

$$A\subseteq(A\cup B)=(A\cap B)\subseteq B\Rightarrow A\subseteq B$$

و به طریق مشابه ثابت می‌شود : $B\subseteq A$ و نتیجه می‌شود : $A=B$.

کار در کلاس

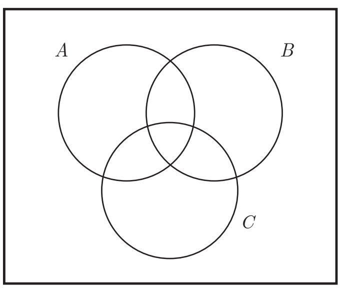
۱ اگر $U=\{۱و۲و\dots و۲۰\}$ و $B=\{۵و۶و\dots و۱۵\}$ و $A=\{۱و۲و\dots و۱۰\}$ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(A\cap B')\cup(A\cap B)$

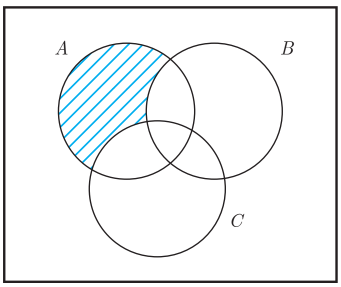
ب) $(A-B)\cup((A\cap B')\cap[(B-A)\cup A'])$

(راهنمایی : ابتدا با استفاده از جبر مجموعه‌ها عبارت‌ها را ساده کنید.)

۲ با توجه به نمودار ون که در روبه‌رو رسم شده است، مانند نمونه برای هر حالت و به صورت جداگانه بخشی را که به صورت توصیفی مشخص کرده‌ایم، هاشور بزنید.



الف) اعضایی که فقط در A باشند.



ب) اعضایی که فقط در یک مجموعه‌اند.

پ) اعضایی که در A و B باشند، ولی در C نباشند.

ت) اعضایی که در A یا B باشند، ولی در C نباشند.

ضرب دکارتی بین دو مجموعه

قبلاً با تعریف زوج مرتب آشنا شده‌اید و می‌دانید که «هر دو شیئی مانند x و y، تشکیل یک زوج می‌دهند که اگر برای آنها ترتیب قائل باشیم، به آن یک زوج مرتب گفته می‌شود و با نماد (x,y) نشان می‌دهیم» و البته می‌دانیم که $(x,y)=(z,t)$ اگر و تنها اگر $x=z$ و $y=t$.

عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعهٔ A و B این امکان را برای ما فراهم می‌سازد تا مجموعهٔ جدیدی بسازیم که اعضای آن هر کدام یک زوج مرتب باشند و هر یک از این زوج‌های مرتب از اعضای A و B ساخته می‌شوند. بنابراین، مجموعهٔ حاصل دارای اعضایی از جنس زوج مرتب بوده و به‌اعضای A یا B شبیه نبوده و فقط اعضای A و B در ساختن آنها نقش دارند.

تعریف عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه : اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، $A\times B$ مجموعه‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$$

در تعریف قبل توجه دارید که در هر (x,y) متعلق به $A\times B$، همواره مؤلفه یا مختصِ اوّل، یعنی x باید از مجموعهٔ A و متناظراً مؤلفهٔ دوم، یعنی y باید از مجموعهٔ B باشد.

مثال : اگر $A=\{۲,۴,۶\}$ و $B=\{۴,۵\}$، در این صورت مجموعه‌های $A\times B$ و $B\times A$ را تشکیل دهید و با هم مقایسه کنید.

$A\times B=\{(۲,۴),(۲,۵),\ldots\ldots,\ldots\ldots,(۶,۴),\ldots\ldots\}$

$B\times A=\{(۴,۲),(۴,۴),\ldots\ldots,(۵,۲),\ldots\ldots,\ldots\ldots\}$

واضح است که $A\times B\neq B\times A$ (کافی است فقط در یک عضو با هم فرق داشته باشند؛ مثلاً $(۲,۴)\neq(۴,۲)$ و $(۲,۴)\in A\times B$ و $(۲,۴)\notin B\times A$).

کار در کلاس

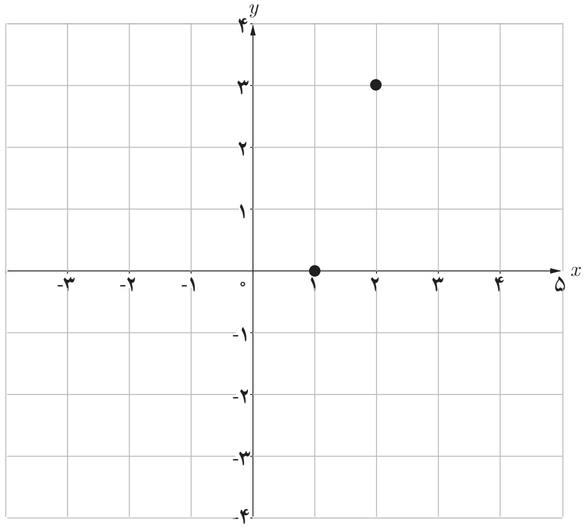
در مثال قبل دیدید که در مجموعهٔ $A\times B$ هر عضو A دو زوج مرتب تولید کرد و در کل شش زوج مرتب به‌وجود آمد، حال اگر $n(A)=m$ و $n(B)=k$ با استفاده از تعریف عمل ضرب دکارتی و حاصل ضرب، نشان دهید، $n(A\times B)=mk$

فعالیت

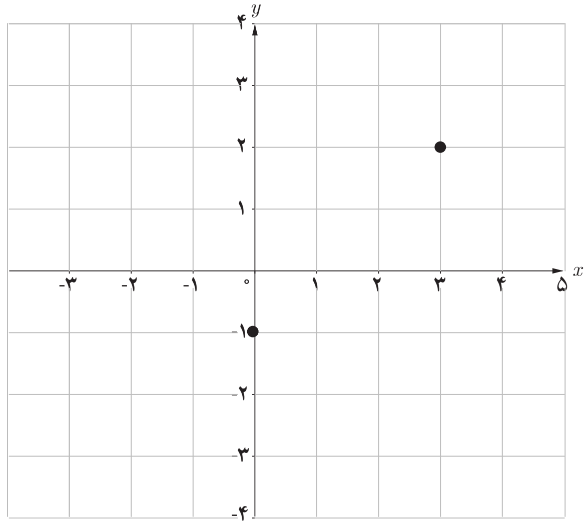
۱ اگر $A=\{1,-1,2,-2\}$ و $B=\{0,3,4\}$، ابتدا مجموعه‌های $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را تشکیل دهید و سپس نمودار مختصاتی هر یک از این مجموعه‌ها را رسم کنید. (نمودارها را کامل کنید.)

$A\times B=$

$B\times A=$



نمودار مختصاتی $\boldsymbol{A\times B}$

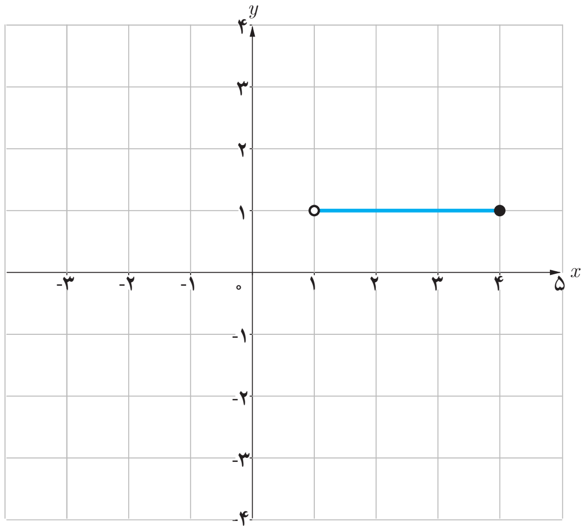


نمودار مختصاتی $\boldsymbol{B\times A}$

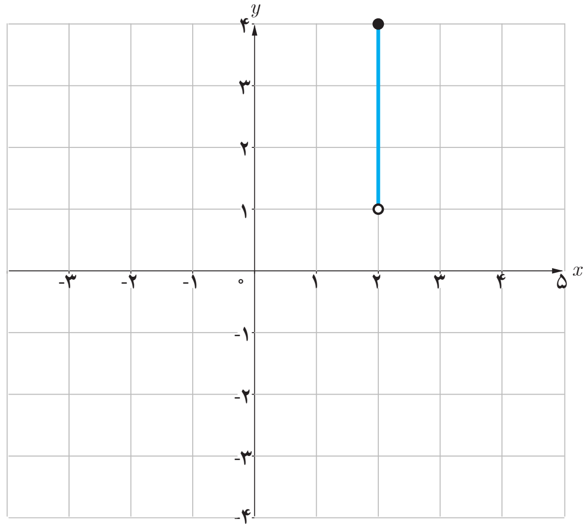
۲ اگر فرض کنیم : $A=(1,4]$ و $B=\{1,2\}$ در این صورت، نمودارهای مربوط به $A\times B$ و $B\times A$ که بخشی از آنها رسم شده است را تکمیل کنید.

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in(1,4]\wedge y\in B\}$$

$$B\times A=\{(x,y)\,|\,(x=1\vee x=2)\wedge 1<y\leq 4\}$$



نمودار $\boldsymbol{A\times B}$

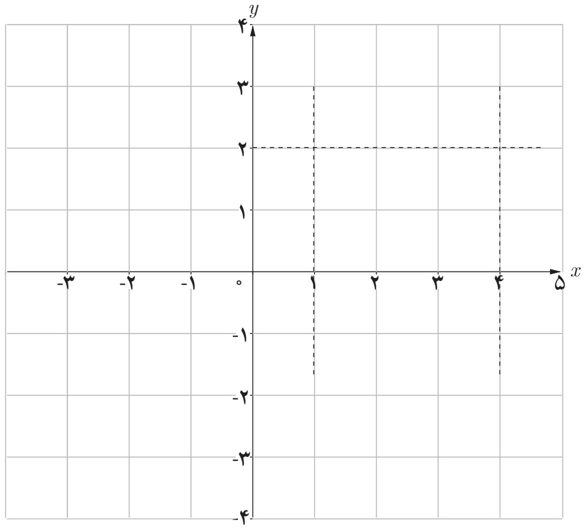


نمودار $\boldsymbol{B\times A}$

۳ اگر فرض کنیم : $A=\mathbb{R}$ و $B=\{۰,۱,۲\}$ نمودار $A\times B$ را رسم کنید.

۴ در صورتی که $A=[۱,۴]$ و $B=[۰,۲]$ در این صورت، نمودار $(A\times B)$ را که بخشی از صفحهٔ مختصات دکارتی است، هاشور بزنید.

$$A\times B=\{(x,y)|۱\le x\le ۴ \wedge ۰\le y\le ۲\}$$



۵ درصورتی که فرض کنیم : $A=\mathbb{R}$ و $B=\mathbb{R}$ در این صورت، حاصل‌ضرب $A\times B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^۲$ را چگونه تعبیر می‌کنید؟

کار در کلاس

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، در این صورت :

الف) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$

ب) $A\times B=B\times A\Rightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing\vee A=B$

اثبات الف) از برهان خلف استفاده می‌کنیم :

فرض کنیم : $A\times\varnothing\neq\varnothing$ (فرض خلف) در این صورت، حداقل یک عضو مانند (x,y) در .... باید وجود داشته باشد که در این صورت :

$$(x,y)\in A\times\varnothing \xRightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} \cdots\cdots\cdots \wedge \underbrace{y\in\varnothing}_{\text{تناقض}}$$

و چون $y\in\varnothing$ یک تناقض است (مجموعهٔ $\varnothing$ فاقد عضو است) پس فرض خلف، باطل شده است و حکم برقرار می‌باشد، به طریق مشابه ثابت کنید که $\varnothing\times A=\varnothing$.

اثبات ب) اگر $A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ که حکم اثبات می‌شود.

حال فرض کنیم : $A\neq\varnothing$ و $B\neq\varnothing$ که در این صورت، به روش عضوگیری و با توجه به تعریف ضرب دکارتی و فرضِ $A\times B=B\times A$، ثابت می کنیم $A=B$.

$$A\neq\varnothing, B\neq\varnothing \Rightarrow \exists x;\ x\in A\wedge\exists\cdots\cdots\cdots \xRightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} \exists(x,y);(x,y)\in A\times B$$

$$\xRightarrow{A\times B=B\times A}(x,y)\in\cdots\cdots \xRightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x\in B\wedge\cdots\cdots\Rightarrow\cdots\cdots\wedge B\subseteq A$$

$$\Rightarrow A=B$$

(xای که از A فرض کردیم ثابت شد در B است و yای که از B فرض کردیم ثابت شد در A است.)

تمرین

۱ با استفاده از تعریف اشتراک، اجتماع و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای ترکیب عطفی و فصلی در گزاره‌ها، هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A\cap B=B\cap A$

ب) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

پ) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\quad(A\cap C)$

۲ درستی هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A\cap B)\cup(B'\cap A)=A$

ب) $(A'\cap B')\cap A=\varnothing$

پ) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$

ت) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup(A\cup C)$

۳ هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف) $(A'\cap B)\cup([(B\cap A)-B']\cap(B\cup A))$

ب) $(A\cup B)-B$

پ) $[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B)$

۴ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A\subseteq X)\wedge(A'\subseteq X)\Rightarrow X=U$

ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=A$

پ) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

ت) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

ث) $(A\cup B)\cap(A'\cap B')=\varnothing$

ج) $[(A\cup B)=(A\cup C)\wedge(A\cap B)=(A\cap C)]\Rightarrow B=C$

۵ اگر $A=\{y+۲,۵,z\}$ و $B=\{x+۱,۴,-۲\}$ در این صورت، با فرض $A\times B=B\times A$ بیشترین مقدار برای $(x+y+z)$را بیابید.

۶ با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار هر یک از حاصل‌ضرب‌های $A\times B$ و $B\times A$ را رسم کنید.

الف) $A=\{۲,۳\}, B=\{۲,۳,۴\}$

ب) $A=\{۳,۴\}, B=(۱,۵]$

پ) $A=[۲,۶], B=[۳,۸]$

ت) $A=\mathbb{N}, B=[۱,۴]$

ث) $A=\mathbb{R}, B=\{۲,۳\}$