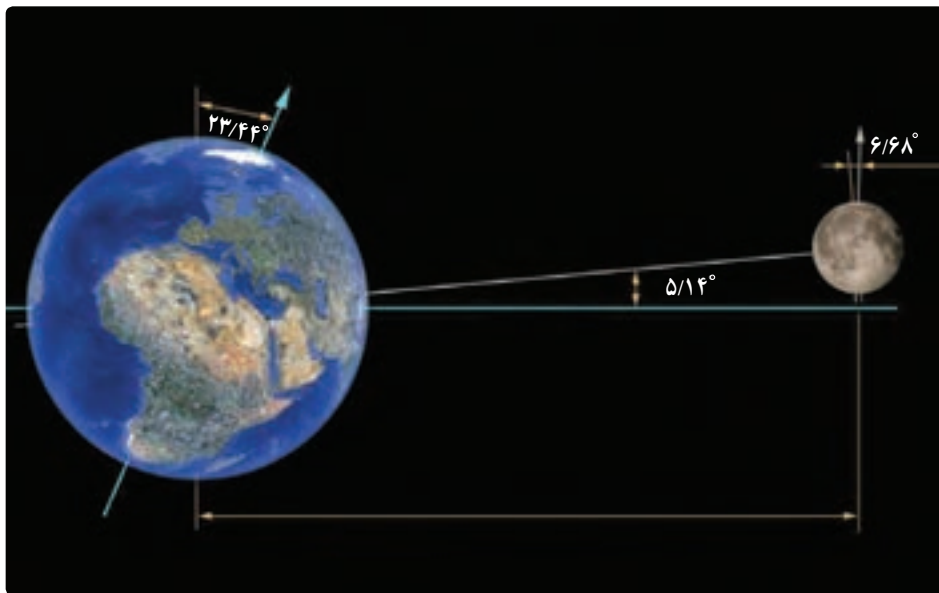
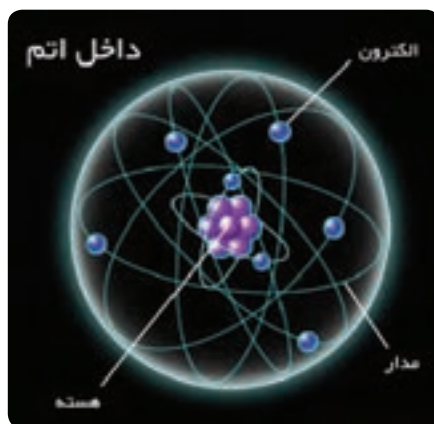


مثلثات

الشَّمْسُ وَالْقَمَرُ يُحْسَبَانِ (الرحمن : ۵)
خورشید و ماه برای حساب (منظمی در چرخش و گردش) هستند.



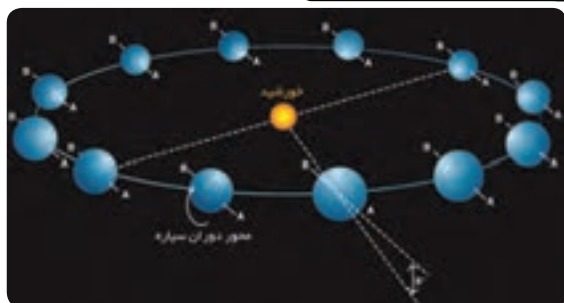
زمین هم به دور خودش و هم به دور خورشید می چرخد. مسیر حرکت زمین به دور خورشید بیضی شکل است که حاصل آن پیدایش فصل های مختلف است. روز و شب نیز حاصل چرخش زمین به دور خودش است. این چرخش را حرکت وضعی زمین می نامیم که در آن چرخش زمین به سمت شرق است. ستاره قطبی، ستاره ای است که موقعیت محلش نسبت به ناظر ساکن روی زمین تغییر نمی کند. اگر از سمت ستاره قطبی به زمین نگاه کنیم، زمین خلاف جهت عقربه های ساعت به دور خود، دوران می کند.



درس اول نسبت های مثلثاتی

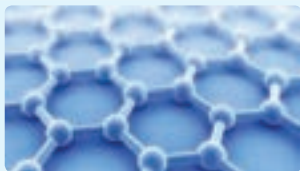
درس دوم دایره مثلثاتی

درس سوم روابط بین نسبت های مثلثاتی





برای اینکه اتومبیل‌ها در پیچ جاده‌ها بتوانند بدون خطر انحراف، حرکت کنند، در جاده شیب عرضی ایجاد می‌کنند، یعنی آن را طوری می‌سازند که قسمت بیرونی جاده نسبت به قسمت درونی، مرتفع‌تر باشد.



در صفحات گرافن، هر اتم کربن با سه اتم کربن دیگر پیوند دارد که زوایای بین این پیوندها 120° درجه است. در آینده‌ای نه‌چندان دور، بهترین میکروفن‌های جهان با استفاده از گرافن ساخته می‌شوند. این میکروفن‌ها، قابلیت ردیابی امواج صوتی فراتر از دامنه شدت شنوایی انسان را دارند.

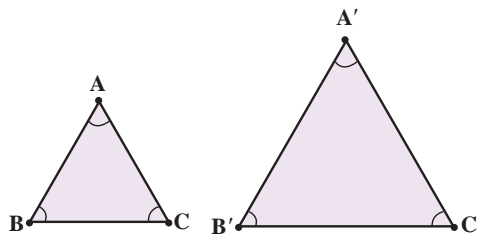
درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

مثلثات شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می‌پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه‌گیری فاصله‌ها به صورت غیرمستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و غیره کاربرد دارد. به عنوان مثال، فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است.



اگر زاویه هواپیما با افق 13° باشد، می‌خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و مسائلی نظیر این با استفاده از روابط مثلثاتی حل می‌شوند.

برای معرفی مفهوم مثلثات، به مفهوم تشابه نیاز داریم. در پایه نهم با این مفهوم آشنا شدید و دیدید که دو مثلث با هم متشابه‌اند، هرگاه زوایای نظیر در آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند. یعنی اگر $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ، آنگاه



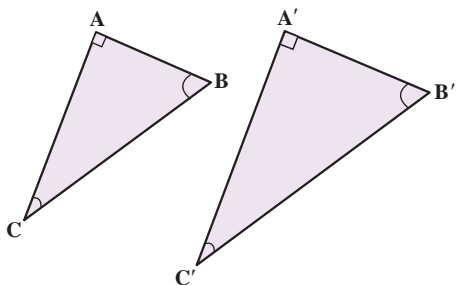
$$\text{داریم: } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

$$\hat{A} = \hat{A'}, \hat{C} = \hat{C'}, \hat{B} = \hat{B'}$$

در هندسه ثابت می‌شود:

هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث، متشابه‌اند.

به عنوان یک نتیجه از مطلب بالا می‌توان دید:



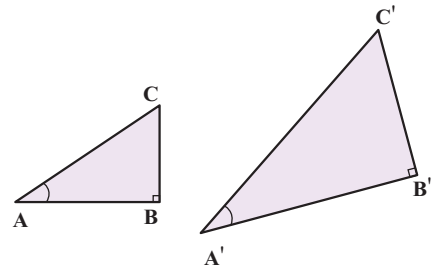
اگر $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ در شکل مقابل قائم الزاویه باشند و داشته باشیم $\hat{C} = \hat{C'}$ ، آنگاه

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

کار در کلاس

۱ در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABC و $A'B'C'$ ، $\hat{A} = \hat{A}'$. جاهای خالی را کامل کنید.

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$



۲ از تساوی $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ ، می‌توان نتیجه گرفت $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ (چرا؟). با توجه به این نکته، جاهای خالی را کامل کنید:

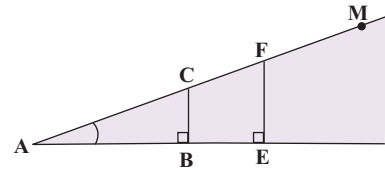
$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{و} \quad \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

نتیجه: اگر زاویه A از مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه A' از مثلث قائم‌الزاویه $A'B'C'$ (مطابق شکل بالا) برابر باشند، داریم:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

فعالیت

۱ در شکل سمت راست، درستی تساوی $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$ را بررسی کنید.

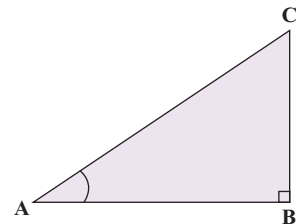


۲ نقطه دیگری مثل M را در امتداد AC در نظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگر زاویه A رسم کنید و پای عمود را N بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AN} = \frac{EF}{AE}$$

همان‌طور که در «کار در کلاس» بالا دیدیم، در مثلث قائم‌الزاویه ABC برای زاویه معین و حاده A ، نسبت طول ضلع مقابل زاویه A ، به طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویه A می‌نامیم و آن را با $\tan A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه دلخواه ABC ، داریم:

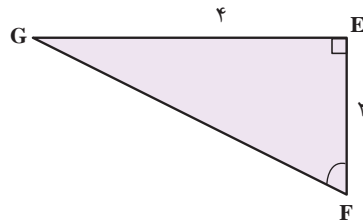
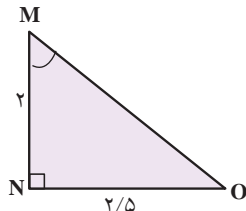
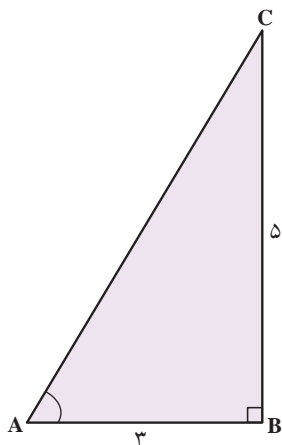
$$\tan A = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A} = \frac{BC}{AB}$$



عکس تانژانت زاویه A را کتانژانت می‌نامیم و آن را با $\cot A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$\cot A = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه } A} = \frac{AB}{BC}$$

۱ در هر یک از شکل‌های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.



$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{3}$$

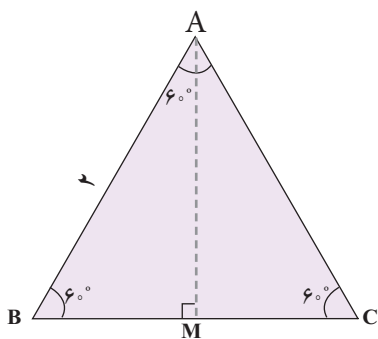
$$\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{2}{2/5}$$

$$\tan F = \frac{EF}{GE} = \frac{2}{4}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$$

$$\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{2/5}{2}$$

$$\cot F = \frac{GE}{EF} = \frac{4}{2}$$



۲ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با اضلاعی به طول ۲ واحد را در نظر بگیرید.

الف) محل برخورد نیمساز زاویه A با پاره خط BC را M بنامید. با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین، AM ضلع BC است. بنابراین

$$BM = MC = \dots\dots\dots$$

ب) با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول AM و حاصل کسره‌های زیر را به دست آورید.

$$\tan 30^\circ = \frac{BM}{AM} = \dots\dots\dots, \quad \tan 60^\circ = \frac{AM}{BM} = \dots\dots\dots$$

پ) با استفاده از یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین، تانژانت و کتانژانت زاویه ۴۵° را پیدا کنید.

در هر مثلث قائم‌الزاویه ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویه حاده A به طول وتر، همواره مقداری ثابت است که آن را سینوس زاویه A می‌نامیم و با $\sin A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویه حاده A به طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس زاویه A می‌نامیم و آن را با $\cos A$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

به سادگی می‌توان دید در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ و از این رو $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$ به طور مشابه، می‌توان دید

در یک مثلث قائم الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت های مثلثاتی می نامیم.

مثال

خانم جلالی از دانش آموزان خواست تا نسبت های مثلثاتی زاویه 45° را حساب کنند. او ابتدا یک مربع با اضلاعی به طول ۱ واحد رسم کرد و از دانش آموزان خواست تا قطر AC را رسم کرده و سپس طول آن را حساب کنند.

فریبا: با توجه به اینکه مثلث ADC قائم الزاویه است، داریم $(AD)^2 + (DC)^2 = (AC)^2$. در نتیجه $(AC)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ و از این رو $(AC) = \sqrt{2}$. پس $AC = \sqrt{2}$.

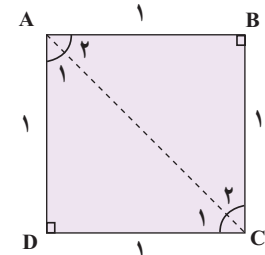
معلم: با توجه به اینکه مثلث ADC متساوی الساقین است، از این رو $\hat{A}_1 = \hat{C}_1 = \dots\dots\dots$.

میینا: طبق تعریف سینوس، $\sin A_1 = \sin 45^\circ = \frac{DC}{وتر} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.
سبا: من هم می توانم با توجه به روابط بالا کسینوس 45° را پیدا کنم.

$$\cos A_1 = \cos 45^\circ = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

مریم: اکنون در مثلث قائم الزاویه ADC، طبق تعریف داریم

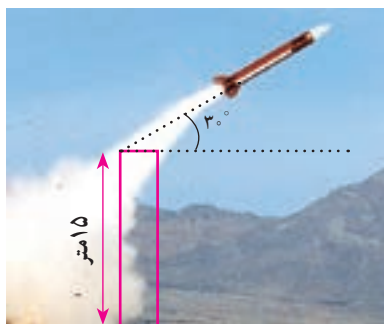
$$\tan A_1 = \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1 \text{ و } \cot A_1 = \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1.$$



کار در کلاس

به کمک شکل فعالیت قبل، با پیدا کردن نسبت های مثلثاتی زاویه های 30° و 60° ، جدول زیر را کامل کنید (در صورت لزوم، کسر ها را گویا کنید).

مقدار	30°	45°	60°
$\sin A$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\cos A$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$\tan A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot A$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه 3° پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟
 حل: ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می‌سازیم. با توجه به شکل زیر، به سادگی می‌توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با:

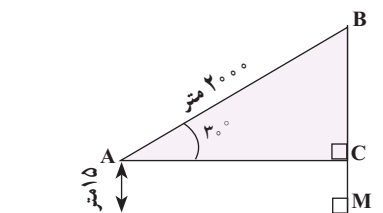
$$BC + MC = BC + \dots\dots\dots$$

بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم. می‌دانیم $\sin 3^\circ = \frac{1}{2}$. پس در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC =$$

و از این رو

$$\text{ارتفاع موشک} = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$



فعالیت



۱ یک زاویه 5° رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری طول‌های موردنظر با یک خط‌کش مدرج، نسبت‌های مثلثاتی زاویه 5° را به صورت تقریبی حساب کنید. سپس با ماشین حساب، مقادیر واقعی را به دست آورید و با مقادیر قبل مقایسه کنید.

۲ می‌خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می‌دانیم:

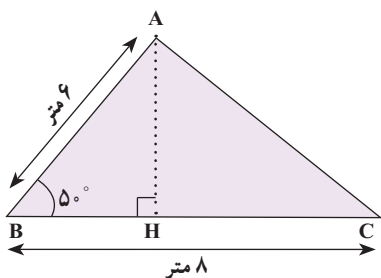
$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعده} \times \frac{1}{2} = \text{مساحت مثلث ABC}$$

الف) با توجه به اینکه $\sin 5^\circ \approx 0.087$ ، داریم:

$$\sin 5^\circ = \frac{AH}{\text{وتر}} = \frac{AH}{6} \Rightarrow AH \approx \dots\dots\dots$$

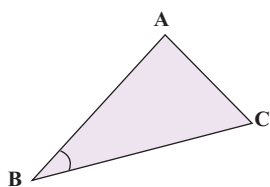
ب) با توجه به قسمت الف) داریم:

$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots \approx \dots\dots\dots$$



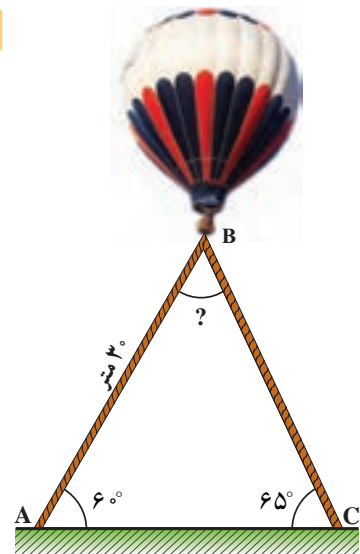
۳ در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازه زاویه بین آنها نشان دهید:

$$\text{مساحت } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin B.$$



کار کلاس

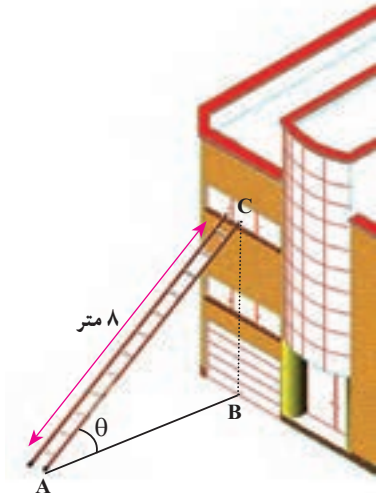
۱ در راه پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم. الف) ابتدا اندازه زاویه B را به دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن را BH بنامید.



ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویه A به دست آورید.

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویه C، طول طناب دوم را پیدا کنید. ($\sin 65^\circ \approx 0.9$)

۲ مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه نردبان با سطح زمین $\theta = 3^\circ$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصله پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟



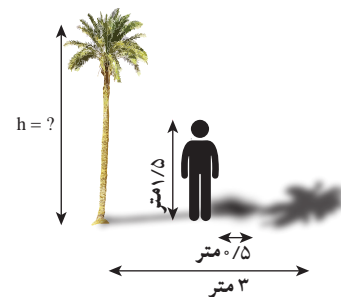
$$\sin \theta = \frac{\dots\dots\dots}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{8} \Rightarrow 2BC = \dots\dots\dots \Rightarrow BC = \dots\dots\dots$$

اکنون به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = \dots\dots\dots - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \Rightarrow AB = \dots\dots\dots$$

تمرین

۱ علی می‌خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی ۱/۵ متر و طول سایه او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع درخت چقدر است؟



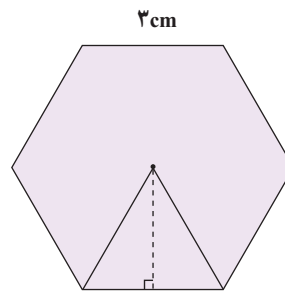


ماهواره‌ها به دور زمین در یک مسیر بسته، که آن را مدار می‌نامند، در حال گردش هستند. این مسیرها می‌توانند دایره‌ای یا بیضوی باشند، اما مرکز زمین در هر حالت در مرکز یا در نقطه کانونی مسیر آن قرار می‌گیرد. ماهواره‌ها روی سه نوع مدار که بستگی به نوع کاربرد آن دارد، قرار می‌گیرند:

ماهواره‌های مدار پایین زمین، مدار قطبی و مدار زمین‌ایست. برخی از ماهواره‌های هواشناسی و ماهواره‌های جاسوسی از نوع مدار پایین زمین‌اند. در این فاصله، چرخش ماهواره‌ها با حرکت دورانی زمین کاملاً هم‌زمان و برابر است و باعث می‌شود ماهواره نسبت به نقطه مفروض روی زمین ثابت بماند.

ماهواره مدار زمین‌ایست، نسبت به زاویه‌ای که ایستگاه زمینی آن را می‌بیند، ثابت است، در نتیجه احتیاجی به تغییر جهت آنتن نیست و آنتن هر ماهواره می‌تواند حداکثر ۴/۴۲ درصد سطح کره زمین را ببوشاند. تمام ماهواره‌های مخابراتی و تلویزیونی از این نوع هستند.

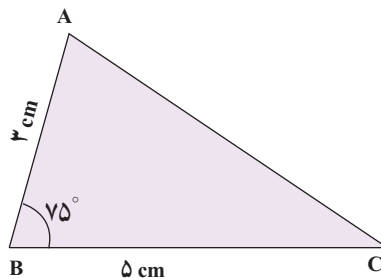
۲ مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.



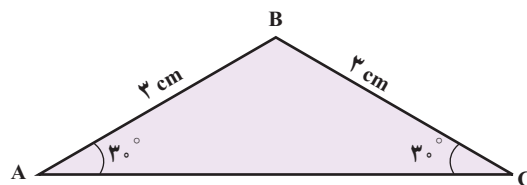
۳ یک هواپیما در ارتفاع ۲ km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود ۱۳° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه A فرود می‌آید.
 $\tan 13^\circ \approx 0.23$



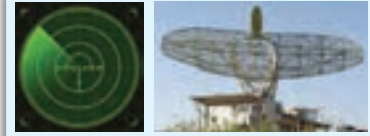
۴ فرض کنید $\sin 75^\circ \approx 0.96$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.



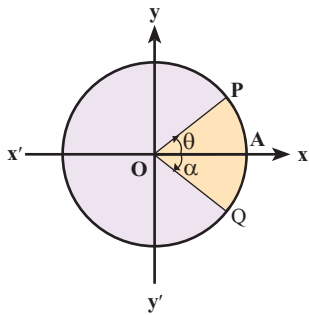
۵ مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



درس دوم: دایره مثلثاتی



می‌توان از دایره مثلثاتی برای بیان مکان، زمان و توصیف بسیاری از حرکات همانند چرخش، حرکت دورانی، حرکات دوره‌ای، حرکات تناوبی و حرکات رفت و برگشتی در یک مسیر مشخص، استفاده کرد. یکی از این کاربردها، استفاده در سیستم رادارهاست.



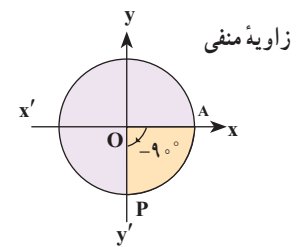
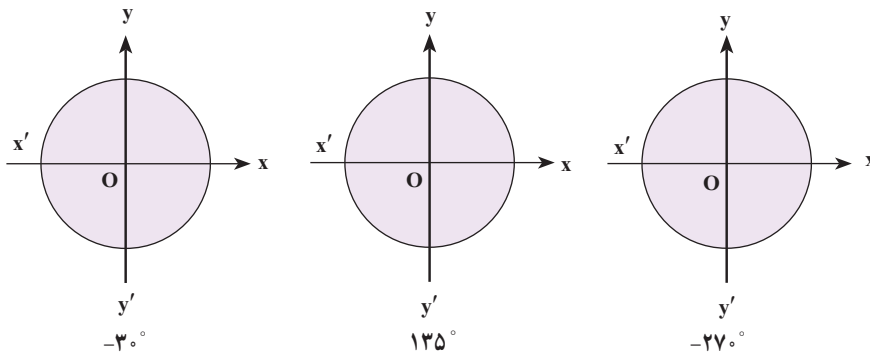
دایره روبه‌رو، به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ را در نظر بگیرید. اگر با حرکت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت به نقطه‌ای مانند P برسیم، زاویه \widehat{AOP} مثبت است و اگر با حرکت در جهت عقربه‌های ساعت به نقطه‌ای مانند Q برسیم، زاویه \widehat{AOQ} منفی است. چنین دایره‌ای را یک دایره مثلثاتی می‌نامیم.

مثال

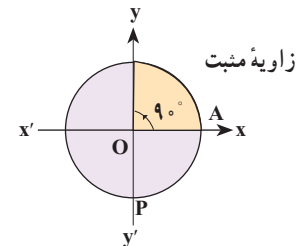
در هر یک از دایره‌های مثلثاتی سمت راست، مقدار زاویه‌های 90° ، -21° و 225° داده شده‌اند.

فعالیت

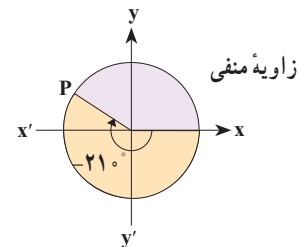
۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌های مثلثاتی داده شده، نشان دهید.



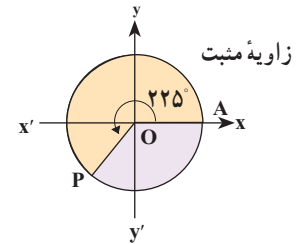
زاویه منفی



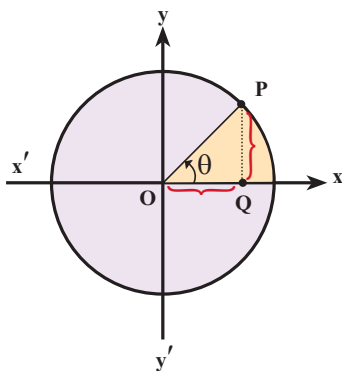
زاویه مثبت



زاویه منفی

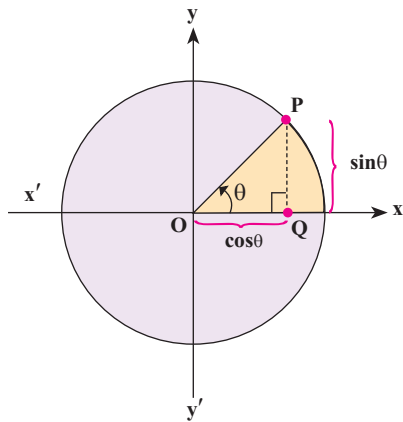


زاویه مثبت



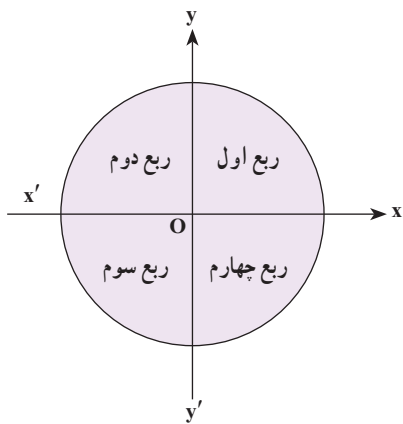
۲ فرض کنید $P(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه روی دایره مثلثاتی روبه‌رو باشد و θ زاویه‌ای است که نیم خط \vec{OP} با محور \vec{Ox} می‌سازد. از نقطه P خطی بر محور \vec{Ox} عمود می‌کنیم و محل برخورد را Q می‌نامیم. الف) در مثلث OPQ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به‌دست آورید.

$\cos\theta = \dots$ و $\sin\theta = \dots$ و $\tan\theta = \dots$



ب) با توجه به قسمت (الف) می‌توان دید فاصله Q تا مبدأ با برابر است و فاصله نقطه P تا پای عمود، یعنی نقطه Q با برابر است.

با توجه به قسمت (ب) محور $x'Ox$ یا محور x ها را محور کسینوس‌ها و محور $y'Oy$ یا محور y ها را محور سینوس‌ها می‌نامیم. به عبارت دیگر، اگر نقطه دلخواهی روی دایره مثلثاتی باشد که نیم خط OP با قسمت مثبت محور x زاویه θ می‌سازد، آنگاه P نقطه‌ای با مختصات (x,y) است که در آن $x = \cos\theta$ و $y = \sin\theta$.



نکته: دو محور عمود بر هم $x'Ox$ و $y'Oy$ صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند. هر یک از این قسمت‌ها را یک ناحیه یا یک ربع مثلثاتی می‌نامیم. با توجه به جهت دایره مثلثاتی، ناحیه xOy را ربع اول، ناحیه $x'Oy$ را ربع دوم، ناحیه $x'Oy'$ را ربع سوم و ناحیه xOy' را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامیم.

نکته: زاویه‌های 0° ، 90° ، 180° ، 270° و 360° زوایای مرزی هستند و آنها را در هیچ کدام از ناحیه‌های فوق در نظر نمی‌گیریم.

کار در کلاس

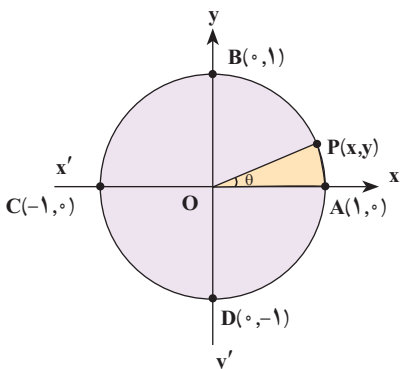
۱) مشخص کنید انتهای کمان مربوط به هر یک از زاویه‌های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد؟

- الف) 30° ب) 65° پ) 182° ت) $95^\circ -$

۲) با توجه به آنچه در فعالیت قبل، به دست آوردید، توضیح دهید که اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ای در ربع اول باشد (زاویه در ربع اول باشد)، آنگاه چرا نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه، همگی مثبت‌اند؟

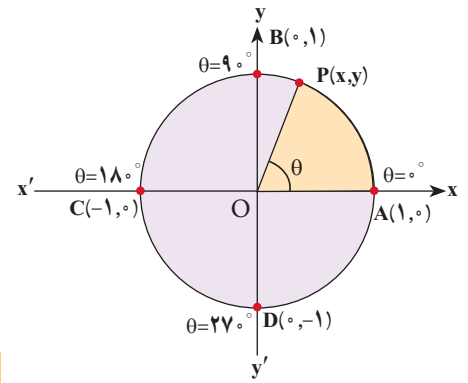
مثال

می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ° را به دست آوریم. می‌دانیم در دایره مثلثاتی روبه‌رو، $\sin\theta = y$ و $\cos\theta = x$. اگر $\theta = 0^\circ$ ، آنگاه نقطه P روی نقطه A قرار می‌گیرد و داریم $\sin 0^\circ = 0$ ، همچنین $\cos 0^\circ = 1$ و $\tan 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$ ، اما $\cot 0^\circ$ تعریف نمی‌شود (چرا؟).



فعالیت

- در دایره مثلثاتی روبه‌رو اگر $\theta = 9^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.
- اگر $\theta = 18^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.
- اگر $\theta = 27^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.



کار در کلاس

با توجه به نتایج بالا جدول زیر را کامل کنید :

مقدار	$^\circ$	9°	?	27°	36°
$\sin\theta$	$^\circ$		$^\circ$	-1	$^\circ$
$\cos\theta$			-1		
$\tan\theta$		تعریف نشده	$^\circ$		
$\cot\theta$			تعریف نشده		

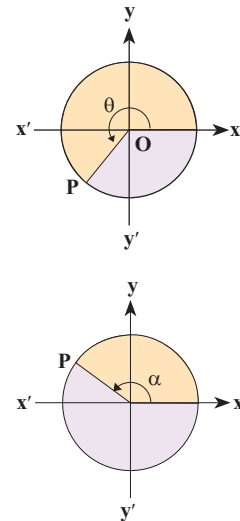
$^\circ < \alpha < 9^\circ \Rightarrow \alpha$ در ربع اول است
 $9^\circ < \alpha < 18^\circ \Rightarrow \alpha$ در ربع دوم است
 $18^\circ < \alpha < 27^\circ \Rightarrow \alpha$ در ربع سوم است
 $27^\circ < \alpha < 36^\circ \Rightarrow \alpha$ در ربع چهارم است

فعالیت

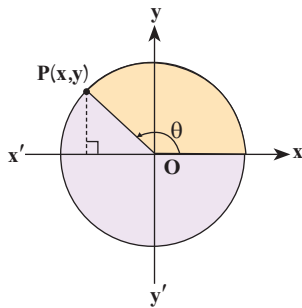
- فرض کنید θ زاویه‌ای در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد. با توجه به اینکه $x = \cos\theta$ و $y = \sin\theta$ و در ربع سوم، $x, y < 0$ ، علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی θ را در ربع سوم مشخص کنید.
- فرض کنید α زاویه‌ای در دایره مثلثاتی در ربع دوم باشد. فعالیت قبل را برای α نیز تکرار کنید.

جدول زیر را کامل کنید :

مقدار	ربع اول $x, y > 0$	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin\theta$	+			
$\cos\theta$		-		
$\tan\theta$			+	
$\cot\theta$				-



نکته: برای هر زاویه دلخواه θ ،
 $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ و $-1 \leq \cos\theta \leq 1$.



آقای جلالی، از دانش آموزان پرسید: اگر زاویه‌ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و $\sin \theta = \frac{5}{7}$ ، آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کرد؟

امین: می‌دانیم $\sin \theta = y = \frac{5}{7}$ ، بنابراین نقطه‌ای به عرض است.

معلم: درست است و حالا طول نقطه P چگونه به دست می‌آید؟

امیرعلی: طبق رابطه فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویه داریم: $x^2 + y^2 = 1$. بنابراین و در

نتیجه $x^2 = \frac{24}{49}$. پس داریم $x = \dots\dots\dots$.

معلم: آفرین، این راه کاملاً درست است، ولی کدام مقدار قابل قبول است؟

محمد مهدی: چون θ زاویه‌ای در ربع است، پس طول نقطه P منفی است و از

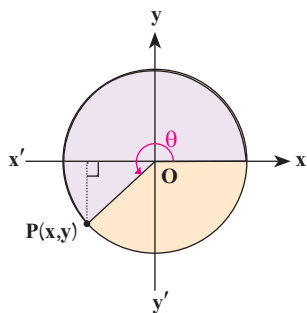
این رو $x = \dots\dots\dots$ قابل قبول است.

معلم: استدلال محمد مهدی کاملاً منطقی است و P نقطه‌ای به مختصات

(..... و) است. در نتیجه:

$$\cot \theta = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\dots}{\dots}, \quad \cos \theta = x = \dots\dots$$

فعالیت



- ۱ فرض کنید نقطه P روی دایره مثلثاتی قرار دارد به طوری که $\cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. می‌دانیم θ در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین $y = \sin \theta = \dots\dots\dots$. الف) مختصات نقطه P را به دست آورید. ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به دست آورید.

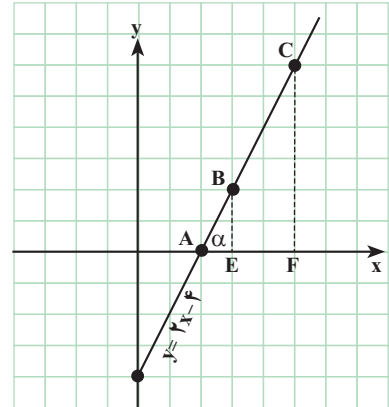
- ۲ اگر $\cos \alpha = \frac{-2}{5}$ ، آنگاه در مورد ناحیه‌ای که α در آن قرار می‌گیرد، بحث کنید.

- ۳ زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

فعالیت

نمودار خط $y=2x-4$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. دو نقطه B و C روی این خط را در نظر بگیرید و خطی از آنها به محور xها عمود کنید. پای عمودها را به ترتیب، E و F بنامید. الف) تانژانت زاویه α را به دست آورید.



ب) شیب این خط را پیدا کنید.

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \dots\dots\dots$$

پ) از مقایسه قسمت الف) و ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توضیح دهید.

شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به عبارت دیگر، اگر زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه:

$$\text{شیب خط} = \tan \alpha$$

کار در کلاس

۱) مراحل فعالیت بالا را برای خط‌های زیر، تکرار کنید.

ب) $x+y=2$

الف) $2y-3x=5$

۲) معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور xها 30° است و از نقطه $(1,0)$ می‌گذرد.

تمرین

۱) هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.

الف) $27^\circ +$ ب) 225° پ) $135^\circ -$ ت) 185°

در اخترشناسی، اغلب به مسئله‌هایی برمی‌خوریم که برای حل آنها به مثلثات نیاز مندیم. ساده‌ترین این مسئله‌ها، پیدا کردن یک کمان دایره برحسب درجه است. پیدایش مثلثات براساس روابط بین کمان‌ها و وترها بوده است. کهن‌ترین جدولی که به ما رسیده است و در آن طول وترهای برخی کمان‌ها داده شده است متعلق به هیپارک، اخترشناس سده دوم میلادی است و شاید بتوان تنظیم این جدول را نخستین گام در راه پیدایش مثلثات دانست. همه کارهای ریاضی‌دانان و اخترشناسان یونانی در درون هندسه انجام گرفت و هرگز به مفهوم‌های اصلی مثلثات نرسیدند. خوارزمی نخستین جدول‌های سینوسی را تنظیم کرد و پس از او همه ریاضی‌دانان ایرانی گام‌هایی در جهت تکمیل این جدول‌ها و گسترش مفهوم‌های مثلثاتی برداشتند. روزی جدول سینوس‌ها را تقریباً 30° درجه به 3° درجه تنظیم کرد و برای نخستین بار به دلیل نیازهای اخترشناسی مفهوم تانژانت را تعریف کرد. جدی‌ترین تلاش‌ها به‌وسیله ابوریحان بیرونی و ابوالوفای بوزجانی انجام گرفت و سرانجام خواجه نصیرالدین طوسی با جمع‌بندی کارهای دانشمندان ایرانی پیش از خود، نخستین کتاب مستقل مثلثات را نوشت. بعد از طوسی، جمشید کاشانی ریاضی‌دان ایرانی با استفاده از روش زیبایی که برای حل معادله درجه سوم پیدا کرده بود، توانست راهی را برای محاسبه سینوس کمان یک درجه، با هر دقت دلخواه پیدا کند. پیشرفت بعدی دانش مثلثات از سده پانزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت.

۲ در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

الف) $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$ (در ربع چهارم)

ب) $\sin \beta = \frac{-1}{4}$ (در ربع سوم)

۳ اگر $\sin \theta$ و $\tan \theta$ هم علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

۴ حدود زاویه θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف) $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ ب) $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$

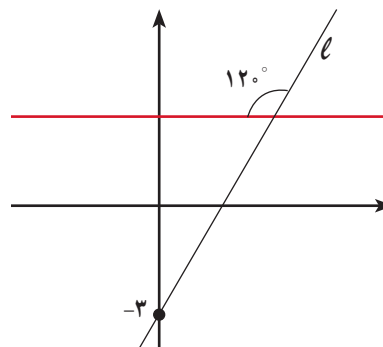
۵ اگر $\sin \alpha \times \cos \alpha < 0$ ، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟ چرا؟

۶ زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به طوری که $\tan \alpha > \cot \alpha$. اکنون زاویه‌ای مثل β پیدا کنید، به طوری که $\cot \beta > \tan \beta$. از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۷ در تمرین ۶ به جای تانژانت و کتانژانت به ترتیب سینوس و کسینوس قرار دهید و در مورد آن بحث کنید.

۸ معادله خطی را بنویسید که زاویه آن با جهت مثبت محور x ها 45° است و نقطه $(2, 0)$ روی آن قرار دارد.

۹ با توجه به شکل زیر، معادله خط l را به دست آورید.



درس سوم: روابط بین نسبت های مثلثاتی

در درس های قبل با نسبت های مثلثاتی و دایره مثلثاتی آشنا شدید. در این درس روابطی بین این نسبت ها و کاربردهایی از آنها را بیان می کنیم.

فعالیت

مثلث قائم الزاویه ABC را در نظر بگیرید.

الف اندازه وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویه θ و α به دست آورید.

$$\sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{\dots}$$

$$\sin \alpha = \dots$$

$$\cos \theta = \dots$$

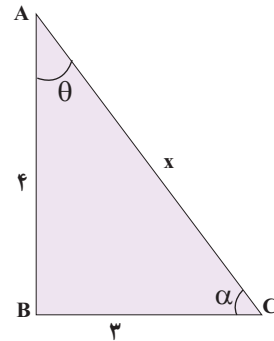
$$\cos \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{\dots}$$

$$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \dots$$

$$\tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \dots$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\dots} = \frac{\cos \theta}{\dots} = \dots$$

$$\cot \alpha = \dots$$



ب با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ و $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ را به دست آورید.

$$\sin \theta \times \sin \theta = (\sin \theta)^2 = \sin^2 \theta$$

پ درستی رابطه $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \dots$$

ت مشابه قسمت (پ) درستی رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ را بررسی کنید.

اگر α زاویه دلخواهی باشد، همواره داریم:
 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

کار در کلاس

با توجه به رابطه بالا، یعنی $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ جاهای خالی را پر کنید:

الف) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = \dots \Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{\dots}$
 ب) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \dots \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\dots}$

تذکر: در رابطه‌هایی که به دست آوردید، علامت نسبت مثلثاتی زاویه α ، با توجه به ناحیه‌ای که زاویه α در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.

مثال

اگر α زاویه‌ای در ناحیه سوم مثلثاتی باشد و $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ ، آنگاه مقدار $\tan\alpha$ ، $\cos\alpha$ و $\cot\alpha$ را به دست آورید.

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} \xrightarrow{\text{در ناحیه سوم}} \cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

کار در کلاس

رابطه‌های تانژانت بر حسب کسینوس و کتانژانت بر حسب سینوس

در این قسمت رابطه‌ای برای تانژانت بر حسب کسینوس یک زاویه و همچنین رابطه‌ای برای کتانژانت بر حسب سینوس، به دست می‌آوریم:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0) \quad 1$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \dots = \dots$$

$$\Rightarrow 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad (\sin\alpha \neq 0) \quad 2$$

۳ اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\tan \alpha = \frac{-3}{4}$ ، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

اتحاد مثلثاتی

هر یک از تساوی‌های $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ، $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ($\cos \alpha \neq 0$)، و

$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ($\sin \alpha \neq 0$) را که به ازای هر α همواره برقرار است، یک اتحاد مثلثاتی

می‌نامیم.

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی یک تساوی (اتحاد) برقرار است، می‌توانیم یک طرف تساوی را بنویسیم و با توجه به روابط بین نسبت‌های مثلثاتی به طرف دیگر برسیم. به مثال زیر توجه کنید:

مثال

درستی اتحاد مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

$$\left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right)(1 - \sin \theta) = \cos \theta$$

$$(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{طرف چپ} &= \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right)(1 - \sin \theta) = \left(\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta) \\ &= \frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{\cos \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} = \cos \theta = \text{طرف راست} \end{aligned}$$

کار در کلاس

۱ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$

طرف چپ $= \sin^4 \theta - \cos^4 \theta \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \times (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \dots\dots$



ساعت آفتابی وسیله‌ای است که زمان را با استفاده از مکان خورشید در آسمان می‌سنجد و از میله‌ای ساخته شده است که روی صفحه‌ای قرار دارد و ساعت‌های شبانه‌روز، روی صفحه نشانه‌گذاری شده‌اند. وقتی مکان خورشید در آسمان عوض می‌شود، مکان سایه میله هم روی صفحه جابه‌جا می‌شود و ساعت را نشان می‌دهد.

ب) $\frac{1}{\cos \alpha} + \cot \alpha = \frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$

طرف راست = $\frac{\tan \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \dots + \dots$

۲ کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

الف) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

ب) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

۳ با ضرب کردن طرفین اتحاد مثلثاتی $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ در $\cot \alpha$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید؛ سپس درستی آن را اثبات کنید.

تمرین

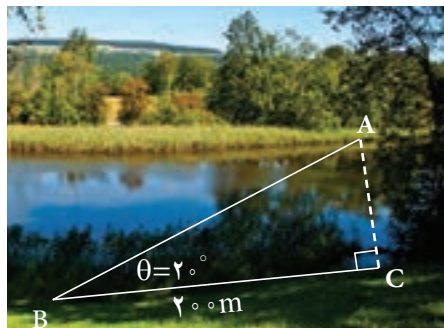
۱ فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

۲ اگر $\tan \alpha = \frac{-4}{3}$ و α زاویه‌ای در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

۳ اگر $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 135° را به دست آورید.

۴ اگر $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 24° را به دست آورید.

۵ شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازه 20° متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطه B برسد. اگر زاویه دید این شخص (از نقطه B به نقطه A)، 20° باشد و $\sin 20^\circ \approx \frac{34}{100}$ ، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار برحسب متر بنویسید.)



۶ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad (\text{الف})$$

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} = \sin x \quad (\text{ت})$$

$$\frac{1+\tan\alpha}{1+\cot\alpha} = \tan\alpha \quad (\text{پ})$$

$$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1+\sin x} \quad (\text{ث})$$



اولین دانشمندی که جدول سینوس، کسینوس، شعاع دایره‌ای و نسبت مثلثاتی را کشف کرد، ابوالوفا محمد بن یحیی بن اسماعیل بن عباس بوزجانی خراسانی است. وی یکی از مفاخر علمی ایران، ریاضی‌دان و اخترشناس سده چهارم هجری قمری در اول رمضان ۳۲۸ (ه.ق) در بوزجان (تربت جام امروزی)، در مرز خراسان و افغانستان زاده شد. او مقدمات ریاضیات زمان را، همان‌جا، نزد دایی و عمویش فرا گرفت. در سن ۲۰ سالگی به بغداد رفت و نزد اساتید مختلفی به تحصیل خود ادامه داد. وی پس از مدتی به یکی از دانشمندان مشهور زمان خود تبدیل شد و با دانشمندان هم عصر خود، مکاتبات علمی داشت. به عنوان مثال، وقتی ابوریحان در خوارزم بود، برای رصد همزمان گرفتگی ماه، با بوزجانی که در بغداد بود، قرار گذاشتند تا نتیجه دو رصد که در دو نقطه مختلف انجام می‌گرفت را با هم مقایسه کنند. ابوالوفا بر بسیاری از آثار پیشینیان (ایرانی و یونانی) مثل «مقدمات» اقلیدس، «جبر و مقابله» خوارزمی، «جبر» دیوفانت، «مجسطی» بطلمیوس و غیره تفسیر نوشت. خود نیز ابتکارات و نوآوری‌های بسیاری در هندسه و مثلثات دارد. سرانجام وی در سوم رجب ۳۸۸ (ه.ق) در بغداد درگذشت.