فصل ۳

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

پژوهشگاه رویان هشتم خرداد ماه سال ۱۳۷۰ به عنوان مرکز جراحی محدود با هدف ارائهٔ خدمات درمانی به زوج‌های نابارور و پژوهش و آموزش در زمینه علوم باروری و ناباروری توسط زنده یاد دکتر سعید کاظمی آشتیانی و گروهی از پژوهشگران و همکارانش در جهاد دانشگاهی علوم پزشکی ایران تأسیس شد. در حال حاضر این پژوهشگاه فعالیت‌های پژوهشی خود را در سه پژوهشکده پزشکی تولیدمثل، سلول‌های بنیادی و زیست فناوری دنبال می‌کند و در دو مرکز درمان ناباروری و سلول‌درمانی نیز به بیماران خدمات ارائه می‌کند.

بانک سلول‌های بنیادی رویان

درس اول: ریشه و توان

در سال گذشته با ریشه‌های دوم و سوم عددها آشنا شده‌اید. ریشه و توان رابطه‌ای دو سویه با هم دارند. به عنوان مثال $۲ = \sqrt[۳]{۸} \Rightarrow ۸ = ۲^{۳}$؛ همچنین $۸ = ۲^{۳} \Rightarrow ۲ = \sqrt[۳]{۸}$. علامت $\Rightarrow$ به این معنی است که طرف چپ، طرف راست را نتیجه می‌دهد. اگر طرف راست هم طرف چپ را نتیجه دهد، می‌توان هر دو نتیجه را به‌طور خلاصه با علامت $\Leftrightarrow$ نوشت. بنابراین می‌توانیم بنویسیم $۲ = \sqrt[۳]{۸} \Leftrightarrow ۸ = ۲^{۳}$.

فعالیت

اکنون با هر تساوی توانی یک تساوی رادیکالی بنویسید. همچنین نظیر هر تساوی رادیکالی یک تساوی توانی بنویسید؛ مانند نمونه‌ها

$\sqrt{۸۱} = ۹ \Leftrightarrow ۹^{۲} = ۸۱$ $\qquad$ $(-۳)^{۳} = -۲۷ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{-۲۷} = -۳$

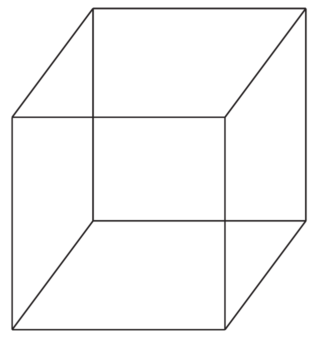
$\sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲} \Leftrightarrow$ $\qquad$ $(-۵)^{۳} = -۱۲۵ \Leftrightarrow$

$\sqrt[۳]{-۸} = -۲ \Leftrightarrow$ $\qquad$ $(۰/۲۵)^{۲} = ۰/۰۶۲۵ \Leftrightarrow$

$\sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵} \Leftrightarrow$ $\qquad$ $(۰/۵)^{۲} = ۰/۲۵ \Leftrightarrow$

کار در کلاس

۱ حجم مخزن آبی که به شکل مکعب است، برابر ۲۵ مترمکعب است. طول ضلع این مکعب را حدس بزنید و حدس خود را آزمایش کنید. می‌دانیم هرگاه طول ضلع مکعب a متر باشد، حجم آن برابر $a^{۳}$ متر مکعب است. ابتدا جدول را کامل کنید.



طول ضلع	۱	۲		۴		۶
حجم مکعب	۱	۸	۲۷		۱۲۵	

دو دانش‌آموز طول ضلع مکعب را به روش‌های روبه‌رو به‌دست آورده‌اند :
روش‌های این دو دانش‌آموز را توضیح دهید.

دبیر : طول ضلع مکعبی عددی بین ۲ و ۳ است. تعداد ارقام اعشاری این عدد بی‌شمار و دارای دوره تناوب نیست. تقریب این عدد تا یک رقم اعشار برابر با ۲/۹ و تا دو رقم اعشار برابر ۲/۹۲ می‌باشد. چنانچه بخواهیم این عدد را به‌طور دقیق نمایش دهیم از $\sqrt[۳]{۲۵}$ استفاده می‌کنیم که همان ریشهٔ سوم ۲۵ است.

$$\sqrt[۳]{۲۵} \simeq ۲/۹$$

احمد : مقدار دقیق $\sqrt[۳]{۲۵}$ چقدر است؟

دبیر : $\sqrt[۳]{۲۵}$ یک عدد حقیقی گنگ است. با ماشین حساب، می‌توانید تقریب دقیق‌تری از آن به‌دست آورید، اما هیچ‌گاه مقدار دقیق آن به صورت اعشاری قابل نمایش نیست و برای نمایش آن از نماد $\sqrt[۳]{۲۵}$ استفاده می‌کنیم.
اگر قدرت ماشین حساب شما بیشتر باشد، تعداد ارقام اعشاری بیشتری به دست می‌دهد و عدد دقیق‌تری برای ریشهٔ سوم ۲۵ حاصل می‌شود.

احمد : چون $۲۷=۳^۳$ و $۸<۲۵<۲۷$، پس $۲ < \sqrt[۳]{۲۵} < ۳$

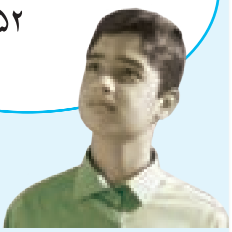
بهتر است ۲/۸ را امتحان کنم

آیا $(۲/۸)^۳ \stackrel{?}{=} ۲۵$

$(۲/۸)^۳ = (۲/۸)^۲ \times ۲/۸$

$= ۲۱/۹۵۲$

$\simeq ۲۲$

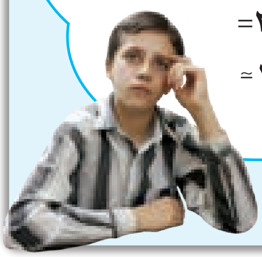


محسن : ۲۵ به ۲۷ نزدیک‌تر است تا ۸، پس بهتر است عدد ۲/۹ را امتحان کنم.

$(۲/۹)^۳ = (۲/۹)^۲ \times ۲/۹$

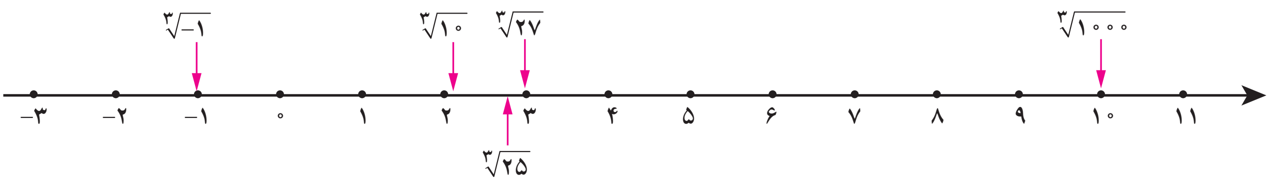
$= ۲۴/۳۸۹$

$\simeq ۲۴/۴$



> $\sqrt[۳]{۲۵}$ برای نمایش ریشهٔ سوم ۲۵ به‌کار می‌رود، اما در کاربردهای دنیای واقعی با مقادیر تقریبی آن مانند ۲/۹، ۲/۹۲ و ۲/۹۲۴ کار می‌کنیم.

ریشهٔ عددها را می‌توانیم به‌طور تقریبی روی محور اعداد نشان دهیم.



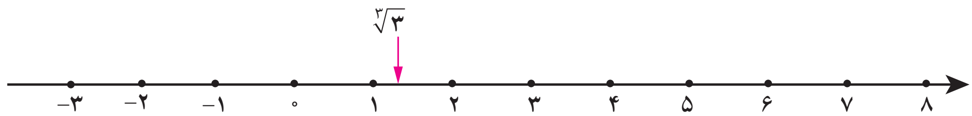
۲ مانند نمونه با استدلال مشخص کنید که هر ریشه بین کدام دو عدد صحیح متوالی است :

الف) چون $۳۶ > ۳۰ > ۲۵$ پس $۶ > \sqrt{۳۰} > ۵$. همچنین چون $۸ > ۵ > ۱$ پس $۲ > \sqrt{۵} > ۱$.

ب) $\square < \sqrt{۱۰} < \square$ پ) $\square < \sqrt[۳]{-۱۷} < \square$ ت) $\square < \sqrt[۳]{۲۰} < \square$

۳ مقدار تقریبی یا دقیق ریشه‌ها را محاسبه کنید و مانند نمونه روی محور اعداد، نشان دهید (می‌توانید از ماشین‌حساب استفاده کنید).

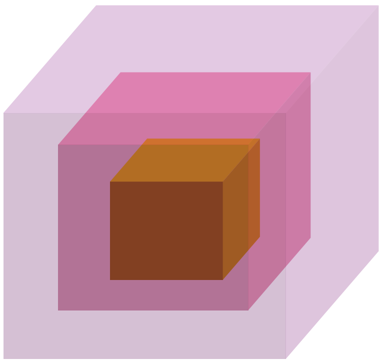
$\sqrt[۳]{-۸}=$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۱۲۵}=$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۴}\simeq$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۳}\simeq ۱/۴$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۱}$



۴ زیر رادیکال (جای خالی) عدد یا عددهایی بگذارید که نامساوی‌ها برقرار باشند.

الف) $۴ < \sqrt{\quad} < ۵$ $\qquad$ ب) $۹ < \sqrt[۳]{\quad} < ۱۰$

۵ سه مکعب تو در تو مانند شکل مقابل واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ و حجم مکعب داخلی (کوچک) ۲۷ است. طول ضلع مکعب میانی چه عددهایی می‌تواند باشد؟ (حداقل سه پاسخ متفاوت ارائه کنید.)



فعالیت

۱ مانند ریشه‌های دوم و سوم می‌توان ریشهٔ چهارم را تعریف کرد. با هرتساویِ توانی یک تساوی رادیکالی داریم :

ریشه‌های چهارم ۶۲۵ $\Rightarrow$ $۵^{۴}=۶۲۵$ ، $(-۵)^{۴}=۶۲۵$ $\qquad$ ۵ ، -۵

ریشه‌های چهارم ۱۶ $\Rightarrow$ $۲^{۴}=۱۶$ ، $(-۲)^{۴}=۱۶$ $\qquad$ ۲ ، -۲

آیا ۱۶− ریشهٔ چهارم دارد؟ آیا عددی منفی یا مثبت وجود دارد که وقتی به توان ۴ برسد، برابر ۱۶− شود؟
اکنون عبارت را کامل کنید.

> هر عدد مثبت دارای .... ریشهٔ چهارم است که .... یکدیگرند.
> عددهای منفی ریشهٔ چهارم ندارند.

کار در کلاس

۱ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید. آخرین ستون را به دلخواه کامل کنید.

عدد	۱۶		۶۲۵		۱۰،۰۰۰		۳۱۲۵			
ریشه‌های چهارم	۲	-۲	۵	-۵			$۵\sqrt[۴]{۵}$			

۲ جاهای خالی را در جدول تکمیل کنید.

عدد	-۳۲		-۲۴۳			
ریشه پنجم	-۲	۵		-۱	-۱۰	

۳ ریشهٔ پنجم چه عددهایی با خودشان برابر است؟

۴ محاسبه کنید.

$\sqrt[۵]{-۰/۰۰۰۳۲}=$

$\sqrt[۵]{\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰}}=$

$\sqrt[۵]{\frac{۱}{۳۲}}=$

۵ عبارت را کامل کنید.

هر عدد مثبت یا منفی دارای .... ریشهٔ پنجم است. اگر عدد مثبت باشد، ریشهٔ پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد ریشهٔ پنجم آن .... است.

تمرین

۱ برای هر عدد رادیکالی زیر، اگر حاصل آن یک عدد صحیح است، جواب را بنویسید و در غیر این‌صورت دو عدد صحیح متوالی بنویسید که عدد رادیکالی مورد نظر بین آنها باشد.

$\sqrt[۴]{۴۰۰}$ $\quad$ $\sqrt{۲۰}$ $\quad$ $\sqrt{۱۶}$

$\sqrt[۵]{۴۰۰}$ $\quad$ $\sqrt[۳]{-۸}$ $\quad$ $\sqrt{۷۵}$

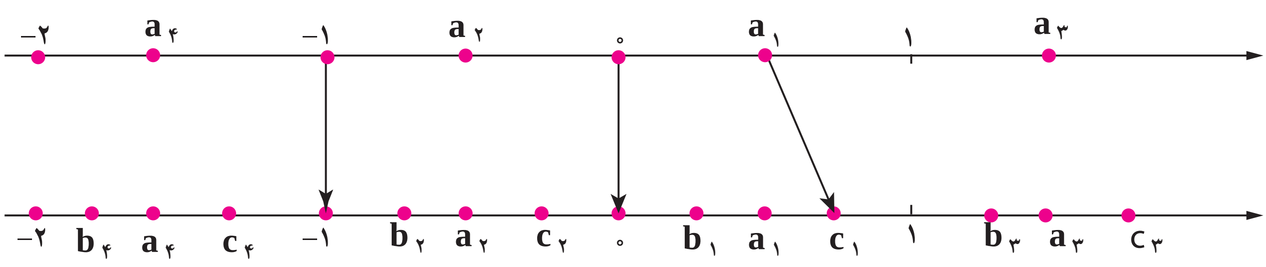
$\sqrt[۵]{۱}$ $\quad$ $\sqrt[۳]{۲۵۰}$ $\quad$ $\sqrt[۳]{-۹۰}$

$-\sqrt[۴]{۲۰}$

۲ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می‌توانید از ماشین‌حساب استفاده کنید).

$\sqrt[5]{۶۴}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{۱۶}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{۷/۲۵}$ $\qquad$ $\sqrt{۱۰}$

۳ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از نقاط مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشهٔ سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید.).



۴ با توجه به آنچه دربارهٔ ریشهٔ سوم اعداد درک کرده‌اید، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} > a$. a چه عددی می‌تواند باشد؟

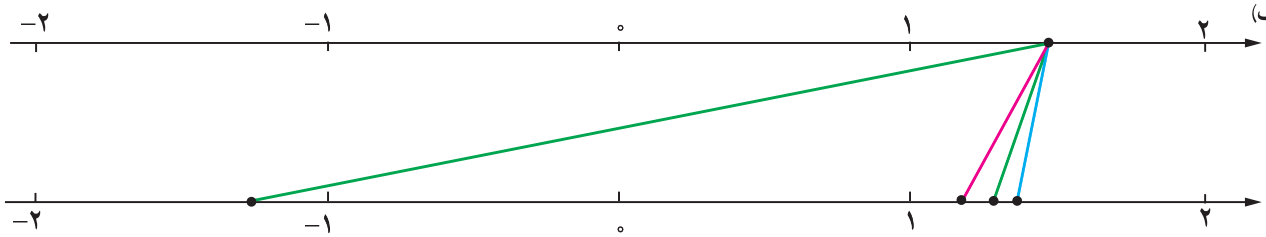
ب) a عددی است که ریشهٔ سوم آن با خودش برابر است؛ یعنی $\sqrt[3]{a} = a$. a چه اعدادی می‌تواند باشد؟

پ) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a$. a چه اعدادی می‌تواند باشد؟

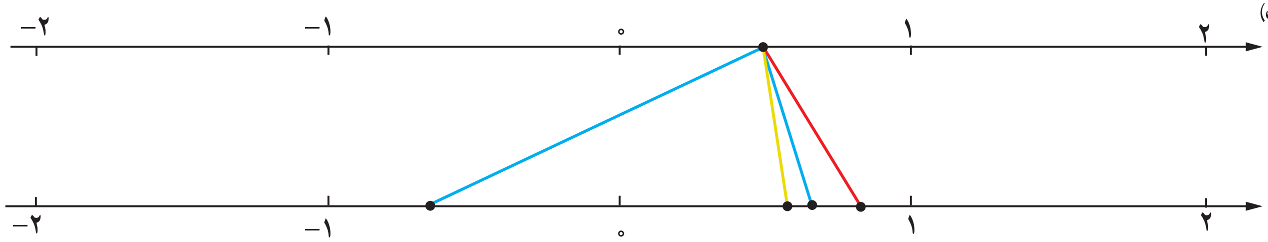
ت) به موارد (الف) و (پ) برای حالتی که a عددی منفی باشد، نیز پاسخ دهید.

۵ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.

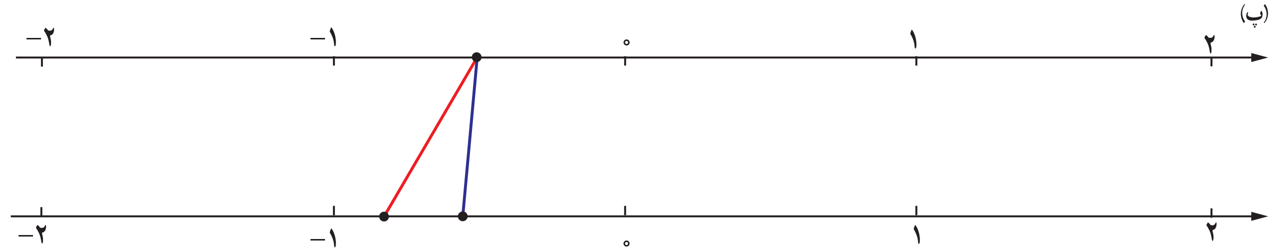
الف)



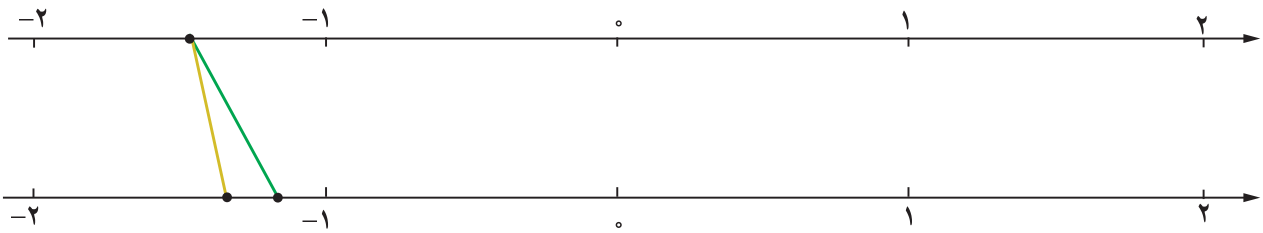
ب)



پ)



ت)



۶ جاهای خالی را پر کنید.

الف) اعداد ۳ و .... ریشه‌های چهارم عدد .... می‌باشند.

ب) اگر $a = \sqrt[4]{16}$ باشد، در این صورت حاصل عبارت a^3+5 برابر است با ....

۷ در جاهای خالی یکی از علامت‌های « < » ، « > » یا « = » را قرار دهید.

$(0/1)^5 \;\bigcirc\; (0/1)^3$ $\qquad$ $(-0/1)^5 \;\bigcirc\; (-0/1)^3$

$\sqrt[5]{0/00001} \;\bigcirc\; 0/1$ $\qquad$ $(-2)^5 \;\bigcirc\; (-2)^4$

خواندنی


حنا ــ نخستین بزغاله شبیه‌سازی شده خاورمیانه


بنیانا ــ نخستین گوساله شبیه‌سازی شده خاورمیانه

سلول، واحد تشکیل دهنده بافت‌های بدن است. هر بافت سلول‌های ویژه خود را دارد که در صورت تکثیر، فقط می‌تواند به سلول‌های همان بافت تبدیل شود، ولی سلول بنیادی مادر تمام سلول‌ها است و توانایی تبدیل شدن به تمام سلول‌های بدن را دارد. دانشمندان می‌گویند این سلول‌ها می‌توانند امکان معالجه بیماری‌هایی را فراهم آورند که در حال حاضر فقط درمان‌های محدودی برای آنها وجود دارد. به دلیل توانایی منحصر به فرد سلول‌های بنیادی، پژوهش در مورد آنها امروزه از مباحث جذاب در زیست‌شناسی و پزشکی است. این سلول‌ها همچنین قدرت تکثیر فراوانی دارند و سلامت آنها سبب سلامت بدن می‌شود. پیشرفت در زمینه سلول‌های بنیادی تنها متکی بر علم پزشکی نخواهد بود، بلکه کمک علوم دیگری مانند پلیمر، شیمی، فیزیک و ریاضی هم لازم خواهد بود. دانشمندان ایرانی در زمینه سلول‌های بنیادی پیشرفت‌های چشمگیری داشته‌اند. ایران در زمینه فناوری و تحقیقات سلول‌های بنیادی یکی از ۱۰ کشور برتر جهان محسوب می‌شود.

درس دوم: ریشه nام

فعالیت

۱ مشابه آنچه که برای ریشه های دوم، سوم، چهارم و پنجم گفته شد، می توان برای ریشه های دیگر مثلاً ریشهٔ ششم نیز عمل کرد. جدول زیر را که مربوط به ریشه های مختلف عدد ۶۴ است، کامل کنید.

ریشه‌های دوم	ریشه سوم	ریشه‌های چهارم	ریشه پنجم	ریشه‌های ششم	ریشه هفتم	ریشه‌های هشتم
$\sqrt{۶۴}=۸$ و $-\sqrt{۶۴}=-۸$		$\sqrt[۴]{۶۴}$ و $-\sqrt[۴]{۶۴}$	$\sqrt[۵]{۶۴}$			

ریشه‌های ششم عدد ۶۴ اعداد $\sqrt[۶]{۶۴}$ و $-\sqrt[۶]{۶۴}$ یا همان .... و .... هستند؛ زیرا $۶۴=۲^۶$ و $۶۴=(\quad)^۶$

دربارهٔ ریشه‌های هفتم و هشتم عدد ۶۴ چه می‌توانید بگویید؟

به طور کلی اگر $n\in\mathbb{N}$ ، دربارهٔ ریشهٔ nام عدد ۶۴ چه می‌توان گفت؟

در حالت کلی‌تر اگر a یک عدد مثبت باشد و $n\in\mathbb{N}$ ، دربارهٔ تعداد ریشه‌های n ام a چه می‌توان گفت؟

۲ جدول زیر را که دربارهٔ ریشه‌های مختلف عدد ۶۴− است، تکمیل کنید.

ریشه دوم	ریشه سوم	ریشه‌چهارم	ریشه پنجم	ریشه‌ششم	ریشه هفتم	ریشه‌هشتم
وجود ندارد	$\sqrt[۳]{-۶۴}=-۴$	وجود ندارد	$\sqrt[۵]{-۶۴}$			

ریشه‌های زوج ۶۴− وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان ...... برسد و مساوی ۶۴− شود.

دربارهٔ ریشه‌های nام ۶۴− $(n\in\mathbb{N})$ بحث کنید.

اگر a یک عدد منفی و $n\in\mathbb{N}$ باشد، دربارهٔ ریشه nام a چه می‌توان گفت؟

اگر $n\geq ۲$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشهٔ n ام عدد a می‌نامیم. هرگاه : $b^n=a$

۳ جدول زیر را کامل کنید.

$a>0$	n زوج	a دارای دو ریشهٔ nام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است	$a=81$ $n=4$	۸۱ دارای دو ریشهٔ چهارم $\sqrt[4]{81}=3$ و $-\sqrt[4]{81}=-3$ است
	n فرد		$a=$ $n=$	
$a<0$	n زوج	ریشهٔ nام وجود ندارد	$a=$ $n=$	
	n فرد		$a=$ $n=$	

۴ در سال نهم دیدید که :

برای هر دو عدد مثبت a و b : $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

برای هر دو عدد a و b : $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}$

آیا رابطهٔ بالا دربارهٔ $\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{b}$ نیز برقرار می‌باشد؟ مثال بزنید.

با توجه به اینکه ۴ یک عدد زوج است، باید a و b .... باشند.

$$\sqrt[4]{16}\times\sqrt[4]{81}=2\times3=\cdots\cdots\cdots$$

$$\sqrt[4]{16}\times\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{\cdots\cdots\cdots\cdots}=6$$

دربارهٔ $\sqrt[5]{a}\times\sqrt[5]{b}=\sqrt[5]{ab}$ چه می‌توان گفت؟

آیا a و b حتماً باید نامنفی باشند؟ مثالی از a و b نامنفی و مثالی از a و b منفی ارائه کنید و نشان دهید تساوی همواره برقرار است.

کار در کلاس

۱ حاصل هر عبارت را به‌دست آورید :

$\sqrt[9]{-1}=$ $\qquad$ $\sqrt[8]{256}=$ $\qquad$ $\sqrt[7]{128}=$

$\sqrt[5]{\dfrac{-1}{32}}=$ $\qquad$ $-\sqrt[4]{0/0016}=$ $\qquad$ $\sqrt[4]{625}=$

$\sqrt[6]{0}=$ $\qquad$ $\sqrt[7]{-128}=$

۲ با توجه به اینکه

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

$$\left(\sqrt[5]{2}\right)^3=\sqrt[5]{2}\times\sqrt[5]{2}\times\sqrt[5]{2}$$
$$=\sqrt[5]{2^3}$$

به‌طور کلی داریم :

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\begin{cases}\sqrt[n]{ab} & \text{زوج } n \text{ و } a,b\geq ۰\\ \sqrt[n]{ab} & \text{دلخواه و } n \text{ یک عدد طبیعی فرد } a,b\end{cases}$$

قرارداد : به‌طور کلی این قرارداد را اعمال می‌کنیم :

وقتی می‌نویسیم $\sqrt[n]{a}$ و n را زوج فرض می‌کنیم، a را مثبت یا برابر صفر در نظر می‌گیریم.

بنابراین باید به یاد داشته باشیم که ریشه‌های زوج برای عددهای منفی بی‌معنا هستند. پس هرگاه $\sqrt{x}$ نوشتیم، از آن می‌فهمیم که $x\geq ۰$ است.
تساوی‌های فوق را می‌توان به‌صورت مقابل نمایش داد :

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

تمرین

درستی رابطهٔ $\left(\sqrt[k]{a}\right)^m=\sqrt[k]{a^m}$ را با مقداردهی‌های مختلف به m،k و a بررسی کنید (اگر k زوج باشد، a باید مثبت باشد).

فعالیت

۱ جدول زیر را کامل کنید.

$\sqrt[n]{a^n}$	$a\geq ۰$	n زوج	$n=۴$ $a=۲$	$\sqrt[۴]{۲^۴}=۲ \qquad (۲=\|۲\|)$
		n فرد	$n=۳$ $a=۲$	$\sqrt[۳]{۲^۳}=$
	$a<۰$	n زوج	$n=۴$ $a=-۲$	$\sqrt[۴]{(-۲)^۴}=۲ \qquad (۲=\|-۲\|)$
		n فرد	$n=۳$ $a=-۲$	$\sqrt[۳]{(-۲)^۳}=$

اگر $a\geq ۰$ از جدول بالا نتیجه می‌گیریم که : $\sqrt[n]{a^n}=\ldots\ldots$

و اگر $a<۰$ آنگاه $\sqrt[n]{a^n}=\ldots\ldots\begin{cases}\ldots & \text{زوج } n\\ \ldots & \text{فرد } n\end{cases}$

۲ جدول زیر را کامل کنید.

$(\sqrt[۴]{۱۶})^۴=۲^۴=۱۶$	$n=۴$ $a=۱۶$	n زوج	$a\geq ۰$	$(\sqrt[n]{a})^n$
$(\sqrt[۳]{۸})^۳=۲^۳=$	$n=۳$ $a=۸$	n فرد		
$(\sqrt[۴]{-۱۶})^۴ \to$ تعریف‌نشده	$n=۴$ $a=-۱۶$	n زوج	$a< ۰$	
$(\sqrt[۳]{-۸})^۳=$	$n=۳$ $a=-۸$	n فرد		

اگر $a\geq ۰$ آن‌گاه از جدول بالا نتیجه می‌گیریم که : $(\sqrt[n]{a})^n=\dots\dots$

و اگر $a<۰$ آن‌گاه $(\sqrt[n]{a})^n=\dots\dots \begin{cases} n \text{ زوج} \dots \\ n \text{ فرد} \dots \end{cases}$

کار در کلاس

تساوی زیر به‌ازای چه مقادیری از a و n برقرار نیست؟

$$\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n$$

تمرین

۱ الف) یکی از علامت‌های $>$ یا $<$ یا $=$ را در $\square$ قرار دهید.

$\sqrt[۳]{۴}\ \square\ \sqrt{۴}$ $۴^۳\ \square\ ۴^۲$ $\sqrt[۳]{۰/۵}\ \square\ \sqrt{۰/۵}$ $(۰/۵)^۳\ \square\ (۰/۵)^۲$

ب) وقتی $۰<a<۱$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید.

$\sqrt[۳]{a}\ \square\ \sqrt{a}$ $a^۳\ \square\ a^۲$

پ) وقتی $a>۱$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در $\square$ قرار دهید.

$\sqrt[۳]{a}\ \square\ \sqrt{a}$ $a^۳\ \square\ a^۲$

۲ الف) یکی از علامت‌های $<=>$ را در $\square$ قرار دهید.

$(-۲)^۳\ \square\ (-۲)^۲$ $(-۰/۵)^۳\ \square\ (-۰/۵)^۲$

$(-۲)^۵\ \square\ (-۲)^۳$ $(-۰/۵)^۵\ \square\ (-۰/۵)^۳$

$(-۲)^۲\ \square\ (-۲)^۴$ $(-۰/۵)^۲\ \square\ (۰/۵)^۴$

۳ با توجه به تعریف ریشهٔ (اگر $\sqrt[n]{a} = b$ آنگاه $b^n = a$)، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به‌شرط با معنا بودن رادیکال) رابطه زیر برقرار است :

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

۴ آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر ۳،۴ یا ۵ بگیرید و به‌جای a و b مقدارهای عددی بدهید.

۵ عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

$$۵^{-۳} = \frac{۱}{۵^۳} = \left(\frac{۱}{۵}\right)^۳ \rightarrow \sqrt[۳]{۵^{-۳}} = \frac{۱}{۵}$$

$$\sqrt[۵]{۲^{-۵}} = \qquad \sqrt[۷]{\frac{۱}{۱۲۸}} = \qquad \sqrt[۴]{۳^{-۴}} =$$

۶ به‌جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید؛ به‌طوری که :

الف) تساوی $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ برقرار باشد.

ب) تساوی $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ برقرار نباشد.

درس سوم: توان‌های گویا

فعالیت

پدر محمد یک زیست‌شناس است و در یک آزمایشگاه پزشکی کار می‌کند. در آزمایشی یک نوع باکتری کشت داده شده که در شرایط مساعد، جرم این باکتری‌ها در هر ساعت ۲ برابر می‌شود. جرم باکتری‌ها در لحظهٔ شروع ۱ گرم است؛ بنابراین جرم باکتری‌ها پس از یک ساعت ۲ گرم، پس از ۲ ساعت برابر ۴ گرم، و پس از ساعت nام برابر 2^n گرم می‌شود :

$1, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots\ldots, 2^n$

محمد از پدرش پرسید : «آیا حتماً تا پایان ساعت باید منتظر بمانیم؟ آیا می‌توانیم جرم باکتری‌ها را پس از نیم ساعت محاسبه کنیم؟»

پدرش گفت : تو فکر می‌کنی جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟

محمد گفت : حدس می‌زنم جرم آنها $2^{\frac{1}{2}}$ گرم شده باشد. چون نیم همان $\frac{1}{2}$ است.

پدرش گفت : $2^{\frac{1}{2}}$ چقدر است؟

محمد گفت : نمی‌دانم ولی باید بتوانیم مقدار آن را پیدا کنیم.

اگر فرض کنیم در هر نیم‌ساعت جرم باکتری‌ها b برابر شود، در این‌صورت بعد از یک ساعت جرم باکتری‌ها باید برابر $b \times b = b^2$ شود. اما می‌دانیم پس از یک ساعت جرم باکتری‌ها دو برابر می‌شوند؛ پس $2 = b^2$؛ یعنی $b = \sqrt{2}$ (زیرا b مثبت است).

نتیجهٔ جالبی است! $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. مشابه این رابطه را می‌توانیم برای توان‌های دیگر نیز تعریف کنیم : $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ ، $2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$ ؛ همچنین برای عددهای دیگر $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$. می‌توانیم نماهای کسری با صورت ۱ را تعریف کنیم. a عددی حقیقی و مثبت است.

برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

در این کتاب اگر $a < 0$ ، $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف نمی‌کنیم. به عنوان مثال عبارت‌هایی مانند $(-1)^{\frac{1}{3}}$ و $(-2)^{\frac{1}{4}}$ را تعریف نمی‌کنیم. در تمام این فصل، در عبارت $a^{\frac{1}{n}}$، a را عددی مثبت درنظر می‌گیریم.

باکتری‌ها موجودات بسیار ریزی هستند که در انواع مختلف در همه جا حضور دارند. بیشتر باکتری‌ها در فاصله ۲۰ دقیقه به حداکثر رشد خود می‌رسند و می‌توانند شروع به تولید مثل کنند. در شرایط محیطی مناسب، باکتری با سرعت زیادی تکثیر می‌شود. مثلاً یک باکتری بعد از ۲۰ دقیقه به دو باکتری تبدیل می‌شود و بعد از ۲۰ دقیقهٔ دیگر به چهار باکتری تبدیل می‌شود و به همین ترتیب، در فاصله هر ۲۰ دقیقه، تعداد باکتری‌ها دو برابر می‌شود و به ترتیب ۸ و ۱۶ و ۳۲ و ۶۴ و ۱۲۸ و ۲۵۶ و ... باکتری پدید می‌آید. اگر این روش تکثیر باکتری‌ها ۲۴ ساعت ادامه یابد، از یک باکتری، توده‌ای از باکتری‌ها به وزن ۲۰۰۰ تن به وجود خواهد آمد. البتّه عملاً چنین اتّفاقی نمی‌افتد، زیرا در این صورت، آب و مواد غذایی لازم به زودی در محیط زندگی آنها تمام می‌شود و دیگر قادر به تولیدمثل بیشتر نخواهند بود. اگرچه بعضی از باکتری‌ها عامل فساد مواد غذایی و بیماری هستند؛ اما بسیاری از باکتری‌ها مفیدند. باکتری‌ها در تهیه فراورده‌های غذایی و شیمیایی و همچنین در شناسایی و استخراج معادن و پاکسازی محیط زیست کاربرد دارند. باکتری‌هایی نیز برای خالص سازی عناصر معدنی مانند مس و اورانیوم کاربرد دارند. همچنین باکتری‌ها در پاکسازی آب‌ها و خاک‌های آلوده به آلاینده‌های نفتی و شیمیایی کاربرد وسیعی دارند. باکتری‌ها نقش بسیار مهم در اکوسیستم جهانی (اکوسیستم‌های آبی و خشکی) دارند. مهم‌ترین راه دستیابی گیاهان به نیتروژن توسط برخی از باکتری‌ها صورت می‌گیرد.

فعالیت

هریک از عبارت‌های زیر را به شکل رادیکالی نوشته و در صورت امکان حاصل آنها را به‌دست آورید.

$۶۴^{\frac{۱}{۶}} =$ $\qquad$ $۳^{\frac{۱}{۲}} =$ $\qquad$ $۲^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲}$

$۸۱^{\frac{۱}{۴}} =$ $\qquad$ $۶۴^{\frac{۱}{۴}} =$ $\qquad$ $۵^{\frac{۱}{۷}} =$

فعالیت

حاصل $a^{\frac{m}{n}}$ که $a > ۰$ و m و n دو عدد طبیعی هستند را چگونه حساب می‌کنیم؟

در مبحث توان با نماهای طبیعی یادتان هست چگونه عمل کردیم؟

(قاعده ضرب توان) $\qquad ۲^۶ = ۲^{۲\times۳} = (۲^۲)^۳$

در مورد توان‌های گویا هم می‌توانیم به طریق مشابه عمل کنیم :

$$۵^{\frac{۸}{۳}} = ۵^{۸\times\frac{۱}{۳}} = (۵^۸)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۵^۸} \qquad ۲^{\frac{۲}{۳}} = ۲^{۲\times\frac{۱}{۳}} = (۲^۲)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲^۲}$$

به‌طور کلی :

هرگاه $a > ۰$ برای هر دو عدد طبیعی m و n، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می‌کنیم :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

اگر $a > ۰$ و n و m دو عدد طبیعی، $a^{\frac{m}{n}}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{۱}{n}})^m = (a^m)^{\frac{۱}{n}}$$

بنابراین : $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ همچنین $a^{-\frac{m}{n}}$ نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{۱}{a^{\frac{m}{n}}}$$

اکنون شما اعداد توان‌دار زیر را به شکل رادیکال بنویسید و در صورت امکان حاصل آنها را به‌دست آورید.

الف) $۵^{\frac{۲}{۵}}$ $\qquad$ ب) $۳^{\frac{۲}{۷}}$ $\qquad$ پ) $۸۱^{\frac{۳}{۴}}$

ت) $۱۶^{-\frac{۱}{۴}}$ $\qquad$ ث) $۴^{\frac{۳}{۲}}$

اگر r و s دو عدد گویا باشند، و a و b اعدادی مثبت باشند، داریم :

۱) $a^r \times a^s = a^{r+s}$ $\qquad$ ۲) $(a^r)^s = a^{rs}$

۳) $(ab)^r = a^r \times b^r$

کار در کلاس

۱ تساوی‌های زیر را مانند نمونه به‌صورت رادیکالی بنویسید.

$۳^{\frac{۵}{۴}} = \sqrt[۴]{۳^۵} = \sqrt[۴]{۳^۴ \times ۳} = \sqrt[۴]{۳^۴} \times \sqrt[۴]{۳} = ۳\sqrt[۴]{۳}$ $\qquad$ $۳^{\frac{۲}{۵}} = \sqrt[۵]{۳^۲}$

$(۴\times۲)^{\frac{۱}{۳}} =$ $\qquad$ $۲^{\frac{۲}{۳}} \times ۲^{\frac{۳}{۲}} =$ $\qquad$ $۴^{\frac{۱}{۵}} =$

$۶^{\frac{۳}{۸}} =$ $\qquad$ $(۱۶^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۳}{۴}} =$ $\qquad$ $۵^{-\frac{۴}{۳}} =$

۲ رادیکال‌ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

$\sqrt[۳]{۷^۲} =$ $\qquad$ $\sqrt{۲^۵} =$ $\qquad$ $\sqrt[۷]{۳^۲} = ۳^{\frac{۲}{۷}}$

$\sqrt[۵]{۲^۵} =$ $\qquad$ $\sqrt[۵]{۶۴} =$ $\qquad$ $\sqrt[۵]{۱۹} =$

۳ با استفاده از نمای کسری نشان دهید که $\sqrt[nm]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ است. تساوی را کامل کنید $(a>۰)$.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{۱}{n}}} = (a^{\frac{۱}{n}})^{\frac{۱}{m}} = a^{\frac{۱}{mn}} = \dots\dots$$

تمرین

۱ هر یک از توان‌های کسری زیر را به‌صورت رادیکال نوشته و در صورت امکان حاصل آنها را به‌دست آورید.

$۴^{\frac{۳}{۷}} =$ $\qquad$ $۵^{\frac{۱}{۲}} =$ $\qquad$ $۱۶^{\frac{۱}{۲}} =$

$۴^{\frac{۲}{۳}} =$ $\qquad$ $(۴^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۲}{۳}} =$ $\qquad$ $۳^{\frac{۱}{۳}} \times ۳^{\frac{۲}{۳}} =$

$۱۲۵^{-\frac{۲}{۳}} =$ $\qquad$ $۳۲^{\frac{۲}{۵}} =$ $\qquad$ $۳۲^{-\frac{۱}{۵}} =$

۲ می‌دانیم

$\sqrt[۱۲]{a^۴} = (a^۴)^{\frac{۱}{۱۲}} = a^{\frac{۴}{۱۲}} = a^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{a}$ $\qquad$ $\sqrt[۶]{a^۲} = a^{\frac{۲}{۶}} = a^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{a}$

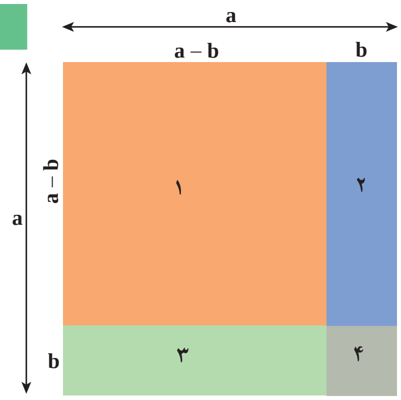
آیا تساوی $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ همواره برقرار است؟ $(a>۰)$ n،m و k طبیعی‌اند نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt[۴]{۲^۲}$ و $\sqrt[۶]{۲^۳}$ برابرند.

۳ فرض کنید a=۶۴، $r=\frac{۱}{۲}$ و $s=\frac{۱}{۳}$ مقدارهای عددی $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.
اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای a، r و s انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید. می‌توانید از ماشین حساب کمک بگیرید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴ حساب کنید.

$\sqrt{\sqrt{۸۱}} =$ $\qquad$ $\sqrt{\sqrt[۳]{۶۴}} =$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{\sqrt{۵}} =$

درس چهارم: عبارت‌های جبری



$S_۱ = (a - b)^۲$

$S_۱ = S - S_۲ - S_۳ - S_۴$

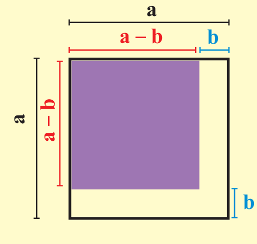
$= a^۲ - b(a-b) - b(a-b) - b^۲$

$= a^۲ - ۲ab + b^۲$

(۱) و (۲) $\Rightarrow (a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$

$a^۲ \underline{- ab} + b^۲ \underline{-ab} = a^۲ - ۲ab + b^۲$

$= (a-b)^۲$



فعالیت

در سال گذشته با برخی از اتحادهای جبری آشنا شده‌اید. می‌توانید بگویید چرا به تساوی

$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$ (۱)

اتحاد گفته می‌شود؟

در حقیقت می‌توان a و b را در دو طرف با هر دو عدد دلخواه جایگزین کرد و برای دو طرف یک عدد به‌دست آورد. برای مثال اگر $a = \frac{۱}{۵}$ و b=۳ اختیار شود.

$$(\frac{۱}{۵} + ۳)^۲ = (\frac{۱}{۵})^۲ + ۲ \times \frac{۱}{۵} \times ۳ + ۳^۲$$

$$(\frac{۱۶}{۵})^۲ = \frac{۱}{۲۵} + \frac{۶}{۵} + ۹ \rightarrow \frac{۲۵۶}{۲۵} = \frac{۲۵۶}{۲۵}$$

یا اگر در رابطهٔ (۱) به جای b، b− قرار دهیم، به‌دست می‌آوریم :

$(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$ (۲)

گاهی هم دو اتحاد (۱) و (۲) را با هم می‌نویسیم :

$(a \pm b)^۲ = a^۲ \pm ۲ab + b^۲$ (۳)

اکنون شما می‌توانید اتحادهای دیگری به‌دست آورید.

۱ با محاسبهٔ $(a+b)^۳$ اتحاد دیگری به‌دست می‌آید که به اتحاد مکعب مجموع مشهور است. جای خالی را در محاسبه تکمیل کنید.

$(a+b)^۳ = (a+b)^۲(a+b)$

$=(\qquad\qquad)(a+b) = ...$

که با جمع جملات متشابه در دو طرف دوم، اگر درست عمل کرده باشید، به‌صورت زیر در می‌آید.

$$(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$$

می‌توانیم b را در سرتاسر اتحاد فوق به b− تبدیل کنیم و اتحاد دیگری به‌دست آوریم :

$(a-b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲(-b) + ۳a(-b)^۲ + (-b)^۳$

$(a-b)^۳ = a^۳ - .... + ... - b^۳$

۲ یک بار دیگر $(a-b)^۳$ را از راه دیگر و با استفاده از اتحاد مربع تفاضل، یعنی اتحاد شمارهٔ (۲) محاسبه کنید.

$$(a-b)^۳ = (a-b)^۲(a-b)$$
$$=(\qquad\qquad)(a-b)=$$

۳ اگر ابتدا طرف دوم هر یک از اتحادهای ۴ گانهٔ فوق را بنویسیم، مثلاً

$$a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳=(a-b)(a-b)(a-b) \qquad (۴)$$

می‌گوییم عبارت سمت چپ؛ یعنی $a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳$ را به حاصل‌ضرب سه عبارت سمت راست تجزیه کرده‌ایم. هر یک از عبارت‌های $a-b$ را در (۴) یک عامل یا شمارنده تجزیه می‌نامیم. ممکن است عامل‌های تجزیه مساوی نباشند.

تجزیه برخی عبارت‌های جبری به دسته‌بندی مناسب جملات و مهارت‌های بیشتری نیاز دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

یادآوری

اتحادهایی که سال قبل خوانده‌اید.

$(a\pm b)^۲ = a^۲\pm ۲ab+b^۲$

$(a-b)(a+b) = a^۲-b^۲$

$(a+b+c)^۲ = a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲ac+۲bc$

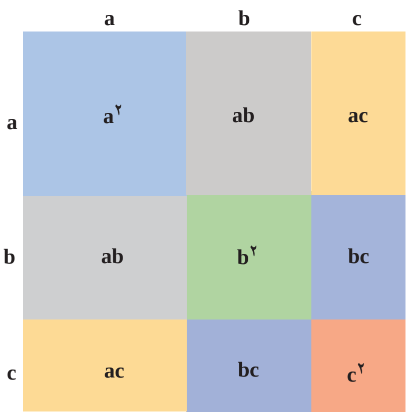
$(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$

مثال ۱

عبارت $۲x^۲+۳x+۱$ را تجزیه کنید.

می‌نویسیم :

$$۲x^۲+۳x+۱ = x^۲+۲x+۱+x^۲+x$$
$$=(x+۱)^۲+x(x+۱)$$
$$=(x+۱)(x+۱+x)=(x+۱)(۲x+۱)$$



$(a+b+c)^۲ = a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲ac+۲bc$

مثال ۲

عبارت $a^۳-۲ab+a^۲b-۲b^۲$ را تجزیه کنید :

$$a^۳-۲ab+a^۲b-۲b^۲ = a^۲(a+b)-۲b(a+b)$$
$$=(a+b)(a^۲-۲b)$$

کار در کلاس

۱ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید و ساده کنید.

$$(a+b)(a^۲-ab+b^۲) = a^۳-a^۲b+ab^۲+\ldots\ldots$$
$$(a-b)(a^۲+ab+b^۲) =$$

۲ با استفاده از پرسش ۱، عبارت‌های $a^۳+b^۳$ و $a^۳-b^۳$ را تجزیه کنید و اتحادهای جدیدی به‌دست آورید.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

۳ عبارت‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید.

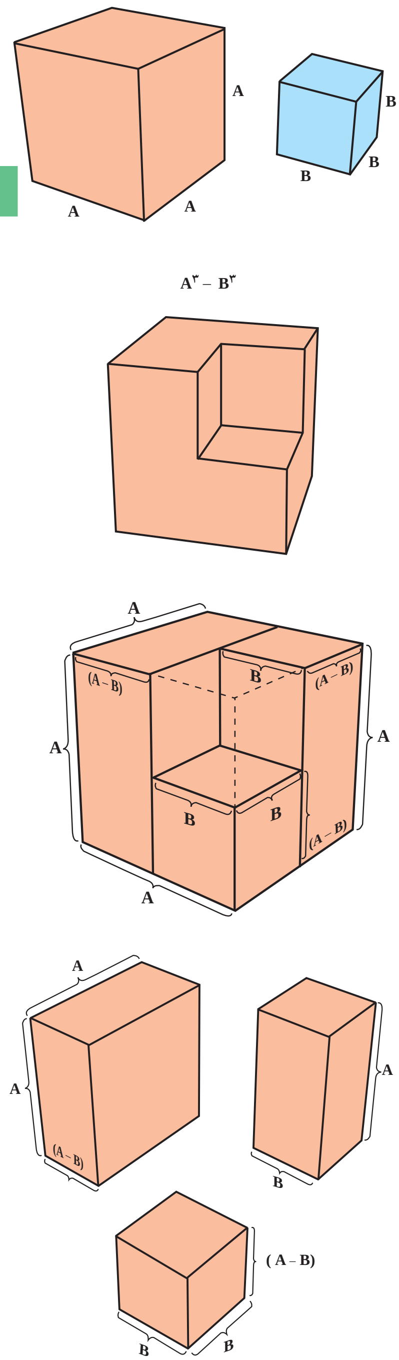
$$8x^3-27=(2x)^3-3^3$$
$$=(2x-3)[(2x)^2+2x\times 3+3^2]$$
$$=(2x-3)(4x^2+6x+9)$$

$x^3+1=$

$x^3-8=$

$x^3-125=$

$x^6-1=$



فعالیت

واژه‌های مضرب و شمارنده را در حساب اعداد به‌خاطر دارید :

$12=3\times 4$

هر یک از عددهای ۳ و ۴ را یک **شمارندهٔ** عدد ۱۲ و عدد ۱۲ را مضرب هر یک از این عددها می‌نامیم. ۱۲ شمارنده‌های دیگری نیز دارد، از جمله خود عدد ۱۲. عدد ۳ مضرب‌های دیگری دارد، از جمله خود عدد ۳ و همچنین هر یک از عددهای ۶، ۹، ۱۵ و … .

مشابه این در اتحاد مزدوج $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

هر یک از عبارت‌های $a-b$ و $a+b$ یک عامل a^2-b^2 است. همچنین a^2-b^2 هم مضرب $a-b$ و هم مضرب $a+b$ است.

آیا $a+b$ مضرب دیگری دارد؟

۱ مضرب‌های هر عبارت جبری از ضرب آن در عبارت‌های جبری دیگر به‌دست می‌آیند : $a+b$ و $2(a+b)$ و $(a+b)(a+b)^2$ و $-4(a+b)$ و $(a+b)(a-b)$ و......... بعضی از مضرب‌های $a+b$

بعضی از مضرب‌های $a-b$ را بنویسید.

۲ دو عبارت بنویسید که $a-b$ شمارنده هر یک از آنها باشد.

۳ عبارت $27a^3-1$ مضرب کدام یک از عبارت‌هاست؟

الف) $a-1$ ب) $3a-1$ پ) $9a^2+3a+1$

ت) $3a+1$

۴ کدام‌یک از عبارت‌های زیر گویا هستند؟

الف) $\dfrac{3x-\sqrt{7}}{x^2}$ ب) $\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$

پ) $\sqrt[3]{x}-1$ ت) $\sqrt[3]{x^2}+x-1$

نکته : یک عبارت گویا به ازای مقدارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می‌شود، تعریف نمی‌گردد. (مقدار ندارد)

۵ عبارت گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نمی‌شود؟

$$\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x^{۲}+۴}$$

۶ حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید و ساده کنید.

الف) $\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}+\frac{۲}{\sqrt{x}+۱}+\frac{۳}{x-۱}$

ب) $\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x^{۲}-۱}$

کار در کلاس

۱ صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید. (جاهای خالی را پر کنید)

الف) $\frac{x^{۶}+۱}{x^{۴}+۲x^{۲}+۱}$

ب) $\frac{x^{۳}-۱}{(x-۱)^{۳}}$

پ) $\frac{x^{۲}+۱}{x^{۴}-۱}$

ت) $\frac{y^{۵}-y^{۳}-۱۲y}{۸y^{۲}+۱۶y}=\frac{y(y^{۴}-y^{۲}-۱۲)}{۸y(y+۲)}=\frac{y(y^{۲}-۴)(y^{۲}+۳)}{۸y(y+۲)}=\dots\dots$

۲ در اتحاد

$$a^{۳}+۱=(a+۱)(a^{۲}-a+۱)$$

قرار دهید $a=\sqrt[۳]{x^{۲}}$ و حاصل را بازنویسی کنید :

$$(\sqrt[۳]{x^{۲}})^{۳}+۱=(\sqrt[۳]{x^{۲}}+۱)(\qquad\qquad\qquad)$$

گویا کردن مخرج کسرها

فعالیت

۱ از سال گذشته به یاد داریم که برای گویا کردن مخرج کسرهایی که شامل یک عبارت رادیکالی هستند، می‌توانیم آن کسر را دریک عبارت رادیکالی مناسب، ضرب و تقسیم کنیم تا مخرج کسر گویا شود. در زیر کسرهای $\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}$ و $\frac{۲}{\sqrt[۳]{۴}}$ گویا شده‌اند. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پرکنید.

$$\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{\dots}{\dots}$$

$$\frac{۲}{\sqrt[۳]{۴}}=\frac{۲}{\sqrt[۳]{۴}}\times\frac{\dots}{\sqrt[۳]{۴^{۲}}}=\frac{\dots}{\dots}$$

۲ دو عبارت مانند $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ که شامل مجموع و تفاضل دو قسمت یکسان هستند را مزدوج یکدیگر می‌گوییم.
حاصل‌ضرب این دو عبارت را می‌توانیم به‌صورت زیر محاسبه کنیم :

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^{۲}-(\sqrt{b})^{۲}=a-b$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، سمت راست تساوی بالا فاقد یک عبارت رادیکالی است. از این روش برای گویا کردن مخرج کسرها استفاده می‌کنیم. به‌عنوان مثال، برای گویا کردن $\frac{۲}{\sqrt{۳}+۵}$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\frac{۲}{\sqrt{۳}+۵}=\frac{۲}{\sqrt{۳}+۵}\times\frac{\sqrt{۳}-۵}{\sqrt{۳}-۵}=\frac{۲(\sqrt{۳}-۵)}{(\sqrt{۳})^{۲}-۵^{۲}}=\frac{۲(\sqrt{۳}-۵)}{۳-۲۵}=\frac{۵-\sqrt{۳}}{۱۱}$$

مانند نمونه بالا، مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{۱}{\sqrt{۵}-\sqrt{۳}}=$

ب) $\frac{۸}{۳\sqrt{۲}+۴}=$

پ) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=$

ت) $\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}=$

۳ از اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب‌ها که به‌صورت زیر هستند، برای گویا کردن کسرهایی مانند $\frac{۱}{\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}}$ و $\frac{۱}{\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}}$ استفاده می‌کنیم. در هرکدام از اتحادهای زیر، قرار دهید $x=\sqrt[۳]{a}$ ، $y=\sqrt[۳]{b}$ و آنها را بازنویسی کنید.

$$\begin{cases}(x-y)(x^{۲}+xy+y^{۲})=x^{۳}-y^{۳}\\(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})(\ldots\ldots\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+y)(x^{۲}-xy+y^{۲})=x^{۳}+y^{۳}\\(\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b})(\ldots\ldots\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

آیا سمت راست تساوی‌های بالا، شامل یک عبارت رادیکالی است؟

برای گویا کردن مخرج کسرهای $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}$ و $\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}-۱}$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{۲^{۲}}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{\sqrt[۳]{۲^{۲}}+\sqrt[۳]{۲}+۱}=\frac{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{(\sqrt[۳]{۲})^{۳}-۱^{۳}}=\frac{\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱}{۲-۱}=\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}+۱$$

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}-۱}=\frac{((\sqrt[۳]{x^۲})^۲+\sqrt[۳]{x^۲}+۱)}{(\sqrt[۳]{x^۲}-۱)((\sqrt[۳]{x^۲})^۲+\sqrt[۳]{x^۲}+۱)}=\frac{((\sqrt[۳]{x^۲})^۲+\sqrt[۳]{x^۲}+۱)}{(x^۲-۱)}$$

مانند نمونه بالا، مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}+۱}=$

ب) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۷}-\sqrt[۳]{۳}}=$

پ) $\frac{x+۸}{\sqrt[۳]{x}+۲}=$

ت) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}+۱}=$

تمرین

۱ هریک از عبارت‌های زیر را تاحدممکن (به عبارت‌های گویا) تجزیه کنید.

الف) $x^۴-y^۴$ ب) $x^۶-y^۶$ پ) $۸a^۳+۲۷$ ت) $a^۳b^۶-۸$

۲ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{۳}{۳+\sqrt{۷}}$ ب) $\frac{۸}{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}$ پ) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-۲}$ ت) $\frac{۶}{۲\sqrt[۳]{۲}-۱}$

۳ با استفاده از اتحادها، حاصل‌ضرب‌های زیر را مانند نمونه به‌دست آورید.

الف) $۱۶\times۱۴=(۱۵+۱)(۱۵-۱)=۱۵^۲-۱=۲۲۴$ ب) $۱۰۵^۲$ پ) $۹۹۹^۲$ ت) $۱۰۵^۳$

۴ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{۵x}{x-۱}-\frac{۲}{\sqrt{x}+۱}+\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}$ ب) $\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}$

۵ اگر $\sqrt{x-۴}+\sqrt{x+۲}=۳$ ، حاصل عبارت $\sqrt{x-۴}-\sqrt{x+۲}$ را به‌دست آورید.

خواندنی

❊ سه عدد ۴، ۳ و ۵ را یک سه‌تایی فیثاغورسی می‌نامیم، زیرا

$$۵^{۲}=۴^{۲}+۳^{۲}$$

یک سه تایی دیگر مثال بزنید. چند تا از این‌گونه سه‌تایی‌ها را می‌توانید شناسایی کنید؟

❊ (جادوی توان) محاسبات نشان می‌دهد :

$$(۱/۰۱)^{۳۶۵}=۳۷/۸$$

$$(۰/۹۹)^{۳۶۵}=۰/۰۳$$

چرا اینقدر اختلاف وجود دارد؟ حال $(۱/۰۱)^{۷۳۰}$ و $(۰/۹۹)^{۷۳۰}$ را محاسبه و مقایسه کنید.

اگر هر روز اندکی کار خود را نسبت به روز قبل بهتر کنیم، در سال حدود ۴۰ برابر راندمان (بهره‌وری) کار افزایش می‌یابد.

شما هم داستانی در باب توان‌ها بنویسید.

❊ (مثلث خیام)

$$(a+b)^{۱} = a + b$$

$$(a+b)^{۲}=a^{۲} + ۲ab + b^{۲}$$

$$(a+b)^{۳}=a^{۳} + ۳a^{۲}b + ۳ab^{۲} + b^{۳}$$

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

چه رابطه‌ای بین ضرایب در بسط اتحادها و سطرهای مثلث خیام وجود دارد؟

می‌توانید توان چهارم دوجمله‌ای را حساب و ضرایب بسط را مشخص کنید.

$$(a+b)^{۴}=(a+b)^{۳}(a+b)$$

$$=(\qquad\qquad)(a+b)$$

$$=$$