

مجموعه، الگو و دنباله



آلا داغلار یا کوه‌های رنگی در شهرستان ماه‌نشان استان زنجان



درس اول مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

درس دوم متمم یک مجموعه

درس سوم الگو و دنباله

درس چهارم دنباله‌های حسابی و هندسی

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های اعداد

انسان در طول تاریخ برحسب نیاز خود از مجموعه‌های مختلف اعداد استفاده کرده است. برخی از این مجموعه‌ها که در سال‌های قبل با آنها آشنا شدیم، به شرح زیرند:

مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

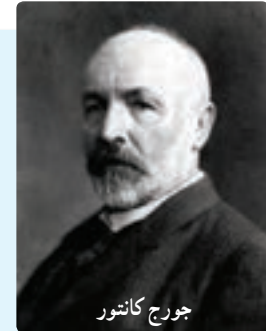
مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$

مجموعه اعدادی که بتوان آنها را به صورت $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$ نمایش داد. نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.

مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$



جورج کانتور

«مجموعه» یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که بسیاری از نظریه‌های دیگر ریاضی در یک قرن اخیر بر مبنای آن پایه‌گذاری یا سازماندهی شده‌اند. مطالعات جدی دربارهٔ مجموعه‌ها با کار جورج کانتور در سال ۱۸۷۰ آغاز شده‌است.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود رابطهٔ زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به شکل $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ برقرار است. به عبارت دیگر تمام مجموعه‌های اعدادی که تاکنون با آنها آشنا شده‌ایم، زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی‌اند. در نتیجه، هر عدد دلخواهی را که در نظر بگیریم، باید جایی روی محور اعداد حقیقی داشته باشد و همچنین هر نقطه روی این محور نشان‌دهندهٔ یک عدد حقیقی مشخص است.

کاردرکلاس

الف) مجموعه $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ چه نام دارد؟ آن را روی شکل مقابل هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیهٔ هاشورخورده بنویسید.

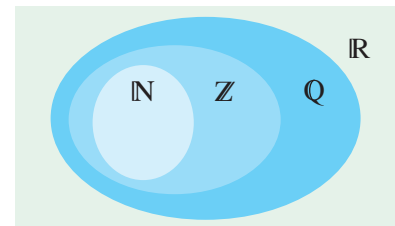
ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید.

پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.

$$\sqrt{17}, 0, 200, \frac{\pi}{4}, 2/6, 2\sqrt{5}, -\frac{25}{3}, -9$$

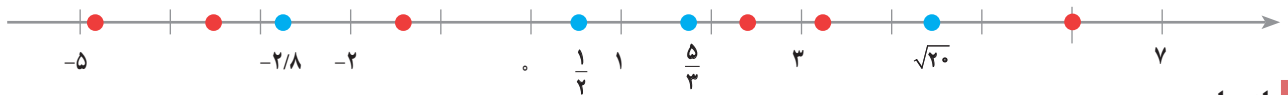
ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضا بنویسید. $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{ \dots \}$

ث) مجموعه $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ چند عضو دارد؟



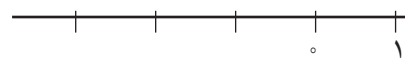
۲ هریک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام یک از این شش عدد گنگ‌اند؟ زیر آنها خط بکشید.

$$2/45, \frac{-7}{2}, 6, -4/9, \pi, -\sqrt{2}$$



بازه‌ها

در اینجا گونه دیگری از زیرمجموعه‌های \mathbb{R} را در نظر می‌گیریم. فرض کنید A مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی بین -2 و 1 به همراه خود این دو عدد باشد؛ یعنی $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$. اعضای A را روی محور زیر، با رنگ کردن مشخص کنید. آیا می‌توان تمام اعضای A را فهرست کرد؟ آیا می‌توان اولین عدد حقیقی بعد از -2 را مشخص کرد؟



چنین زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} که مشخص‌کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد را «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم. بازه‌ها در ریاضیات از اهمیت نسبتاً زیادی برخوردارند و ما هم در برخی از فصل‌های بعدی این کتاب به دفعات با آنها سر و کار خواهیم داشت. از این رو شایسته است که برای نشان دادن آنها از نماد ساده‌تری استفاده شود. بازه‌هایی مثل A که شامل هر دو نقطه انتهایی خود می‌باشد را **بازه بسته** از -2 تا 1 می‌نامیم و آن را با نماد $[-2, 1]$ نشان می‌دهیم. حال اگر نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه یعنی -2 و 1 را از A حذف کنیم، آنگاه مجموعه‌ای مانند $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$ به دست می‌آید که آن را **بازه باز** بین -2 و 1 می‌نامیم و با نماد $(-2, 1)$ نشان می‌دهیم. به طور خلاصه:

بازه بسته بین -2 و 1 : $A = [-2, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$

بازه باز بین -2 و 1 : $B = (-2, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$

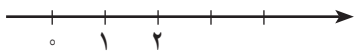
همچنین بازه‌هایی مثل $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 7\}$ که تنها شامل یکی از نقاط انتهایی خود می‌باشد را بازه‌های **نیم باز** می‌نامیم.

فعالیت

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که $a < b$ آنگاه جدول زیر را کامل کنید:

| نوع بازه | بازه | نمایش مجموعه‌ای | نمایش هندسی |
|----------|----------|--|-------------|
| باز | | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ | |
| بسته | | | |
| نیم باز | $[a, b)$ | | |
| نیم باز | $(a, b]$ | | |
| | | $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$ | |
| | | | |

گاهی تمام اعداد حقیقی مثلاً بزرگ‌تر از ۲ مورد نظر است. به‌عنوان مثال، می‌دانیم که مجموعه جواب نامعادله $2x > 4$ به صورت $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ است. اعضای C را روی محور زیر نشان دهید.



آیا می‌توانید C را به صورت یک بازه بنویسید؟ برای اینکه این مجموعه را به شکل بازه بنویسیم، از نماد $+\infty$ (بخوانید: مثبت بی‌نهایت) استفاده می‌کنیم. مجموعه C را در قالب بازه با نماد $(2, +\infty)$ نمایش می‌دهیم که یک بازه باز محسوب می‌شود. به همین ترتیب برای مجموعه‌ای مثل $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ نمایش بازه‌ای به صورت $(-\infty, 1]$ خواهد بود که یک بازه نیم باز است. توجه داریم که $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند. در سال‌های آینده با این دو نماد بیشتر آشنا خواهیم شد.

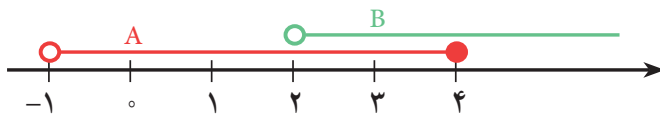
فعالیت

اگر a عدد حقیقی دلخواهی باشد، جدول زیر را کامل کنید.

| نوع بازه | بازه | نمایش مجموعه‌ای | نمایش هندسی |
|----------|----------------|-----------------------------------|-------------|
| | | $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ | |
| نیم باز | $[a, +\infty)$ | | |
| | | | |
| | $(-\infty, a)$ | | |
| | | \mathbb{R} | |
| | | | |
| | | $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$ | |

مثال

می‌خواهیم اجتماع و اشتراک دو بازه $A = (-1, 4]$ و $B = (2, +\infty)$ را به دست آوریم. نمایش هندسی هر دو بازه را مطابق شکل روی یک محور رسم می‌کنیم.



از روی شکل دیده می‌شود که $A \cup B$ برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از -1 ؛ یعنی:

$$(-1, 4] \cup (2, +\infty) = (-1, +\infty)$$

همچنین با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که $A \cap B$ برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بین ۲ و ۴ به همراه خود عدد ۴؛ یعنی:

$$(-1, 4] \cap (2, +\infty) = (2, 4]$$

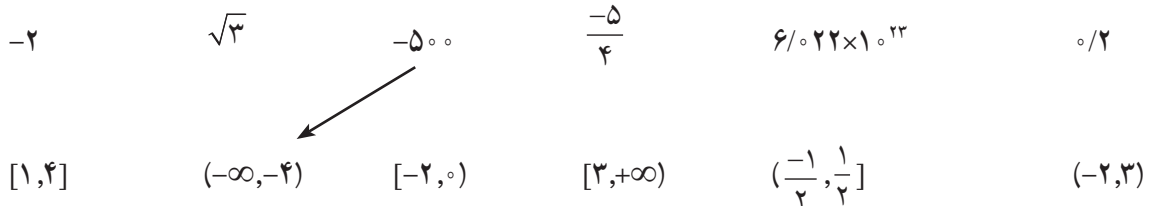
توضیح دهید که چرا $2 \notin A \cap B$.

۱) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

الف) $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{4}, 2)$ ب) $-2 \in (-2, 0]$ پ) $0 \in (-2, 0]$ ت) $-2 \in \{-2, 0\}$ ث) $-1 \in \{-2, 0\}$

ج) $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$ چ) $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2)$ ح) $\emptyset \subseteq (-17, 0]$ خ) $[2, 5) = (2, 5]$ د) $\sqrt{2} \in (0, 1)$

۲) هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه‌های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید.



۳) نمایش هندسی دو بازه $A = (-4, 2]$ و $B = (-1, 3]$ را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.



الف) $A \cap B$ ب) $A \cup B$ پ) $A - B$ ت) $B - A$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

فعالیت

فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

$A = \{ \quad \quad \quad \}$

$B = \{ \quad \quad \quad \}$

ب) A چند عضو دارد؟

پ) درباره تعداد اعضای B چه می‌توان گفت؟

مجموعه‌هایی مانند A را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، **مجموعه‌های متناهی** می‌نامیم.

با توجه به مطلب فوق، B یک مجموعه متناهی نیست؛ زیرا نمی‌توان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است. چنین مجموعه‌هایی را **مجموعه‌های نامتناهی** می‌نامیم.

کار در کلاس

۱ متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. دربارهٔ مجموعه‌های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.



جنگل‌های آمازون

آمازون که به ریه‌های زمین مشهور است، جنگل بسیار بزرگی در شمال آمریکای جنوبی است و به دلیل همین وسعت، به آن **جنگل‌های آمازون** گفته می‌شود. حدود ۶۰ درصد این جنگل در خاک برزیل قرار دارد، همچنین بخش‌هایی از آن هم در کشورهای پرو، اکوادور، گویان، کلمبیا، ونزوئلا، بولیوی و سورینام واقع شده است. در واقع این جنگل بیش از سه برابر خاک کشور ما وسعت دارد. رودخانهٔ آمازون با طول حدود ۶۵۰۰ کیلومتر به عنوان پرآب‌ترین رودخانهٔ دنیا که ۵ درصد آب شیرین جهان را در خود جای می‌دهد، نیز از دل این جنگل عبور می‌کند. نتیجهٔ یک مطالعه بزرگ که مدت ۱۰ سال به طول انجامید، نشان می‌دهد که $\frac{39}{100000000}$ اصله درخت در ۱۶۰۰۰ گونهٔ مختلف در جنگل‌های آمازون وجود دارد. با این حساب سهم هر فرد دنیا از این جنگل چند درخت می‌شود؟! با وجود این، مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون یک مجموعه متناهی محسوب می‌شود یا نامتناهی؟

| تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متناهی) | متناهی | نامتناهی | مجموعه |
|---|--------|----------|--|
| | | | مجموعه اعداد اول یک رقمی |
| | | | مجموعه انسان‌های روی زمین |
| | | | مجموعه اعداد طبیعی فرد |
| | | | مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان |
| | | | مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات |
| | | | مجموعه دانش‌آموزان مدرسه شما |
| | | | مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی |
| | | | مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون |
| | | | مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک |
| | | | مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰ |
| | | | بازه (۱, ۰) |
| | | | مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب |

۲ دو مجموعهٔ متناهی نام ببرید.

۳ دو مجموعهٔ نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیرمجموعهٔ دیگری باشد.

۴ دو مجموعهٔ نامتناهی مثل A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ بوده و $B - A$ تک عضوی باشد.

تذکر: تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را به دست آورد.



طرحی از سلول‌های عصبی مغز

- الف) $\frac{1}{3}$ عددی بین 0° و 1° است. چهار عدد گویای دیگر از بازه $(0, 1)$ بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.
- ب) آیا می‌توان بین 0° و 1° به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟
- پ) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه $(0, 1)$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
- ت) در مورد متناهی یا نامتناهی بودن \mathbb{Q} چه می‌توان گفت؟
- ث) اگر A دارای یک زیر مجموعه نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعه خواهد بود.

عدد آووگادرو

در شیمی تعداد 6.022×10^{23} عدد از هر ذره (مولکول یا اتم) را یک مول از آن ذره می‌نامند. برای درک میزان بزرگی این عدد، فرض کنیم تعداد مولکول‌های موجود در یک مول آب را که 18 گرم است، بتوانیم مولکول به مولکول بشماریم و کار شمردن هر مولکول آن هم یک ثانیه زمان ببرد. در این صورت کار شمارش نزدیک به 20 میلیون میلیارد سال به طول خواهد انجامید که این زمان حدود یک میلیون برابر عمر جهان است! به نظر شما، مجموعه مولکول‌های یک مول مشخص از آب، یک مجموعه متناهی است یا نامتناهی؟

تمرین

- ۱) فرض کنید U مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد 5 باشد.
- الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.
- ب) U متناهی است یا نامتناهی؟
- پ) یک زیر مجموعه متناهی از U بنویسید.
- ت) دو زیر مجموعه نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به طوری که $C \subseteq D$.
- ۲) متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.
- الف) مجموعه اعداد طبیعی.
- ب) مجموعه شماره‌های طبیعی عدد 36 .
- پ) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$.
- ت) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$.
- ث) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد 100 .
- ۳) دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد.
- ۴) حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست آورید:
- الف) $(-2, 5] \cup (-3, 0)$ ب) $(-\infty, 6] \cap (2, 9)$
- پ) $(3, +\infty) \cap (6, 10]$ ت) $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$
- ث) $(3, +\infty) - [2, 4)$ ج) $[2, 4) - (3, +\infty)$
- ۵) مجموعه $\mathbb{R} - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.
- ۶) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟



درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع

فرض کنیم U نشان دهنده مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره) و A مجموعه کتاب‌های خطی آن باشد. اگر مجموعه‌ای را که شامل کتاب‌های چاپی این کتابخانه است، با A' نشان دهیم، آنگاه می‌توانیم نمودار پایین صفحه را درباره کتاب‌های این کتابخانه رسم کنیم. در این مثال U را که شامل تمام کتاب‌های کتابخانه می‌باشد، مجموعه مرجع و A' را متمم مجموعه A می‌نامیم.



کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره)، در شهر مقدس قم یکی از بزرگ‌ترین کتابخانه‌های جهان اسلام است که کتاب‌های نفیس و قدیمی بسیاری را در موضوعات مختلف در خود جای داده است. این کتابخانه از نظر فراوانی نسخه‌های خطی، نخستین کتابخانه کشور و سومین کتابخانه جهان اسلام به‌شمار می‌رود. جدول زیر اطلاعات مختصری درباره تعداد کتاب‌های این کتابخانه در اختیار ما قرار می‌دهد.

| تعداد | نوع کتاب |
|-------------|---------------|
| ۴۲۰۰۰ جلد | کتاب‌های خطی |
| ۱۰۰۰۰۰۰ جلد | کتاب‌های چاپی |
| ۱۰۴۲۰۰۰ جلد | کل کتاب‌ها |



U : مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه

A : کتاب‌های خطی

A' : کتاب‌های چاپی

در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، **مجموعه مرجع** می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه $U - A$ را **متمم** A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

فعالیت

الف دو مجموعه زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$$

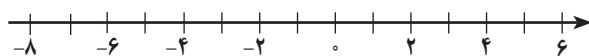
ب A را با نمایش اعضا و B را به صورت یک بازه بنویسید.

$$A = \{ \quad \}$$

$$B =$$

پ در مورد A ، اگر مجموعه مرجع را \mathbb{Z} در نظر بگیریم، A' را مشخص کنید.

ت در مورد B با فرض این که \mathbb{R} مجموعه مرجع باشد، B' را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.





نرخ بیکاری

جمعیت در سن کار در یک کشور را به عنوان مجموعه مرجع یعنی U در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم A نشان‌دهنده مجموعه افراد شاغل این کشور باشد. در این صورت A' برابر مجموعه افراد بیکار و نسبت $\frac{n(A')}{n(U)}$ بیانگر نرخ بیکاری آن کشور خواهد بود.

۱ اگر U مجموعه شامل تمام استان‌های کشورمان باشد و A مجموعه استان‌های غیر ساحلی، آنگاه A' را با نمایش اعضای آن بنویسید.

۲ فرض کنیم U مجموعه تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری شده کشور و B مجموعه اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این صورت B' چه مجموعه‌ای خواهد بود؟

۳ با فرض آنکه \mathbb{N} مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.

- $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ — $\{1, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\}$
- $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$ — $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$
- $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ — $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}$
- $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ — $\{10, 11, 12, 13, 14, \dots\}$

۴ U مجموعه مرجع و A زیرمجموعه دلخواهی از آن می‌باشد. طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

$\emptyset' =$ $U' =$ $A \cup A' =$ $A \cap A' =$

۵ الف) اگر \mathbb{Z} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، آنگاه \mathbb{N}' را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

ب) اگر \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، در این صورت \mathbb{N}' را روی محور نمایش دهید.

۶ فرض کنیم $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$. ابتدا A' و B' را بنویسید و سپس جدول‌های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$A' = \{ \quad \quad \quad \}$ $B' = \{ \quad \quad \quad \}$

| |
|---------------|
| $(A)'$ |
| $\{1, 2, 3\}$ |

$\Rightarrow (A)' = A$

| | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $A \cup B$ | $(A \cup B)'$ | $A' \cap B'$ |
| $\{ \quad \quad \quad \}$ | $\{ \quad \quad \quad \}$ | $\{ \quad \quad \quad \}$ |

$\Rightarrow \dots = \dots$

| | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $A \cap B$ | $(A \cap B)'$ | $A' \cup B'$ |
| $\{ \quad \quad \quad \}$ | $\{ \quad \quad \quad \}$ | $\{ \quad \quad \quad \}$ |

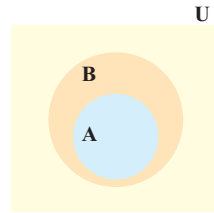
$\Rightarrow \dots = \dots$

| | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| $A - B$ | $A - (A \cap B)$ | $A \cap B'$ |
| $\{ \quad \quad \quad \}$ | $\{ \quad \quad \quad \}$ | $\{ \quad \quad \quad \}$ |

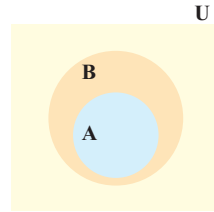
$\Rightarrow \dots = \dots = \dots$

۷ الف) فرض کنیم $A \subseteq B \subseteq U$ که در آن U مجموعه مرجع است. در نمودارهای مقابل A' و B' را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا بین A' و B' هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟

ب) اگر $U = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, b, c\}$ ، در این صورت $A \subseteq B$ می‌باشد. با به دست آوردن A' و B' نشان دهید که بین A' و B' هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است.



A' را هاشور بزنید



B' را هاشور بزنید

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

در سال گذشته دیدیم که اگر A یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه برای نشان دادن تعداد عضوهای آن از علامت $n(A)$ استفاده می‌شود. مثلاً اگر $G = \{2, 3, 5, 7\}$ در این صورت می‌توانیم بنویسیم $n(G) = 4$. در این بخش می‌خواهیم رابطه‌ای برای $n(A \cup B)$ به دست آوریم.

فعالیت

۱ یک تیم کوه‌نوردی متشکل از ۴ دانش‌آموز و ۳ دانشجوی عضو یک مؤسسه طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به طور داوطلبانه در روزهای جمعه هر هفته کوه‌های اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک‌سازی می‌کنند. اعضای دانش‌آموز این تیم مجموعه $\{آینتا، زهرا، الناز، الهام\} = A$ و اعضای دانشجوی آن مجموعه $\{فاطمه، معصومه، فرزانه\} = B$ هستند. همان‌گونه که دیده می‌شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به عبارت دیگر $A \cap B = \emptyset$.

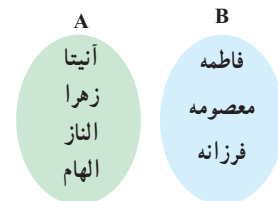


به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.

الف) اعضای $A \cup B$ را که بیانگر اعضای تیم کوه‌نوردی می‌باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$A \cup B =$

| $n(A)$ | $n(B)$ | $n(A \cup B)$ | $n(A \cap B)$ |
|--------|--------|---------------|---------------|
| ۴ | | | |



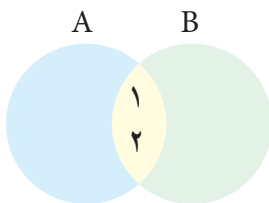
ب) تعداد عضوهای $A \cup B$ چه رابطه‌ای با $n(A)$ و $n(B)$ دارد؟ این رابطه را به صورت یک فرمول بنویسید.

ب) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه A و B برقرار است؟

۲ الف) مجموعه شماره‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب A و B می‌نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

$A = \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \} \Rightarrow n(A) = 6$
 مجموعه شماره‌های عدد ۲۸
 $B = \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \} \Rightarrow n(B) = \dots$
 مجموعه شماره‌های عدد ۳۰
 $A \cap B = \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \} \Rightarrow n(A \cap B) = \dots$
 شماره‌های مشترک ۲۸ و ۳۰
 $A \cup B = \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \} \Rightarrow n(A \cup B) = \dots$
 جدول زیر را کامل کنید.

| n(A) | n(B) | n(A ∩ B) | n(A ∪ B) |
|------|------|----------|----------|
| ۶ | | | |



پ) چرا رابطه‌ای را که در فعالیت (۱) به دست آوردید؛ یعنی $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ در این مثال برقرار نیست؟

ت) با تکمیل نمودار مقابل، سعی کنید رابطه درست برای $n(A \cup B)$ را حدس بزنید.

همان‌طور که دیدیم، اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به نمودار فوق، در مورد علت درستی این رابطه با دوستان خود بحث کنید.

کاردر کلاس



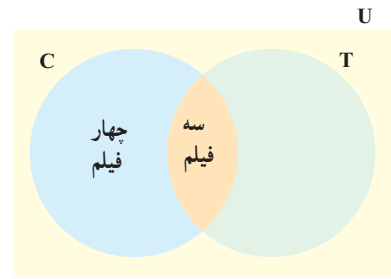
۱ یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که:
 الف) پویانمایی یا طنزند.
 ب) غیر پویانمایی و غیر طنزند.

روش اول حل: مجموعه شامل تمام فیلم‌ها را با U، مجموعه فیلم‌های پویانمایی را با C و مجموعه فیلم‌های طنز را با T نشان می‌دهیم. جاهای خالی را پر کنید و جواب‌ها را بیابید.

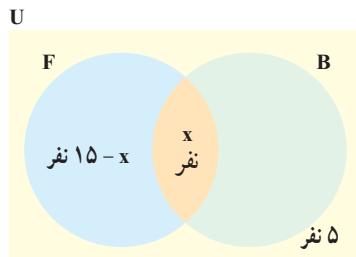
الف) $n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = \dots + \dots - \dots = \dots$

ب) $n(C \cup T)' = n(U) - n(C \cup T) = \dots - \dots = \dots$

روش دوم حل: در نمودار ون مقابل، دو مجموعه C و T سطح درون U را به چهار ناحیه جداگانه تقسیم کرده‌اند که عدد مربوط به دوتا از نواحی نوشته شده است. با نوشتن اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت‌های (الف) و (ب) را بیابید.



۲ در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.
روش اول حل: با تکمیل نمودار زیر مقدار x را بیابید.



روش دوم حل: چون ۵ نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نیستند، پس $n(B \cup F) = 20$. حال با نوشتن فرمول $n(B \cup F)$ می‌توان $n(B \cap F)$ را به دست آورد.

تمرین

۱ IR را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.

(الف) $A = [-2, 3]$ (ب) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ (پ) $C = (0, +\infty)$ (ت) $D = (-\infty, 1]$

۲ IN را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.
الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.
ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.
پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

۳ اگر $n(A) = 15$ ، $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cup B) = 30$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

۴ فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که $n(U) = 100$ ، $n(A) = 60$ ، $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$ مطلوب است:

(الف) $n(A \cup B)$ (ب) $n(A \cap B')$ (پ) $n(A' \cap B)$ (ت) $n(A' \cap B')$

۵ در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:
 الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.
 ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.



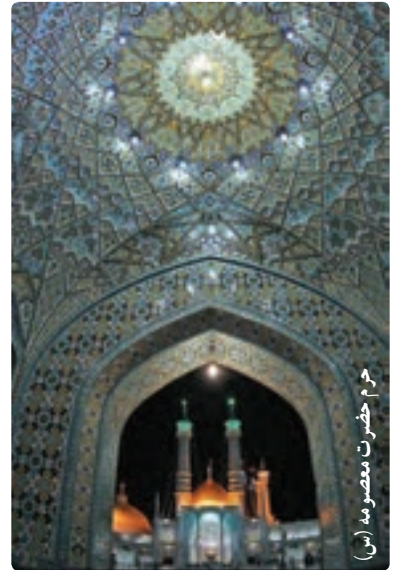
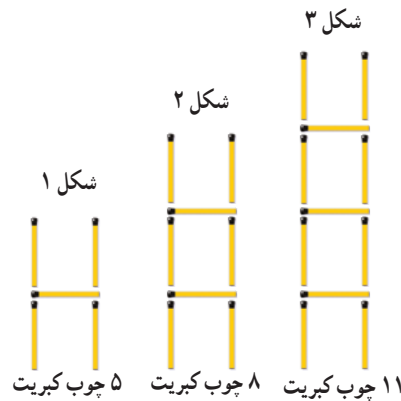
۶ در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:
 الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.
 ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.
 پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.
 ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.

درس سوم: الگو و دنباله

الگو

مثال

به شکل‌های زیر و تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید.

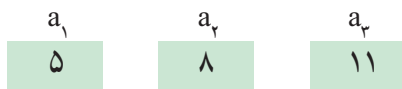


دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به عنوان نمونه، پیدایش شبانه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه‌ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی‌های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح‌های روی یک گل آفتابگردان، شکل‌های هندسی روی یک سطح کاشی کاری شده یا ماریچج‌های روی میوه آناناس توجه شما را به خود جلب کرده باشند. به طور کلی می‌توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد.

از طرف دیگر یکی از رسالت‌های مهم ریاضیات، مدل‌سازی کردن پدیده‌های طبیعی و بی‌بردن به الگوهای نهفته در آنهاست. اهمیت این موضوع به قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارت است از **علم مطالعه الگوها**.

| | | | | | | | |
|---------------------------|---------|---------|----------|-----|-----|-----------|-----|
| شماره شکل: n | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ... | n | ... |
| تعداد چوب کبریت‌ها: a_n | ۵ | ۸ | ۱۱ | ... | ... | ... | ... |
| رابطه بین n و a_n | $a_1=5$ | $a_2=8$ | $a_3=11$ | ... | ... | $a_n=...$ | ... |

به عنوان مثال ملاحظه می‌شود که، «تعداد چوب کبریت‌های شکل اول برابر ۵ است» که این مطلب را به طور خلاصه به صورت $a_1=5$ نشان داده‌ایم (می‌خوانیم: a اندیس ۱ برابر ۵). عبارت‌های a_1 ، a_2 و a_3 متغیرهای اندیس دار^۱ نامیده می‌شوند که مقادیر آنها به ترتیب ۵، ۸ و ۱۱ است. به این اعداد جملات الگو هم گفته می‌شود. پس در واقع، عدد ۵ جمله اول الگو است؛ ۸ جمله دوم آن و به همین ترتیب الی آخر.



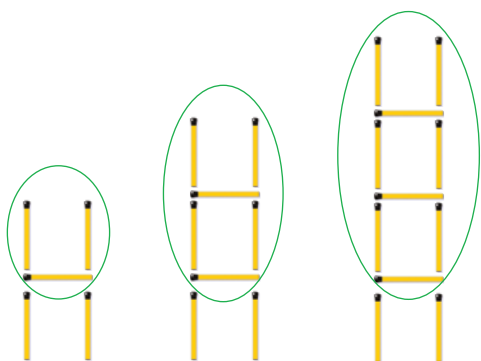
الف با این نمادگذاری، a_n نشان دهنده چیست و مقدار آن چقدر است؟

ب a_n به چه معناست؟

پ آیا می‌توانید حاصل a_n را بر حسب n به دست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام دهید.

۱- در سال‌های گذشته با متغیرهایی مثل x و y ، z سروکار داشتیم که اسم آنها تک حرفی بود؛ در حالی که نام متغیرهای اندیس دار که در اینجا به کار می‌بریم، دو بخشی است. پس تفاوت این دو نوع متغیر، تنها در شکل نام گذاری آنهاست و از نظر ماهیت، تفاوتی با هم ندارند.

۱ آیدا برای به دست آوردن حاصل a_n در مثال بالا، شکل های الگو را به صورت روبه رو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار a_5 و a_n را به دست آورید.



$$a_1 = 1(2) + 2$$

$$a_2 = 2(2) + 2$$

$$a_3 = 3(2) + 2$$

$$a_4 = 4(2) + 2$$

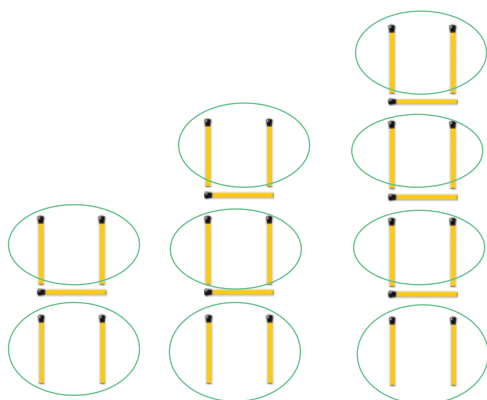
...

$$a_5 =$$

...

$$a_n =$$

۲ آيسا روش ديگري را به كار برد. او تعداد چوب کبريت های افقی و عمودی در هر شکل را به طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار a_n دست یابد. مقدار حاصل برای a_n از این روش را در جای مشخص شده بنویسید.



$$a_1 = 1 + 2(2)$$

$$a_2 = 2 + 3(2)$$

$$a_3 = 3 + 4(2)$$

$$a_4 = 4 + 5(2)$$

...

$$a_5 = 10 + (10 + 1)2$$

...

$$a_n =$$

چوب های عمودی چوب های افقی

۳ آیا شما راه دیگری را برای به دست آوردن حاصل a_n می دانید؟

۴ همان طور که در قسمت های (۱) و (۲) دیدیم، آیدا و آيسا مقدار a_n را به ترتیب به صورت های $a_n = 3n + 2$ و $a_n = n + (n+1)(2)$ به دست آوردند. جواب آيسا را ساده کنید تا به شکل جواب آیدا درآید.

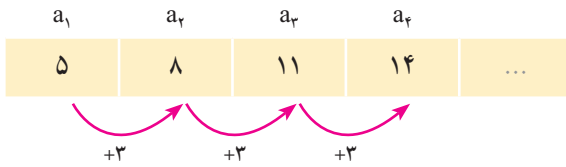
۵ به کمک رابطه $a_n = 3n + 2$ تعداد چوب کبريت های شکل بیستم را بیابید.

۶ با استفاده از رابطه $a_n = 3n + 2$ مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبريت است.

تذکر: در مثال بالا دیدیم که a_n بیانگر تعداد چوب کبريت های شکل n ام است. $a_n = 3n + 2$ را جمله عمومی الگو می نامیم؛ چرا که این رابطه در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می کند و به کمک آن می توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد. به عبارت دیگر، در اختیار داشتن جمله عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگو است.

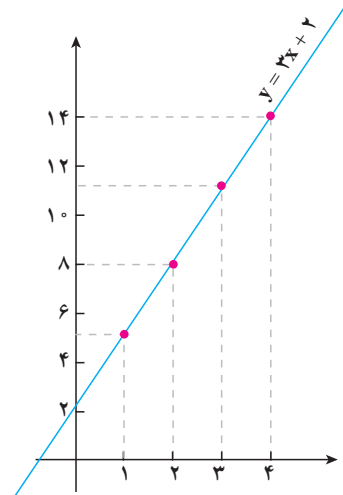
الگوی خطی

در الگوی مثال قبل دیدیم که هر جمله دقیقاً ۳ واحد بیش از جمله قبل از خودش بود.



| n | a_n | (n, a_n) |
|-----|-------|------------|
| ۱ | ۵ | (۱, ۵) |
| ۲ | ۸ | (۲, ۸) |
| ۳ | ۱۱ | (۳, ۱۱) |
| ۴ | ۱۴ | (۴, ۱۴) |
| . | . | . |
| . | . | . |
| . | . | . |

چنین الگوهایی را که در آنها اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت است، الگوهای خطی می‌نامیم. برای بی بردن به دلیل این نام گذاری، ستون سوم جدول مقابل را در نظر می‌گیریم. اگر این نقاط را در صفحه مختصات مشخص کنیم، همگی آنها روی خط $y=3x+2$ قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر مختصات تمام این نقاط در معادله خط گفته شده صدق می‌کند. شباهت بین معادله خط یعنی $y=3x+2$ و جمله عمومی الگو یعنی $a_n=3n+2$ اتفاقی نیست. عدد ۳ که در واقع اختلاف بین جملات متوالی الگو بود، در معادله خط به عنوان شیب خط ظاهر شده است که این مطلب همواره درست است.



به طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آنها به صورت $t_n = an + b$ است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

دیدیم که در یک الگوی خطی با جمله عمومی $t_n = an + b$ ، میزان تغییر جملات متوالی برابر a بود. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جمله متوالی در این الگوی خطی برابر ضریب n است. به عنوان مثال در یک الگوی خطی با جمله عمومی $t_n = -4n + 15$ ، هر جمله نسبت به جمله قبل از خودش ۴ واحد کاهش می‌یابد:

۱۱, ۷, ۳, -۱, -۵, -۹, ...

مثال

در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

حل: فرض کنیم جمله عمومی به صورت $C_n = an + b$ باشد. پس داریم:

$$C_4 = 17 \Rightarrow a(4) + b = 17$$

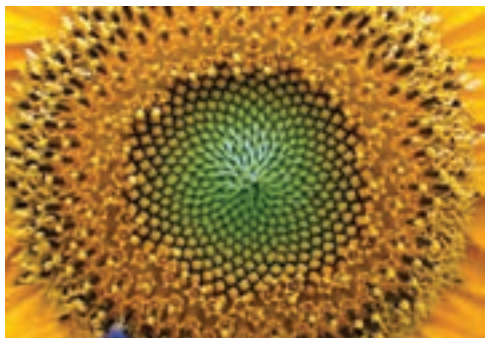
$$C_{10} = 41 \Rightarrow a(10) + b = 41$$

$$\underline{6a = 24} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 1$$

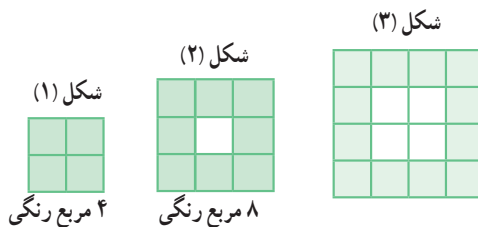
پس $C_n = 4n + 1$. بنابراین جملات الگو به صورت زیر خواهند بود:

۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ۲۱, ۲۵, ۲۹, ۳۳, ۳۷, ۴۱, ۴۵, ...





۱ شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.



| | | | | | |
|-----------------------------|-----------|---------|-----|-----|-----|
| n : شماره شکل | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
| b_n : تعداد مربع های رنگی | ۴ | ۸ | ... | ... | ... |
| رابطه بین n و b_n | $b_1 = 4$ | $b_2 =$ | ... | ... | ... |



۲ توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می شود.

۳ با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار a در رابطه $b_n = an + h$ را بیابید و پس از حدس زدن مقدار h، حاصل b_n را به دست آورید.

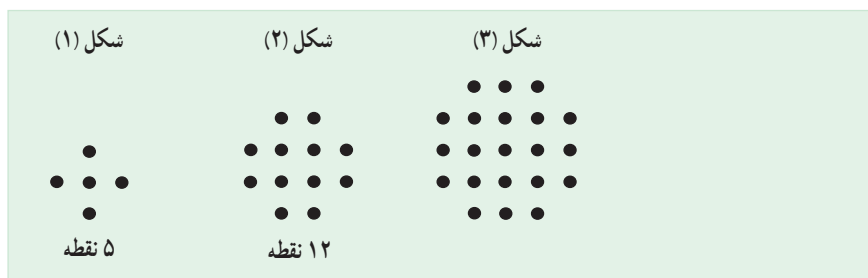
۴ شکل شماره ۲۵ دارای چند مربع رنگی است؟

۵ در چه مرحله ای از الگوی بالا، تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ است؟

الگوهای غیر خطی

فعالیت

۱ در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.

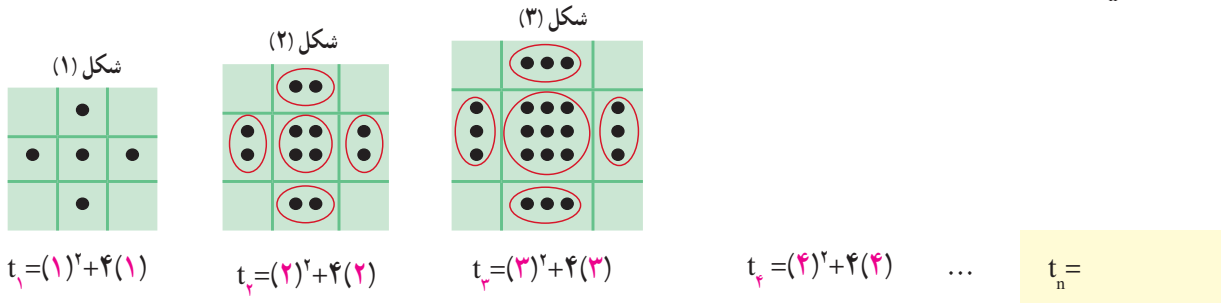


| | | | | | |
|-----------------------|-----------|---------|-----|-----|-----|
| n : شماره شکل | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
| t_n : تعداد نقطه ها | ۵ | ۱۲ | ... | ... | ... |
| رابطه بین n و t_n | $t_1 = 5$ | $t_2 =$ | ... | ... | ... |

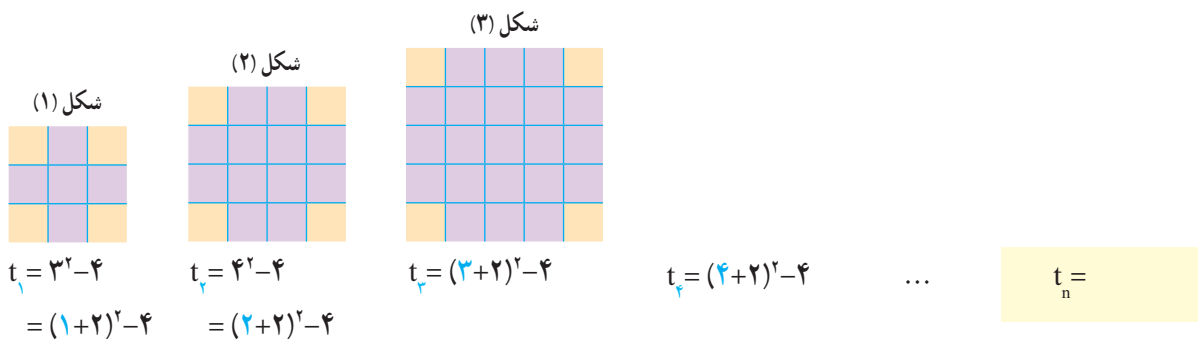
۲ آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟



۳ امیررضا برای یافتن جمله عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به صورت زیر دسته بندی کرد. از شکل های امیررضا کمک بگیرید و مقدار t_n را بیابید.



۴ امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به صورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این شکل ها مقدار t_n را بنویسید.



۵ نشان دهید که دو مقدار به دست آمده برای t_n در دو قسمت قبلی، برابرند.

۶ آیا شما روش دیگری برای یافتن t_n می شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

دنباله

در بخش قبل برای برخی الگوهای هندسی داده شده، یک الگوی عددی نظیر کردیم. به عنوان نمونه در فعالیت قبل، تعداد نقاط مربوط به شکل های متوالی الگو به صورت زیر بود:

۵, ۱۲, ۲۱, ۳۲, ۴۵,

این آرایش از اعداد، مثالی از یک دنباله است.

هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار می گیرند، یک دنباله می نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می شوند.

توجه داریم که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند. مشابه صفحات قبل، جمله اول این دنباله را با t_1 ، جمله دوم را با t_2 و به همین ترتیب جمله n ام یا جمله عمومی آن را با t_n نمایش می‌دهیم. پس:

$$t_1 = 5, t_2 = 12, t_3 = 21, \dots, t_n = n^2 + 4n, \dots$$

گفتنی است که این دنباله یک دنباله درجه ۲ نامیده می‌شود؛ زیرا جمله عمومی آن یک چند جمله‌ای درجه دوم است.

کار در کلاس

۱ دو دنباله دلخواه مثال بزنید.

۲ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

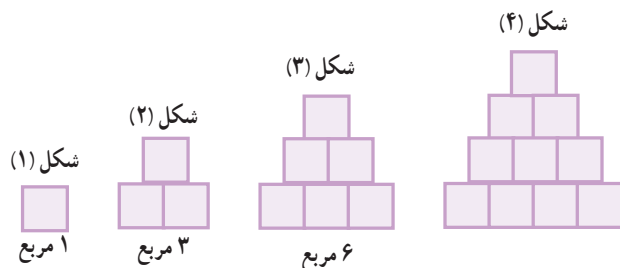
الف) $a_n = n^2 - 1$: ۰, ۳, ..., ۱۵, ۲۴

ب) $b_n = -n + 4$: ۳, ۲, ۱, ۰, ..., -۲

ج) $c_n = -13 + 2n$: -۱۱, ..., -۷, ..., -۳

۳ در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید یک جمله عمومی برای دنباله نیز حدس بزنید.

| t_1 | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 | t_6 | t_7 | ... | t_n | ... |
|-------|------------|----------------|---------------|-------|-------|-------|-----|-------|-----|
| -۱ | -۲ | -۳ | -۴ | | | | ... | -n | ... |
| ۱ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{7}$ | | | | ... | | ... |
| ۱ | ۴ | ۹ | ۱۶ | | | | ... | | ... |
| ۰/۱ | ۰/۰۱ | ۰/۰۰۱ | ۰/۰۰۰۱ | | | | ... | | ... |
| -۱ | ۸ | -۲۷ | ۶۴ | | | | ... | | ... |
| ۵ | ۱۸ | ۳۱ | ۴۴ | | | | ... | | ... |
| -۲ | ۱ | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | | | | ... | | ... |
| ۱ | ۲ | ۴ | ۷ | | | | ... | | ... |
| ۳ | ۱ | ۴ | ۱ | ۵ | | | ... | | ... |
| ۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۵ | | | ... | | ... |
| ۲ | ۳ | ۵ | ۷ | | | | ... | | ... |

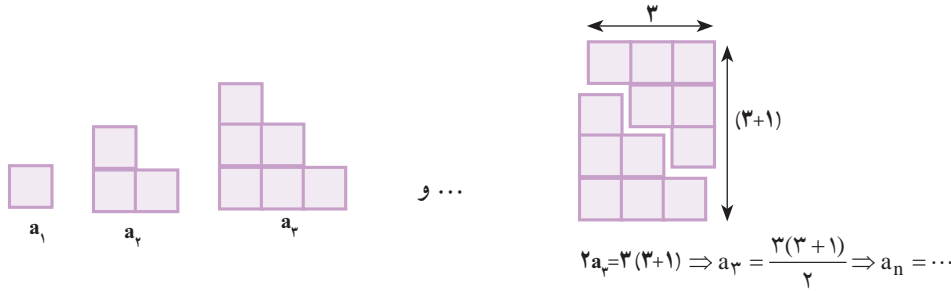


۴ الگوی مقابل را در نظر بگیرید.

الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ چرا؟

پ) شکل‌های الگوی صفحه قبل را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم. با دقت در تصویر زیر سعی کنید حاصل a_n را بر حسب n به دست آورید.



ت) به کمک مرحله قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n =$$

تمرین

۱) به الگوی روبه‌رو توجه کنید.



الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره آن را مشخص کنید.

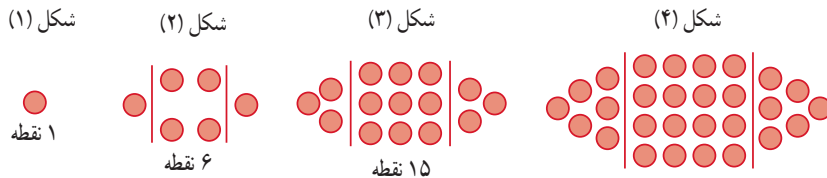
ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید.

پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چند است؟

۲) الگوی زیر را در نظر بگیرید.



الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

۳) جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

الف) $a_n = 4n$ ب) $b_n = 3n + 1$ پ) $c_n = n^2 + 2$ ت) $d_n = n^2 + n$

۴) برای هر یک از دنباله‌های درجه دو زیر جمله عمومی را به دست آورید و سپس برای هر کدام، یک الگوی هندسی نظیر کنید.

الف) $5, 8, 13, 20, 29, \dots$ ب) $5, 12, 22, 35, 51, \dots$

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله حسابی

در صفحات قبل، مثال‌هایی از الگوهای عددی خطی ارائه شد. نام دیگر این گونه الگوهای عددی، دنباله‌های حسابی است. به عبارت دیگر:

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گویند.

شعاعیت



۱ سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره سوم میلادی به بعد به صورت زیر است که جملات یک دنباله حسابی‌اند.

۲۰۰۰, ۲۰۰۴, ۲۰۰۸, ۲۰۱۲, ۲۰۱۶, ۲۰۲۰,

الف) جمله اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید. $t_1 = \square$, $d = \square$

ب) نهمین دوره المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟

پ) با تکمیل جدول زیر، جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.

| | | | | | | |
|-------|---------------|---------------|---------------|-----|---------------------|-----|
| t_1 | t_2 | t_3 | t_4 | ... | t_n | ... |
| ۲۰۰۰ | $۲۰۰۰ + ۱(۴)$ | $۲۰۰۰ + ۲(۴)$ | $۲۰۰۰ + ۳(۴)$ | ... | $۲۰۰۰ + (\dots)(۴)$ | ... |

ت) بیست و چهارمین دوره المپیک در هزاره سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد؟

$t_{24} = \dots$

۲ با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جمله عمومی یک دنباله حسابی را به دست آورید.

| | | | | | | | | |
|-------|------------|------------|------------|-------|-------|-----|------------------|-----|
| t_1 | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 | t_6 | ... | t_n | ... |
| t_1 | $t_1 + 1d$ | $t_1 + 2d$ | $t_1 + 3d$ | | | ... | $t_1 + (\dots)d$ | ... |

$\xrightarrow{+d}$ $\xrightarrow{+d}$ $\xrightarrow{+d}$

همان طور که مشاهده شد،

جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدر نسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

کار در کلاس

۱ در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدرنسبت، سه جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر کدام را به دست آورید.

(الف) $5, 10, 15, 20, \square, \square, \square, \dots$, $d =$, $a_n =$

(ب) $1, 3, 5, 7, \square, \square, \square, \dots$, $d =$, $b_n =$

(پ) $5, 9, 13, 17, \square, \square, \square, \dots$, $d =$, $c_n =$

(ت) $13, 7, 1, -5, \square, \square, \square, \dots$, $d =$, $d_n =$

۲ A و B دو شرکت عرضه کننده سیم کارت‌های تلفن همراه با شرایط زیرند.

سیم کارت‌های شرکت B
 هزینه ثابت ماهانه: ۳۰۰۰ تومان
 هزینه هر دقیقه مکالمه: ۲۰ تومان

سیم کارت‌های شرکت A
 هزینه ثابت ماهانه: ۲۰۰۰ تومان
 هزینه هر دقیقه مکالمه: ۳۰ تومان



فرض کنیم a_n نشان دهنده هزینه کل n دقیقه مکالمه ماهانه از طریق سیم کارت شرکت A و b_n هزینه مشابه برای استفاده از سیم کارت شرکت B باشد.
 الف) مقدار a_n و b_n را بر حسب n بنویسید.
 ب) جدول زیر را کامل کنید.

| | | | | | |
|--------------------------------|------|------|-----|-----|-----|
| n : زمان مکالمه ماهانه (دقیقه) | ۱ | ۴۰ | ۶۰ | ۱۱۰ | ۱۶۰ |
| a_n : هزینه سیم کارت A | ۲۰۳۰ | ۳۲۰۰ | ... | ... | ... |
| b_n : هزینه سیم کارت B | ... | ۳۸۰۰ | ... | ... | ... |

پ) آیا a_n و b_n هر کدام می‌توانند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشند؟ چرا؟
 اگر جواب مثبت است، قدرنسبت هر یک را مشخص کنید.
 ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵۰ دقیقه با تلفن همراه مکالمه می‌کنند. به هر یک از آنها کدام سیم کارت را پیشنهاد می‌کنید؟ چرا؟

در دنبالهٔ حسابی زیر جمله شانزدهم را به دست آورید. $4, 11, 18, 25, \dots$
 حل: آرتین و آرکان این مثال را به روش‌های زیر حل کرده‌اند. شما کدام روش را می‌پسندید؟

آرتین: از جمله عمومی دنباله حسابی استفاده می‌کنیم:

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

$$t_{16} = t_1 + 15d$$

$$= 4 + (15)(7)$$

$$= 109$$

آرکان: یک الگوی خطی با قدرنسبت ۷ داریم. پس

$$t_n = 7n + b$$

$$t_1 = 7(1) + b$$

$$4 = 7 + b \Rightarrow b = -3$$

جمله عمومی $t_n = 7n - 3$

$$t_{16} = 7(16) - 3$$

$$t_{16} = 109$$


سوزن‌دوزی — سیستان و بلوچستان

کار در کلاس

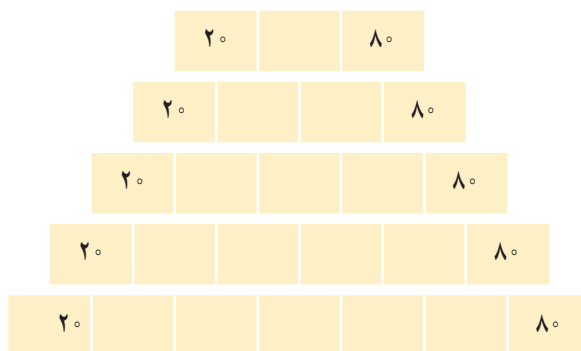
۱ الف) یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بزنید که جملهٔ چهارم آن ۱۰ باشد.
 ب) یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت منفی مثال بزنید که جملهٔ چهارم آن ۱۰ باشد.
 پ) دنباله‌ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جملهٔ مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.

۲ الف) بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند. در این حالت می‌گوییم بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطهٔ حسابی درج کرده‌ایم.
 حل: با فرض اینکه ۱۸ جمله اول باشد، قدرنسبت را به دست آورید و جدول را کامل کنید.

$$\begin{cases} t_1 = 18 \\ t_5 = 62 \end{cases} \Rightarrow t_1 + 4d = 62 \Rightarrow d =$$

| | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| t_1 | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 |
| ۱۸ | | | | ۶۲ |

ب) بین ۲۰ و ۸۰ به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطهٔ حسابی درج کنید.



پویانمایی روی سفال

تمرین

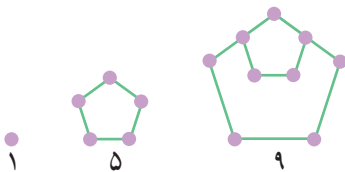
۱ از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جمله بیست و یکم را بیابید.

- (الف) $۳, ۱۰, ۱۷, ۲۴, \dots$ (ب) $۱, ۲, ۴, ۸, \dots$
 (پ) $\sqrt{۳}, ۲\sqrt{۳}, ۳\sqrt{۳}, ۴\sqrt{۳}, \dots$ (ت) $۱۰, ۷, ۴, ۱, \dots$
 (ث) $\frac{۲}{۵}, \frac{۳}{۵}, \frac{۴}{۵}, ۱, \dots$ (ج) $۲, ۲, ۲, ۲, \dots$

۲ در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

۳ در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

۴ (الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.
 (ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.
 (پ) جمله چندم این دنباله ۳۹۷ است؟



- ۵ (الف) واسطه حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟
 (ب) واسطه حسابی بین ۲۰ و ۳۰ چه عددی است؟
 (پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶ مسئله زیر در پاپیروس رایند آمده است. آن را حل کنید.
 « ۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد».



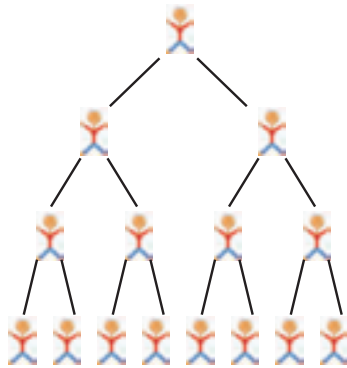
بخشی از پاپیروس رایند

قدیمی‌ترین کتاب ریاضی جهان

تاریخ تقریبی پاپیروس رایند (یا احمس) سال ۱۶۵۰ قبل از میلاد است. این پاپیروس یک متن ریاضی می‌باشد که تا حدودی ماهیت یک کتاب راهنما را دارد و شامل ۸۵ مسئله به خط هیراتی است. احمس کاتب، آن را از روی یک اثر قدیمی‌تر نسخه‌برداری کرده است. این پاپیروس در سال ۱۸۵۸ میلادی به وسیله مصرشناس اسکاتلندی، هنری رایند، در مصر خریداری شد و سپس به موزه بریتانیا منتقل شد. پاپیروس‌های رایند (۱۶۵۰ ق.م.) و مسکو (۱۸۵۰ ق.م.) از منابع اصلی اطلاعات ما درباره ریاضیات مصر باستان هستند. پاپیروس رایند در سال ۱۹۲۷ منتشر شد. این پاپیروس حدود $۵/۵$ متر طول و ۳۰ سانتی‌متر عرض دارد.

۱- Ahmes

۲- A. Henry Rhind



دنباله هندسی

علی به بیماری آنفولانزا مبتلا شده است. روز شنبه چند تن از دوستانش بدون آنکه ماسک زده باشند، به عیادت او آمدند. در این زمان ویروس آنفولانزا از راه تنفس وارد بدن امید و محسن می‌شود؛ چرا که آنها روز یکشنبه مبتلا به این بیماری شدند. اگر پیشگیری انجام نشود و موارد بهداشتی مراعات نگردد، پیش‌بینی می‌شود که انتشار ویروس تا مدتی با همین الگو ادامه یابد؛ یعنی امید و محسن در روز اول بیماری خود، هر کدام ویروس را به ۲ نفر دیگر منتقل کنند؛ به طوری که روز دوشنبه ۴ نفر جدید از طریق آنها مبتلا شوند و این روند ادامه پیدا کند.

فعالیت

۱ جدول مقابل را کامل کنید و t_n را بیابید.

۲ در روز دهم چند فرد جدید مبتلا می‌شوند؟

۳ در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می‌شوند؟

۴ در روز چندم تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفولانزا مبتلا می‌شوند، برابر ۱۶۳۸۴ نفر می‌شود.

در مثال بالا می‌توانیم تعداد مبتلایان جدید هر روز را به صورت دنباله زیر بنویسیم:

۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲,

این دنباله یک دنباله حسابی نیست؛ چرا که تفاضل جملات متوالی آن ثابت نیست، بلکه نسبت تقسیم هر دو جمله متوالی آن برابر عددی ثابت است.

$$\dots = \frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$$

اینگونه دنباله‌ها را دنباله‌های هندسی می‌نامیم. یعنی:

| روز: n | t_n : تعداد افراد جدیدی که در روز n ام مبتلا می‌شوند |
|----------|--|
| ۱ | (امید و محسن) ۲ |
| ۲ | $2 \times 2 = 2^2$ |
| ۳ | $4 \times 2 = 2^3$ |
| ۴ | $8 \times 2 =$ |
| ۵ | ... |
| ۶ | ... |
| ⋮ | ⋮ |
| n | $t_n =$ |

دنباله هندسی، دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. جمله اول هم باید غیرصفر باشد.

فعالیت

در حالت کلی در یک دنباله هندسی، اگر جمله اول t_1 و قدرنسبت r باشد، جملات آن به شکل زیر خواهند بود. جدول را تکمیل کنید.

| | | | | | | | |
|-------|------------|------------|------------|------------|-----|-------|-----|
| t_1 | t_2 | t_3 | t_4 | t_5 | ... | t_n | ... |
| t_1 | $t_1 r$ | $t_1 r^2$ | | | ... | | ... |
| | $\times r$ | $\times r$ | $\times r$ | $\times r$ | | | |

با دقت در الگوی به کار رفته در جملات بالا دیده می‌شود که :

جمله n ام دنباله هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن جمله اول و r قدرنسبت می‌باشد ($t_1, r \neq 0$).

کار در کلاس

۱) نرگس و نگار برای محاسبه هفتمین جمله دنباله هندسی $9, 3, 1, \dots$ روش‌های مقابل را به کار برده‌اند. کدام یک از آنها این مثال را درست حل کرده‌اند؟ توضیح دهید.

| نگار | نرگس |
|---|-----------------------|
| $r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ | $r = \frac{9}{3} = 3$ |
| $t_7 = 9\left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$ | $t_7 = 9(3)^{7-1}$ |
| $= \frac{1}{81}$ | $= 6561$ |

۲) در دنباله‌های هندسی زیر، قدرنسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید. سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

الف) a_1 $2, 6, 18, 54, \boxed{162}, \boxed{486}, \dots, a_n = 2 \times 3^{n-1}$
 $\times 3 \quad \times 3 = r$

ب) $5, 10, 20, 40, \boxed{}, \boxed{}, \dots, b_n =$

پ) $6, -60, 600, -6000, \boxed{}, \boxed{}, \dots, c_n =$

ت) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \boxed{}, \boxed{}, \dots, d_n =$

۳) الف) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. در این حالت می‌گوییم ۱۲ یک **واسطه هندسی** بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به جز ۱۲ چه عدد دیگری را می‌توان در نظر گرفت؟

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_3 = 48 \Rightarrow t_1 r^2 = 48 \Rightarrow \dots \Rightarrow r = \dots \end{cases}$$

| | | |
|---|--|----|
| 3 | | 48 |
|---|--|----|

ب) بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟

| | | | | |
|---|--|--|--|----|
| 3 | | | | 48 |
|---|--|--|--|----|

پ) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.

| | | |
|----|--|-------|
| 10 | | 4000 |
| 10 | | 80000 |
| 4 | | 972 |



۱ از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

(الف) $۷, ۲۸, ۱۱۲, ۴۴۸, \dots$

(ب) $۲\sqrt{۵}, ۴\sqrt{۵}, ۶\sqrt{۵}, ۸\sqrt{۵}, \dots$

(پ) $۱, \frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{-۱}{۸}, \dots$

(ت) $۵, ۵, ۵, ۵, \dots$

۲ چند دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{۴}{۵}$ می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

۳ درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.
(الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.

(ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

۴ علی دو چرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دو چرخه دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

(الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دو چرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

(ب) قیمت دو چرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

۵ حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید. $۲, ۴, ۸, \dots$

۶ جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

۷ بنا بر آمار منتشر شده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جاده‌ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان‌دهنده حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد،

(الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هم‌وطن‌های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

| سال | ۱۳۹۴ | ۱۳۹۵ | ۱۳۹۶ | ۱۳۹۷ | ۱۳۹۸ | ۱۳۹۹ | ۱۴۰۰ |
|-------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| تعداد تلفات مورد انتظار | | | | | | | |

(ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟