درس ۳ احتمال شرطی

در مسائلی که در آنها با عدم قطعیت و احتمال سر و کار داریم، گاهی با سؤال‌هایی شرطی مواجه هستیم : «اگر فردا برف ببارد، چقدر احتمال دارد راه برخی روستاهای دهستان‌های شهرستان کنگاور مسدود شود؟»، «اگر راننده‌ای از کمربند ایمنی استفاده نکند، چقدر احتمال دارد پس از تصادف، دچار نقص عضو شود؟»، «اگر دانش‌آموزی در سال یازدهم موفق به کسب معدل بالای ۱۸ شود، چقدر احتمال دارد که در سال گذشته معدلش زیر ۱۵ بوده باشد؟» و . . .

در همهٔ این موارد با دو پیشامد مختلف سر و کار داریم و فرض می‌کنیم یکی از آنها رخ داده است و می‌خواهیم بدانیم احتمال رخ دادن دومی چه تغییری کرده است.

فعالیت

۱ در یک قرعه‌کشی بین ۲۰ نفر قرار است از بین کارت‌هایی با شماره‌های ۱ تا ۲۰، یکی را به تصادف انتخاب کنند. شمارهٔ کارت اکبر ۱۵ و شمارهٔ کارت بهرام ۷ است.

الف) احتمال اینکه اکبر برنده شود چقدر است؟ احتمال برنده شدن بهرام چقدر است؟

ب) وقتی مجری کارت را انتخاب می‌کند، قبل از اینکه آن را به دیگران نشان بدهد، می‌گوید : «عدد برنده، دو رقمی است!» اکنون اکبر و بهرام احتمال برنده شدن خود را چقدر می‌دانند؟

۲ در مدرسه‌ای سه کلاس یازدهم، با نام‌های ۱ــ۱۱، ۲ــ۱۱ و ۳ــ۱۱ وجود دارد که به‌ترتیب ۳۲، ۳۳ و ۳۵ دانش‌آموز دارند. در آزمونی مشترک از این سه کلاس، به‌ترتیب ۸، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمرهٔ کامل شده‌اند. یکی از دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه که شامل همهٔ دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم است، چند عضوی است؟

ب) احتمال اینکه دانش‌آموز انتخاب شده نمرهٔ کامل گرفته باشد (پیشامد A) چقدر است؟

پ) احتمال اینکه او، دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ باشد (پیشامد B) چقدر است؟

ت) فرض کنید بعد از انتخاب، بفهمید که او دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ است. در این صورت، چقدر احتمال می‌دهید که او موفق به کسب نمرهٔ کامل شده باشد؟

در حلّ قسمت (ت) می‌توان این‌طور فکر کرد که فضای نمونه، که متشکل از ۱۰۰ دانش‌آموز

پایهٔ یازدهم است، بعد از اطلاع از اینکه او دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ است، به فضای نمونهٔ دیگری، که متشکل از ۳۲ دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ است، کاهش یافته است. سپس باید بررسی کنیم که چند نفر از ۳۲ دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ موفق به کسب نمرهٔ کامل شده‌اند. این یعنی تعداد اعضای پیشامد ..... ∩ ..... را بشماریم. نتیجه را باید به تعداد اعضای مجموعهٔ ..... تقسیم کنیم.

در علم احتمال برای آنچه در قسمت (ب) فعالیت ۱ و قسمت (ت) فعالیت ۲ پرسیده شد، از اصطلاح «احتمال شرطی» استفاده می‌کنند. مثلاً در فعالیت ۲ که پیشامد A «کسب نمرهٔ کامل» و B «دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ بودن» است آنچه خواسته شد، احتمال «کسب نمرهٔ کامل به شرط دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ بودن» است که با $P(A|B)$ نمایش داده می‌شود.

کار در کلاس

در فعالیت «قرعه‌کشی» احتمال شرطی کدام پیشامد نسبت به کدام پیشامد مورد سؤال قرار گرفته است؟

احتمال شرطی: کاهش فضای نمونه

باز هم به دو فعالیت قبل توجه کنید. در حالتی که فضای احتمال هم‌شانس است شرطی کردن یک پیشامد نسبت به پیشامد B مثل این است که فضای نمونه، یعنی S، را کنار گذاشته و B را فضای نمونه تلقی کنیم. احتمال روی این فضای نمونه نیز هم‌شانس است. به این رویکرد «کاهش فضای نمونه» گفته می‌شود.

کار در کلاس

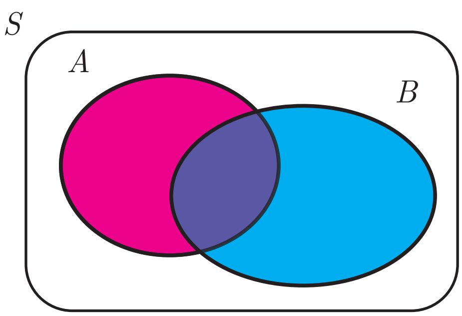
فرض کنید تاسی را دو مرتبه پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونهٔ این آزمایش چند عضوی است؟ آیا این فضای احتمال هم‌شانس است؟

ب) می‌دانیم که مجموع عدد دو پرتاب از ۹ بیشتر شده است. در این صورت، احتمال اینکه دست‌کم یک ۶ آمده باشد چقدر است؟

احتمال شرطی چگونه محاسبه می‌شود؟

همان‌طور که اشاره شد، اگر با احتمال هم‌شانس سر و کار داشته باشیم محاسبهٔ $P(A|B)$ ساده است؛ کافی است تعداد حالات مطلوب را به تعداد حالات ممکن تقسیم کنیم، ولی باید توجه داشته باشیم که چون می‌دانیم B رخ داده است دیگر همهٔ اعضای پیشامد A ممکن نیستند و لذا مجموعهٔ حالت‌های مطلوب در این وضعیت $A\cap B$ است. پس



$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

ولی در حالت کلی که احتمال می‌تواند هم‌شانس نباشد چه باید کرد؟

فعالیت

دوباره فرض کنید موضوع گفت‌وگوی احتمال هم‌شانس باشد؛ آیا می‌توانید سمت راست فرمول احتمال شرطی در حالت هم‌شانس را به شکلی بازنویسی کنید که به جای تعداد اعضای پیشامدها احتمال آنها آمده باشد؟

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{n(A\cap B)/n(........)}{n(B)/n(........)}=\frac{\mathrm{P}(......\cap......)}{\mathrm{P}(......)}$$

اگر فعالیت قبل را به‌درستی انجام داده باشید، به تعریف کلی احتمال شرطی (برای فضاهای هم‌شانس و فضاهای غیرهم‌شانس) رسیده‌اید :

در صورتی‌که B پیشامدی باشد که $\mathrm{P}(B)>۰$، برای هر پیشامد A، «احتمال A به شرط رخ دادن B» (که آن را «P ی A به شرط B» نیز می‌خوانیم) به شکل زیر تعریف می‌شود :

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

تذکر : در حالتی که $\mathrm{P}(B)=۰$، احتمال هیچ پیشامدی به شرط B تعریف نمی‌شود.

مثال : سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. می‌دانیم که دست‌کم یک بار رو آمده است. در این صورت، احتمال اینکه هر سه بار رو آمده باشد چقدر است؟

حل : سه بار رو آمدن سکه را A و دست‌کم یک بار رو آمدن سکه را B می‌نامیم. باید $\mathrm{P}(A|B)$ را حساب کنیم. پس با توجه به تعریف باید $\mathrm{P}(A\cap B)$ و $\mathrm{P}(B)$ را محاسبه کنیم. فضای نمونه ۸ عضوی است و پیشامد $A\cap B$، یعنی سکه سه بار رو آمده باشد و به‌علاوه دست‌کم یک بار رو آمده باشد و این در واقع یعنی سکه در هر سه پرتاب رو آمده باشد. پس

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{۱}{۸}$$

برای محاسبهٔ $\mathrm{P}(B)$ بهتر است به پیشامد متمم آن توجه کنیم؛ پیشامد B' یعنی سکه اصلاً رو نیامده باشد که فقط یک حالت است. در نتیجه :

$$\mathrm{P}(B)=۱-\mathrm{P}(B')=۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$$

و لذا

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۷}{۸}}=\frac{۱}{۷}$$

مثال : دو تاس سبز و قرمز را پرتاب می‌کنیم.

الف) اگر بدانیم مجموع دو تاس ۱۰ شده است، احتمال اینکه تاس سبز ۶ آمده باشد چقدر است؟

ب) اگر بدانیم که تاس سبز ۶ آمده است، احتمال اینکه مجموع دو تاس ۱۰ شده باشد چقدر است؟

حل : الف) فرض کنید پیشامد A یعنی تاس سبز ۶ بیاید و پیشامد B یعنی مجموع دو تاس ۱۰ شود. پس در این مثال، $\mathrm{P}(A|B)$ خواسته شده است و لذا باید $\mathrm{P}(A\cap B)$ و $\mathrm{P}(B)$ را محاسبه کنیم. فضای نمونه ۳۶ عضو دارد و یک فضای

هم‌شانس است پس باید تعداد اعضای یک پیشامد را برای رسیدن به احتمال آن به‌دست آوریم. روشن است که $B=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}$ و درنتیجه : $P(B)=\frac{۳}{۳۶}$.

روشن است که $A\cap B=\{(۶,۴)\}$ و لذا $P(A\cap B)=\frac{۱}{۳۶}$.

در نتیجه : $P(A|B)=\frac{۱}{۳}$.

ب) طبق نمادگذاری قسمت قبل، باید $P(B|A)$ را محاسبه کنیم. توجه داشته باشید که $P(A)=\frac{۱}{۶}$. پس

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۳۶}}{\frac{۱}{۶}}=\frac{۱}{۶}$$

مثال : تیم ملی والیبال ایران، ۱۴ بازیکن دارد که قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر یکی از بازیکن‌ها را به‌تصادف انتخاب کنیم.

الف) احتمال اینکه آن بازیکن، بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

ب) بازیکن دیگری را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که از بازیکن اوّل کوتاه قدتر است. در این صورت، احتمال اینکه بازیکن اوّل بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

حل : پاسخ قسمت (الف) ساده است؛ با توجه به اینکه یکی از ۱۴ بازیکن، بلندقدترین بازیکن تیم است، احتمال اینکه آن فرد همان باشدکه ما تصادفاً انتخاب کرده‌ایم $\frac{۱}{۱۴}$ است.

برای به دست آوردن پاسخ قسمت (ب) دو پیشامد A و B را به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

A : بازیکن اوّل بلندقدترین بازیکن تیم است.

B : بازیکن اوّل بلندقدتر از بازیکن دوم است.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۴}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۷}$$

دلیل اینکه $P(B)=\frac{۱}{۲}$، این است احتمال اینکه بین دو بازیکن اوّلی یا دومی بلندقدتر باشد، برابر است.

کار در کلاس

در فعالیت مربوط به دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم آمده بود که سه کلاس ۱ــ۱۱، ۲ــ۱۱ و ۳ــ۱۱ به‌ترتیب ۳۲، ۳۳ و ۳۵ دانش‌آموز دارند و در آزمون مشترک در این سه کلاس به‌ترتیب ۸، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمرهٔ کامل شده‌اند. دانش‌آموزی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. پیشامد «دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ بودن» را $B_۱$ می‌نامیم و $B_۲$ و $B_۳$ را به‌طور مشابه تعریف می‌کنیم. پیشامد «نمره کامل شدن» را نیز با A نمایش می‌دهیم.

الف) مقدار $P(A|B_i)$ را برای $i=۱,۲,۳$ محاسبه کنید.

ب) مقدار $P(B_i|A)$ را برای $i=۱,۲,۳$ محاسبه کنید. معنای آنچه حساب کرده‌اید چیست؟

پ) با اطلاعات موجود در مورد سه کلاس، دانش‌آموزان کدام کلاس را در آزمون مشترک موفق‌تر می‌دانید؟ برای پاسخ دادن به این سؤال، پاسخ قسمت (الف) مهم است یا پاسخ قسمت (ب)؟

کار در کلاس

فرض کنید B پیشامدی با احتمال مثبت باشد. نشان دهید :

الف) اگر $A_۱$ و $A_۲$ دو پیشامد ناسازگار باشند :

$$P((A_۱ \cup A_۲)|B)=P(A_۱|B)+P(A_۲|B)$$

ب) برای هر پیشامد A داریم : $P(A'|B)=۱-P(A|B)$.

دانستن تعریف احتمال شرطی و درک درستی از مفهوم آن برای حلّ مسائل، احتمال لازم است، ولی کافی نیست. در ادامه، با سه ابزار آشنا می‌شویم که در حلّ مسائل احتمال بسیار مفیدند. این سه ابزار «قانون ضرب احتمال»، «قانون احتمال کل» و «قانون بیز» هستند. هر سه مورد را، در برخی کتاب‌ها با عنوان «قضیه» و «فرمول» نیز می‌شناسند. توجه داشته باشید که شما علاوه بر اینکه باید با این سه قانون آشنا شوید، این را هم باید بیاموزید که هر کدام در چه مواردی به کار می‌آیند.

برای یادگیری بهتر هر قانون، مثال‌هایی مطرح خواهد شد که برخی به‌قدری ساده‌اند که با روش‌های قبلی نیز قابل حل کردن هستند. انتخاب چنین مثال‌هایی به این دلیل است که مطلب در ابتدا در ذهن شما به‌درستی جا بیفتد. در ادامه برخی مثال‌های پیچیده‌تر هم آمده است، تا در استفاده از این ابزارها متبحرتر شوید.

در برخی مثال‌ها، سعی شده است که صورت مسئله تا حدّی شبیه یک مسئلهٔ واقعی باشد. در چنین مثال‌هایی فهم درست صورت مسئله و تبدیل درست آن به یک مسئلهٔ احتمال و تشخیص پیشامدهای مورد بحث و نام‌گذاری مناسب، بخشی از حلّ مسئله است و شما باید این کار را هم به‌خوبی فرا بگیرید.

قانون ضرب احتمال

تعریف احتمال شرطی، با یک محاسبهٔ ساده به عبارتی تبدیل می‌شود که به آن «قانون ضرب احتمال» گفته می‌شود :

اگر A و B دو پیشامد باشند که $P(A)>۰$، آن‌گاه $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$.

از این قانون، معمولاً وقتی استفاده می‌شود که بخواهیم عبارت سمت چپ تساوی را حساب کنیم.

مثال : در کیسه‌ای ۱ گوی سبز، ۳ گوی سفید و ۲ گوی قرمز است. از کیسه دو گوی به‌ترتیب و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. احتمال اینکه گوی اوّل سبز و گوی دوم سفید باشد، چقدر است؟

حل : پیشامد سبز بودن گوی اوّل را A و پیشامد سفید بودن گوی دوم را B می‌نامیم. در این صورت، آنچه خواسته شده $P(A\cap B)$ است. با توجه به قانون ضرب احتمال باید $P(A)$ و $P(B|A)$ را به دست آوریم. در ابتدا ۶ گوی در کیسه است که یکی از آنها سبز است. پس $P(A)=\frac{۱}{۶}$.

برای محاسبهٔ $P(B|A)$ توجه کنید که بعد از خارج کردن گوی اوّل، با این شرط که آن گوی سبز باشد، ۵ گوی در کیسه مانده که ۳ تا از آنها سفید است، درنتیجه : $P(B|A)=\frac{۳}{۵}$.

پس $P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۳}{۵}=۰/۱$.

قانون ضرب احتمال را می‌توان به‌راحتی برای سه پیشامد نیز نوشت :

> اگر $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند، آن‌گاه
> $$P(A_۱\cap A_۲\cap A_۳)=P(A_۱)P(A_۲|A_۱)P(A_۳|(A_۱\cap A_۲))$$

در یکی از تمرین‌های پایانی درس از شما خواسته شده تا این قانون را ثابت کنید.

کار در کلاس

با داده‌های مثال قبل، اگر سه گوی را به‌ترتیب و بدون جای‌گذاری خارج کنیم، احتمال اینکه اوّلی سبز، دومی سفید و سومی قرمز باشد چقدر است؟

قسمتی از راه‌حل، مشابه مثال قبلی است. کافی است C را پیشامد قرمز بودن گوی سوم بگیریم. در این صورت، باید $P(A\cap B\cap C)$ را به‌دست آوریم. با استفاده از قانون ضرب برای سه پیشامد، راه‌حل را ادامه دهید.

کار در کلاس

بسکتبالیستی هر بار که اقدام به پرتاب می‌کند، اگر روحیهٔ خوبی داشته باشد، پرتابش به احتمال ۹۰ درصد گُل می‌شود و اگر روحیه‌اش ضعیف باشد، احتمال گل شدن پرتابش ۶۰ درصد است. به‌علاوه می‌دانیم او اگر پرتابی را گل کند، در پرتاب بعدی روحیهٔ خوبی دارد و در غیر این صورت، روحیه‌اش ضعیف خواهد شد. فرض کنید بسکتبالیست، پیش از اوّلین پرتاب، روحیهٔ خوبی داشته باشد. احتمال اینکه از سه پرتاب متوالی، دقیقاً دو پرتاب آخر گل شود چقدر است؟

تصویر مربوط به تیم ملی بسکتبال با ویلچر کشورمان در بازی‌های پارالمپیک ۲۰۱۶ ریو است که در اولین دیدار خود ۶۹ بر ۶۳، تیم آلمان را شکست داد.

برای حلّ این مسئله، پیشامد گل شدن پرتاب iام را A_i بنامید. آنچه باید محاسبه کنید $P(A'_۱\cap A_۲\cap A_۳)$ است.

با استفاده از فرضیات مسئله و قانون ضرب احتمال داریم :

$$P(A'_۱\cap A_۲\cap A_۳)=P(A'_۱)P(A_۲|A'_۱)P(A_۳|A'_۱\cap A_۲)=۰/۱\times۰/۶\times۰/۹=۰/۰۵۴$$

چرا $P(A_۳|A'_۱\cap A_۲)$ برابر ۰/۹ است؟

مثال : فرض کنید سه کارت داریم. دو روی کارت اوّل سبز و دو روی کارت دوم قرمز است و یک روی کارت سوم سبز و روی دیگرش قرمز است. کارتی را به‌تصادف برمی‌داریم و مشاهده می‌کنیم که یک روی آن سبز است. احتمال اینکه هر دو روی آن سبز باشد چقدر است؟

حل : فرض کنید :

A : کارت دو رو سبز است.

B : روی مشاهده‌شدهٔ کارت انتخابی سبز است.

باید $P(A\cap B)$ و $P(B)$ را محاسبه کنیم. واضح است که بعد از انتخاب یک کارت و نگاه کردن به یک روی آن، یکی از شش روی سه کارت را با احتمال‌های برابر، خواهیم دید و چون در مجموع سه روی سبز و سه روی قرمز داریم، پس

$$P(B)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

احتمال پیشامد $A\cap B$ را به‌راحتی می‌توان با استفاده از قانون ضرب به دست آورد :

$$P(A\cap B)=P(A)P(B\,|\,A)=\frac{۱}{۳}\times ۱=\frac{۱}{۳}$$

دلیل اینکه $P(A)$ برابر $\frac{۱}{۳}$ است، این است که از سه کارت، یکی دو رو سبز است و $P(B|A)=۱$ چون اگر کارت انتخابی دو رو سبز باشد، روی مشاهده شده حتماً سبز است. در نتیجه : $P(A\,|\,B)=\frac{۲}{۳}$.

قانون احتمال کل

رسیدن از داده‌های جزئی به نتایج کلی بسیار معمول است؛ مثلاً اطلاعاتی آماری که در استان‌های کشور تهیه شده، می‌تواند بعد از انجام برخی محاسبات منجر به آمارهایی دربارهٔ کلّ کشور شود. یا اطلاعاتی در مورد رفتار ترافیکی گروه‌های مختلف سنی و جنسی را می‌توان جمع‌بندی کرد و به آماری دربارهٔ همهٔ رانندگان رسید. موضوع قانون احتمال کل چنین چیزهایی است.

فعالیت

دو کیسه داریم که اوّلی شامل ۲ گوی سفید و ۳ گوی سبز و دومی شامل ۱ گوی سفید و ۹ گوی قرمز است. یکی از دو کیسه را به تصادف انتخاب می‌کنیم و از آن گویی را برمی‌داریم. می‌خواهیم احتمال سفید بودن این گوی را محاسبه کنیم.

سه پیشامد A، $B_۱$ و $B_۲$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

A : گوی برداشته شده سفید است.

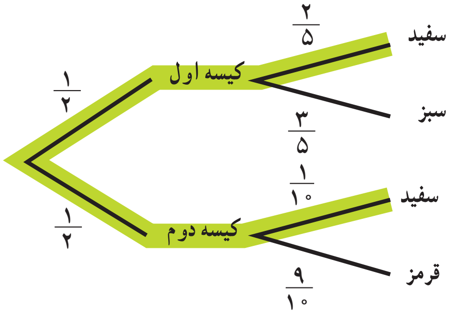
$B_۱$: کیسهٔ اوّل انتخاب شده است.

$B_۲$: کیسهٔ دوم انتخاب شده است.

پس هدف محاسبه $P(A)$ است. طبق اطلاعات داده شده $P(A|B_۱), P(A|B_۲)$، به‌ترتیب، برابر ...... و ...... هستند. به‌علاوه واضح است که ... = $P(B_۱)=P(B_۲)$. چون کیسهٔ انتخابی یا کیسهٔ اوّل است یا کیسهٔ دوم. پس $B_۱$ و $B_۲$ فضای نمونه را افراز می‌کنند. این نتیجه می‌دهد که $A\cap B_۱$ و $A\cap B_۲$ نیز A را افراز می‌کنند. پس

$$P(A)=P\big((A\cap B_۱)\cup(A\cap B_۲)\big)=P(A\cap B_۱)+P(A\cap B_۲)$$
$$=P(B_۱)P(A\,|\,B_۱)+P(B_۲)P(A\,|\,B_۲)=\frac{۱}{۲}\times\cdots+\cdots\times\cdots=\cdots$$

در محاسبات صفحهٔ قبل دو بار از قانون ضرب احتمال استفاده کردیم. «کجا؟» نمودار درختی زیر، محاسبات را به شکل دیگری نمایش می‌دهد :



$$\left.\begin{array}{l} :\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۵} \\ \\ :\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۱۰} \end{array}\right\} = \frac{۱}{۲}\times\cdots\cdots+\frac{۱}{۲}\times\cdots\cdots=\cdots\cdots$$

«قانون احتمال کل»، که شما در فعالیت قبل تلویحاً از آن استفاده کردید، به این شکل است :

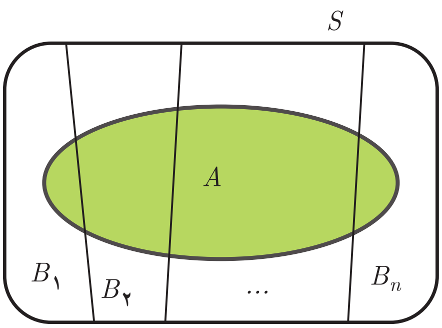
فرض کنید $B_۱$، $B_۲$، و . . . B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A، داریم :

$$P(A)=P(B_۱)P(A\,|\,B_۱)+P(B_۲)P(A\,|\,B_۲)+\ldots+P(B_n)P(A\,|\,B_n)=\sum_{k=۱}^{n}P(B_k)P(A\,|\,B_k)$$

در فعالیت قبل، فضای نمونه به دو پیشامد $B_۱$ و $B_۲$ افزار شده بود؛ کیسهٔ انتخابی، یا کیسهٔ اوّل است، یا کیسهٔ دوم است.

کار در کلاس

با انجام مراحل زیر قانون احتمال کل را ثابت کنید :



۱ این فرض که $B_۱$، $B_۲$، و . . . B_n فضای نمونه را افراز می‌کنند؛ یعنی دو به دو .... هستند و ... $=\bigcup_{k=۱}^{n}B_k$.

۲ در این صورت $A\cap B_۱$، $A\cap B_۲$، و . . . $A\cap B_n$ دو به دو .... هستند و اجتماع آنها برابر ...... می‌شود. در نتیجه داریم

$$P(A)=\sum_{k=۱}^{n}P(\ldots\cap\ldots)$$

۳ اگر جملات داخل سیگما را به کمک قانون ضرب احتمال بازنویسی کنید، به قانون احتمال کل می‌رسید.

کار در کلاس

میوه‌فروشی ده صندوق سیب از سه باغ مختلف خریده است. ۳ صندوق از باغ شمالی، ۵ صندوق از باغ مرکزی و ۲ صندوق از باغ جنوبی. در این سه باغ احتمال اینکه یک سیب لکه‌دار باشد، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد است. با فرض اینکه تعداد سیب در صندوق‌های مختلف برابر است، احتمال اینکه سیبی که از یکی از صندوق‌ها برمی‌داریم لکه‌دار باشد چقدر است؟

برای حلّ این مسئله گیریم $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$، به‌ترتیب، این پیشامدها باشند که سیب انتخابی از باغ شمالی، باغ مرکزی و باغ جنوبی باشد. پیشامد A را نیز لکه‌دار بودن آن سیب تعریف می‌کنیم. در این صورت داریم :

$$P(B_۱)=\dots\ ,\qquad P(B_۲)=\dots\ ,\qquad P(B_۳)=\dots$$

و

$$P(A|B_۱)=\dots\ ,\qquad P(A|B_۲)=\dots\ ,\qquad P(A|B_۳)=\dots$$

آنچه در مسئله از ما خواسته شده است $P(A)$ است که با استفاده از قانون احتمال کل به شکل زیر محاسبه می‌شود :

$$P(A)=P(B_۱)P(A|B_۱)+\cdots\cdots\cdots\cdots+\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots+\cdots+\cdots=$$

با تکمیل محاسبات جواب به دست می‌آید.

می‌دانیم که B و B' فضای S را افراز می‌کنند؛ لذا ساده‌ترین شکل قانون احتمال کل در حالت $n=۲$ به شکل زیر بیان می‌شود :

فرض کنید B پیشامدی باشد که $۰<P(B)<۱$. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A، داریم :

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

مثال : دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی را به‌تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و یک روی آن را می‌بینیم. احتمال اینکه آن رو قرمز باشد چقدر است؟

حل : این پیشامد را که رنگ قرمز دیده شود A و این پیشامد را که دو روی کارت انتخابی قرمز باشد B می‌نامیم. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل داریم :

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

واضح است که $P(A|B)=۱$ و $P(A|B')=۰/۵$ و با توجه به تعداد، دو نوع کارت داریم

$$P(B)=\frac{۲}{۲+۸}=۰/۲\ ,\ P(B')=۱-۰/۲=۰/۸$$

پس

$$P(A)=۰/۲\times۱+۰/۸\times۰/۵=۰/۶$$

قانون بیز

وقتی شما برای اوّلین‌بار با فردی آشنا می‌شوید، پیش‌فرض‌هایی از میزان صداقت او دارید. در طول زمان که اعمال و رفتار او را می‌بینید این پیش‌فرض‌ها به شکل مثبت یا منفی تغییر می‌کند. اگر مربی ورزش دانش‌آموزی را تحت نظر بگیرد، در ابتدا نسبت به توانایی او در ضربه زدن به توپ پیش‌فرض‌هایی دارد و هر چه بازی او را مشاهده کند، این پیش‌فرض‌ها تغییر می‌کند. قانون بیز که از مهم‌ترین قوانین در علم احتمال است، این موضوع را به زبان ریاضی فرمول‌بندی می‌کند.

خواندنی

توماس بیز[1] آماردان، فیلسوف و کشیش انگلیسی است که به دلیل فرمول‌بندی حالت خاصی از قانون بیز، معروف شده است. او البته هیچ‌گاه کارهایی که در نهایت منجر به قانون بیز شد را منتشر نکرد؛ بلکه بعد از مرگش ریچارد پرایس[2]، فیلسوف و ریاضی‌دان اهل ولز پس از ویرایش یادداشت‌های بیز آنها را منتشر کرد.

فعالیت

فرض کنید سه صندوق، با تعداد زیاد سیب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سیب‌ها لکه دارند. یکی از صندوق‌ها را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه این صندوق مربوط به باغ شمالی باشد چقدر است؟ در مورد دو باغ دیگر این احتمال چقدر است؟

ب) اکنون سیبی را به تصادف از داخل صندوق انتخابی خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکه‌دار است. آیا بعد از این مشاهده، نظر شما در مورد احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، تغییر کرده است؟

پ) به‌طور شهودی، فکر می‌کنید آیا این احتمال نسبت به قبل از مشاهدهٔ سیب لکه‌دار افزایش پیدا کرده است، یا کاهش؟

در علم احتمال گاهی با مسائلی مانند فعالیت قبل مواجه هستیم که در آنها وقوع یک پیشامد، موجب تغییر نگرش ما به احتمال وقوع پیشامدهای دیگر می‌شود. شما در زندگی با این نوع مسائل، البته با نگاهی کیفی و نادقیق، مواجه بوده‌اید.

قانون بیز مشخص می‌کند که «احتمال‌های پیش از مشاهده» چگونه به «احتمال‌های پس از مشاهده» تبدیل می‌شوند. فرضیات قانون بیز کاملاً مشابه فرضیات قانون احتمال کل است:

فرض کنید B_1، B_2، و ... و B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A و هر $i \leq n$ داریم:

$$\mathrm{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A \mid B_i)}{\mathrm{P}(A)}$$

این قانون توضیح می‌دهد که چگونه $\mathrm{P}(B_i)$ها بعد از مشاهدهٔ رخ دادن پیشامد A، به $\mathrm{P}(B_i|A)$ها تبدیل می‌شوند.

گاهی قانون بیز را به شکل زیر می‌نویسند:

$$\mathrm{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A \mid B_i)}{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(B_k)\mathrm{P}(A \mid B_k)}$$

هدف از این نوع نوشتن قانون بیز این است که تصریح شود در یک مسئلهٔ مربوط به قانون بیز معمولاً داده‌های موجود $\mathrm{P}(B_k)$ها و $\mathrm{P}(A|B_k)$ها هستند. توجه کنید که آنچه در مخرج عبارت سمت راست آمده است، طبق قانون احتمال کل، همان $\mathrm{P}(A)$ است.

۱ـ Thomas Bayes (۱۷۰۲ ـ ۱۷۶۱)

۲ـ Richard Price (۱۷۲۳ ـ ۱۷۹۱)

ساده‌ترین حالت قانون بیز وقتی است که n برابر ۲ باشد. در این‌صورت، B_1 و B_2 دو پیشامد متمم‌اند.

فرض کنید B پیشامدی باشد که احتمال آن مخالف صفر و یک است. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A :

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')}$$

اگر احتمال B صفر، یا یک باشد چه مشکلی در فرمول بالا پیش می‌آید؟

مثال : دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی را به‌تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و فقط یک روی آن را مشاهده می‌کنیم و می‌بینیم که قرمز است. احتمال اینکه روی دیگر کارت نیز قرمز باشد چقدر است؟

حل : این پیشامد که رنگ قرمز دیده شود را A و این پیشامد که دو روی کارت انتخابی قرمز باشد را B می‌نامیم. باید $P(A)$ را حساب کنیم. با توجه به اینکه B و B' فضای نمونه را افراز می‌کنند داریم :

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')=۰/۲\times۱+۰/۸\times۰/۵=۰/۶$$

توجه کنید که پیشامد B' یعنی کارت انتخابی دو رو قرمز نباشد و به همین دلیل احتمال آن ۰/۸ است.

طبق قانون بیز داریم :

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{۰/۲\times۱}{۰/۶}=\frac{۱}{۳}$$

مثال : سه صندوق سیب، هر کدام شامل ۱۰۰ سیب داریم. سیب‌های صندوق اوّل سبز؛ سیب‌های صندوق دوم، قرمز است. صندوق سوم شامل ۲ سیب سبز و ۹۸ سیب قرمز است. صندوقی را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. فرض کنید دست در صندوق کنیم و سیبی را تصادفاً در آوریم و ببینیم که سبز است. احتمال اینکه همهٔ سیب‌های صندوق سبز باشد چقدر است؟

حل : فرض کنید پیشامد A، یعنی سیب مشاهده‌شده سبز باشد و پیشامدهای B_1، B_2 و B_3 به‌ترتیب به معنای انتخاب صندوق‌های اوّل، دوم و سوم باشند. لذا

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{۱}{۳}$$

و

$$P(A|B_1)=۱ \quad , \quad P(A|B_2)=۰ \quad , \quad P(A|B_3)=\frac{۲}{۱۰۰}=۰/۰۲$$

برای محاسبهٔ $P(B_1|A)$ ابتدا $P(A)$ را محاسبه می‌کنیم. طبق قانون احتمال کل

$$P(A)=\frac{۱}{۳}\times۱+\frac{۱}{۳}\times۰+\frac{۱}{۳}\times۰/۰۲=۰/۳۴$$

در نتیجه :

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۳}}{۰/۳۴}=\frac{۱}{۱/۰۲}\simeq۰/۹۸۰۴$$

کار در کلاس

فرض کنید سه صندوق سیب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سیب‌ها لکه‌دارند. یکی از صندوق‌ها را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و نمی‌دانیم که صندوق انتخابی مربوط به کدام باغ است. سیبی را از آن صندوق خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکه‌دار است. در این صورت، احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، چقدر است؟

برای حلّ این مسئله، این پیشامد را که سیب انتخابی لکه‌دار باشد با A و اینکه صندوق انتخابی مربوط به سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی باشد را به‌ترتیب با B_1، B_2 و B_3 نمایش دهید.

در صورت مسئله چه احتمال‌هایی مشخص شده است؟ آنها را مشخص می‌کنیم :

$P(B_1) = \ldots \qquad , \qquad P(B_2) = \ldots \qquad , \qquad P(B_3) = \ldots$

و

$P(A|B_1) = \ldots \qquad , \qquad P(A|B_2) = \ldots \qquad , \qquad P(A|B_3) = \ldots$

آنچه در مسئله از ما خواسته شده است $P(B_1|A)$ است. ابتدا $P(A)$ را محاسبه می‌کنیم :

$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + \qquad\qquad +$

در نتیجه :

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \ldots$$

مثال : در یک کارخانهٔ شیر پاستوریزه، وقتی خط تولید سالم است، تنها ۲ درصد از پاکت‌ها کمتر از ۲۹۷ سی‌سی شیر دارند، ولی وقتی یکی از قطعات اصلی خط تولید دچار عیب می‌شود، این مقدار به ۱۰ درصد افزایش پیدا می‌کند. تجربه نشان داده است که احتمال خراب شدن خط تولید که تقریباً همیشه ناشی از معیوب شدن آن قطعه است، پس از یک ماه، ۵ درصد است. ماه گذشته آخرین باری بوده است که مسئول فنی، خط تولید را به‌طور کامل سرویس کرده است.

مسئول کنترل کیفیت کارخانه، به تصادف یک پاکت شیر را مورد بررسی قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که حاوی کمتر از ۲۹۷ سی‌سی شیر است. در این صورت احتمال خراب بودن خط تولید چقدر است؟

حل :

دو پیشامد A و B را به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

A : حجم شیر پاکت انتخاب‌شده کمتر از ۲۹۷ سی‌سی است.

B : خط تولید خراب شده است.

در این صورت باید $P(B|A)$ را محاسبه کنیم. اطلاعات مسئله به این صورت خلاصه می‌شود :

$$P(B) = ۰/۰۵$$

$$P(A|B) = ۰/۱$$

$$P(A|B') = ۰/۰۲$$

زیرا $P(B)$ یعنی احتمال خراب بودن خط تولید، $P(A|B)$ یعنی احتمال اینکه یک پاکت کمتر از ۲۹۷ سی‌سی شیر داشته باشد، به شرط آنکه خط تولید خراب شده باشد و $P(A|B')$ یعنی احتمال اینکه یک پاکت کمتر از ۲۹۷ سی‌سی شیر داشته باشد، به شرط آنکه خط تولید سالم باشد.

طبق قانون بیز داریم :

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')} = \frac{۰/۰۵\times۰/۱}{۰/۰۵\times۰/۱+۰/۹۵\times۰/۰۲}$$

$$= \frac{۵}{۲۴} \simeq ۰/۲۰۸$$

یعنی مسئول کنترل کیفیت که ابتدا فقط ۵ درصد احتمال می‌داد که خط تولید خراب شده باشد، بعد از مشاهدهٔ یک پاکت با محتویات کمتر از ۲۹۷ سی‌سی، ۲۰/۸ درصد احتمال می‌دهد که خط تولید خراب شده باشد.

تمرین

۱ دربارهٔ خانواده‌ای چهار فرزندی، می‌دانیم که دست‌کم یکی از فرزندان آنها پسر است. احتمال اینکه دقیقاً ۲ پسر داشته باشند چقدر است؟

۲ ستاد مرکزی معاینهٔ فنّی خودروهای تهران در اواخر سال ۱۳۹۵ اعلام کرد : «امسال پرکارترین سال در عرصهٔ معاینهٔ فنّی خودروهای کشور از ابتدای تأسیس تاکنون بوده و ۸۷۰ هزار خودرو در تهران معاینهٔ فنّی شده‌اند. امسال یکی از سخت‌ترین سال‌های مبارزه با آلودگی هوا بود ...»

در این طرح، سیزده مرکز مسئولیت معاینهٔ فنّی خودروهای سبک را به عهده داشتند. فرض کنید جدول زیر آمار خودروهای مراجعه‌کرده و خودروهای مردودی در معاینهٔ فنّی باشد : (تعداد به هزار دستگاه است).

شمارهٔ مرکز	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
تعداد مراجعه	۶۰	۷۷	۸۶	۸۵	۷۹	۷۹	۵۶	۵۹	۴۸	۵۰	۵۵	۵۱	۸۵
تعداد مردودی	۲۸	۱۶	۱۲	۱۷	۲۶	۱۰	۱۴	۱۴	۲۹	۳۰	۲۲	۲۲	۱۸

خودرویی را از بین خودروهای مراجعه‌کرده انتخاب می‌کنیم.

الف) خودروی انتخابی به چه احتمالی مردود شده است؟

ب) اگر بدانیم آن خودرو به مرکز شمارهٔ ۵ مراجعه کرده، جواب سؤال قبل چند است؟

پ) اگر بدانیم آن خودرو مردود شده است، احتمال اینکه به مرکز شمارهٔ ۵ مراجعه کرده باشد چقدر است؟

۳ بررسی‌های آماری نشان داده است که اگر یک روز ساحل جزیرهٔ هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال ۹۰ درصد آرام و به احتمال ۱۰ درصد طوفانی است و اگر ساحل در یک روز طوفانی باشد فردای آن روز به احتمال ۵۰ درصد آرام و به احتمال ۵۰ درصد طوفانی است. اگر امروز ساحل آرام باشد، احتمال اینکه در دو روز بعد ساحل طوفانی باشد چقدر است؟

۴ قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد را ثابت کنید: $P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1\cap A_2))$

۵ قانون ضرب احتمال n پیشامد را بنویسید. اگر بخواهیم از این قانون برای محاسبهٔ احتمال اشتراک n پیشامد استفاده کنیم، به چند حالت مختلف این کار قابل انجام است؟

۶ جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می‌دانیم که ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهینامهٔ تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را از ساکنان روستا به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه گواهینامهٔ تراکتور داشته باشد چقدر است؟

۷ دو ظرف داریم. در اوّلی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دومی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اوّل یک مهره به‌طور تصادفی برمی‌داریم و بدون مشاهده آن را به ظرف دوم منتقل می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می‌آوریم؛ با چه احتمالی این مهره سبز است؟

۸ در شهری ۶۰ درصد راننده‌ها مرد و ۴۰ درصد زن هستند. احتمال اینکه یک رانندهٔ مرد، وقتی چراغ راهنمایی قرمز است، روی خط عابر توقف کند ۰/۰۵ است و زن‌ها چنین تخلفی را به احتمال ۰/۰۱ انجام می‌دهند. احتمال اینکه یک راننده در این شهر هنگام قرمز بودن چراغ راهنمایی روی خط عابر توقف کند چقدر است؟

۹ در دو جعبه به‌ترتیب، ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبهٔ اوّل ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از هرکدام از جعبه‌ها ۵ لامپ به‌تصادف انتخاب و در یک جعبه جدید قرار می‌دهیم. احتمال آنکه لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید، معیوب باشد را محاسبه کنید.

۱۰ ۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر B باشد و فردی به تصادف از بین رأی‌دهنده‌های این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر A خواهد بود؟

۱۱ احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای کودکی که واکسن زده ۰/۰۰۲ و برای کودکی که واکسن نزده ۰/۱ است.

اگر در شهری ۹۰ درصد کودکان، واکسن زده باشند، احتمال اینکه یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چقدر است؟

۱۲ قانون بیز را ثابت کنید :

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)}$$

راهنمایی : در دو طرف تساوی از تعریف احتمال شرطی استفاده کنید، تا درستی آن را ببینید.

۱۳ با فرض شرایط قانون احتمال کل، ثابت کنید :

$$min\ \{P(A|B_1), \dots , P(A|B_n)\} \le P(A) \le max\ \{P(A|B_1), \dots , P(A|B_n)\}$$

۱۴ فرض کنید B و C دو پیشامد ناسازگار باشند و $P(A|B) \le P(A|C)$. ثابت کنید :

$$P(A|B) \le P\left(A|(B \cup C)\right) \le P(A|C)$$

۱۵ امیر و بابک عضو تیم ده نفرهٔ والیبال مدرسه‌اند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است، احتمال اینکه امیر بلندقدترین عضو تیم باشد چقدر است؟ احتمال اینکه امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد چقدر است؟

۱۶ علی و مازیار هر کدام به‌ترتیب، با احتمال‌های ۰/۳ و ۰/۴ برای دیدن یک مسابقهٔ ورزشی به ورزشگاه می‌روند. اگر علی به ورزشگاه رفته باشد، مازیار با احتمال ۰/۸ به ورزشگاه می‌رود. فرض کنید علی به ورزشگاه نرفته باشد. با چه احتمالی مازیار نیز به ورزشگاه نرفته است؟

۱۷ خانم‌ها اکبری، برنا و چمنی نسخه‌خوان‌های یک مؤسسهٔ انتشاراتی‌اندکه به‌ترتیب، ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد از کارهای نسخه‌خوانی را انجام می‌دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه‌ای که به آنها سپرده شده را بی‌غلط تصحیح کنند به‌ترتیب ۰/۹، ۰/۹۵ و ۰/۹۹ است. صفحه‌ای نسخه‌خوانی شده، ولی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چقدر است؟

۱۸ فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴ کارتی را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید، احتمال اینکه شمارهٔ کارت خارج شده ۳ باشد چقدر است؟

۱۹ یک شرکت بیمه، بیمه‌گزاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است؛ گروه «پرخطر» که در یک سال با احتمال ۰/۴ تصادف می‌کنند و گروه «کم‌خطر» که احتمال تصادف کردن آنها در یک سال ۰/۲ است. می‌دانیم که ۳۰ درصد بیمه‌گزاران پرخطرند.

الف) احتمال اینکه یک بیمه‌گزار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید.

ب) اگر یک بیمه‌گزار در سال گذشته تصادف کرده باشد، احتمال اینکه جزء گروه پرخطر باشد چقدر است؟