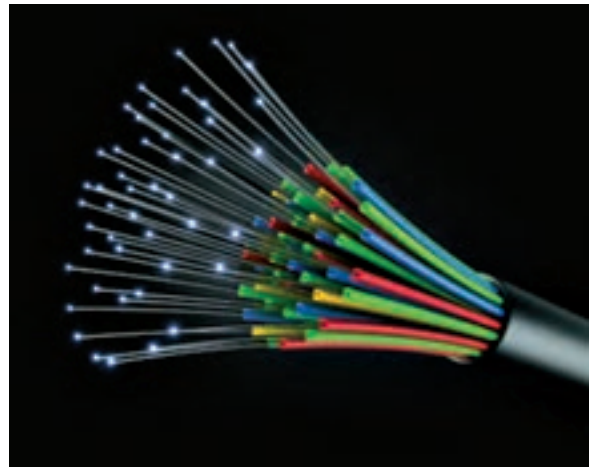


مثلثات

۴

فصل

- ۱ رادیان
- ۲ نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا
- ۳ توابع مثلثاتی
- ۴ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا



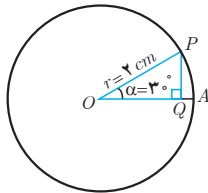
فیبرهای نوری برای انتقال داده‌ها با سرعت بسیار بالا به‌ویژه در خطوط اینترنت استفاده می‌شوند. برای طراحی این فیبرها نیاز است تا امواج نوری به کمک امواج سینوسی شبیه‌سازی شوند. معمولاً چندین رشته از فیبرهای نوری در یک غلاف پلاستیکی محافظت می‌شود.

رادیان

درس ۱

تاکنون زاویه‌ها را برحسب «درجه» اندازه‌گیری می‌کردیم. استفاده از واحد «درجه» برای اندازه‌گیری زوایا در هندسه بسیار متداول است. اما در برخی محاسبات فنی بهتر است از واحدهای دیگری استفاده شود. در ادامه با یک واحد دیگر اندازه‌گیری زوایا، به نام رادیان، آشنا می‌شویم.

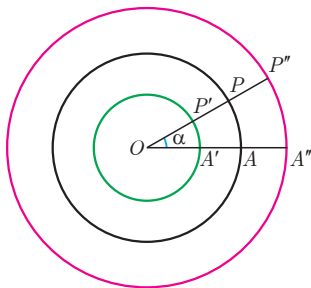
فعالیت



۱ دایره‌ی مقابل به مرکز O و به شعاع 2 سانتی‌متر داده شده است. اندازه ضلع PQ در مثلث OPQ را با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی سال گذشته به دست آورید.

۲ با توجه به اینکه کمان 3° برابر $\frac{1}{12}$ کل محیط دایره است (چرا؟) می‌توان طول کمان روبه‌رو به زاویه α (یعنی \widehat{PA}) را به صورت زیر به دست آورد.

$$\widehat{PA} = \frac{1}{12} \times (\text{محیط دایره}) = \frac{1}{12} \times 2\pi \times 2 = \frac{4}{12}\pi = \frac{\pi}{3} \text{ cm}$$



اکنون به مرکز O دایره‌های دیگری به شعاع‌های 1 و 3 سانتی‌متر رسم می‌کنیم (شکل روبه‌رو).

الف) مطابق فرمول بالا طول کمان‌های $\widehat{P'A'}$ و $\widehat{P''A''}$ را که روبه‌رو به زاویه $\alpha = 3^\circ$ هستند به دست آورید.

$$\widehat{P'A'} = \dots\dots$$

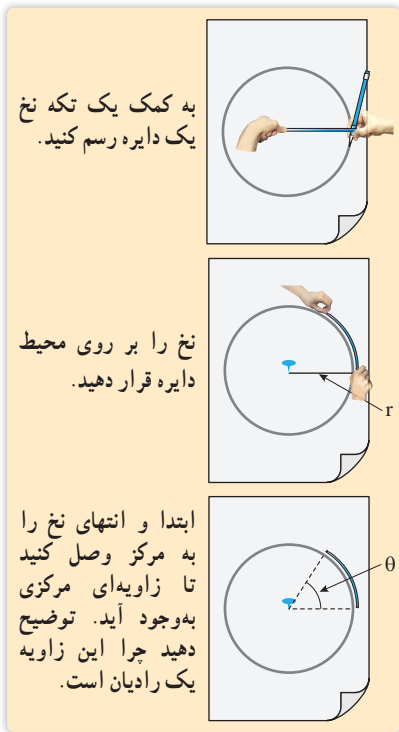
$$\widehat{P''A''} = \dots\dots$$

ب) در هر دایره نسبت طول کمان روبه‌رو به زاویه α به شعاع آن دایره را محاسبه کنید. این نسبت‌ها با هم چه رابطه‌ای دارند؟

$$\frac{\widehat{PA}}{OP} = \dots\dots$$

$$\frac{\widehat{P'A'}}{OP'} = \dots\dots$$

$$\frac{\widehat{P''A''}}{OP''} = \dots\dots$$

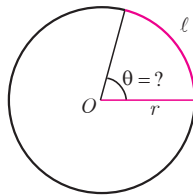


پ) اگر در شکل صفحه قبل دایره‌ای به شعاع r و به مرکز O در نظر بگیریم، آیا نسبت فوق در آن دایره تغییری می‌کند؟ چرا؟ با تکمیل رابطه زیر، به این سؤال پاسخ دهید.

$$\frac{\frac{1}{12} \times 2\pi \times r}{r} = \dots\dots\dots$$

در سؤال قبل دیدیم که نسبت طول کمان روبه‌رو به زاویه 3° به شعاع، در همه دایره‌ها برابر مقدار ثابت است. اکنون در سؤال زیر به این می‌پردازیم که این نسبت چه زمانی برابر ۱ است.

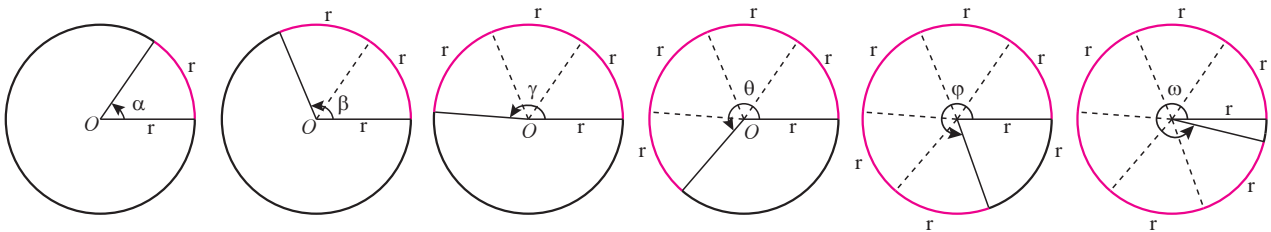
۳ در یک دایره به شعاع r ، مانند شکل زیر، طول کمان روبه‌رو به زاویه θ (کمان l) برابر طول شعاع دایره است. نسبت طول کمان به شعاع چقدر است؟ اندازه زاویه θ تقریباً چند درجه است؟ (از مقاله استفاده کنید)



همان‌طور که در فعالیت قبل مشاهده کردید نسبت طول کمان روبه‌رو به یک زاویه به شعاع دایره همواره مقداری ثابت است. از این مقدار ثابت برای بیان اندازه زاویه می‌توان استفاده کرد؛ مثلاً در سؤال ۳ فعالیت قبل، این نسبت برای زاویه θ برابر یک است. در این صورت می‌گویند اندازه زاویه θ برابر ۱ رادیان است.

یک رادیان، در هر دایره دلخواه، اندازه زاویه‌ای مرکزی است که طول کمان روبه‌رو به آن برابر طول شعاع دایره است. معمولاً از نماد rad برای نمایش اندازه یک زاویه بر حسب رادیان استفاده می‌شود.

در زیر زاویه‌های ۱ تا ۶ رادیان در دایره‌ای به شعاع دلخواه r رسم شده‌اند. در هر شکل به نسبت طول کمان روبه‌رو به هر زاویه به شعاع دقت کنید.



$\alpha = \frac{r}{r} = 1 \text{ rad}$ $\beta = \frac{2r}{r} = 2 \text{ rad}$ $\gamma = \frac{3r}{r} = 3 \text{ rad}$ $\theta = \frac{4r}{r} = 4 \text{ rad}$ $\phi = \frac{5r}{r} = 5 \text{ rad}$ $\omega = \frac{6r}{r} = 6 \text{ rad}$

❖ **مثال:** اندازه یک زاویه نیم صفحه (180°) و نیز یک زاویه قائمه (90°) برحسب رادیان چقدر است؟

❖ **حل:** می‌دانیم که طول کمان روبه‌رو به زاویه نیم صفحه، نصف محیط دایره است. بنابراین داریم:

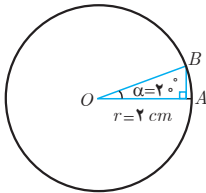
$$\frac{2\pi r}{2} = \frac{\pi r}{r} = \pi \text{ rad}$$

پس یک زاویه 180° برابر π رادیان می‌باشد. به‌طور مشابه طول کمان روبه‌رو به یک زاویه قائمه، ربع محیط دایره است. پس:

$$\frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi}{2} r = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

همواره بین اندازه یک زاویه مانند θ برحسب رادیان و طول کمان l روبه‌رو به آن در یک دایره به شعاع r رابطه زیر برقرار است.

$$\theta = \frac{l}{r}$$



❖ **مثال:** در شکل مقابل اندازه زاویه α را برحسب رادیان به دست آورید، سپس طول \widehat{AB} را پیدا کنید.

❖ **حل:** از مثال قبل می‌دانیم که هر زاویه 180° برابر π رادیان است. بنابراین داریم:

$$\frac{2^\circ}{\alpha \text{ (برحسب رادیان)}} = \frac{180^\circ}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{2^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$$

پس زاویه α برابر $\frac{\pi}{9}$ رادیان است. اکنون برای به دست آوردن طول \widehat{AB} داریم:

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{r} \Rightarrow \frac{\pi}{9} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{2\pi}{9} \text{ cm}$$

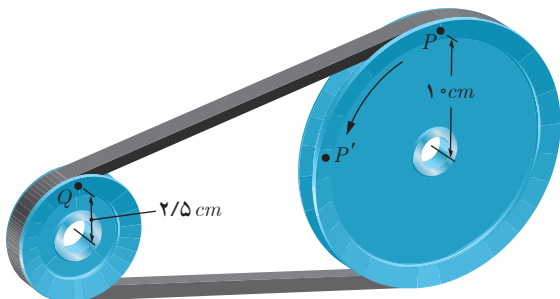
$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

اگر D اندازه زاویه‌ای برحسب درجه و R اندازه آن برحسب رادیان باشد، آنگاه:

❖ **مثال:** در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع‌های 1 cm و $2/5 \text{ cm}$ را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی قرقره بزرگ‌تر $\frac{\pi}{3}$ رادیان می‌چرخد (یعنی نقطه P در موقعیت P' قرار می‌گیرد) قرقره کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد. ($\pi \text{ rad} \approx 3/14 \text{ rad}$)

❖ **حل:** ابتدا مسافتی را که نقطه P بر روی محیط قرقره بزرگ‌تر طی می‌کند به دست می‌آوریم.

$$\theta = \frac{\widehat{PP'}}{r} \Rightarrow \widehat{PP'} = r\theta = 1 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ cm} \approx 1/3 \text{ cm}$$



چون هر دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند پس قرقره کوچک تر نیز 5π cm حرکت می کند. برای این قرقره داریم:

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{5\pi}{2/5} = \frac{5\pi}{\frac{2}{5}} = 2\pi \text{ rad}$$

بنابراین وقتی قرقره بزرگ تر ربع دور می چرخد، قرقره کوچک تر یک دور کامل می چرخد و نقطه Q به مکان خود بازمی گردد.

کاردرکلاس

۱ در جدول روبه‌رو جاهای خالی

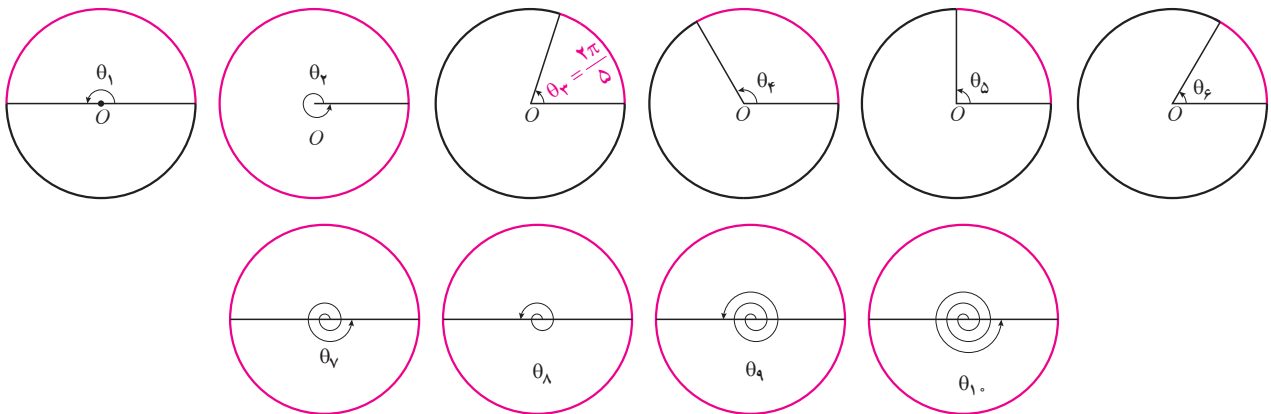
زاویه برحسب درجه	3°		9°		27°		39°
زاویه برحسب رادیان		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π	2π		$\frac{7\pi}{3}$

را پر کنید.

۲ در زیر، اندازه برخی از زاویه‌ها بر حسب رادیان داده شده است. مانند نمونه، آنها را با زوایای داده شده در دایره‌های مثلثاتی

زیر نظیر کنید.

الف) $\frac{2\pi}{6}$ ب) $\frac{2\pi}{5}$ پ) $\frac{2\pi}{4}$ ت) $\frac{2\pi}{3}$ ث) $\frac{2\pi}{2}$ ج) 2π ج) 3π ح) 4π خ) 5π د) 6π



۳ در جدول روبه‌رو، که سال گذشته

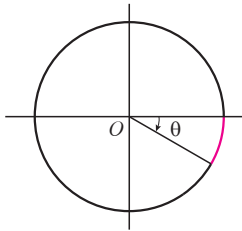
آن را بر حسب درجه کامل کرده‌اید،

مقدار نسبت‌های مثلثاتی خواسته شده را

در جاهای خالی بنویسید.

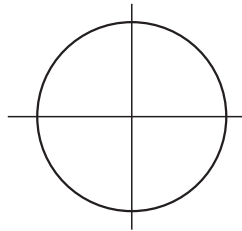
θ (رادیان)	$^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
نسبت	$^\circ$						
$\sin\theta$	$^\circ$				۱		
$\cos\theta$			$\frac{\sqrt{2}}{2}$				
$\tan\theta$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$					
$\cot\theta$	تعریف نشده				$^\circ$		

۱ برای هر یک از زاویه‌های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد و سپس شکل تقریبی زاویه را همانند نمونه رسم کنید.



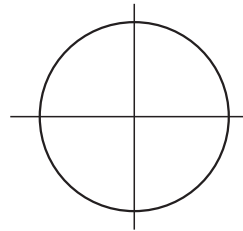
$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

انتهای کمان در ربع چهارم است.



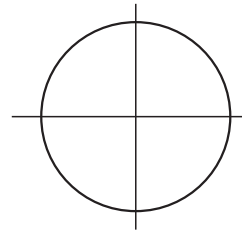
$$\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} =$$

انتهای کمان در ربع ... است.



$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} =$$

انتهای کمان در ربع ... است.



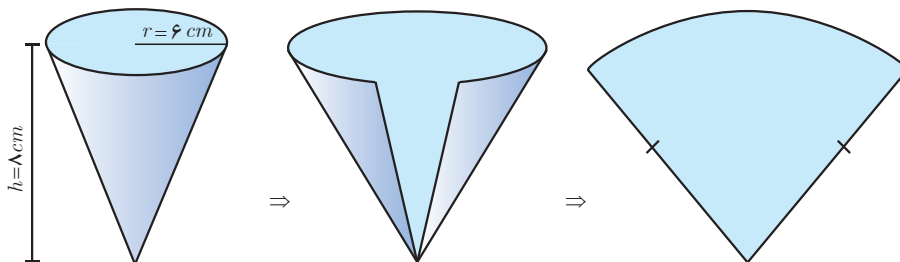
$$\gamma = \pi - \frac{\pi}{6} =$$

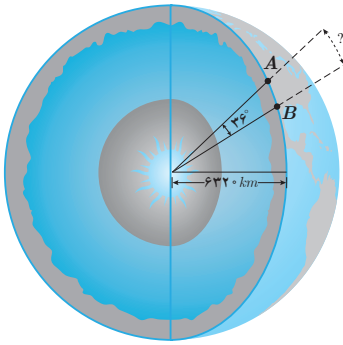
انتهای کمان در ربع ... است.



۲ طول برف پاک‌کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف پاک‌کن، کمانی به اندازه 12° طی می‌کند. ($\pi \approx 3/14$)
الف) اندازه کمان را برحسب رادیان به دست آورید.
ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟

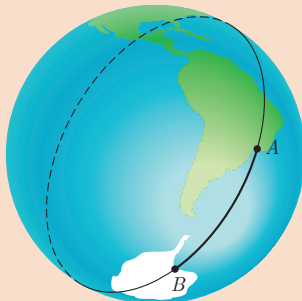
۳ شکل فضایی و نیز شکل گسترده یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r=6\text{ cm}$ و ارتفاع آن $h=8\text{ cm}$ می‌باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟





۴ فاصله دو نقطه A و B از کره زمین، که بر روی یک نصف النهار قرار دارند، مطابق شکل روبه‌رو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازه شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطه داده شده را بیابید.

خواندنی

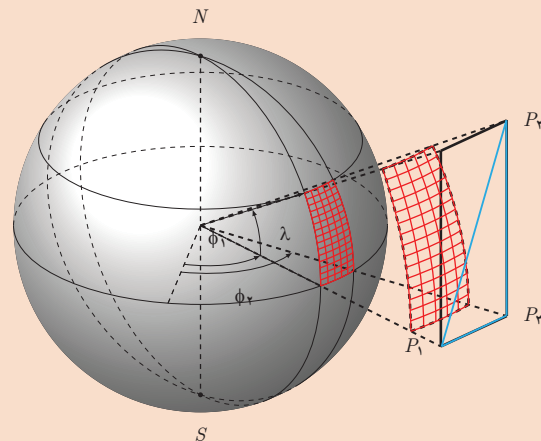


فاصله ژئودزیک دو نقطه از کره زمین



نصف النهارها دایره‌های عظیمه‌ای روی کره زمین تشکیل می‌دهند.

به فاصله بین دو نقطه داده شده در تمرین ۴ در اصطلاح فنی «فاصله ژئودزیک» دو نقطه گفته می‌شود. برای محاسبه فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین لزومی ندارد که آن دو نقطه بر روی یک نصف النهار باشند. در عمل با استفاده از سیستم مکان‌یابی جهانی (GPS) موقعیت جغرافیایی آن دو نقطه را برحسب طول و عرض جغرافیایی آنها به دست می‌آورند و سپس با استفاده از محاسبات پیچیده‌ای فاصله ژئودزیک بین آن دو نقطه را محاسبه می‌کنند. در تمام این محاسبات که در آن از مثلثات کروی استفاده می‌شود باید زوایا برحسب رادیان در نظر گرفته شوند، در غیر این صورت محاسبات به مراتب پیچیده‌تر می‌گردد. فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین کوتاه‌ترین فاصله‌ای است که بین آن دو نقطه می‌توان پیدا کرد. این فاصله، طول کمانی از بزرگ‌ترین دایره‌ای است که از آن دو نقطه می‌گذرد و به آن «دایره عظیمه» می‌گویند. محاسبه فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین در طراحی مسیرهای هوایی و دریایی و نیز هدایت ماهواره‌ها بسیار اهمیت دارد. بررسی کنید که چرا برای دو نقطه از کره زمین که روی یک نصف النهار قرار دارند، دایره عظیمه همان نصف النهار گذرنده از آن دو نقطه می‌باشد.



مثلثات کروی در طراحی مسیرهای هوایی و دریایی و نیز محاسبه سطوح و خم‌ها بسیار کاربرد دارد.

نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

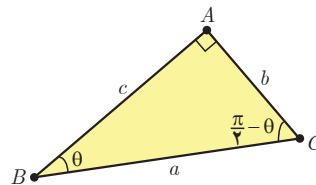
در سال گذشته به مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای برخی از زوایای تند (مانند 30° ، 45° ، 60°) و نیز زوایای مرزی (0° ، 90° ، 180° ، 270° ، 360°) پرداختیم. همچنین علامت نسبت‌های مثلثاتی را در چهار ربع دایره مثلثاتی یاد گرفتیم. اکنون به مقدار این نسبت‌ها برای برخی دیگر از زوایا و رابطه بین آنها می‌پردازیم.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم

می‌دانید که به هر دو زاویه‌ای که مجموع اندازه آنها 90° باشد زاویه‌های متمم می‌گویند. نسبت‌های مثلثاتی چنین زاویه‌هایی با هم ارتباط دارند. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا این روابط را پیدا کنید.

فعالیت

یک مثلث قائم‌الزاویه دلخواه مانند شکل زیر را در نظر بگیرید.



با توجه به شکل، دو ستون روبه‌رو را همانند نمونه کامل و سپس مقادیر مساوی در دو ستون را با هم نظیر کنید.

$\sin \theta = \frac{b}{a}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{c}{a}$
$\cos \theta = \dots\dots$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \dots\dots$
$\tan \theta = \dots\dots$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \dots\dots$
$\cot \theta = \dots\dots$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \dots\dots$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

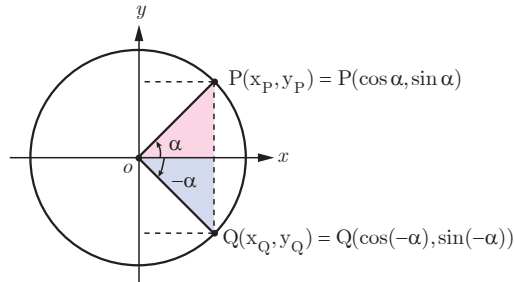
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta$$

در فعالیت قبل زاویه‌های مورد بحث تند بودند. روابط به‌دست آمده در آنجا در حالت کلی نیز برقرار است. به‌طور کلی برای دو زاویه متمم θ و $\frac{\pi}{2} - \theta$ همواره روابط روبه‌رو برقرار است.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه

فعالیت



در دایره مثلثاتی روبه‌رو نقطه P انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α است. مختصات نقطه P برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه α که در سال گذشته آموختید، داده شده است. همچنین با توجه به دستگاه مختصات واضح است که قرینه نقطه $P(x_P, y_P)$ نسبت به محور x ها نقطه $Q(x_Q, y_Q) = Q(x_P, -y_P)$ می‌باشد.

الف) با توجه به رابطه بین مختصات نقاط P و Q روابط مثلثاتی زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = x_P \Rightarrow \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$y_Q = -y_P \Rightarrow \dots\dots\dots$$

ب) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط به‌دست آمده از قسمت الف کامل کنید.

$$\tan(-\alpha) =$$

$$\cot(-\alpha) =$$

دو زاویه α و $-\alpha$ قرینه یکدیگرند. برای دو زاویه قرینه روابط مثلثاتی زیر برقرار است.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

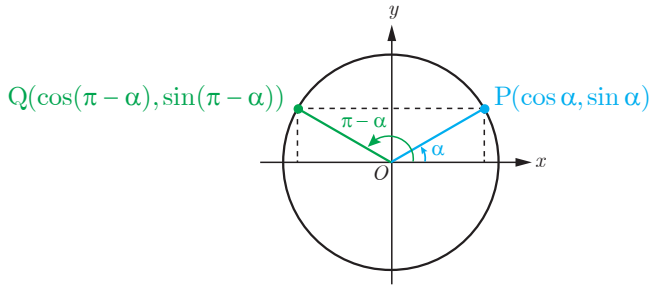
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

دو زاویه را مکمل گوئیم اگر مجموع آنها 180° باشد. در فعالیت بعد روابط بین مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای چنین زاویه‌هایی را به‌دست خواهیم آورد.



در دایره مثلثاتی روبه‌رو نقطه $P(x_P, y_P)$ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α است. با توجه به دستگاه مختصات واضح است که نقطه $Q(x_Q, y_Q) = Q(-x_P, y_P)$ قرینه نقطه P نسبت به محور y ها است.

الف) با توجه به مختصات نقاط P و Q روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = -x_P \Rightarrow \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$y_Q = y_P \Rightarrow \dots\dots\dots$$

ب) با توجه به روابط قسمت الف، تساوی‌های زیر را تکمیل کنید.

$$\tan(\pi - \alpha) =$$

$$\cot(\pi - \alpha) =$$

از فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت که بین هر دو زاویه مکمل α و $\pi - \alpha$ روابط زیر برقرار است.

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

زوایای α و $\pi + \alpha$ را در یک دایره مثلثاتی رسم کنید و نقاط انتهایی کمان‌های روبه‌رو به این دو زاویه را به ترتیب $P(x_P, y_P)$ و $Q(x_Q, y_Q)$ بنامید. از دستگاه مختصات واضح است که نقطه Q قرینه نقطه P نسبت به مبدأ مختصات است و از این رو $Q(x_Q, y_Q) = Q(-x_P, -y_P)$. اکنون با استدلالی مشابه به فعالیت بالا نشان دهید که روابط روبه‌رو برقرار است. **مثال:** مقدار نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا در زیر محاسبه شده است.

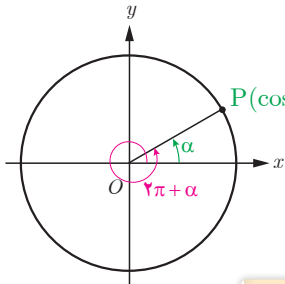
$$\sin\left(-\frac{\sqrt{\pi}}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\sqrt{\pi}}{6}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(225^\circ) = \tan(180^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cos(120^\circ) = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادین

زاویه‌هایی مانند α و $2\pi + \alpha$ در شکل زیر که انتهای کمان‌های آنها برهم منطبق می‌شود را زوایای هم انتها گویند. از آنجا که نقطه P انتهای هر دو کمان می‌باشد لذا نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه باهم برابرند.



$$P(\cos \alpha, \sin \alpha) = P(\cos(2\pi + \alpha), \sin(2\pi + \alpha))$$

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(2\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

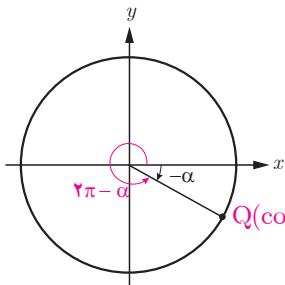
$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

این حالت برای بیش از یک دوران کامل، یعنی زوایای به صورت $2k\pi + \alpha$ ، نیز برقرار است. ($k \in \mathbb{Z}$)

از آنجا که زوایای $-\alpha$ و $2k\pi - \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) نیز هم انتها هستند (چرا؟)، با استدلالی مشابه بالا و با استفاده از نتیجه فعالیت صفحه قبل نشان دهید که نسبت‌های مثلثاتی زوایای $2k\pi - \alpha$ به صورت زیر برقرارند.



$$Q(\cos(2\pi - \alpha), \sin(2\pi - \alpha)) = Q(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$$

$$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

❁ مثال: مقدار نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا در زیر محاسبه شده است.

الف) $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

ب) $\sin(405^\circ) = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

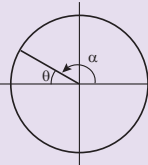
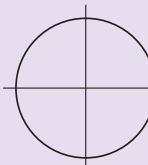
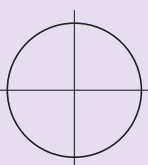
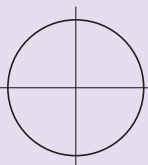
الف) $\sin(21^\circ) =$

ب) $\tan\left(-\frac{7\pi}{4}\right) =$

پ) $\cot(135^\circ) =$

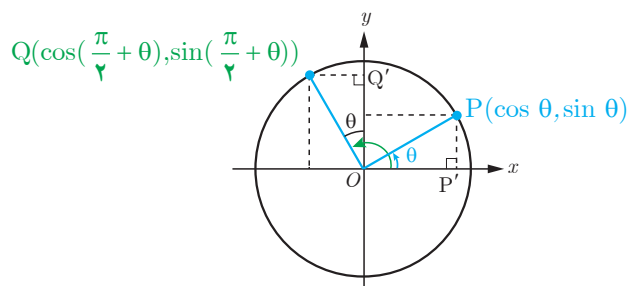
ت) $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$

۲ جدول زیر را همانند نمونه کامل کنید. $(0 < \theta < \frac{\pi}{4})$

زاویه نسبت	$\alpha = \pi - \theta$	$\alpha = \pi + \theta$	$\alpha = 2k\pi - \theta$	$\alpha = 2k\pi + \theta$																																																
انتهای کمان	ربع دوم																																																
ترسیم زاویه α و تشخیص علامت نسبت‌ها	 <table border="1"> <tr><td>نسبت</td><td>+</td><td>-</td></tr> <tr><td>$\sin \alpha$</td><td>✓</td><td></td></tr> <tr><td>$\cos \alpha$</td><td></td><td>✓</td></tr> <tr><td>$\tan \alpha$</td><td></td><td>✓</td></tr> </table>	نسبت	+	-	$\sin \alpha$	✓		$\cos \alpha$		✓	$\tan \alpha$		✓	 <table border="1"> <tr><td>نسبت</td><td>+</td><td>-</td></tr> <tr><td>$\sin \alpha$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$\cos \alpha$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$\tan \alpha$</td><td></td><td></td></tr> </table>	نسبت	+	-	$\sin \alpha$			$\cos \alpha$			$\tan \alpha$			 <table border="1"> <tr><td>نسبت</td><td>+</td><td>-</td></tr> <tr><td>$\sin \alpha$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$\cos \alpha$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$\tan \alpha$</td><td></td><td></td></tr> </table>	نسبت	+	-	$\sin \alpha$			$\cos \alpha$			$\tan \alpha$			 <table border="1"> <tr><td>نسبت</td><td>+</td><td>-</td></tr> <tr><td>$\sin \alpha$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$\cos \alpha$</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>$\tan \alpha$</td><td></td><td></td></tr> </table>	نسبت	+	-	$\sin \alpha$			$\cos \alpha$			$\tan \alpha$		
نسبت	+	-																																																		
$\sin \alpha$	✓																																																			
$\cos \alpha$		✓																																																		
$\tan \alpha$		✓																																																		
نسبت	+	-																																																		
$\sin \alpha$																																																				
$\cos \alpha$																																																				
$\tan \alpha$																																																				
نسبت	+	-																																																		
$\sin \alpha$																																																				
$\cos \alpha$																																																				
$\tan \alpha$																																																				
نسبت	+	-																																																		
$\sin \alpha$																																																				
$\cos \alpha$																																																				
$\tan \alpha$																																																				
$\sin \alpha$	$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$																																																			
$\cos \alpha$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$																																																			
$\tan \alpha$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$																																																			
$\cot \alpha$	$\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$																																																			

۳ برای زوایای قرینه $(\alpha = -\theta)$ از کدام ستون جدول بالا می‌توان کمک گرفت؟ چرا؟

در دایره مثلثاتی روبه‌رو زاویه‌های θ و $\frac{\pi}{2} + \theta$ رسم شده‌اند.



الف) با توجه به شکل، نشان دهید دو مثلث $\triangle OPP'$ و $\triangle OQQ'$ هم‌نهشت هستند.
ب) از تساوی اضلاع نظیر در دو مثلث فوق روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = -y_P \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$y_Q = \dots\dots\dots$$

پ) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط قسمت ب کامل کنید.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \dots\dots\dots$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \dots\dots\dots$$

به‌طور کلی برای دو زاویه θ و $\frac{\pi}{2} + \theta$ روابط زیر برقرار است.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta$$

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $\sin(30^\circ) =$

ب) $\cot(75^\circ) =$

پ) $\cos(-\frac{\pi}{6}) =$

ت) $\cos(-\frac{23\pi}{4}) =$

ث) $\sin(\frac{5\pi}{4}) =$

ج) $\tan(-84^\circ) =$

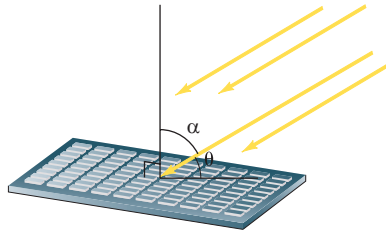
چ) $\tan(-15^\circ) =$

ح) $\cos(\frac{9\pi}{4}) =$

خ) $\tan(\frac{1}{3}\pi) =$

۲ شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر). اگر شدت نور را با I نشان دهیم،

رابطه $I = k \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را به دست می‌دهد.



الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب کسینوس زاویه θ در شکل بازنویسی کنید.

ب) شدت نور را برای زاویه‌های $\theta = 0^\circ$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ بر حسب k به دست آورید.

پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی: از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).

۳ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید (زوایا بر حسب رادیان است).

الف) $\cos \theta + \cos(\pi - \theta) = 0$

ب) $\sin(\frac{\pi}{4} - \theta) + \cos \theta = 1$

ج) $\cos(7) = \cos(-7)$

د) $\tan(\pi - \theta) = \tan \pi - \tan \theta$

توابع مثلثاتی

در درس‌های قبل مقدار نسبت‌های مثلثاتی را برای برخی زوایا به دست آوردیم. اکنون این سؤال به ذهن می‌رسد که آیا می‌توان این نسبت‌ها را برای یک عدد حقیقی تعریف کرد؟ مثلاً عبارات \sin^3 یا \cos^3 چه مفهومی دارند؟ فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا پاسخ این سؤالات را بیابید.

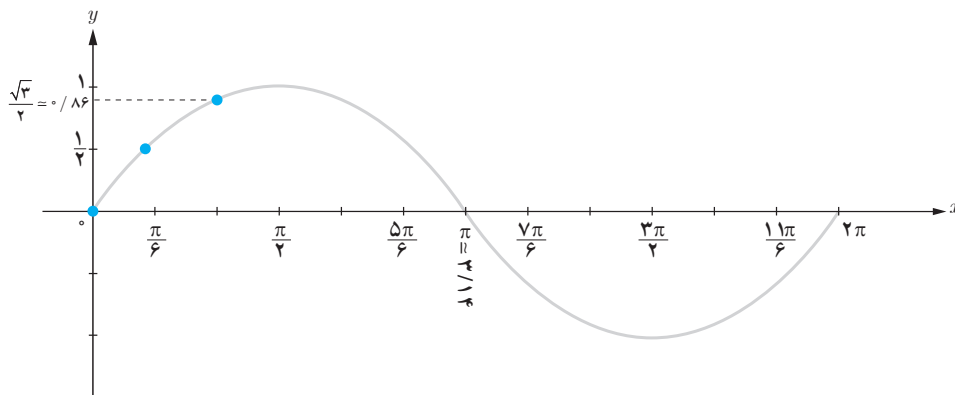
فعالیت

۱ در جدول زیر نسبت سینوس به ازای برخی مقادیر در بازه $[0, 2\pi]$ مشخص شده است. این جدول را تکمیل کنید.

x (رادیان)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$			0	-1		

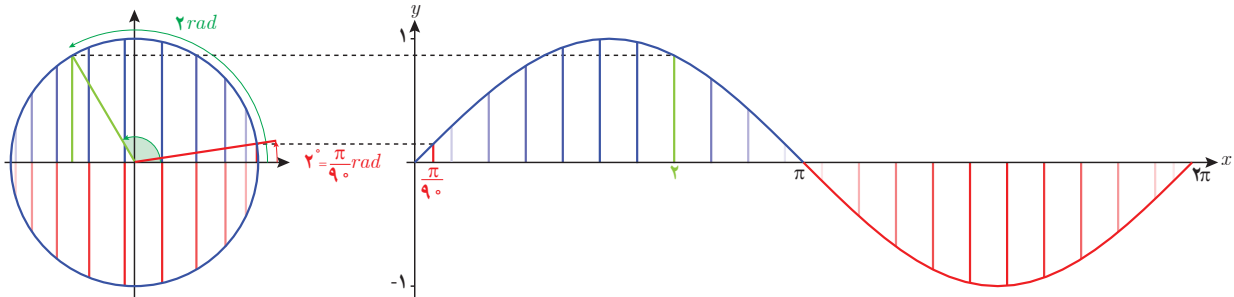
۲ جدول بالا به صورت زوج مرتب در زیر داده شده است. با توجه به جدول فوق مجموعه زوج مرتب‌ها را تکمیل و سپس نقاط به دست آمده را در دستگاه مختصات زیر پیدا کنید. آیا نقاط متناظر با زوج‌های مرتب روی منحنی داده شده قرار می‌گیرند؟ آیا این منحنی تابع است؟ (با رسم خطوط موازی محور y ‌ها بررسی کنید).

$$f = \left\{ (0, 0), \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \dots\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \dots\right), (\dots, 0), \left(\frac{7\pi}{6}, \dots\right), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), \left(\frac{11\pi}{6}, \dots\right), (2\pi, \dots) \right\}$$



۳ نمودار داده شده در سؤال قبل منحنی تابع $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ می‌باشد. با توجه به نمودار، مقدار $\sin 1$ کجای محور y ‌ها قرار می‌گیرد؟

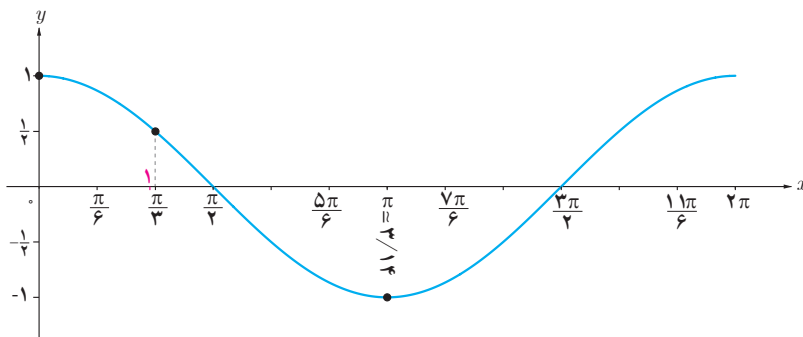
۴ در تابع $y = \sin x$ ، همیشه x را بر حسب رادیان در نظر می‌گیرند مگر آنکه صریحاً گفته شود x بر حسب درجه است یا از نماد x° استفاده شود. با توجه به ارتباط دایره مثلثاتی و نمودار تابع سینوس که در زیر داده شده، تفاوت $\sin 2^\circ$ و $\sin 2$ را بیان کنید.



فعالیت

۱ همانند فعالیت قبل، تابع $y = \cos x$ در زیر رسم شده است. مجموعه زوج‌های مرتب داده شده از این تابع را تکمیل کنید و نقاط به دست آمده را مانند نمونه بر روی نمودار نمایش دهید.

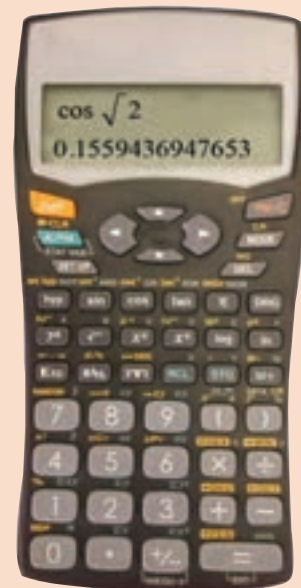
$$f = \left\{ (0, 1), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \dots\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \dots\right), (\pi, -1), \left(\frac{4\pi}{3}, \dots\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \dots\right), \left(\frac{5\pi}{3}, \dots\right), (2\pi, \dots) \right\}$$



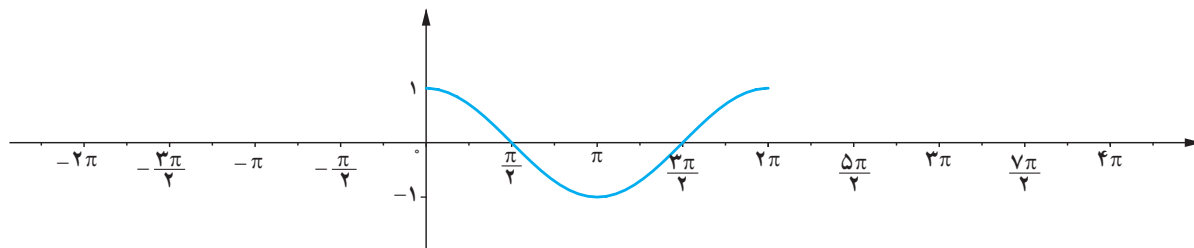
۲ در نمودار بالا ابتدا نقطه نظیر $\sqrt{2}$ رادیان را بر روی محور x بیابید و سپس مکان $\cos \sqrt{2}$ را بر روی محور y با به طور تقریبی پیدا کنید. درستی پاسخ خود را با ماشین حساب بررسی کنید.

خواندنی

در همه ماشین حساب‌های پیشرفته، برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی می‌توان از دو حالت استفاده کرد که یک حالت بر حسب درجه (DEG) و حالت دیگری بر حسب رادیان (RAD) است. هنگام استفاده از ماشین حساب باید ابتدا آن را در حالت مورد نظر قرار داد. در ماشین حساب زیر آن را در حالت رادیان قرار داده و سپس مقدار $\cos \sqrt{2}$ را حساب کرده‌اند.



۳ از درس‌های قبل می‌دانیم که $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ و نیز $\cos(-x) = \cos x$. با استفاده از این روابط مقدار تابع $y = \cos x$ را در دیگر نقاط داده شده بر روی محور x ‌ها به دست آورید و نمودار تابع را از دو طرف ادامه دهید. آیا نمودار این تابع در بازه‌های $[2\pi, 4\pi]$ و $[0, 2\pi]$ و $[-2\pi, 0]$ با هم متفاوت هستند؟



۴ با توجه به نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[-2\pi, 4\pi]$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

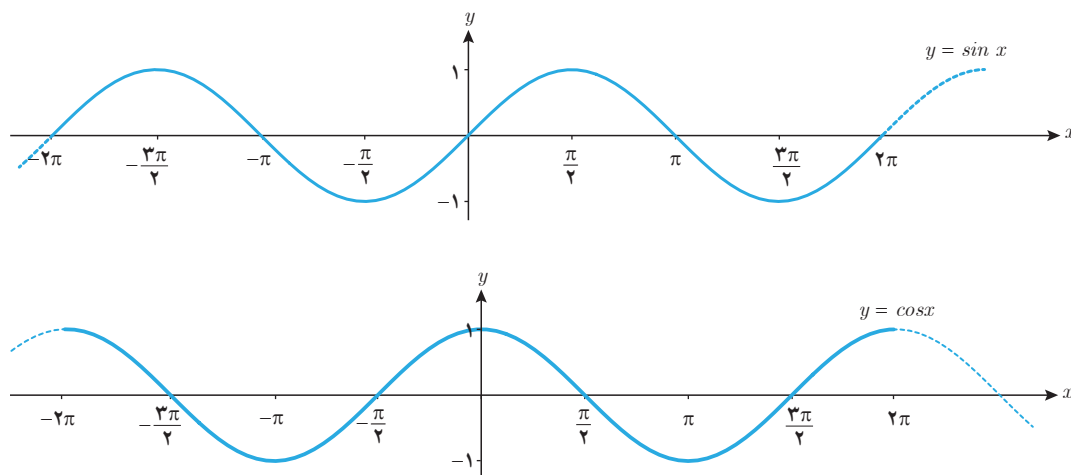
الف) آیا می‌توان بر روی محور x ‌ها عددی مانند x یافت که برای آن $\cos x = \frac{1}{3}$ باشد؟

ب) آیا می‌توان بر روی محور x ‌ها عددی مانند x یافت که برای آن $\cos x = 2$ باشد؟

پ) بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = \cos x$ در این بازه چقدر است؟

تابع‌های $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را مثلثاتی گویند. دامنه این توابع مجموعه اعداد حقیقی و برد آنها بازه $[-1, 1]$ است. گاهی به نمودار تابع $y = \sin x$ موج سینوسی و به نمودار تابع $y = \cos x$ موج کسینوسی نیز می‌گویند.

همان‌طور که در فعالیت ۲ بررسی شد تابع $y = \cos x$ در بازه‌های به طول 2π تکرار می‌شود. این وضعیت برای تابع $y = \sin x$ نیز برقرار است (چرا؟). با توجه به این ویژگی در توابع مثلثاتی بالا، می‌توان نمودار آنها را به صورت زیر رسم کرد.



درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) $\sin x$ یعنی سینوس زاویه‌ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن x درجه باشد.

ب) $\sin \sqrt{5}$ یک عدد حقیقی است.

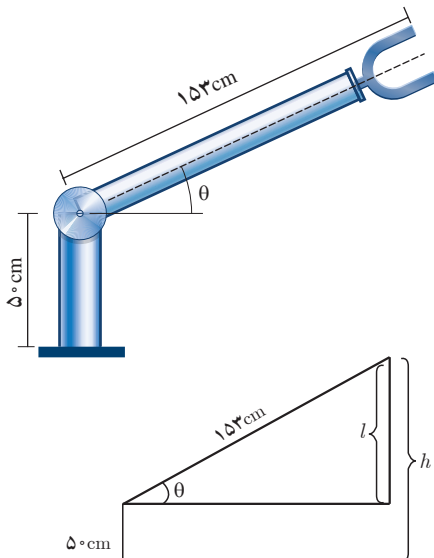
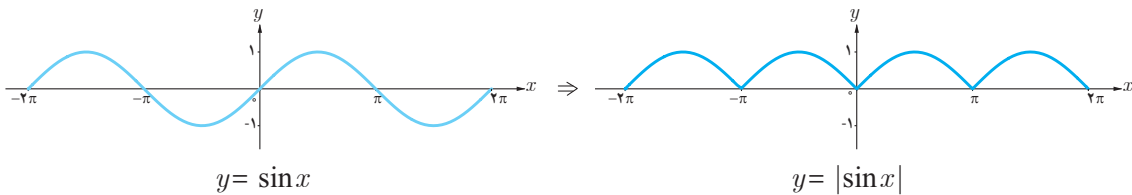
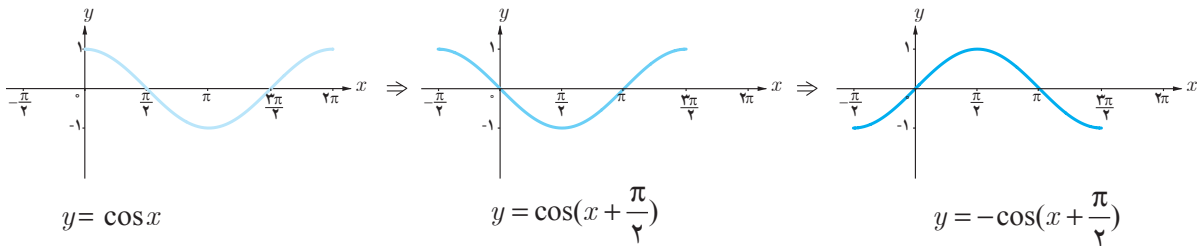
پ) $\cos 3 = \cos 3^\circ$

ت) اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ آنگاه $-1 < \cos x < 0$ است.

ث) عددی می‌توان یافت که سینوس آن برابر -2 باشد.

ج) $x = \pi$ صفر تابع $f(x) = \cos x$ است.

❁ **مثال:** با توجه به نمودار توابع مثلثاتی $y = \sin x$ و $y = \cos x$ ، نمودار توابع $y = |\sin x|$ و $y = -\cos(x + \frac{\pi}{4})$ در زیر رسم شده است.



❁ **مثال:** روبات‌ها در زمینه‌های مختلف کاربرد دارند. در طراحی انواع روبات‌ها از توابع مثلثاتی استفاده می‌شود. در شکل روبه‌رو یک روبات صنعتی را که در صنایع خودروسازی کاربرد دارد مشاهده می‌کنید. با توجه به مقادیر داده شده، ارتفاع نوک گیره روبات را از سطح زمین به کمک یک تابع مثلثاتی مدل‌سازی کنید. $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$.

❁ **حل:** کافی است وضعیت روبات را به صورت زیر ترسیم کنیم. اکنون کل ارتفاع نوک گیره از سطح زمین (h) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sin \theta = \frac{l}{153} \rightarrow l = 153 \sin \theta$$

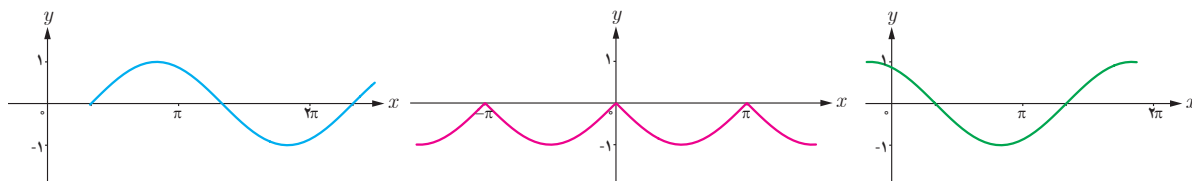
$$\Rightarrow h = 50 + l = 50 + 153 \sin \theta$$

۱ توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

پ) $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$

ب) $y = \cos(x + \frac{\pi}{6})$

الف) $y = -|\sin x|$

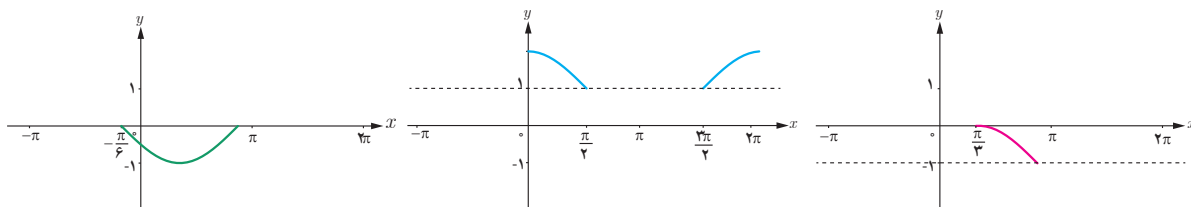


۲ در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

پ) $y = 1 + |\cos x|$

ب) $y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$

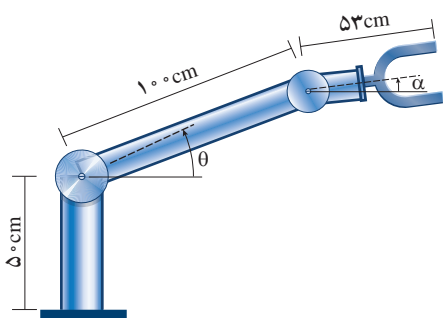
الف) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$



۳ با توجه به نمودارهای بالا در سؤال ۲، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در چه نقاطی رخ می‌دهد؟

۴ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، کدام یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در بازه $(0, \pi)$ یک به یک است؟

۵ در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیرند.



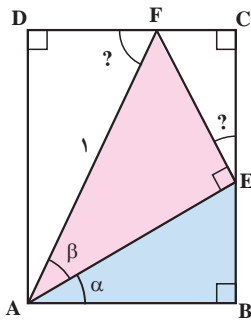
الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل‌سازی کنید. $(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$

ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع $23/5$ cm مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -3^\circ$ قرار داده است. تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

در سال گذشته با تعدادی از اتحادهای مثلثاتی مانند $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ و $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ ($\cos\alpha \neq 0$) آشنا شدید. این اتحادها تنها شامل یک زاویه هستند. اکنون در این درس، روابطی را که در آنها دو زاویه مختلف به کار رفته است فرا می‌گیرید.

فعالیت



۱ در شکل روبه‌رو، چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است. اندازه پاره خط AF برابر ۱ و زوایای α و β داده شده است. الف) با تکمیل روابط زیر اندازه $\widehat{F\hat{E}C}$ و $\widehat{A\hat{F}D}$ را برحسب α و β به دست آورید.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{F\hat{E}C} + 90^\circ + \widehat{A\hat{E}B} = 180^\circ \text{ : زاویه } E \text{ نیم صفحه است.} \\ \text{مجموع زوایای داخلی } ABE : \alpha + 90^\circ + \widehat{A\hat{E}B} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{F\hat{E}C} = \dots\dots$$

$\widehat{A\hat{F}D} = \dots\dots \Rightarrow$ اضلاع AB و DC با هم موازی و پاره خط AF به صورت مورب آن را قطع کرده است.

ب) اندازه اضلاع AD و DF از $\triangle ADF$ را با توجه به اینکه $AF = 1$ ، برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس $\triangle DFA$ بنویسید.

پ) اضلاع AE و EF از مثلث قائم‌الزاویه AEF را، که وتر آن برابر ۱ است، برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه β بنویسید.

ت) اندازه پاره خط‌های BE ، EC ، FC و AB را برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه α به دست آورید.

ث) از تساوی اضلاع روبه‌رو در مستطیل صفحه قبل روابط زیر به دست می‌آید. آنها را با توجه به قسمت‌های الف تا ث کامل کنید.

$$AD = BE + EC \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \dots\dots\dots$$

$$DF = AB - FC \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \dots\dots\dots$$

۲ توضیح دهید چرا اگر اندازه پاره خط AF برابر یک نباشد کماکان روابط فوق برقرار است.

در فعالیت فوق زوایای به کار رفته همگی تند بودند. می‌توان با استفاده از خواص توابع مثلثاتی نشان داد که این روابط برای همه زوایا برقرار است. بنابراین همواره داریم:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

همچنین با تبدیل β به $-\beta$ و استفاده از نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه می‌توان به دست آورد:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

و نیز

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

پس همواره داریم:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

❖ مثال: مقدار $\sin 75^\circ$ در زیر محاسبه شده است.

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

❖ مثال: درستی رابطه $\tan(\frac{\pi}{4} + \theta) = -\cot \theta$ را نشان دهید.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)} = \frac{\overbrace{\sin \frac{\pi}{4} \cos \theta}^1 + \cancel{\cos \frac{\pi}{4} \sin \theta}}{\cancel{\cos \frac{\pi}{4} \cos \theta} - \underbrace{\sin \frac{\pi}{4} \sin \theta}_1} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\cot \theta$$

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

۱) $\cos 15^\circ$

۲) $\tan 105^\circ$

۳) $\sin \frac{\pi}{12}$

۲ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار دقیق $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ چیست؟

ب) انتهای زاویه $\alpha + \beta$ در کدام ربع قرار می‌گیرد؟

۳ با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$