

شمارشی، بدون شمردن

وَإِنْ تَعُدُّوا نِعْمَةَ اللَّهِ لَا تُحْصُوهَا «سورة ابراهيم آیه ۳۴»
 و اگر بخواهید نمی توانید نعمت های خدا را بشمارید.



داشتن حداقل چند رنگ کافی است تا هر نقشه‌ای را بتوان به گونه‌ای رنگ آمیزی کرد که هیچ دو ناحیه هم مرزی هم رنگ نباشند؟

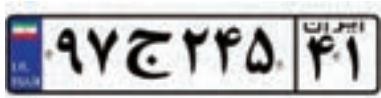
درس اول شمارش

درس دوم جایگشت

درس سوم ترکیب

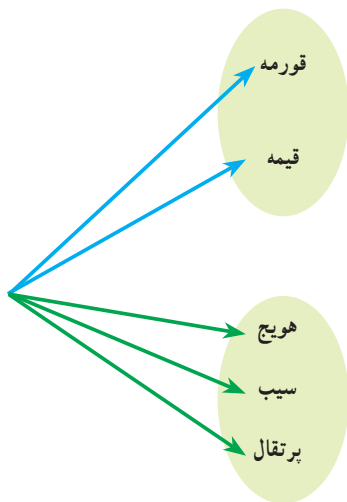
درس اول: شمارش

شاید شمارش در نظر برخی افراد، یک مهارت با اهمیت ریاضی نباشد و تنها یک عمل ساده باشد؛ اما آیا واقعاً شمردن همیشه آسان است؟ می‌دانید که دو اتومبیل نباید پلاک یکسان داشته باشند. با پلاک‌هایی به صورت مقابل، با استفاده از حروف و اعداد، چند اتومبیل را می‌توان شماره گذاری کرد؟



اصل جمع و اصل ضرب

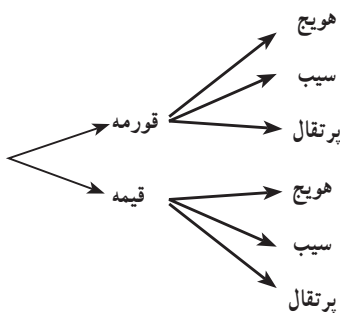
فعالیت



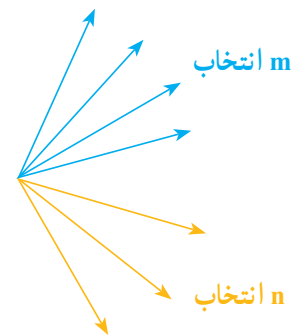
۱ امین قصد دارد به خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا، شیرینی بدهد. او با خود فکر می‌کند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران «یا» آب‌میوه‌فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی از ۲ نوع غذای چلوخورشت قورمه سبزی و قیمة را می‌تواند انتخاب کند و اگر به آب‌میوه‌فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آب‌میوه هویج، سیب و پرتقال را می‌تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟

۲ هفته بعد پوریا قصد دارد به خاطر تولدش امین را دعوت کند. اما او می‌خواهد امین را هم به آن رستوران «و» هم به آن آب‌میوه‌فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آب‌میوه‌فروشی هم یک انتخاب به او بدهد. امین چند نوع انتخاب خواهد داشت؟

۳ چه تفاوتی در دو سؤال بالا وجود داشت که باعث شد تعداد حالت‌های موجود در دو مثال متفاوت باشد؟



۴ در هر یک از دو سؤال بالا چه رابطه‌ای بین تعداد گزینه‌های فهرست‌های انتخابی رستوران و آب‌میوه‌فروشی و تعداد حالات جواب وجود دارد؟ چرا؟



اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m+n$ روش وجود دارد.

«توجه کنید که نهایتاً قرار است کار مورد نظر فقط با یکی از شیوه‌ها انجام شود. مثلاً در قسمت اول فعالیت قبل، امین فقط یکی از کارهای «دعوت به رستوران یا دعوت به آب‌میوه‌فروشی» را انجام می‌دهد.»

تعمیم اصل جمع: اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد، به طوری که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب، ... و در روش k ام m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ روش وجود دارد.

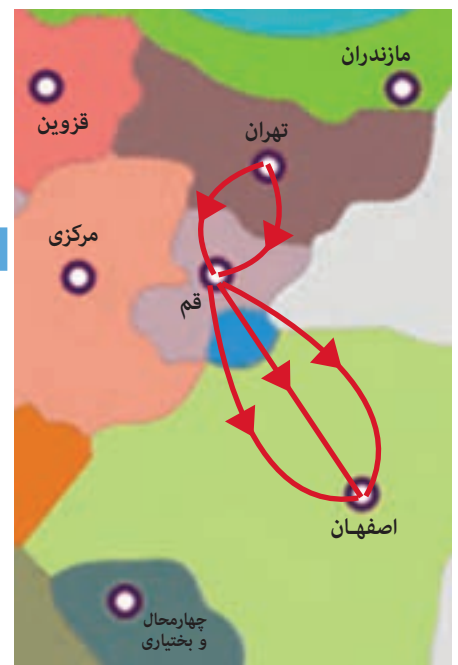
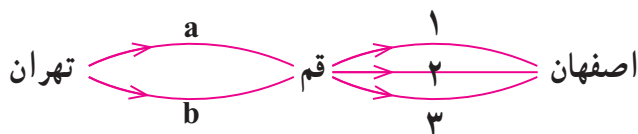
اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول m روش و برای هر کدام از این m روش، مرحله دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

«توجه کنید که هر دو مرحله باید انجام پذیرد. مثلاً در مثال ۲ هم دعوت به رستوران که مرحله اول است انجام می‌گیرد و هم دعوت به آب‌میوه‌فروشی که مرحله دوم است، صورت می‌پذیرد.»

مثال

فردی می‌خواهد با اتومبیل خود از تهران به اصفهان برود و برای این کار قصد دارد از قم عبور کند. اگر از تهران به قم دو مسیر a و b و از قم به اصفهان سه مسیر ۱ و ۲ و ۳ وجود داشته باشند، این فرد به چند طریق می‌تواند از تهران به اصفهان سفر کند؟
 حل: طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها $۲ \times ۳ = ۶$ است که عبارت‌اند از:

- $a, ۱$ $a, ۲$ $a, ۳$
- $b, ۱$ $b, ۲$ $b, ۳$





تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد؛ به طوری که برای انجام مرحله اول m_1 روش، برای انجام مرحله دوم m_2 روش، ... و برای انجام مرحله k ام m_k روش وجود داشته باشد (با فرض اینکه در هر مرحله انتخاب تمام روش‌های آن مرحله ممکن باشد)، کار مورد نظر با $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ روش قابل انجام است.

کار در کلاس

۱ پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخه گل» یا «یک نوع شیرینی» برای بردن به خانه دوستش فکر می‌کند. گل‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌اند از: مریم، گلایل، زنبق و رُز. شیرینی‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌اند از: گردویی، نارگیلی و کشمشی. او چند انتخاب دارد؟

۲ هفته بعد پژمان می‌خواهد به دیدن خانه جدید یکی از دوستانش برود. او این بار می‌خواهد «یک شاخه گل» و «یک نوع شیرینی» بخرد و همان گزینه‌ها را در ذهن دارد. او این بار به چند حالت می‌تواند خرید کند؟ آنها را بنویسید.

۳ در هر یک از قسمت‌های (۱) و (۲) از چه اصلی استفاده کردید؟ چرا؟

۴ دو مسئله طرح کنید که یکی با اصل جمع و یکی با اصل ضرب حل شود.

در برخی مسائل لازم است از هر دو اصل جمع و ضرب استفاده شود.

مثال

فردی می‌خواهد از تهران به اصفهان برود. او قصد دارد با اتوبوس خود یا با قطار این سفر را انجام دهد. اگر با اتوبوس خود به این سفر برود، مسیرها و انتخاب‌های او مانند مثال قبل است و اگر تصمیم بگیرد با قطار برود، سه نوع قطار می‌تواند انتخاب کند. او در کل چند انتخاب دارد؟

حل: اگر با اتوبوس برود، طبق اصل ضرب به ۶ طریق ممکن است و اگر قطار را انتخاب کند سه طریق. لذا طبق اصل جمع در کل ۹ انتخاب دارد. با رسم یک شکل این پاسخ را توجیه کنید.

مثال: رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هر کدام می‌توانند از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

حل:

حالت اول: اگر گزینه سمت چپ حرف فارسی باشد: $32 \times 26 \times 32 = 26624$

حالت دوم: اگر گزینه سمت چپ حرف انگلیسی باشد: $26 \times 32 \times 26 = 21632$

تعداد حالات ممکن: $26624 + 21632 = 48256$

کار در کلاس

الف) با سه رقم ۵ و ۳ و ۲ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ به‌طور مثال ۲۳۵ و ۳۳۵ و ۳۳۵ سه نمونه از این اعدادند. برای این کار می‌توان نوشتن عدد سه رقمی را به‌صورت پرکردن سه جایگاه مقابل با ارقام مذکور در نظر گرفت.



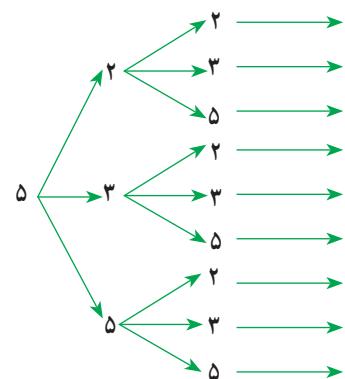
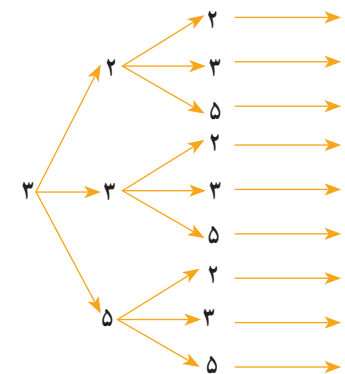
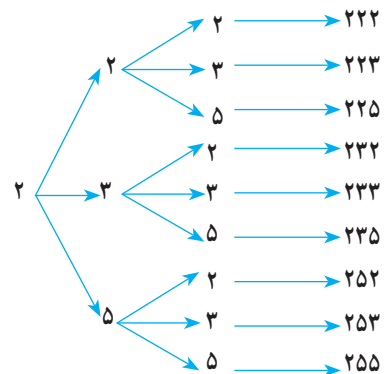
پس این کار سه مرحله دارد و هر سه مرحله آن باید انجام شود، برای به‌دست آوردن جواب، تعداد راه‌های پرکردن هر جایگاه باید مشخص شود و با استفاده از اصل ضرب در هم ضرب شود.

هر جایگاه را به سه حالت می‌توان پر کرد؛ لذا ۲۷ عدد وجود دارد.

۲۷۳۱۵ ۲۷۳۱۵ ۲۷۳۱۵

تعداد حالت‌ها = $\dots \times \dots \times \dots$

با نمودار درختی در سال‌های پیش آشنا شده‌اید. از این نمودار نیز می‌توان برای به‌دست آوردن تعداد اعداد مورد نظر و نیز نوعی از نمایش آنها استفاده کرد. به نمودار درختی کشیده شده در حاشیه صفحه دقت و آن را تکمیل کنید.



ب) با همان سه رقم چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟

۱- برای پرکردن جایگاه اول از سمت چپ (صدگان) چند حالت امکان دارد؟



تعداد حالت‌ها →

۲- حال فرض کنیم یکی از اعداد را در اولین جایگاه گذاشته‌ایم. برای پرکردن جایگاه دوم چند حالت امکان دارد؟



تعداد حالت‌ها →

یک عدد قرار گرفته است	یک عدد قرار گرفته است	_____
تعداد حالت ها →		

۳- برای پرکردن جایگاه سوم چند حالت وجود دارد؟
 لذا $..... \times \times =$ عدد سه رقمی توسط ۲ و ۳ و ۵ با ارقام غیر تکراری وجود دارد.

پ با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج می توان نوشت؟

_____	_____	_____
-------	-------	-------

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می تواند پر شود، به گونه ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟

۲- دو جایگاه دیگر هر یک به چند روش می توانند، پر شوند؟

لذا تعداد اعداد در این حالت برابر است با $..... \times \times =$

ت با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

_____	_____	_____
-------	-------	-------

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می تواند پر شود به گونه ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟

۲- پس از پرکردن جایگاه سمت راست، جایگاه سمت چپ، به چند طریق می تواند پر شود؟

۳- حال جایگاه وسط به چند طریق می تواند پر شود؟

۴- لذا تعداد اعداد مورد نظر در این حالت برابر است با $..... \times \times =$

مثال

با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و ۰

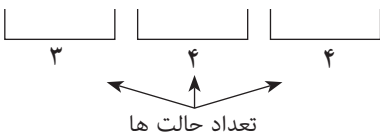
الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

پ) چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

ت) چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

حل :



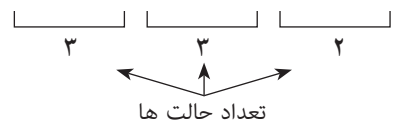
الف) با توجه به اصل ضرب و چون رقم صفر در جایگاه صدگان نمی تواند باشد؛ بنابراین تعداد حالت ها مطابق شکل مقابل است.

لذا 48 عدد سه رقمی با ارقام مذکور می توان نوشت.

$$3 \times 4 \times 4 = 48$$

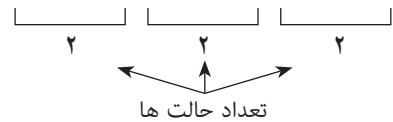
ب) طبق اصل ضرب و با توجه به اینکه رقم صفر در سمت چپ نمی‌تواند بیاید و ارقام نباید تکراری باشند؛ لذا تعداد حالت‌ها مطابق شکل مقابل است؛ بنابراین ۱۸ عدد می‌توان نوشت.

$$3 \times 3 \times 2 = 18$$



پ) با توجه به اینکه رقم سمت راست باید ۳ یا ۷ باشد و رقم صفر هم نمی‌تواند رقم سمت چپ باشد؛ لذا تعداد حالت‌ها به صورت مقابل است.

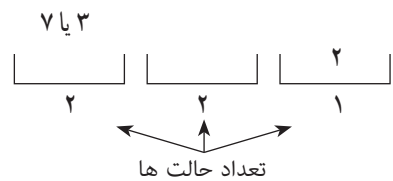
$$2 \times 2 \times 2 = 8$$



ت) چون عدد مورد نظر باید زوج باشد؛ لذا رقم سمت راست باید ۰ یا ۲ باشد و چون در حالتی که رقم ۲ سمت راست باشد، رقم ۰ سمت چپ هم نمی‌تواند باشد، لذا باید دو حالت زیر را در نظر بگیریم و طبق اصل جمع تعداد حاصل در دو حالت را با هم جمع کنیم.

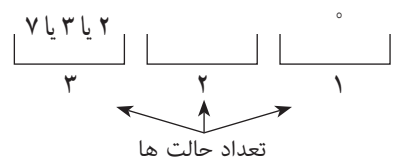
حالت اول: اگر رقم سمت راست ۲ باشد؛ یعنی رقم سمت راست یک حالت می‌تواند باشد؛ لذا طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها به صورت مقابل است.

$$2 \times 2 \times 1 = 4$$



حالت دوم: اگر رقم سمت راست ۰ باشد، حالت‌های جایگاه‌ها به صورت مقابل است.

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$



لذا در کل ۱۰ عدد می‌توان نوشت.

راه حل دوم: با توجه به صورت سؤال‌های (ب)، (پ) و (ت) می‌توان به صورت زیر جواب را حساب کرد:

$$10 = 18 - 8 = 10 \text{ (جواب قسمت پ) - جواب قسمت ب) = جواب قسمت ت)}$$

تمرین

۱) تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به دست آورید.
 مشخص کنید برای این کار از اصل جمع استفاده می‌شود یا از اصل ضرب یا از هر دو.
 الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است.
 ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینه اول یک عدد و گزینه دوم یک حرف الفبای فارسی است.

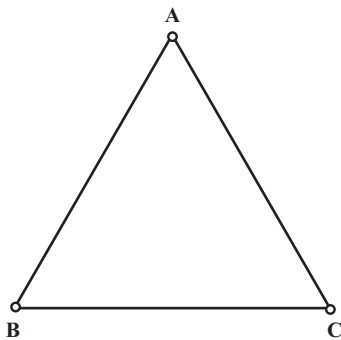
پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه‌ها یک عدد و گزینه دیگر یک حرف الفبای فارسی است.

ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی اند.

ث) این رمز از ۴ گزینه تشکیل شده است که دو گزینه اول اعداد غیر تکراری و دو گزینه دوم حروف انگلیسی غیر تکراری اند.

۲) در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چند تاست؟

۳) می خواهیم رأس های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.

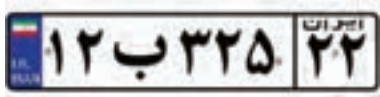


الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

ب) به چند طریق می توان این رنگ آمیزی را انجام داد، به گونه ای که رأس هایی که به هم وصل اند، هم رنگ نباشند.

پ) هر دو قسمت الف) و ب) را در حالی که از سه رنگ مختلف استفاده می کنیم، بررسی کنید.

۴) با پلاک هایی به صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آنها از مجموعه A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعه B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه C انتخاب شود، چند ماشین را می توان شماره گذاری کرد؟



$$A = \{11, 22, \dots, 99\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$C = \{ي, ه, و, ن, م, ل, ق, ط, ص, س, د, ج, ب\}$$

۵) در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می شود.

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟

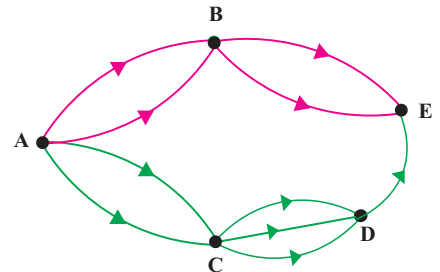
ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می شود؟

پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می شود؟



۶ یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر:
 الف) اگر مجبور باشد به همه سؤال‌ها جواب دهد؟
 ب) بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

۷ اگر شکل مقابل نشان دهنده جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همه جاده‌ها یک طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟



۸ مسئله زیر را به گونه‌ای کامل کنید که جواب ارائه شده، درست باشد.
 مسئله: چند عدد دورقمی زوج می‌توان نوشت؛ به طوری که.....؟

حل: تعداد راه‌های نوشتن یکان برابر ۵ تاست و تعداد راه‌های نوشتن دهگان برابر ۴ تاست. لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

۹ مسئله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هر دوی آنها حل شود و جواب آن به صورت زیر باشد.

$$2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 = 35$$



a	b	c
a	c	b



درس دوم: جایگشت

جایگشت

سه فیش و سه درگاه مانند شکل مقابل وجود دارند که باعث اتصال دو دستگاه الکتریکی به هم می‌شوند. برای اتصال درست دو دستگاه، باید هر فیش به درگاه مخصوص به خود وصل شده باشد. چند حالت مختلف برای اتصال سه فیش به سه درگاه وجود دارد؟ بین تمام حالت‌ها فقط یکی منجر به کارکردن درست دستگاه می‌شود. آیا می‌دانید برای راحت‌تر پیدا کردن حالت درست، شرکت‌های تولیدی چگونه عمل می‌کنند؟

فعالیت

۱ فرض کنید فیش‌ها را a و b و c بنامیم. حالت‌های مختلف قرار دادن آنها را در مربع‌های زیر بنویسید.

۲ آیا در سه مربع به هم چسبیده، حرفی می‌تواند تکرار شود؟

۳ با توجه به اصل ضرب چگونه می‌توان تعداد این چینش‌ها را به دست آورد؟

فعالیت

به چند حالت مختلف می‌توان چهار عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را کنار هم قرار داد؟ می‌خواهیم مسئله قبل را با استفاده از اصل ضرب حل کنیم. فرض کنید ۴ مربع به صورت مقابل وجود دارد که پر کردن هر کدام از مربع‌ها یک مرحله از چینش است. واضح است که هر چهار مرحله باید انجام شود؛ لذا تعداد حالت‌های ممکن برای پر کردن مربع‌ها باید در هم ضرب شود.

۱ اولین مربع (مثلاً مربع سمت چپ) به چند روش می‌تواند پر شود؟

– پس از پر شدن اولین مربع چند عدد چیده نشده باقی مانده است؟

– حال دومین مربع را به چند روش می‌توان پر کرد؟ سومین و چهارمین مربع را چطور؟

– حال با توجه به اصل ضرب، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با

.....×.....×.....×.....

«اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آنها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم.»

بنابراین تعداد راه‌های چیدن چهار شیء متمایز یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز عبارت است از حاصل ضرب

۲ به نظر شما تعداد روش‌های چیدن پنج حرف یونانی α و β و γ و δ و θ (به ترتیب آلفا، بتا، گاما، دلتا و تتا خوانده می‌شوند) کنار هم و بدون تکرار، یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز چندتاست؟

۳ تعداد کلمات هفت حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»، «ش»، «و»، «ا»، «ن»، «پ» و «ه» می‌توان ساخت چندتاست؟ (بدون تکرار حروف)

۴ با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۵ تعداد جایگشت‌های 10 شیء متمایز چندتاست؟

۶ اگر n یک عدد طبیعی باشد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز را با یک حاصل ضرب نشان دهید.

معرفی یک نماد

اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به صورت $n!$ (n فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. به طور مثال $1! = 1$ ، $2! = 1 \times 2$ ، $3! = 1 \times 2 \times 3$ و الی آخر قرار داد: $0! = 1$.

حال با توجه به این نماد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با

کار در کلاس

۱ مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید.

الف) $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times 5!$

ب) $8!$

پ) $10!$

ت) $n!$

۲ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{5!}{4!} = \frac{5 \times \overbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}^{4!}}{4!} = 5$

ب) $\frac{10!}{9!}$

پ) $\frac{n!}{(n-1)!}$

ت) $\frac{8!}{6!}$

ث) $\frac{10!}{8!}$

ج) $\frac{n!}{(n-2)!}$

چ) $\frac{8!}{5!}$

ح) $\frac{10!}{7!}$

خ) $\frac{n!}{(n-3)!}$

د) $\frac{n!}{(n-4)!}$

ذ) $\frac{n!}{(n-5)!}$

ر) $\frac{n!}{(n-k)!}$

۳ حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف) $9 \times 8 = \frac{9!}{7!}$

ب) $9 \times 8 \times 7 \times 6$

پ) $11 \times 10 \times 9$

ت) ۸

ث) $n(n-1)$

ج) $n(n-1)(n-2)(n-3)$

فعالیت

۱ تعداد کلمات هفت حرفی که بدون تکرار حروف با حروف a, b, d, e, f, s, t می‌توان نوشت؛ یعنی تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز برابر است با

۲ حال با توجه به اصل ضرب می‌خواهیم تعداد کلمات سه حرفی با حروف متمایز را که با همان هفت حرف بالا می‌توان نوشت، به دست آوریم.
• برای انتخاب اولین حرف از حروف کلمه سه حرفی چند انتخاب داریم؟ برای انتخاب دوم و سوم حرف چطور؟
• بنابراین تعداد کلمات سه حرفی مورد نظر برابر است با

در واقع آنچه به دست آمد، تعداد راه‌های چیدن سه شیء از هفت شیء متمایز یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های سه تایی از هفت شیء متمایز است.

۳ تعداد جایگشت‌های چهار تایی از نه شیء متمایز را به دست آورید.

۴ اعداد به دست آمده در مراحل ۲ و ۳ را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

۵ تعداد جایگشت‌های سه تایی از n شیء متمایز را به دست آورید و آن را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

۶ تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز ($0 \leq r \leq n$) را به دست آورید و آن را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد، با $p(n,r)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال

با حروف کلمه «جهانگردی» و بدون تکرار حروف :

- الف) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آنها به «ی» ختم می شود؟
- ب) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟
- پ) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آنها به «گردی» ختم می شوند؟
- ت) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» چهار حرف اول باشند؟
- ث) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» کنار هم باشند؟
- ج) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟

حل :

الف) برای نوشتن تمام کلمات ۸ حرفی بدون حروف تکراری با این ۸ حرف کافی است تعداد جایگشت های ۸ شیء متمایز را به دست آوریم؛ لذا جواب برابر ۸! است. در حالتی که حرف آخر «ی» باشد، کافی است تعداد جایگشت های هفت حرف دیگر را به دست آوریم؛ لذا در این حالت جواب برابر ۷! است.

ب) حروف «د» و «ی» به دو حالت «دی» و «ید» می توانند کنار هم بیایند. برای پیدا کردن تعداد کلماتی که در آنها این دو حرف به صورت «دی» در کنار هم آمده اند، کافی است این دو حرف را یک حرف در نظر بگیریم؛ لذا کافی است تعداد جایگشت های هفت شیء متمایز را به دست آوریم که برابر است با ۷!. چون همین تعداد هم برای حالت «ید» وجود دارد پس جواب کلی برابر است با $2 \times 7!$.

پ) تعداد کلمات شش حرفی برابر است با تعداد جایگشت های شش تایی از هشت شیء متمایز یعنی $P(8,6) = \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8!}{2!}$ در حالتی که کلمه بخواهد به «گردی» ختم شود، با توجه به اینکه چهار حرف آخر مشخص اند؛ لذا فقط باید تعداد حالت های نوشتن دو حرف اول توسط حروف کلمه «جهان» را به دست آورد که برابر است با تعداد جایگشت های دوتایی از چهار

$$P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!} = 12 \text{ یعنی: } 12$$

ت) چهار حرف اول، حروف کلمه «جهان» هستند که به $4!$ حالت می‌توانند بیایند. حال 4 حرف آخر را باید با 4 حرف باقی‌مانده (گ ر د ی) نوشت که این کار را هم به $4!$ روش می‌توان انجام نمود. بنابراین طبق اصل ضرب، نوشتن کلمه مورد نظر به $4! \times 4!$ روش می‌تواند انجام شود.

ث) تعداد حالت‌های قرار گرفتن حروف کلمه «جهان» در کنار هم برابر است با تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز یعنی $4!$. حال هر کدام از این جایگشت‌ها را که در نظر بگیریم، برای نوشتن کلمه 8 حرفی کافی است این چهار حرف کنار هم قرار گرفته (چهار حرف کلمه «جهان») را یک حرف حساب کنیم؛ بنابراین کافی است تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز را حساب کنیم که برابر است با $5!$. پس طبق اصل ضرب جواب برابر است با: $4! \times 5!$.
ج) حروف اول باید یکی از سه حرف «ج»، «ن» و «ب» باشد. پس 3 انتخاب برای حرف اول داریم. حال با انتخاب هر کدام از این 3 حرف برای چینش 7 حرف دیگر $7!$ وجود دارد بنابراین جواب برابر است با: $3 \times 7!$.

کار در کلاس

۱ یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش‌رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چینش این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

۲ با عددهای 5 و 3 و 2 و 1 چند عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟



تمرین

۱ در یک لیگ فوتبال 18 تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

۲ از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار 210 تا باشد، تعداد کتاب‌ها چند تاست؟

۳ کدام یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

$$6! = 3! + 3!$$

$$6! = 6 \times 5!$$

$$8! = 4! \times 2!$$

$$2 \times 3! = 6!$$

$$(3!)^2 = 9!$$

$$4! = \frac{8!}{2!}$$

۴ در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام اند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

۵ با حروف کلمه «گل پیرا» و بدون تکرار حروف الف) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آنها با «گل» شروع می شود؟
 ب) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت؟
 پ) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟
 ت) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟
 ث) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «پیرا» کنار هم آمده باشند؟



درس سوم: ترکیب

فعالیت

۱ همان طور که دیدید، با پنج رقم ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵ تعداد $5! = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$ عدد سه رقمی با رقم‌های غیر تکراری می‌توان نوشت که عبارت‌اند از:

۱۲۳	۱۲۴	۱۲۵	۱۳۴	۱۳۵	۱۴۵	۲۳۴	۲۳۵	۲۴۵	۳۴۵
۱۳۲	۱۴۲	۱۵۲	۱۴۳	۱۵۳	۱۵۴	۲۴۳	۲۵۳	۲۵۴	۳۵۴
۲۱۳	۲۱۴	۲۱۵	۳۱۴	۳۱۵	۴۱۵	۳۲۴	۳۲۵	۴۲۵	۴۳۵
۲۳۱	۲۴۱	۲۵۱	۳۴۱	۳۵۱	۴۵۱	۳۴۲	۳۵۲	۴۵۲	۴۵۳
۳۱۲	۴۱۲	۵۱۲	۴۱۳	۵۱۳	۵۱۴	۴۲۳	۵۲۳	۵۲۴	۵۳۴
۳۲۱	۴۲۱	۵۲۱	۴۳۱	۵۳۱	۵۴۱	۴۳۲	۵۳۲	۵۴۲	۵۴۳

به شش عدد هر ستون نگاه کنید. چه ویژگی‌ای دارند؟

۲ با توجه به ستون‌های جدول بالا چگونه می‌توانیم تمام زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ را بنویسیم؟ این زیرمجموعه‌ها چندتا هستند؟ آنها را بنویسید.

..... و $\{1, 2, 3\}$

۳ چه تفاوتی در فعالیت ۱ و ۲ وجود داشت که تعداد حالت‌های مورد نظر آنها را متمایز کرد؟

۴ هر ستون در فعالیت ۱ چند زیرمجموعه سه عضوی از فعالیت ۲ را به دست می‌دهد؟

۵ با توجه به فعالیت ۴، از تقسیم جواب فعالیت ۱ بر چه عددی تعداد زیرمجموعه‌های فعالیت ۲ حاصل می‌شود؟ این عدد را چگونه می‌توان به دست آورد؟

نتیجه: همان طور که مشاهده کردید، در فعالیت ۱ ترتیب قرار گرفتن هر سه عدد انتخاب شده در کنار هم اهمیت دارد؛ اما در فعالیت ۲ تمام ۶ روش چینش هر سه عدد انتخاب شده یک زیرمجموعه سه عضوی از مجموعه A را مشخص می‌کند؛ یعنی در واقع هر زیرمجموعه سه عضوی، یک حالت را مشخص می‌کند و فقط تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از پنج عضو مورد نظر اهمیت دارد.

از طرفی می‌دانیم تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز برابر است با:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

بنابراین با توجه به فعالیت‌های ۱ تا ۶ تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از n شیء متمایز برابر است با:

$$\frac{P(n, r)}{r!}$$

به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم. تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را معمولاً با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

مثال

از میان شش کتاب مختلف

الف) به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب) به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

حل:

الف) چون ترتیب چیدن کتاب‌ها در قفسه مهم است لذا جواب برابر است با تعداد جایگشت‌های

$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = 360 \text{ یعنی ۳۶۰ متمایز؛ یعنی}$$

ب) چون ترتیب انتخاب کتاب‌ها اهمیتی ندارد لذا فقط باید تعداد انتخاب‌های چهار شیء از شش شیء متمایز؛ یعنی تعداد زیرمجموعه‌های چهارتایی از شش شیء متمایز را محاسبه کرد که برابر است با:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!4!} = 15$$

مثال

در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته‌ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد اگر:

الف) کمیته ۴ نفره باشد؟

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر یک از سه کشور یک نفر در کمیته باشد؟

پ) کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً دو داور ایرانی داشته باشد؟

ت) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی داشته باشد؟

ث) کمیته ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد؟

ج) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟



غلامرضا تختی، قهرمان جهان

حل:



علیرضا سلیمانی، قهرمان سنگین وزن جهان

الف) چون فرقی ندارد که ۴ نفر انتخاب شده از کدام کشور باشند، تنها تعداد زیرمجموعه‌های ۴ نفره از این ۹ نفر مورد نظر است که برابر است با:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

ب) تعداد روش‌های انتخاب یک داور ایرانی برابر است با: $\binom{4}{1} = 4$. به همین طریق ۳ راه برای انتخاب داور ژاپنی و ۲ راه برای انتخاب داور روسی وجود دارد. طبق اصل ضرب تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با:

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

پ) تعداد راه‌های انتخاب دو داور ایرانی برابر است با: $\binom{4}{2} = 6$. حال ۳ داور دیگر باید از

بین ۵ داور غیرایرانی انتخاب شوند که به $\binom{5}{3} = 10$ حالت می‌توانند انتخاب شوند. بنابراین

طبق اصل ضرب، تعداد روش‌های انجام کار برابر است با:

$$6 \times 10 = 60$$

ت) در این حالت تعداد داوران ایرانی ۳ یا ۴ نفر می‌تواند باشد. در حالتی که داوران ایرانی

۳ نفر باشند، این داوران به $\binom{4}{3} = 4$ حالت می‌توانند انتخاب شوند. در این صورت دو نفر

دیگر باید از بین ۵ داور غیرایرانی انتخاب شوند که این کار به $\binom{5}{2} = 10$ طریق می‌تواند انجام شود. پس طبق اصل ضرب $4 \times 10 = 40$ روش وجود دارد.

در حالتی که داوران ایرانی ۴ نفر باشند، انتخاب این ۴ داور به $\binom{4}{4} = 1$ روش صورت می‌گیرد

و یک داور دیگر باید از بین ۵ داور غیرایرانی انتخاب شود که به $\binom{5}{1} = 5$ طریق می‌تواند

صورت گیرد. پس طبق اصل ضرب، برای این حالت $5 \times 1 = 5$ روش وجود دارد و جواب کل برابر است با $40 + 5 = 45$.

ث) تعداد روش‌های انتخاب ۳ داور ایرانی برابر است با: $\binom{4}{3} = 4$ ، تعداد روش‌های انتخاب

۲ داور ژاپنی برابر است با: $\binom{3}{2} = 3$ و تعداد راه‌های انتخاب ۲ داور روس برابر است با:

$$\binom{2}{2} = 1 \text{ لذا طبق اصل ضرب، جواب برابر است با: } 4 \times 3 \times 1 = 12$$

ج) می‌دانیم تعداد کل کمیته‌های ۵ نفره که می‌توان انتخاب کرد، برابر است با $\binom{9}{5} = 126$.

از طرفی این کمیته‌های ۵ نفره به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند:

دسته اول: حداقل یک ایرانی در آنهاست.

دسته دوم: هیچ داور ایرانی در آنها نیست.
جمع افراد این دو دسته برابر ۱۲۶ می شود و از آنجا که محاسبه دسته دوم آسان تر است، کافی است تعداد دسته دوم را محاسبه کنیم و از ۱۲۶ کم کنیم.

اما تعداد افراد دسته دوم برابر $\binom{5}{5} = 1$ است. چرا؟

لذا تعداد افراد دسته اول برابر است با: $126 - 1 = 125$

کار در کلاس

۱ در کدام یک از موارد زیر، ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت دارد و باید تعداد جایگشت های r شیء از n شیء متمایز مشخص شود و در کدام یک ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت ندارد و باید تعداد ترکیب های r تایی از n شیء متمایز مشخص شود؟
الف) ساختن کلمه ای سه حرفی بدون حرف تکراری با ۵ حرف متمایز (بامعنی و بی معنی).
ب) انتخاب سه شاخه گل از بین پنج شاخه گل متمایز.
پ) انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط از بین هفت مدافع که همگی در تمامی پست ها توانایی بازی دارند.
ت) از بین هفت بازیکن دفاعی یک تیم سه نفر قرار است از تیم کنار گذاشته شوند.
ث) ده نفر در یک دوره مسابقات شرکت خواهند کرد و سه نفر اول به المپیک راه خواهند یافت.
ج) ده نفر در یک مسابقه شرکت کرده اند و قرار است به نفرات اول تا سوم به ترتیب مدال های طلا، نقره و برنز داده شود.

۲ در هر کدام از موارد «کاردرکلاس ۱» تعداد حالت های ممکن را بنویسید. (نیاز به ساده کردن جواب نیست)

۳ از میان ۸ ریاضی دان و ۶ فیزیک دان و ۵ شیمی دان قرار است کمیته ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می تواند انتخاب شود هرگاه:
الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟
ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟
پ) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی دان در آن باشد؟

فعالیت

از بین دو مدرس ریاضی، دو مدرس فیزیک و دو مدرس شیمی، قرار است یک کمیته دو نفره انتخاب شود، به گونه ای که دو نفر انتخاب شده هم رشته نباشند. چند حالت برای انجام این کار وجود دارد؟

به جواب‌های چند دانش‌آموز به سؤال بالا که در زیر آمده است، دقت کنید.
 محمد: از دو رشته باید هر کدام یک نفر انتخاب شوند و از رشته سوم کسی انتخاب نشود؛
 لذا سه حالت زیر را می‌توان در نظر گرفت:

ریاضی یک نفر انتخاب شود؛ فیزیک یک نفر انتخاب شود و شیمی کسی انتخاب نشود.

$$\binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{0} = 2 \times 2 \times 1 = 4$$

ریاضی یک نفر انتخاب شود؛ فیزیک کسی انتخاب نشود و شیمی یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{2}{1} \binom{2}{0} \binom{2}{1} = 2 \times 1 \times 2 = 4$$

ریاضی کسی انتخاب نشود؛ فیزیک یک نفر انتخاب شود و شیمی هم یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{1} = 1 \times 2 \times 2 = 4$$

پس در کل $4 + 4 + 4 = 12$ حالت امکان دارد.

پژمان: می‌توان روش محمد را خلاصه‌تر کرد؛ یعنی در یک مرحله ابتدا تعداد حالت‌های

انتخاب دو رشته‌ای را که قرار است از آنها کسی انتخاب شود، محاسبه می‌کنیم که به $\binom{3}{2}$

راه امکان دارد. حال از هر کدام از دو رشته انتخاب شده به دو راه می‌توان یک فرد انتخاب

کرد؛ لذا جواب برابر است با: $\binom{3}{2} \times 2 \times 2 = 12$.

حمید: ولی به نظر من مستقیماً با اصل ضرب به روش زیر می‌توان آن را حل کرد.

اولین فرد انتخاب شونده می‌تواند هر کدام از ۶ نفر باشد؛ پس ۶ حالت برای انتخاب اولین فرد وجود دارد. اما وقتی اولین فرد انتخاب شد، دومین فردی که قرار است انتخاب شود، نمی‌تواند هم رشته او باشد؛ پس برای انتخاب دومین فرد چهار راه وجود دارد. بنابراین تعداد کل راه‌های انتخاب برابر $6 \times 4 = 24$ حالت است.

— دو نفر مدرس ریاضی را M_1 و M_2 ، دو نفر مدرس فیزیک را P_1 و P_2 ، و دو نفر مدرس شیمی را C_1 و C_2 در نظر بگیرید و تمام حالت‌های ممکن برای آنها را بنویسید و جواب غلط را مشخص کنید.

نمودار درختی جواب غلط را بکشید. سپس علت غلط بودن آن را مشخص کنید.

فعالیت

۱ می‌دانیم که $\binom{n}{r}$ همان تعداد زیر مجموعه‌های r تایی از یک مجموعه n عضوی است.

حال $\binom{n}{1}$ و $\binom{n}{0}$ را یک بار با توجه به این تعبیر از $\binom{n}{r}$ ، و یک بار با فرمول، به دست آورید.

به زمین می‌روند	به زمین نمی‌روند
۱, ۲, ۳	۴, ۵
۱, ۲, ۴	۳, ۵

۲ الف) یک مربی قصد دارد از بین بازیکنان شماره‌های ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، سه نفر را برای رفتن به زمین بازی انتخاب کند. چند حالت برای این کار امکان دارد؟ با پرکردن جدول مقابل تمام حالات را نمایش دهید.

ب) این بار این مربی قصد دارد از بین همان بازیکنان دو بازیکن انتخاب کند که روی نیمکت بنشینند. چه انتخاب‌هایی دارد؟

پ) بین تعداد انتخاب‌های $\binom{5}{2}$ و $\binom{5}{3}$ چه رابطه‌ای هست؟ چگونه این رابطه را توجیه می‌کنید؟
 ت) درستی تساوی $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ را یک بار با استفاده از توجیه بالا و یک بار با استفاده از فرمول بررسی کنید.

۳ جاهای خالی را پر کنید.

الف) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی برابر است با: $\binom{5}{5}$
 ب) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها هست

برابر است با: $\binom{5}{4}$

پ) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها نیست،

برابر است با: $\binom{5}{5}$

ت) بنابراین: $\binom{5}{5} = \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$

۴ فرض کنیم A یک مجموعه n عضوی و a یکی از اعضای آن باشد. ($a \in A$)

الف) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعه A برابر است با: $\binom{n}{r}$

ب) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آنها هست، برابر است با: $\binom{n-1}{r-1}$

پ) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آنها نیست، برابر است با: $\binom{n-1}{r}$

ت) بنابراین: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

۱ یک فروشندهٔ تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمهٔ کدو، تخمهٔ ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟

۲ یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود، هرگاه:

الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

۳ در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

۴ گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

۵ یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیشتر از جواب شماست؟

۶ هفت نقطهٔ A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

۷ یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست می کند. این آشپز چند طعم می تواند درست کند هرگاه
 الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه ها نداشته باشد؟
 ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی تواند استفاده شوند؟
 پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟
 ت) ادویه ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می شوند که هیچ یک از ادویه های دسته اول با هیچ یک از ادویه های دسته دوم سازگاری ندارند؟

۸ مسئله ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با :

$$\text{الف) } \binom{6}{2} \times \binom{5}{3}$$

$$\text{ب) } \binom{6}{2} + \binom{5}{3}$$

اشترانکوه، لرستان

