فصل

۱ هندسهٔ تحلیلی و جبر

پل میربهاءالدین بر روی رودخانه زنجان‌رود

مسیر حرکت برخی از پرتابه‌ها را به کمک توابع درجه دوم می‌توان نمایش داد. با دقت در محیط پیرامون خود، پدیده‌هایی را بیابید که با توابع درجه ۲ مرتبط باشند.

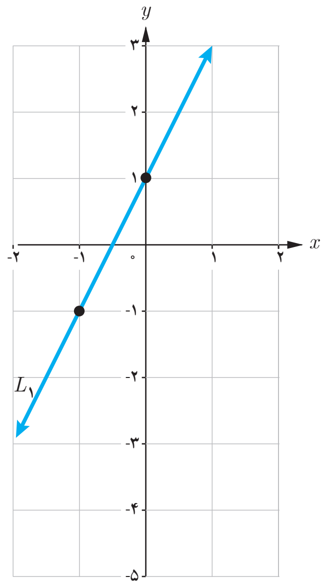
درس اوّل

هندسهٔ تحلیلی

یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط

در بسیاری از پدیده‌های جهان، رابطهٔ خطی بین متغیرها به چشم می‌خورد. بنابراین مطالعهٔ تابع‌های خطی اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند. در سال‌های قبل با مطالبی در این زمینه آشنا شدیم. در این درس نکات دیگری را در این باره، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

کار در کلاس



۱ به‌طور شهودی می‌توان دید که از هر دو نقطهٔ متمایز، تنها یک خط عبور می‌کند؛ بنابراین :

الف) با داشتن مختصات .... نقطه از یک خط باید بتوان معادلهٔ آن را به دست آورد.

ب) با داشتن معادلهٔ یک خط می‌توان با مشخص کردن .... نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کرد.

۲ نمودار خطوط با معادلات زیر را در دستگاه مختصات مشخص شده، رسم کنید :

الف) $L_1: y=2x+1$

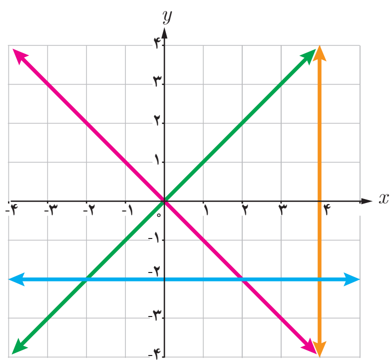
x	-1	0
y	-1	1

ب) $L_2: y=2x-3$

پ) $L_3: y=1$

ت) $L_4: x=-2$

ث) $L_5: x+2y=2$



۳ معادلهٔ هریک از خط‌های نمایش داده شده روی شکل را بنویسید.

۴ الف) می‌دانیم که شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی ....؛ به عبارت دیگر شیب خط گذرا از دو نقطهٔ غیر هم‌طول A و B برابر است با :

$$m_{AB}=\frac{\cdots\cdots}{x_B-x_A}$$

ب) شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای ...... برابر باشند.

۵ الف) از پایهٔ نهم به خاطر داریم که هرگاه خط L محور yها را در نقطه‌ای با عرض h قطع کند، آن‌گاه h، .... خط L نامیده می‌شود.

ب) در سؤال ۲، شیب و عرض از مبدأ هریک از پنج خط ذکر شده را بنویسید. در این سؤال کدام دو خط با هم موازی‌اند؟

۶ الف) خط با شیب m و عرض از مبدأ h معادله‌ای به صورت $y=$....... دارد.

ب) می‌خواهیم معادلهٔ خط L، گذرا از دو نقطهٔ $A(۰,۷)$ و $B(۳,۱)$ را بنویسیم. برای این کار، ابتدا شیب خط را محاسبه می‌کنیم:

شیب خط: $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۱-۷}{۳-۰}=-۲$

معادلهٔ خط: $y=-۲x+h$

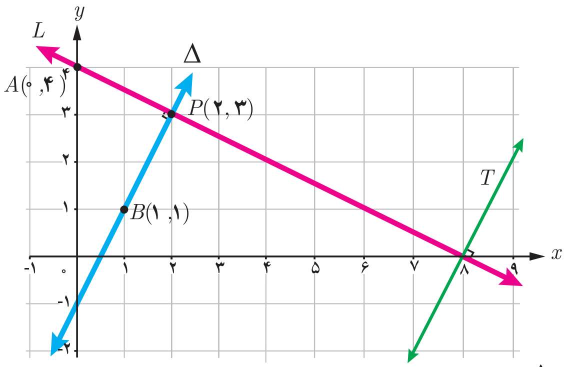
$B\ (۳,۱)$ روی خط L واقع است: $۱=-۲(۳)+h \Rightarrow h=۷$

البته اگر به مختصات نقطهٔ $A(۰,۷)$ از خط L دقت کنیم، بدون محاسبه متوجه می‌شویم که عرض از مبدأ این خط $h=۷$ است. پس:

معادلهٔ خط L: $y=-۲x+۷$

پ) معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $P\ (۲,-۱)$ را بنویسید؛ به‌طوری که با خط $y=۳x-۴$ موازی باشد.

فعالیت



۱ دو خط L و Δ را عمود بر هم رسم کرده‌ایم. به شیب‌های این دو خط توجه می‌کنیم:

شیب خط L گذرا از نقاط A و P: $m=\frac{y_P-y_A}{x_P-x_A}=\frac{۳-۴}{۲-۰}=\frac{-۱}{۲}$

شیب خط Δ گذرا از نقاط B و P: $m'=$......

۲ حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط را به دست می‌آوریم: $mm'=(\frac{-۱}{۲})(.....)=.....$

می‌بینیم که شیب‌ها، قرینهٔ معکوسِ یکدیگرند.

۳ اگر خط دلخواه دیگری مثل T عمود بر L را در نظر بگیریم، این خط حتماً با خط Δ ..... است؛ پس شیب خط T برابر عدد ...... خواهد بود. بنابراین می‌توان گفت شیب هر خطِ عمود بر L برابر قرینهٔ ..... شیب خط L خواهد بود. این مطلب در حالت کلی درست است[۱]؛ یعنی

> دو خطِ غیر موازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل‌ضرب شیب‌های آنها برابر (-۱) باشد؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط m و m' باشد، آنگاه شرط عمود بودن آنها آن است که $mm'=-۱$. به عبارت دیگر شیب هرکدام، قرینهٔ معکوس شیب دیگری باشد.

۱ــ راه‌های اثبات مختلفی برای این مطلب وجود دارد که یکی از آنها به کمک قضیهٔ فیثاغورس است.

بالا دستِ سدّ امام‌زاده اسماعیل (ع) قم

کار در کلاس

۱ در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند. (موازی، عمود یا متقاطعِ غیر عمود؟)

الف) $L:\ y=۵x-۲$ $\qquad T:\ y=\frac{-۱}{۵}x+۳$

ب) $L:\ y=\frac{۱}{۲}x+۷$ $\qquad T:\ x-۲y=۱$

پ) $L:\ ۲x-۳y+۳=۰$ $\qquad T:\ ۳x+۲y=۰$

ت) $L:\ x=۱$ $\qquad T:\ y=-۳$

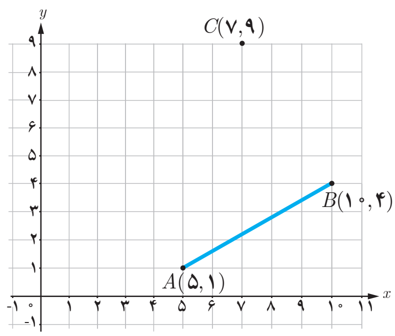
ث) $L:\ y=۳x+۱$ $\qquad T:\ x=۳y-۱$

۲ خط L به معادلهٔ $۲y-۳x=۱$ و خط T با عرض از مبدأ ۵ به معادلهٔ $y=mx+۵$ را در نظر بگیرید.

الف) m، را طوری بیابید که خط T با خط L موازی باشد.

ب) به ازای چه مقداری از m، دو خط بر یکدیگر عمودند؟

۳ مربع $ABCD$ در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات واقع است، به طوری که $A(۵,۱)$ و $B(۱۰,۴)$ دو رأس مجاور آن هستند.



الف) شیب ضلع AB را بنویسید.

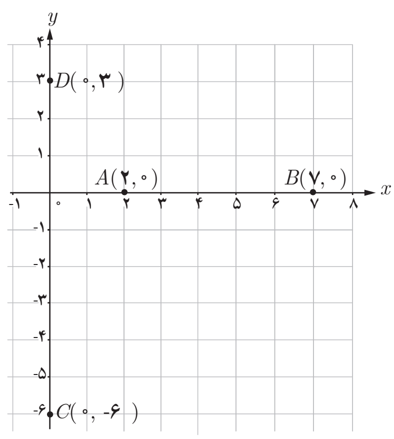
ب) شیب ضلع AD را حساب کنید و معادلهٔ این ضلع را بنویسید.

پ) اگر بدانیم نقطهٔ $C(۷,۹)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید.

ت) مربع را به‌طور کامل رسم کنید.

فاصلهٔ دو نقطه

فعالیت

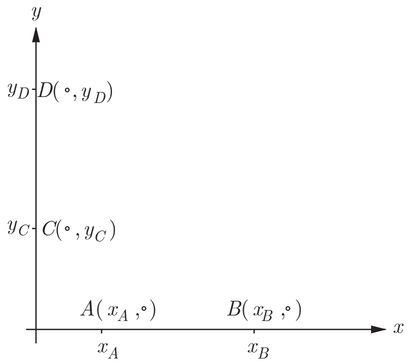


در این دستگاه مختصات :

الف) فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B که برابر طول پاره‌خط AB است، برابر ۵ است. چه رابطه‌ای بین این عدد با x_A و x_B وجود دارد؟

ب) فاصلهٔ دو نقطهٔ C و D را برحسب عرض آنها بیان کنید.

پ) در شکل مقابل، فاصلهٔ نقاط A و B را برحسب طول آنها و فاصلهٔ دو نقطهٔ C و D را برحسب عرض آنها به‌دست آورید.



$AB =$

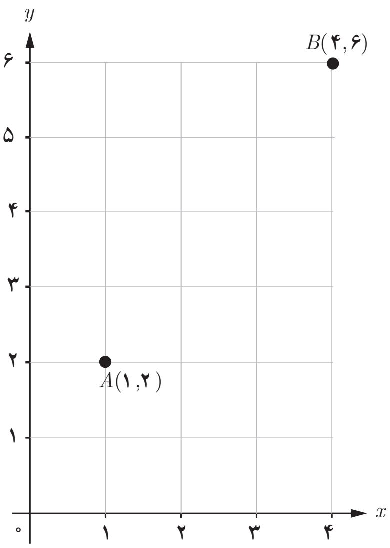
$CD =$

در حالت کلی می‌توان گفت :

۱ــ اگر A و B دو نقطهٔ هم‌عرض در صفحه باشند، آن‌گاه $AB = |x_A - x_B|$

۲ــ اگر C و D دو نقطهٔ هم‌طول در صفحه باشند، آن‌گاه $CD = |y_C - y_D|$

فعالیت



۱ در شکل مقابل فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را با خط‌کش به‌دست آورید.

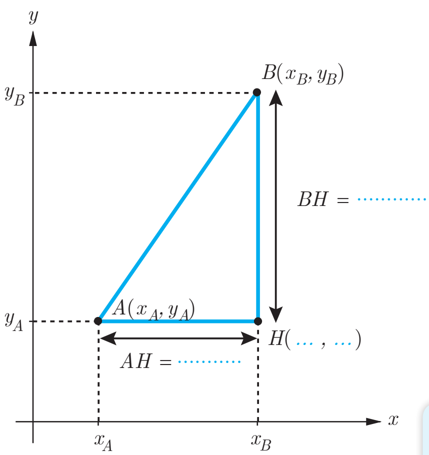
۲ بدون استفاده از خط‌کش، طول پاره‌خط AB را به‌دست آورید. برای این کار از چه رابطه‌ای استفاده می‌کنید؟

۳ در شکل مقابل :

الف) مختصات نقطهٔ H را بنویسید.

ب) طول پاره‌خط‌های AH و BH را مشخص کنید و روی شکل بنویسید.

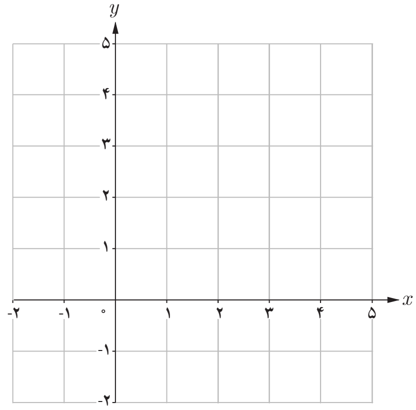
پ) طول AB را به کمک قضیهٔ فیثاغورس به‌دست آورید.



با توجه به فعالیت قبل می‌توان گفت :

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲}$.

کار در کلاس



۱ نقاط $A(۲,۰)$، $B(۵,۴)$ و $C(-۲,۳)$ را در نظر بگیرید و آنها را روی دستگاه مختصات مشخص کنید.

الف) محیط مثلث ABC را با محاسبهٔ طول اضلاع آن به دست آورید.

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(۲-۵)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

$AC=\cdots$

$BC=\cdots$

محیط: $P=\cdots$

ب) ABC چه نوع مثلثی است؟

پ) به دو روش نشان دهید ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است. سپس مساحت آن را حساب کنید.

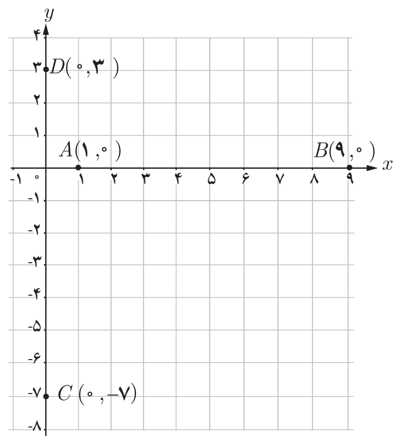
۲ در یکی از جاده‌های کشور، تصادفی رخ داده است که مختصات نقطهٔ تصادف روی نقشهٔ مرکز امداد به صورت $P(۵۰,۳۰)$ است. پایگاه‌های امداد هوایی که به محل تصادف نزدیک‌اند، در نقاط $A(۱۰,-۲۰)$ و $B(۸۰,۹۰)$ واقع‌اند. شما کدام پایگاه را برای اعزام بالگردِ امداد به محل حادثه پیشنهاد می‌کنید؟ (اعداد برحسب کیلومتر هستند).

۳ الف) فاصلهٔ نقطهٔ $N(-۶,۸)$ تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $E(x_E, y_E)$ تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط

فعالیت

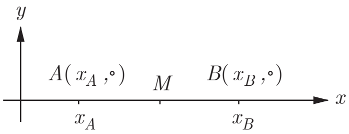


در این دستگاه مختصات :

الف) نقطهٔ وسط پاره‌خط AB را M بنامید و M را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.

ب) نقطهٔ وسط پاره‌خط CD را N بنامید و N را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.

پ) مطابق شکل، A و B دو نقطهٔ دلخواه روی محور xها هستند. اگر M وسط AB باشد، طول نقطهٔ M را به دست آورید.

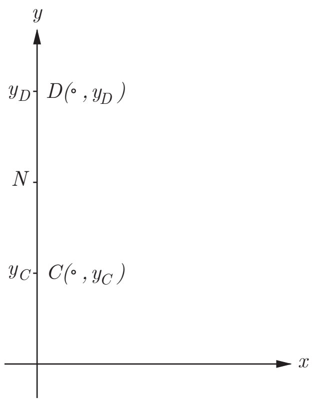


M وسط $AB \Rightarrow AM = MB$

$$\Rightarrow x_M - x_A = \dots\dots$$

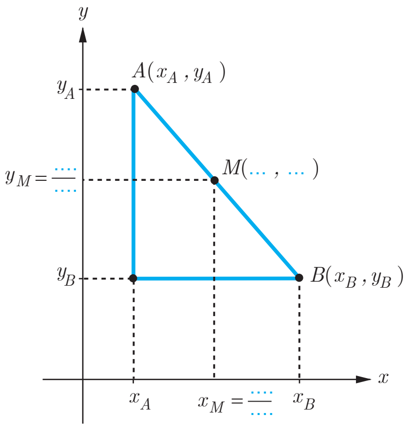
$$\Rightarrow ۲x_M = \dots\dots \Rightarrow \boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{\dots\dots}}$$

ت) در شکل مقابل، C و D دو نقطهٔ دلخواه روی محور yها هستند. اگر N وسط CD باشد، عرض نقطهٔ N را بیابید.



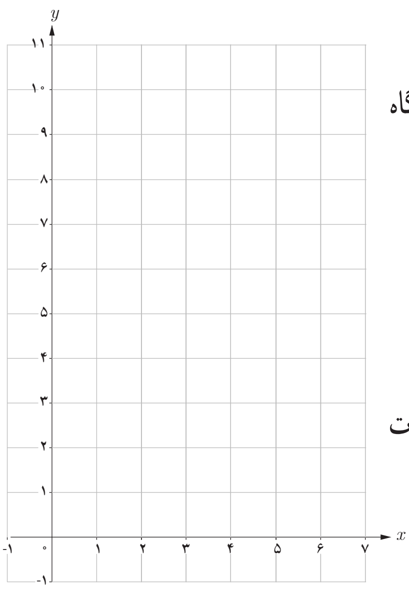
N وسط $CD \Rightarrow \dots\dots\dots\dots\dots\dots \Rightarrow y_N = \frac{\dots}{۲}$

ث) اگر A و B دو نقطهٔ دلخواه در صفحهٔ مختصات باشند و M نقطهٔ وسط AB، آنگاه با توجه به شکل مقابل می‌توان نشان داد:



مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB عبارت است از $M(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲})$.

کار در کلاس



۱ مثلث با رأس‌های $A(۱,۹)$، $B(۳,۱)$ و $C(۷,۱۱)$ را در نظر بگیرید و آن را در دستگاه مختصات مقابل مشخص کنید.

الف) مختصات M، نقطهٔ وسط ضلع BC را مشخص کنید.

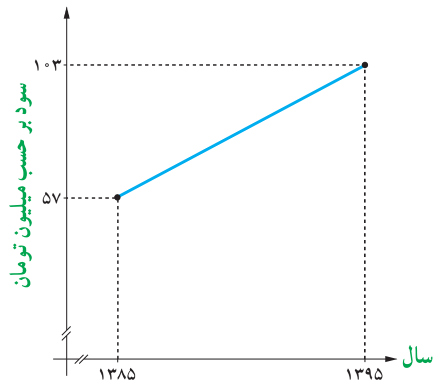
ب) طول میانهٔ AM را محاسبه کنید.

پ) معادلهٔ میانهٔ AM را به دست آورید.

۲ الف) نقطهٔ $N(۵,-۴)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ A و $B(۷,-۲)$ است. مختصات نقطهٔ A را بیابید.

ب) قرینهٔ نقطهٔ $C(۱,۲)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۱,۴)$ را به دست آورید.

پ) قرینهٔ نقطهٔ $P(\alpha, \beta)$ نسبت به مبدأ مختصات را به‌دست آورید.



۳ سود سالانهٔ یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته است. به کمک رابطهٔ نقطهٔ وسط پاره‌خط، به سؤالات زیر پاسخ دهید :

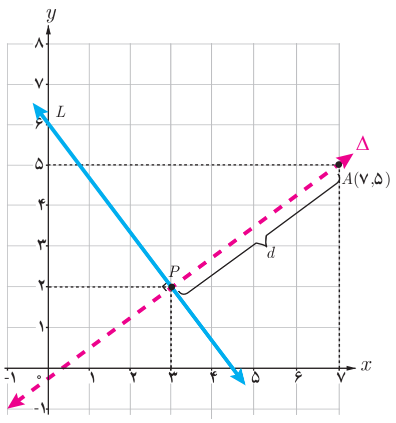
الف) میانگین سود سالانهٔ این شرکت در دههٔ مورد نظر چقدر بوده است؟

ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه، با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

پ) اگر سود سالانه در طول یک دههٔ آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می‌رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه شرکت چقدر باشد؟

فاصلهٔ نقطه از خط

اگر A نقطه‌ای خارج خط L باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط L برابر است با طول پاره‌خطی که از A عمود بر L رسم می‌شود. در اینجا می‌خواهیم با داشتن مختصات نقطهٔ A و معادلهٔ خط L این فاصله را محاسبه کنیم.



مثال : فاصلهٔ نقطهٔ $A(۷,۵)$ را از خط L به معادلهٔ $۴x+۳y=۱۸$ به دست آورید.

حل : چون شیب خط L برابر $\frac{-۴}{۳}$ است، پس هر خطِ عمود بر آن دارای شیب $\frac{۳}{۴}$ خواهد بود. معادلهٔ خط Δ گذرنده از A و عمود بر L را می‌نویسیم.

$$\Delta : y=\frac{۳}{۴}x+h$$

روی Δ است $A(۷,۵)$: $۵=\frac{۳}{۴}(۷)+h \Rightarrow h=\frac{-۱}{۴}$

معادله Δ: $y=\frac{۳}{۴}x-\frac{۱}{۴} \Rightarrow \Delta : ۳x-۴y=۱$

اگر معادلهٔ دو خط L و Δ را به صورت یک دستگاه معادلات خطی در نظر بگیریم، از حل آن مختصات نقطهٔ P، محل برخورد دو خط به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} L &: \\ \Delta &: \end{aligned}\begin{cases} ۴x+۳y=۱۸ \\ ۳x-۴y=۱ \end{cases} \Rightarrow x=۳ \quad , \quad y=۲ \Rightarrow P(۳,۲)$$

طول پاره‌خط AP جواب مسئله است.

$$AP=\sqrt{(x_A-x_P)^۲+(y_A-y_P)^۲}=\sqrt{(۷-۳)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

با به‌کارگیری مراحل حل این مثال در حالت کلی می‌توان ثابت کرد[۱] :

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر است با :

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

حال مثال قبل را به کمک این رابطه حل می‌کنیم؛ یعنی فاصلهٔ $A(۷,۵)$ را از خط به معادلهٔ $۴x+۳y-۱۸=۰$ به دست می‌آوریم :

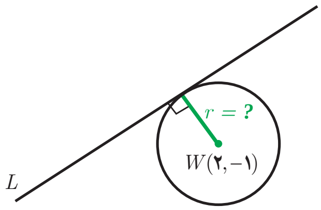
$$d=\frac{|۴(۷)+۳(۵)-۱۸|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{|۲۵|}{۵}=۵$$

۱ــ ارائه اثبات این فرمول در کلاس، مورد نظر نمی‌باشد.

کار در کلاس

۱ فاصلهٔ نقطهٔ $P(۷ , -۴)$ را از هر یک از خطوط با معادله‌های زیر به‌دست آورید :

الف) $L: ۲x + y = ۵$ ب) $T: x = ۵$ پ) $\Delta: y = ۰$



۲ خط $L : ۳x - ۴y = ۰$ بر دایره‌ای به مرکز $W(۲,-۱)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.
(راهنمایی : خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است).

تمرین

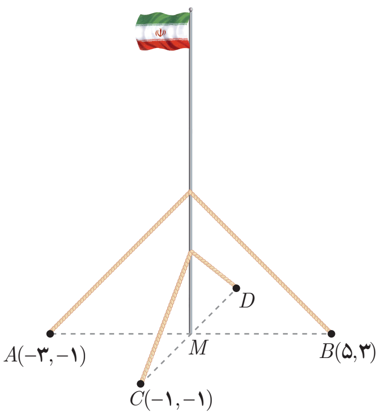
۱ وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

$L: ۲x - y = ۱$ $T: y = ۲x - ۳$ $\Delta: x + ۲y = ۰$

۲ دو نقطهٔ $A(۱۴ , ۳)$ و $B(۱۰ , -۱۳)$ را در نظر بگیرید. فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB به‌دست آورید.

۳ نشان دهید مثلث با رأس‌های $A(۱ , ۲)$، $B(۲ , ۵)$ و $C(۴ , ۱)$ یک مثلث متساوی‌الساقینِ قائم‌الزاویه است.

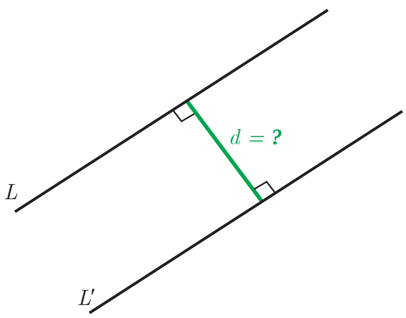
۴ دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(۲ , -۲)$ و $B(۶ , ۴)$ هستند.
الف) اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.
ب) آیا نقطهٔ $C(۷ , ۳)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟



۵ نقاط $A(۲ , ۳)$، $B(-۱ , ۰)$ و $C(۱ , -۲)$ سه رأس از مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید. (با دانستن این مطلب که در هر مستطیل، قطرها منصف یکدیگرند، آیا می‌توانید راه‌حل کوتاه‌تری برای مسئله ارائه کنید؟)

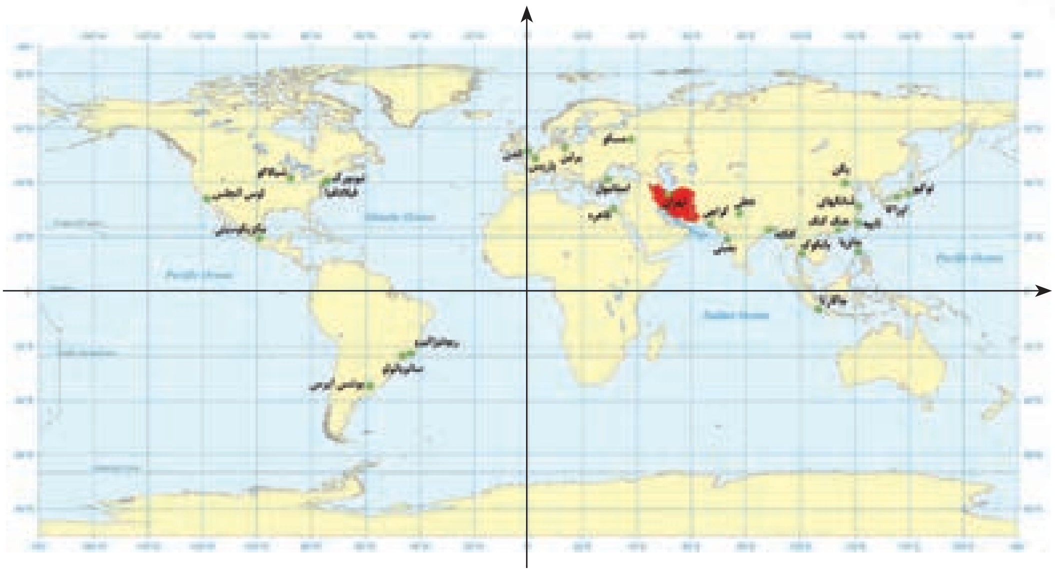
۶ یک میلهٔ پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده‌است؛ به طوری که فاصلهٔ هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا پای میله. مختصات نقطهٔ D را به‌دست آورید.

۷ یکی از اضلاع مربعی بر خط $L : y = ۲x - ۱$ واقع است. اگر $A(۳ , ۰)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.



۸ الف) نشان دهید دو خط با معادلات $۵x - ۱۲y + ۸ = ۰$ و $-۱۰x + ۲۴y + ۱۰ = ۰$ با یکدیگر موازی‌اند.
ب) فاصلهٔ این دو خط را محاسبه کنید. (راهنمایی : یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصلهٔ آن را از خط دیگر به دست آورید).

۹ طول جغرافیایی تبریز تقریباً ۴۶ درجهٔ شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود ۳۸ درجهٔ شمالی است. برای راحتی، می‌توانیم موقعیت این شهر را به‌طور خلاصه، به صورت (۳۸ , ۴۶) نشان دهیم. این اطلاعات دربارهٔ چابهار به صورت (۲۵ , ۶۱) است. با فرض اینکه مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی برابر ۱۱۰ کیلومتر باشد، مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ تقریبی این دو شهر.



آیا تاکنون به رابطهٔ طول و عرض جغرافیایی با دستگاه مختصات فکر کرده‌اید؟ در دستگاه مختصات مقابل، کدام محور نظیر طول جغرافیایی است؟ با توجه به طول و عرض جغرافیایی چابهار، محل تقریبی این شهر را روی نقشه مشخص کنید.

موزهٔ قاجار تبریز

درس دوم

معادلهٔ درجه دوم و تابع درجه ۲

روش تغییر متغیر برای حل معادله

در پایهٔ دهم، روش‌های مختلفی را برای حل معادلهٔ درجه ۲ آموختیم. یکی از دلایل اهمّیت این معادلات آن است که معادلات دیگری نیز وجود دارند که قابل تبدیل به معادلهٔ درجه دوم‌اند؛ مانند معادلات گویا و گنگ که درس سوم به آنها اختصاص یافته است. در اینجا با روش تغییر متغیر برای حل دستهٔ خاصّی از معادله‌ها[1] آشنا می‌شویم که یک شیوهٔ کارآمد برای حل انواع معادله است.

مثال : معادلهٔ مقابل را حل کنید. $x^4-10x^2+9=0$

حل : با وجود آنکه این معادله از نوع درجهٔ ۴ است، می‌توان آن را به روش معادله درجهٔ دوم حل کرد. برای این کار به جای عبارت x^2، متغیر (مجهول) جدیدی مثل u قرار می‌دهیم. به این کار تغییر متغیر می‌گوییم.

$$x^2=u \Rightarrow u^2-10u+9=0$$

این معادله را به روش کلی و همچنین به روش تجزیه حل می‌کنیم :

(روش کلی)

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(-10)^2-4(1)(9)=64$$
$$u=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2(1)}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}u=1\Rightarrow x^2=1\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}\\u=9\Rightarrow x^2=9\begin{cases}x=3\\x=-3\end{cases}\end{cases}$$

(روش تجزیه)

$$(u-1)(u-9)=0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}u=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}\\u=9\Rightarrow x^2=9\Rightarrow\begin{cases}x=3\\x=-3\end{cases}\end{cases}$$

کار در کلاس

معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $2x^4-7x^2-4=0$

ب) $x^4+3x^2+2=0$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲

گاهی به جای مقدار دقیق ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ ۲، تنها مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها اهمیت دارد که در این صورت بدون حل

۱ــ در این کتاب روش تغییر متغیر فقط برای معادلات دو مجذوری به کار می‌رود.

معادله می‌توان این مقادیر را به دست آورد. معمولاً مجموع دو ریشه را با S و حاصل‌ضرب آنها را با P نمایش می‌دهیم[۱]؛ یعنی اگر α و β ریشه‌های معادله باشند: $\alpha+\beta=S$ و $\alpha\beta=P$.

فعالیت

می‌دانیم که معادلهٔ درجهٔ دوم در حالت کلی به صورت مقابل است:

$$(۱)\quad ax^{۲}+bx+c=۰ \qquad (a\neq ۰)$$

۱ می‌خواهیم بررسی کنیم که چگونه می‌توان بدون حل این معادله دربارهٔ وجود و تعداد جواب‌های حقیقی آن اظهار نظر کرد.

الف) در این معادله اگر ضرایب a و c هم‌علامت نباشند، دربارهٔ علامت Δ چه می‌توان گفت؟

ب) اگر a و c هم‌علامت نباشند، آنگاه معادلهٔ (۱) دارای ...... ریشهٔ حقیقی متمایز است.

۲ معادلهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم:

$$۳x^{۲}+۵x-۱=۰$$

الف) توضیح دهید که چرا این معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

ب) آیا بین ضرایب معادله و مجموع ریشه‌ها (S) رابطه‌ای وجود دارد؟ برای پاسخ به این سؤال، معادله را حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=\cdots\cdots$$

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\cdots\cdots\\[2mm] \beta=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\cdots\cdots\end{cases}$$

$$S=\alpha+\beta=\underline{\qquad}+\underline{\qquad}=\cdots\cdots$$

ملاحظه می‌شود که: $S=-\dfrac{b}{a}$.

پ) درستی نتیجه فوق را در معادلهٔ زیر هم بررسی می‌کنیم:

$$۳x^{۲}-۷x=۰\Rightarrow x(۳x-۷)=۰\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\cdots\cdots\\ \beta=\cdots\cdots\end{cases}$$

$$S=\alpha+\beta=\cdots\cdots+\cdots\cdots=\frac{۷}{۳}=-\frac{b}{a}$$

ت) درستی نتیجهٔ بالا را در حالت کلی ثابت می‌کنیم. فرض کنیم برای معادلهٔ (۱)، مقدار Δ مثبت باشد. پس معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز مثل α و β دارد:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\\[2mm] \beta=\dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\end{array}\right\}\Rightarrow S=\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}+\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}=\cdots\cdots$$

ث) با مفروضات قسمت قبل، ثابت کنید: $P=\alpha.\beta=\dfrac{c}{a}$

$$P=\alpha.\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)\left(\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\right)=\cdots\cdots$$

۱ــ S حرف اول Sum به معنای مجموع و P حرف اول Product به معنای حاصل‌ضرب است.

با توجه به این فعالیت می‌توان گفت :

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $(a \neq ۰)$ $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آنگاه :

$\alpha+\beta=S=-\frac{b}{a}$ و $\alpha.\beta=P=\frac{c}{a}$

کار در کلاس

در معادلهٔ $-۲x^۲+x+۵=۰$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به‌دست آورید.

تشکیل معادله درجه ۲ با استفاده از S و P

گاهی برای حل یک مسئله، لازم است برای آن معادله‌ای بنویسیم و سپس آن معادله را حل کنیم. در برخی موارد، این معادله درجه ۲ خواهد بود. مثلاً می‌خواهیم با مجموع و حاصل‌ضرب دو عدد، معادلهٔ درجه دومی بسازیم که آن دو عدد ریشه‌های معادله باشند. برای این کار فرض می‌کنیم آن دو عدد (ریشه‌های معادله)، α و β باشند. معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$(x-\alpha)(x-\beta)=۰ \quad \Rightarrow \quad x^۲-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=۰ \quad \Rightarrow \quad x^۲-Sx+P=۰$$

بنابراین نشان دادیم که :

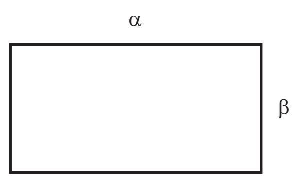
معادلهٔ درجهٔ دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن P باشد، به صورت $x^۲-Sx+P=۰$ است.

کار در کلاس

۱ دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها ۱/۵− و حاصل ضربشان ۷− باشد.

۲ آیا مستطیلی با محیط ۱۱ cm و مساحت ۶ $cm^۲$ وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است،طول و عرض آن را مشخص کنید.

حل : اگر ابعاد مستطیل را α و β بنامیم، داریم :



$$\text{محیط} = ۱۱ \Rightarrow ۲(\alpha+\beta)=۱۱ \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۱۱}{۲} \Rightarrow \beta=\frac{۱۱}{۲}-\alpha$$

$$\text{مساحت} = ۶ \Rightarrow \alpha.\beta=۶ \Rightarrow \alpha(\frac{۱۱}{۲}-\alpha)=۶$$

الف) معادلهٔ بالا را ساده کنید و از حل آن α و β را به دست آورید.

ب) با استفاده از S و P و تشکیل یک معادلهٔ درجه دوم، این مسئله را حل کنید.

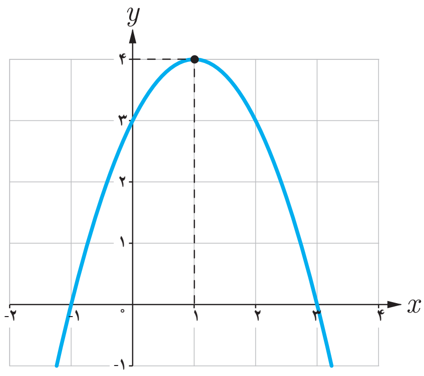
۳ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ باشند.

ماکزیمم و مینیمم سهمی

سهمی با ضابطهٔ $y=ax^۲+bx+c$ را در نظر می‌گیریم. از سال گذشته می‌دانیم که طول رأس این سهمی $x=-\frac{b}{۲a}$ است.

الف) اگر $a>۰$، آنگاه دهانهٔ سهمی رو به بالاست و به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ کمترین (مینیمم) مقدار سهمی به‌دست می‌آید.

ب) اگر $a<۰$، آنگاه دهانهٔ سهمی رو به پایین است و به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ بیشترین (ماکزیمم) مقدار سهمی حاصل می‌شود.

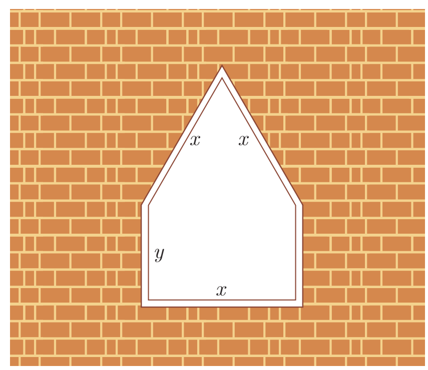


مثال: ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x^۲+۲x+۳$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

حل: چون $a=-۱$ منفی است، پس دهانهٔ سهمی روبه پایین است و این سهمی ماکزیمم دارد. این تابع به ازای $x=-\frac{b}{۲a}=۱$ بیشترین مقدار خود را خواهد داشت که برابر است با $f(۱)=۴$.

تذکر: همچنان که در شکل دیده می‌شود، در این مثال نقطهٔ $(۱,۴)$ رأس سهمی و نقطهٔ ماکزیمم آن است. در این حالت منظور از مقدار ماکزیمم سهمی، عرض این نقطه، یعنی ۴ است.

مثال: یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره $۴m$ باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.



حل: با توجه به شکل داریم: محیط پنجره $=۴\Rightarrow ۳x+۲y=۴\Rightarrow y=۲-\frac{۳}{۲}x$

در کلاس دهم دیدیم که مساحت مثلث ABC از رابطهٔ $S=\frac{۱}{۲}\times AB\times BC\times \sin B$ به‌دست می‌آید. بنابراین مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع x برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$ است. (چرا؟) پس:

مساحت پنجره: $S=x.y+\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$

به‌جای y معادل آن را برحسب x قرار می‌دهیم.

$$S=x(۲-\frac{۳}{۲}x)+\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲=۲x-\frac{۳}{۲}x^۲+\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$$

$$S=\frac{\sqrt{۳}-۶}{۴}x^۲+۲x$$

این تابع دارای ماکزیمم است (چرا؟) و بیشترین مقدار آن به‌ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ حاصل می‌شود.

$$x=-\frac{b}{۲a}=\frac{۲}{\frac{۶-\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۴}{۶-\sqrt{۳}}\simeq ۰/۹۴(m)$$

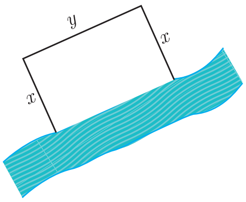
$$y=۲-\frac{۳}{۲}x\simeq ۲-\frac{۳}{۲}(۰/۹۴)=۰/۵۹(m)$$


رودخانهٔ قزل‌اوزن، شاخهٔ اصلی سفیدرود

کار در کلاس

۱ تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم و کدام یک مینیمم دارند. سپس مقدار ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

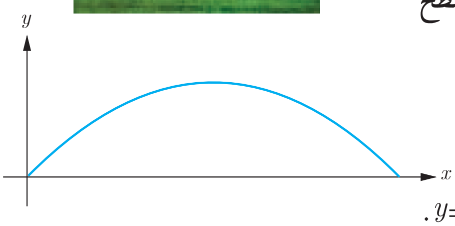
الف) $g(x) = -(x+۱)^۲+۳$ ب) $h(x) = x^۲-۴x+۹$



۲ قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلعِ محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینهٔ نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدارِ ممکن گردد.

صفرهای تابع درجه ۲

همان‌گونه که می‌دانیم، نمودار هر تابع درجه دوم، یک سهمی است. به عنوان مثال فرض کنیم فوتبالیستی توپی را با زاویهٔ ۴۵° نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیهٔ ۲۰ m/s شوت کند. معادلهٔ مسیر حرکت این توپ، یک تابع درجه دو با ضابطهٔ $y=\frac{-۱}{۴۰}x^۲+x$ است که نمودار آن مانند شکل مقابل است. در این رابطه x مسافت افقی طی شده و y ارتفاع توپ از سطح زمین است.



الف) حداکثر ارتفاع توپ را به‌دست آورید.

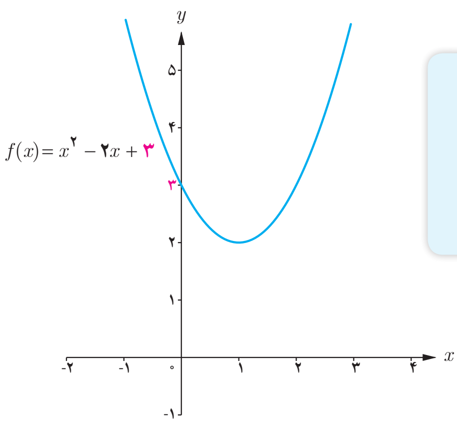
ب) به نظر شما حداکثر مسافت افقی طی شده توسط توپ چقدر است؟

برای آنکه طول نقاط برخورد نمودار این تابع با محور xها را به‌دست آوریم، باید قرار دهیم $y=۰$.

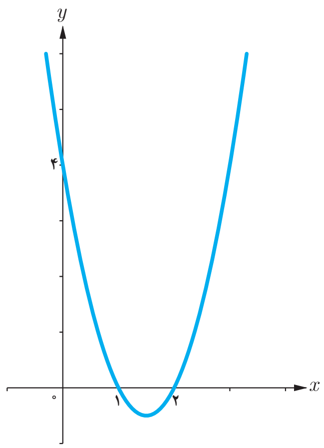
$$y=۰ \Rightarrow x(\frac{-۱}{۴۰}x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۴۰ \end{cases}$$

این نقاط را روی نمودار نشان دهید و توضیح دهید که این اعداد از نظر فیزیکی چه معنایی می‌دهند.

> نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند f با محور xها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ هستند. به عبارت دیگر، در این نقاط، مقدار تابع برابر صفر است.



همچنین عرض نقطهٔ برخورد نمودار هر تابع مثل f با محور yها، همان $f(۰)$ است. به‌عبارت دیگر در تابع درجه ۲ با ضابطهٔ $f(x)=ax^۲+bx+c$ ، عدد ثابت c نشان‌دهندهٔ محل برخورد نمودار آن با محور yهاست. به عنوان مثال، به شکل مقابل توجه کنید.



مثال : معادلهٔ سهمی مقابل را بنویسید.

حل : با توجه به شکل دیده می‌شود که نمودار تابع، محور افقی را در نقاطی با طول‌های ۱ و ۲ قطع کرده است. پس ضابطهٔ آن به‌صورت زیر است :

$$y = a(x-۱)(x-۲)$$

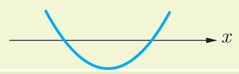
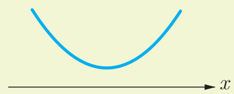
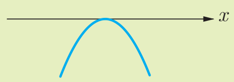
با توجه به نمودار، مقدار a را به‌دست می‌آوریم.

نقطهٔ $(۰,۴)$ روی سهمی است $\Rightarrow ۴ = a(۰-۱)(۰-۲) \Rightarrow a = ۲$

$$\Rightarrow y = ۲(x-۱)(x-۲) \Rightarrow y = ۲x^۲ - ۶x + ۴$$

کار در کلاس

۱ همچنان که از سال قبل می‌دانیم، تعداد صفرهای تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ را به کمک علامت Δ می‌توان تشخیص داد. همچنین رو به بالا بودن یا رو به پائین بودن دهانهٔ سهمی از روی علامت a مشخص می‌شود. جدول زیر را کامل کنید.[1]

a \ Δ	$\Delta > ۰$	$\Delta = ۰$	$\Delta < ۰$
$a > ۰$			
$a < ۰$			

۲ دربارهٔ تابع درجه دوم f، برای تشخیص علامت ریشه‌های احتمالی معادله $f(x) = ۰$ می‌توانیم از علامت S و P کمک بگیریم. در هریک از موارد زیر، مانند قسمت الف عمل کنید.

الف) $y = x^۲+۶x+۵$

معادلهٔ $y=۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد $\Leftarrow \Delta=۱۶ > ۰$

ریشه‌ها هم‌علامت‌اند $\Leftarrow P = \frac{c}{a} = ۵ > ۰$

هر دو ریشه منفی‌اند $\Leftarrow S = -\frac{b}{a} = -۶ < ۰$

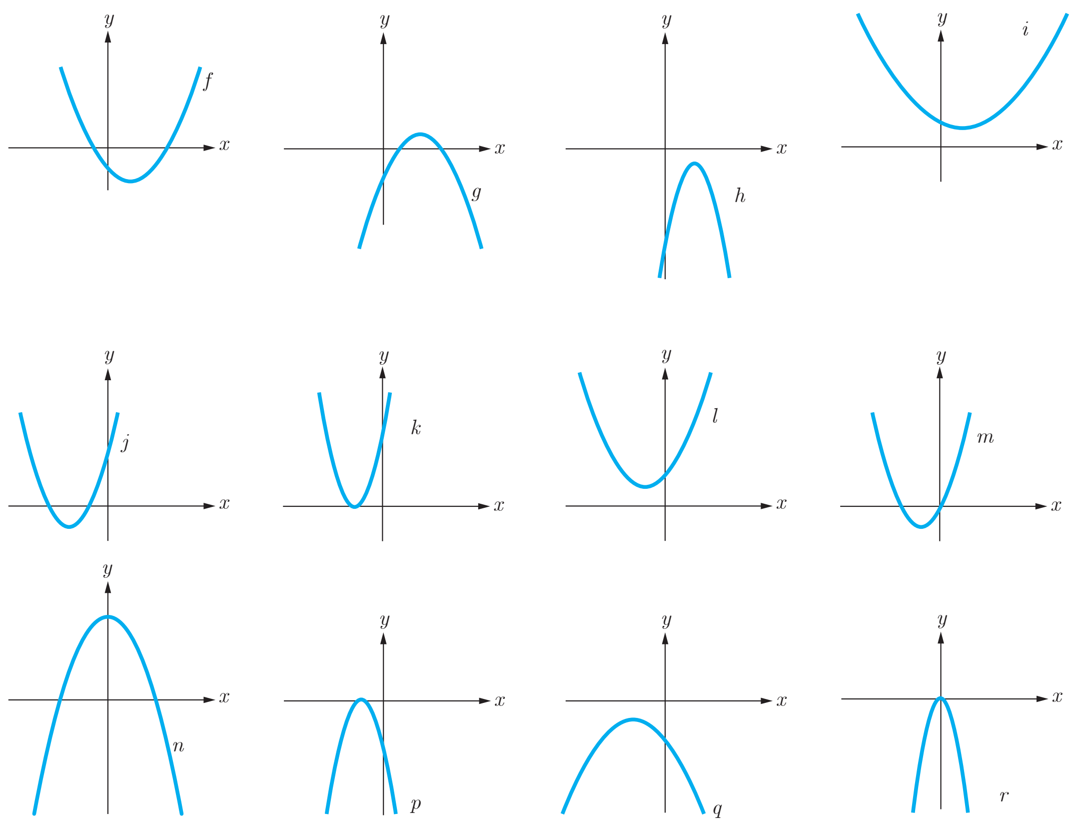
ب) $y = x^۲+۴x-۵$

پ) $y = ۳x^۲-۷x+۱$

ت) $y = -x^۲+۲x-۱$

۱ــ در این جدول محور yها رسم نشده است.

۳ هرگاه نمودار تابع $(a\neq ۰)$ $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک آن، علامت ضرایب a، b و c را مشخص کنیم.
به عنوان مثال نمودار تابع f از مجموعه توابع داده شدهٔ زیر را در نظر می‌گیریم :
ــ دهانهٔ سهمی رو به بالاست؛ پس a مثبت است.
ــ نمودار تابع f محور yها را در قسمت منفی‌ها قطع کرده است؛ پس c منفی است.
ــ رأس سهمی در ربع چهارم قرار گرفته که در آن مقادیر x مثبت‌اند؛ پس : $\frac{-b}{۲a}>۰ \quad \Rightarrow b<۰$
توجه داریم که باتوجه به نمودار، مجموع دو ریشه، عددی مثبت است (چرا؟) و از این مطلب هم می‌توان منفی بودن علامت b را نتیجه گرفت.
خلاصهٔ این اطلاعات در جدول بعد آمده است. جدول را کامل کنید.



ویژگی / تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+							+			−	
علامت b	−							+			−	
علامت c	−							۰			−	
تعداد ریشه‌های متمایز	دو							دو			فاقد ریشه	
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت							یکی منفی یکی صفر			ریشه ندارد	

تمرین

۱ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$ ب) $4x^6 + 1 = 5x^3$

۲ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\sqrt{2}-1$ و $\sqrt{2}+1$ باشد.

۳ مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع با ضابطه های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$ ب) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

۴ راکتی که به‌طور عمودی رو به بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادلهٔ آن به صورت مقابل است. $h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$

الف) چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب) ارتفاع نقطهٔ اوج را بیابید.

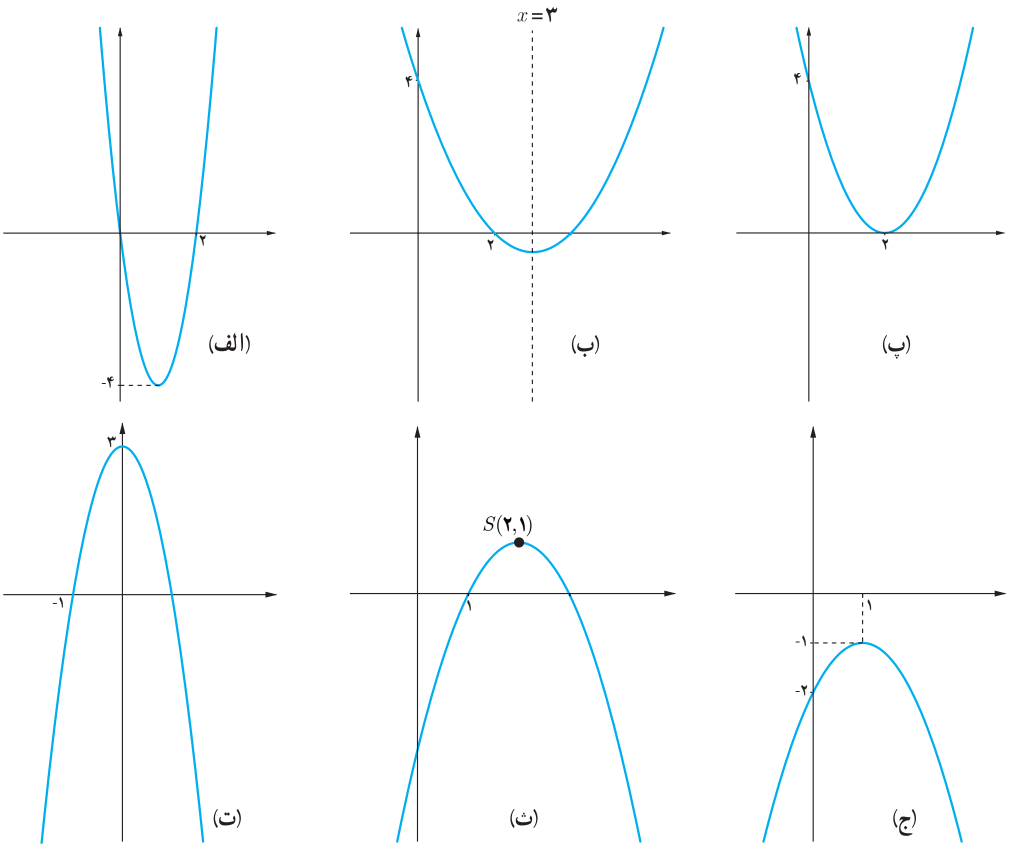
پ) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین بازمی‌گردد؟

۵ استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است.
اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که :

الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

۶ ضابطهٔ جبری سهمی های زیر را بنویسید.

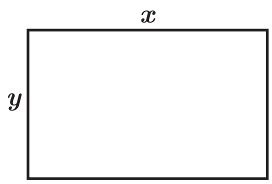


درس سوم

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

معادلات گویا

مستطیل طلایی، مستطیلی است که نسبتِ مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب x و y باشند داشته باشیم : $\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$. نسبت طول به عرض این مستطیل را **نسبت طلایی** می گویند.



مثال : عرض مستطیل را $y=1$ در نظر می گیریم تا مقدار نسبت طلایی را محاسبه کنیم :

$$\frac{x+1}{x}=\frac{x}{1}$$

با ضرب دو طرف این معادله در x می توان آن را از حالت کسری خارج کرد (یا به‌طور معادل در اینجا حاصل‌ضرب طرفین را مساوی حاصل‌ضرب وسطین قرار می‌دهیم) :

$$x^2=x+1 \Longrightarrow x^2-x-1=0$$

$$\Delta = b^2-4ac=5 \quad , \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ به **عدد طلایی** معروف است که مقدار تقریبی آن ۱/۶۱۸ می‌باشد؛ این عدد از دوران باستان مورد توجه بوده‌است.

در برخی از اجزای بدن انسان، در بعضی گیاهان و همچنین در پاره‌ای از بناها و آثار هنری رد پای عدد طلایی مشاهده می‌شود. تحقیقی در این زمینه انجام دهید و گزارش آن را در کلاس ارائه کنید.

ارگ تاریخی بم

از کلاس اول ابتدایی که با معادلاتی به شکل $\square+2=5$ مواجه شدیم، تقریباً همیشه درگیر حل معادله بوده‌ایم! گاهی به معادلاتی مانند $\frac{x+1}{x}=\frac{x}{1}$ برمی‌خوریم که در آنها مجهول در مخرج یک عبارت گویا (کسری با صورت و مخرج چند جمله‌ای) قرار دارد. چنین معادلاتی را معادلات گویا می‌نامیم. همان‌طور که دیدیم :

> برای حل یک معادلهٔ گویا می‌توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج‌ها، در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک م م) مخرج‌ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود. جواب‌های به‌دست آمده نباید مخرج کسرها را صفر کنند و این جواب‌ها باید در معادلهٔ اولیه صدق کنند.

صفحه‌ای از کتاب ریاضی دوم دبستان

فعالیت

۱ معادلهٔ مقابل را حل کنید.

$$\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{2-x}{x^2-x} \qquad (1)$$

الف) ابتدا در صورتِ امکان مخرج کسرها را به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه می کنیم :

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)}+\frac{2}{(x+1)}=\frac{2-x}{\cdots\cdots} \qquad (2)$$

ب) در مخرج‌ها سه نوع عامل اولِ متمایز وجود دارد x، $(x+1)$ و $(\cdots\cdots)$ که بزرگ‌ترین توان هر کدام از آنها برابر ...... است؛ پس ک‌م‌م مخرج‌ها عبارت است از ....

پ) طرفین معادلهٔ (۲) را در $x(x-1)(x+1)$ ضرب می کنیم تا معادله از شکل کسری خارج شود.

$$x(x-1)(x+1)\left[\frac{2x}{(x-1)(x+1)}+\frac{2}{(x+1)}\right]=x(x-1)(x+1)\left[\frac{2-x}{x(x-1)}\right] \Rightarrow 2x^2+2x(x-1)=(x+1)(2-x)$$

ت) پس از ساده کردن، معادلهٔ $5x^2-3x-2=0$ حاصل می‌شود.

ث) برای معادلهٔ درجه دوم اخیر، مقدار Δ را به‌دست آورید و معادله را حل کنید. آیا هر دو جواب به‌دست آمده مورد قبول‌اند؟ چرا؟

۲ خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین‌المللی امام‌خمینی(ره) متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت قطار $10\,km/h$ کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب‌است محاسبهٔ طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار.

الف) توضیح دهید، چرا زمان رفت از رابطهٔ $\frac{60}{v}$ به‌دست می‌آید؟

ب) عبارتی بر حسب v بنویسید که زمان برگشت را نشان دهد.

پ) توضیح دهید که چرا معادلهٔ $\frac{1}{2}+\frac{60}{v}=\frac{60}{v-10}$ برقرار است.

ت) طرفین این معادله را در ک‌م‌م مخرج‌ها ضرب کنید تا به یک معادلهٔ درجه دوم تبدیل شود.

ث) از حل معادلهٔ حاصل، سرعت قطار در مسیر رفت را بیابید و به کمک آن، زمان رفت و زمان برگشت قطار را به دست آورید.

کار در کلاس

۱ معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب‌های به‌دست آمده مورد قبول هستند؟

الف) $\frac{۳}{x^۲}-۱۲=۰$ ب) $\frac{۲}{k}-\frac{۳k}{k+۲}=\frac{k}{k^۲+۲k}$ پ) $\frac{۳}{x}-\frac{۲}{x-۳}=\frac{۱۲}{۹-x^۲}$

۲ دبیر ریاضی آرمان هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می‌کند. پس از ۵ هفته، آرمان جمعاً ۳۶ امتیاز کسب کرده بود؛ یعنی میانگین امتیاز هر آزمون او در پنج هفتهٔ اول به‌صورت زیر بود :

$$\frac{۳۶}{۵}=۷/۲$$

او از هفتهٔ ششم به بعد در تمام آزمون‌ها امتیاز ۹ را کسب کرد؛ به‌طوری که میانگین امتیاز کل آزمون‌هایش برابر ۸ شد. می‌خواهیم بدانیم از هفتهٔ ششم به بعد، آرمان در چند آزمون متوالی نمرهٔ ۹ گرفته است. برای حل مسئله می‌توان به روش زیر عمل کرد :

الف) اگر تعداد آزمون‌ها از هفتهٔ ششم به بعد برابر n باشد، مجموع امتیازات او در این مدت $۹n$ خواهد شد. عبارتی کسری بر حسب n بنویسید که نشان‌دهندهٔ میانگین امتیاز تمام آزمون‌های ریاضی هفتگی آرمان باشد.

$$\frac{۹n+\cdots\cdots}{۵+\cdots\cdots}$$

ب) کسر مربوط به قسمت الف را برابر ۸ قرار دهید و n را بیابید. سپس جواب به‌دست آمده را امتحان کنید.

مثال : اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟

حل : ماشین سریع‌تر را A و دیگری را B می‌نامیم. فرض کنیم t مدت زمانی باشد که ماشین A به تنهایی قادر است کل کار را انجام دهد.

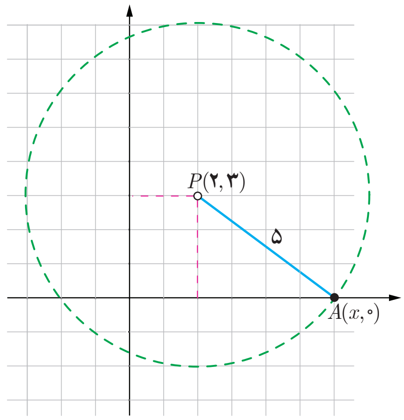
جدول زیر را کامل کنید.

مقداری از کار که در ۱ ساعت قابل انجام است.	زمان انجام کل کار	ماشین
$\frac{۱}{t}$	t	A
....	$۲t$	B
$\frac{۱}{۴}$	....	A و B با هم

با توجه به جدول، معادله زیر را می‌توان نوشت :

$$\frac{۱}{t}+\frac{۱}{۲t}=\frac{۱}{۴}\overset{\times ۲}{\Rightarrow}\frac{۲}{t}+\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۳}{t}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow t=۶$$ زمان ماشین A

$$\Rightarrow ۲t=۱۲$$ زمان ماشین B



معادلات رادیکالی

فرض کنید بخواهیم نقطه‌ای را روی محور xها بیابیم که فاصلهٔ آن از نقطهٔ $P(۲و۳)$ برابر ۵ باشد. مسئله چند جواب دارد؟

برای این کار فرض می‌کنیم مختصاتِ نقطهٔ مورد نظر به‌صورت $A(x و ۰)$ باشد. مقدار x را به‌دست می‌آوریم.

$$AP=\sqrt{(x_A-x_P)^۲+(y_A-y_P)^۲}=\sqrt{(x-۲)^۲+(۰-۳)^۲}$$

$$AP=۵ \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-۲)^۲+۹}=۵ \qquad (۳)$$

معادلاتی مانند (۳) که در آن عبارتِ رادیکالیِ شامل مجهول وجود دارد، یک معادلهٔ رادیکالی نامیده می‌شود[۱].

> برای حل یک معادلهٔ رادیکالی می‌توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه‌جا کرد که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب‌های حاصل در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند.

برای حل معادلهٔ (۳) در بالا، اگر طرفین تساوی را به توان دو برسانیم، خواهیم داشت:

$$(x-۲)^۲+۹=۲۵$$

$$(x-۲)^۲=۱۶ \quad \Rightarrow \begin{cases}(x-۲)=۴ & \Rightarrow x=۶ & \Rightarrow A(۶,۰)\\ (x-۲)=-۴ & \Rightarrow x=-۲ & \Rightarrow B(-۲,۰)\end{cases}$$

تذکر: عبارت رادیکالیِ معادلهٔ (۳) همواره با معناست؛ چون در آن، حاصلِ زیر رادیکال همواره مثبت است. در این حالت می‌گوییم دامنهٔ متغیر برابر $\mathbb{R}$ است و می‌توانیم بنویسیم $D=(-\infty\,,+\infty)$

مثال: در معادلهٔ $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x-۳}$ ، دامنهٔ متغیر به‌صورت $D=[۱\,,+\infty)$ است (چرا؟).

با به توان رساندن دو طرف معادله داریم:

$۴x=۳x-۳ \Rightarrow x=-۳$ (غیر قابل قبول)

چون جواب به دست آمده خارج از دامنهٔ متغیر است، قابل قبول نیست. شایان ذکر است که جواب‌های درون دامنه نیز به شرطی مورد قبول‌اند که در معادلهٔ اصلی صدق کنند.

۱ــ در این کتاب، تنها معادلات رادیکالی با فرجهٔ ۲ مورد بحث قرار می‌گیرند.

کار در کلاس

۱ معادلات زیر را مانند نمونه حل کنید. آیا تمام جواب‌های حاصل، قابل قبول‌اند؟

الف) $۲\sqrt{۲t-۱}-t=۱$

$$۲\sqrt{۲t-۱}=t+۱$$
$$\Rightarrow ۴(۲t-۱)=(t+۱)^۲$$
$$\Rightarrow t^۲-۶t+۵=۰$$
$$\Rightarrow (t-۱)(t-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱ \\ t=۵ \end{cases}$$

ب) $۲x=۱-\sqrt{۲-x}$

$$\sqrt{۲-x}=۱-۲x$$
$$\Rightarrow ۲-x=۱+۴x^۲-۴x$$
$$\Rightarrow ۴x^۲-۳x-۱=۰$$
$$\Delta=۲۵\ ,\ x=\frac{۳\pm\sqrt{۲۵}}{۲(۴)} \Rightarrow \begin{cases} x=۱ & \text{غیر قابل قبول} \\ x=\frac{-۱}{۴} \end{cases}$$

پ) $\sqrt{x+۷}=\sqrt{x}+۱$

ت) $\frac{۱}{\sqrt{u-۳}}-\frac{۲}{\sqrt{u}}=۰$

ث) $۲+\sqrt{۲x^۲-۵x+۲}=x$

۲ توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشهٔ حقیقی‌اند.

الف) $\sqrt{t}+۲=۰$

ب) $\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲x+۳}+۱=۰$

پ) $\sqrt{۱-x}+\sqrt{x-۲}=۰$

تمرین

۱ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۲}=۵$

ب) $\frac{۱۰}{r}-\frac{۱۵}{۲}=\frac{۲۰}{۳r}-۵$

پ) $\frac{۲x}{x-۳}+\frac{x+۱}{x+۴}=\frac{x-۱}{x-۳}$

ت) $\sqrt{t+۴}=۳$

ث) $k=\sqrt{۶k-۸}$

ج) $x+\sqrt{x}=۶$

چ) $\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲x-۵}=۱$

ح) $\sqrt{m}+\frac{۱}{\sqrt{m}}=۲$

۲ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجلهٔ ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کنند. پس از حروف‌چینی مطالب، او معمولاً ۲ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟


قلعه بهستان ــ ماه‌نشان زنجان

۳ اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت؛ به‌طوری‌که $t=\sqrt{10-\frac{h}{5}}$. این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

۴ الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟
ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۵ معادله‌ای شاملِ مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه‌های آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.