



سی و سه پل، اصفهان

انسان از بدو تولد ناگزیر به آشنایی با فضای هندسی و شکل‌های هندسی است و هندسه در طول تاریخ مشکل‌گشای او در جهت حل مسائل محیط پیرامونی‌اش بوده است. ساخت پل‌ها نمونه‌ای بارز از کارایی هندسه در زندگی روزمره انسان است.

ترسیم‌های هندسی

استدلال و قضیه نالس

تشابه مثلث‌ها

درس اول

درس دوم

درس سوم

درس اول

ترسیم‌های هندسی



انسان از دیرباز برای حل بسیاری از مسائل خود از ترسیم‌های هندسی کمک گرفته است. فرض کنید بخواهیم زمینی مثلث شکل را تنها با کشیدن یک دیوار مستقیم به دو قسمت هم مساحت تقسیم نماییم. چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟

فعالیت

۱ یک نقطه ثابت در صفحه، مانند O را در نظر بگیرید و تمام نقاطی را که به فاصله ثابت ۲ سانتی متر از آن هستند در نظر بگیرید. این نقاط چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟

۲ یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی متر بکشید و یک نقطه دلخواه روی آن در نظر بگیرید. فاصله این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟

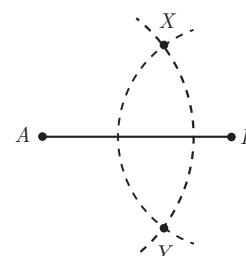
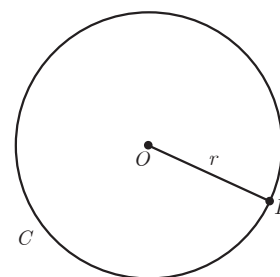
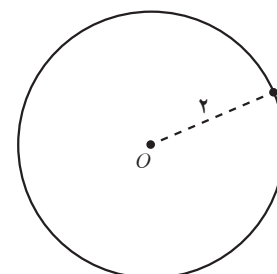
نتیجه: دایره $C(O, r)$ (بخوانید دایره C به مرکز O و به شعاع r) را در نظر بگیرید. هر نقطه که از نقطه O به فاصله r باشد دایره قرار دارد و هر نقطه که دایره قرار دارد از نقطه O به فاصله r است.

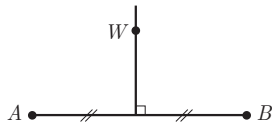
۳ مانند آنچه برای نقاط روی دایره انجام داده شد، یک بار برای نقاط داخل دایره و یک بار برای نقاط بیرون دایره نتایج مشابهی به دست آورید.

۴ خطی مانند d در نظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی متر از خط d هستند مشخص کنید. این نقاط چه شکلی یا شکل‌هایی را تشکیل می‌دهند؟

۵ نقطه P به فاصله ۱ سانتی متر از خط d_1 قرار دارد.
الف) تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه P هستند، مشخص کنید.
ب) نقاطی از خط d_1 را که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه P هستند، مشخص کنید.

۶ نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی متر یک کمان رسم کنید و سپس به مرکز B و به شعاع ۳ سانتی متر کمانی دیگر رسم کنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کند.
الف) اندازه اضلاع مثلث‌های AXB و AYB را مشخص کنید.
ب) توضیح دهید که چگونه می‌توانید مثلثی به طول ضلع‌های داده شده ۴ و ۵ و ۷ رسم کنید.

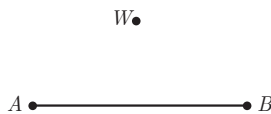




برخی خواص عمود منصف و ترسیم آن

۱- در شکل مقابل پاره خط AB و عمود منصف آن مشخص شده‌اند. نقطه‌ای دلخواه مانند W روی عمود منصف AB در نظر بگیرید و نشان دهید W از دوسر AB به یک فاصله است.

نتیجه ۱: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط

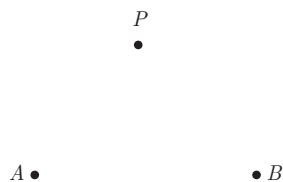


۲- پاره خط AB و نقطه W مانند شکل مقابل به گونه‌ای قرار دارند که W از دوسر AB به یک فاصله است (یعنی $AW = BW$). نشان دهید W روی عمود منصف AB قرار دارد. (راهنمایی: از W به A و B و به وسط AB وصل کنید و با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دهید W روی عمود منصف AB قرار دارد.)

نتیجه ۲: هر نقطه که از دوسر یک پاره خط به فاصله یکسان باشد

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط باشد از و هر نقطه که از روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

فعالیت



۱- نقطه P در صفحه مشخص شده است. چند خط می‌توانید رسم کنید که از نقطه P عبور نمایند؟

۲- دو نقطه A و B در صفحه مشخص شده‌اند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطه A و B عبور نمایند؟

۳- به نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن باید مشخص شده باشد؟

رسم عمود منصف یک پاره خط داده شده

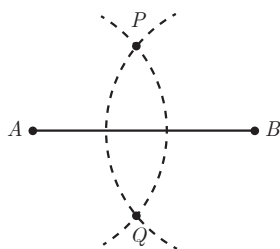
می‌خواهیم عمود منصف پاره خط AB را رسم کنیم.

۱- دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار به مرکز نقطه A و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز B کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند P و Q قطع کنند.

۲- آیا نقاط P و Q تقاطعی متعلق به عمود منصف AB هستند؟ چرا؟

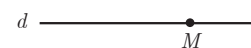
۳- آیا با داشتن نقاط P و Q می‌توان عمود منصف AB را مشخص کرد؟ چرا؟

۴- حال عمود منصف AB را رسم کنید.



رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

خط d و نقطه M روی آن مانند شکل مشخص شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.



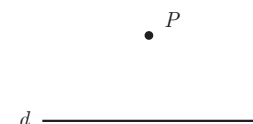
۱- به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d بیابید که $AM=MB$ باشد.

۲- عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنید.

۳- عمودمنصف پاره خط AB خطی است که بر خط d و از نقطه

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن

خط d و نقطه P مانند شکل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه P بگذرد و بر خط d عمود باشد.



۱- به کمک پرگار نقاطی مانند A و B را بر خط d به گونه‌ای بیابید که از نقطه P به یک فاصله باشند.

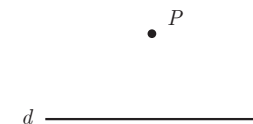
۲- عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنید.

۳- آیا عمودمنصف پاره خط AB از نقطه P می‌گذرد؟ چرا؟

عمودمنصف پاره خط AB بر خط d و از نقطه

رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه‌ای غیر واقع بر آن

خط d و نقطه P مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه P بگذرد و با خط d موازی باشد.



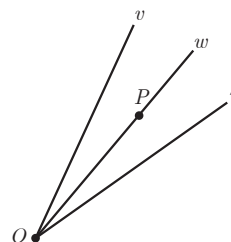
۱- خط d_1 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۲- خط d_2 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه P بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

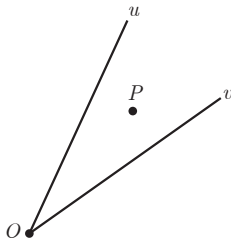
۳- خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب در نظر بگیرید)

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

۱- در شکل مقابل نیم خط ow نیمساز زاویه vOu است. فرض کنید P یک نقطه دلخواه روی ow باشد. ثابت کنید فاصله نقطه P از دو ضلع زاویه vOu یکسان است. (یعنی اگر از نقطه P عمودهایی بر Ou و Ov رسم کنیم، طول آنها باهم برابر است.)



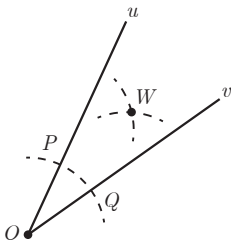
نتیجه ۱: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه



۲- در شکل مقابل فاصله نقطه P از دو ضلع زاویه uOv یکسان است. نشان دهید که نقطه P روی نیمساز زاویه قرار دارد.
(راهنمایی: پاره خط OP را و دو عمود از نقطه P بر Ou و Ov رسم کنید و با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دهید OP همان نیمساز زاویه uOv است.)

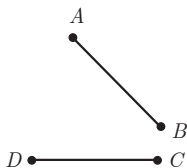
نتیجه ۲: هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصله یکسان باشد، روی

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی یک زاویه قرار داشته باشد، از و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی آن زاویه قرار دارد.



۳- رسم نیمساز یک زاویه
الف) زاویه uOv را در نظر بگیرید. به مرکز O و به شعاع دلخواه کمائی رسم کنید تا نیم خط‌های Ou و Ov را در نقاطی مانند P و Q قطع کند.
- طول پاره خط‌های OP و OQ نسبت به هم چگونه‌اند؟
ب) دهانه پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره خط PQ باز کنید و یک بار به مرکز P و بار دیگر به مرکز Q کمائی رسم کنید تا دو کمان مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع کنند. طول پاره خط‌های PW و QW نسبت به هم چگونه‌اند؟
پ) پاره خط‌های WO ، WP و WQ را رسم کنید. دو مثلث OPW و OQW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
- اندازه زاویه‌های POW و QOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
- پاره خط OW زاویه uOv است.

تمرین



۱ الف) دو پاره خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطه C و D نیز به یک فاصله باشد.
ب) نقطه مورد نظر در قسمت الف) را O می‌نامیم. اگر نقطه O روی عمود منصف پاره خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رأس‌های چهارضلعی $ABCD$ نسبت به دایره G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۲) مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. عمود منصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۳) مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویه این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. از نقطه O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۴) فرض کنید نقطه A به فاصله ۴ سانتی متر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

(الف) مثلثی متساوی الساقین که A یک رأس آن و قاعده آن بر خط d منطبق باشد.

(ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی متر باشد.

(پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن 8cm^2 باشد.

• A



آبشار شوی خوزستان

نسبت و تناسب

در پایه‌های قبل با دو مفهوم نسبت و تناسب و برخی خواص ابتدایی آنها آشنا شده‌اید. می‌دانیم که هر دو نسبت مساوی یک تناسب تشکیل می‌دهند.

می‌دانیم که اگر یک مقدار ثابت را با دو طرف یک تساوی جمع و یا تفریق کنیم، تساوی دوباره برقرار خواهد بود. همچنین اگر دو طرف یک تساوی را در یک مقدار ضرب کنیم یا به یک مقدار غیر صفر تقسیم نماییم، تساوی برقرار می‌ماند. با توجه به این مطلب هریک از خواص زیر را به راحتی می‌توان ثابت کرد.

کار در کلاس

۱ با فرض اینکه تمام مخارج مخالف صفرند و با توجه به نکات گفته شده در بالا هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$ (طرفین وسطین)

ب) $ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (تبدیل حاصل ضرب به تناسب)

پ) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (معکوس کردن تناسب)

ت) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \end{cases}$ (تعویض جای طرفین با وسطین)

ث) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \\ \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \end{cases}$ (ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)

راهنمایی: در قسمت (ث) برای اثبات اولین تناسب به دو طرف تساوی عدد ۱ را اضافه کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسر را معکوس نمایید، سپس به دو طرف عدد ۱ را اضافه کنید.

ج) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \\ \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c} \end{cases}$ (تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)

راهنمایی: در قسمت (ج) برای اثبات اولین تناسب از دو طرف تساوی عدد ۱ را کم کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس کرده، سپس از دو طرف عدد ۱ را کم کنید.

۲ با توجه به خواص اثبات شده در ۱ موارد زیر را کامل کنید.

الف) $\frac{5}{14} = \frac{15}{42} \Rightarrow 5 \times \text{---} = 15 \times \text{---}$

ب) $3 \times 40 = 12 \times 10 \Rightarrow \frac{3}{\text{---}} = \frac{12}{\text{---}}$

پ) $\frac{7}{10} = \frac{21}{30} \Rightarrow \frac{10}{\text{---}} = \frac{\text{---}}{7}$

ت) $\frac{6}{11} = \frac{18}{33} \Rightarrow \frac{6}{18} = \text{---}$, $\frac{33}{11} = \text{---}$

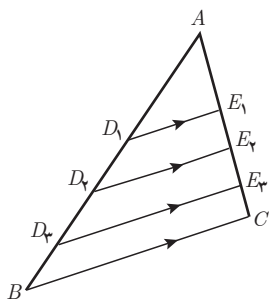
ث) $\frac{4}{14} = \frac{10}{35} \Rightarrow \frac{18}{14} = \text{---}$, $\frac{4}{18} = \text{---}$

ج) $\frac{5}{12} = \frac{10}{24} \Rightarrow \frac{-7}{12} = \text{---}$, $\frac{5}{-7} = \text{---}$



سد باغکل — شهرستان خوانسار — استان اصفهان

استدلال، قضیه تالس و تعمیم آن



در شکل مقابل داریم: $D_1E_1 \parallel BC$ و $D_2E_2 \parallel BC$ و $D_3E_3 \parallel BC$. این اطلاعات را می توان به این صورت نشان داد: $D_iE_i \parallel BC$ برای $1 \leq i \leq 3$
 — اندازه پاره خط های زیر را با خط کش مشخص کرده و در کسرها جایگزین کنید و نسبت های برابر در ستون های متمایز را مشخص نمایید.

$$\frac{AD_1}{D_1B}$$

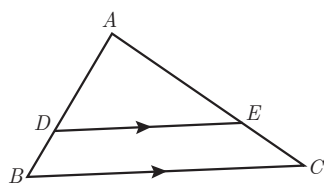
$$\frac{AE_1}{E_1C}$$

$$\frac{AD_2}{D_2B}$$

$$\frac{AE_2}{E_2C}$$

$$\frac{AD_3}{D_3B}$$

$$\frac{AE_3}{E_3C}$$



— اگر پاره خط DE مانند شکل روبه رو موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، حدس می زنید نسبت کدام پاره خط ها با هم برابر باشند؟

_____ = _____

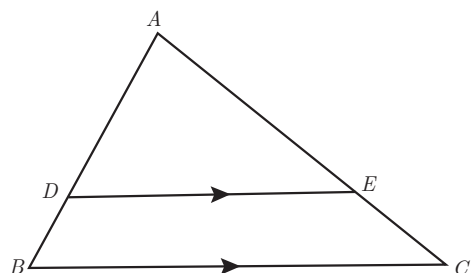
آیا می توان نتیجه گرفت اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود، همواره تساوی مشابه بالا برقرار است؟

در سال های قبل دیدید که نمی توان به درست بودن نتیجه ای که بر اساس مشاهده چند مورد به دست آمده باشد، مطمئن بود.

این نوع از استدلال که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه ای کلی از آن گرفته می شود؛ یعنی «از جزء به کل می رسیم»، استدلال استقرایی نامیده می شود.

استدلال استنتاجی، استدلالی است که بر اساس نتیجه گیری منطقی بر پایه واقعیت هایی که درستی آنها را پذیرفته ایم، بیان می شود.

در ریاضیاتی که تاکنون خوانده اید، با مواردی از استدلال های استنتاجی مواجه شده اید. در ادامه با استدلال استنتاجی، نتیجه ای را که با استدلال استقرایی به دست آوردیم، ثابت خواهیم کرد.



فرض کنید مانند شکل مقابل پاره خط DE موازی ضلع BC باشد.

می‌خواهیم نشان دهیم: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

۱ از نقطه D به C و از E به B وصل کنید. مساحت‌های مثلث‌های DEC و DEB که آنها را با S_{DEC} و S_{DEB} نشان می‌دهیم، با هم برابری دارند. چرا؟

۲ از نقطه E به ضلع AB عمود کنید و پای عمود را H_1 بنامید. سپس از D به ضلع AC عمود کنید و پای عمود را H_2 بنامید.

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}} = \frac{\frac{1}{2} EH_1 \times AD}{\frac{1}{2} EH_1 \times DB} = \frac{AD}{DB}$$

۳

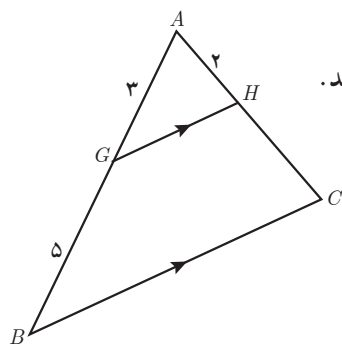
$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{\frac{1}{2} DH_2 \times AE}{\frac{1}{2} DH_2 \times EC} = \frac{AE}{EC}$$

۴

۵ از (۱) و (۳) و (۴) نتیجه می‌شود $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. چرا؟

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به دست می‌آیند، قضیه نامیده می‌شوند.

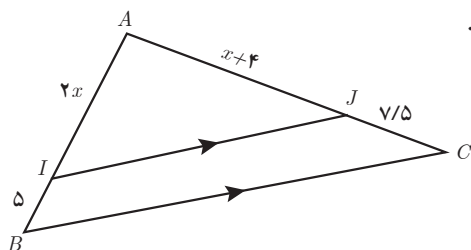
نتیجه بالا قضیه‌ای از تالس^۱ است. همان‌گونه که مشاهده کردید، رابطه بین طول‌های پاره خط‌هایی را که توسط خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، بر دو ضلع دیگر آن مثلث به وجود می‌آید، بیان می‌کند.



۱ در شکل پاره خط‌های GH و BC موازی‌اند. اندازه پاره خط‌های AC و HC را به دست آورید.

۱- فیلسوف و ریاضی‌دان که حدود ۶۲۳ سال قبل از میلاد در نواحی غرب ترکیه امروزی به دنیا آمد. اثبات بسیاری از قضایای مهم هندسی را به او نسبت داده‌اند.

۲ با تشکیل یک معادله، مقدار x و اندازه پاره‌های AI و AJ را به دست آورید.



تعمیم قضیه تالس

فعالیت

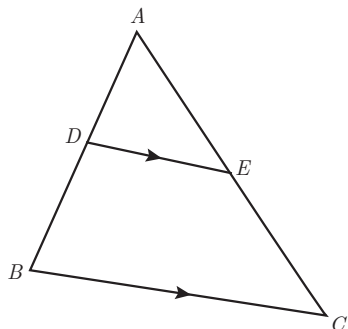
۱ در شکل مقابل $DE \parallel BC$.

الف) تناسب قضیه تالس را بنویسید.

ب) به کمک ترکیب نسبت در مخرج تناسب $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

پ) به کمک تفذیل نسبت در صورت از تناسب به دست آمده در (ب) تناسب $\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

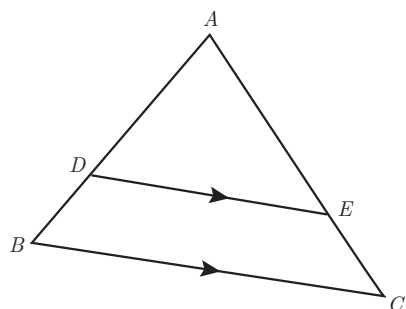
توجه کنید که تناسب‌های به دست آمده در (ب) و (ج) صورت‌های دیگر قضیه تالس‌اند.



۲ در مثلث ABC پاره‌خط DE موازی ضلع BC است. ابتدا تناسب قضیه تالس را

بنویسید. سپس با توجه به ویژگی‌های تناسب و تکمیل تساوی‌های زیر، تناسب‌های دیگری را از قضیه تالس نتیجه بگیرید.

$$\frac{AD}{DB} = \dots \Rightarrow \begin{cases} \frac{DB}{DA} = \dots & \frac{BD}{BA} = \dots & \frac{AB}{BD} = \dots \\ \frac{AD}{AB} = \dots & \frac{AB}{AD} = \dots \end{cases}$$



۳

الف) در شکل پاره‌خط‌های DE و BC موازی‌اند. با توجه به قضیه تالس داریم: $\frac{AD}{AB} = \dots$

ب) پاره‌خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم. بنابراین داریم: $\frac{BF}{BC} = \dots$

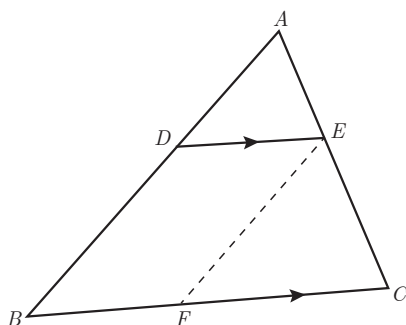
پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) داریم: $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{BC}$

ت) چهارضلعی $DEFB$ چه نوع چهارضلعی‌ای است؟

پاره‌خط BF با کدام پاره‌خط برابر است؟ $BF =$

ث) با توجه به قسمت‌های (پ) و (ت) داریم: $\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{BC}$

این رابطه تعمیم قضیه تالس است.



کار در کلاس

در شکل پاره خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} = \frac{PQ}{BC}$

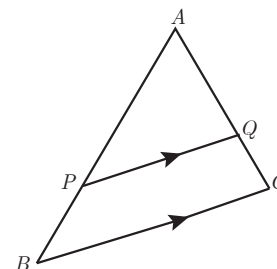
ب) $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$

پ) $\frac{PB}{AP} = \frac{QC}{AQ} = \frac{PQ}{BC}$

ت) $\frac{PB}{AB} = \frac{QC}{AC} = \frac{PQ}{BC}$

ث) $\frac{PB}{AB} = \frac{QC}{AC}$

ج) $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{PQ}$



اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا کنیم، آنچه حاصل می‌شود، «عکس قضیه» است. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

در مثال‌های زیر قضیه و عکس آن آمده است.

مثال ۱:

قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهاش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه: اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال ۲:

قضیه: اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

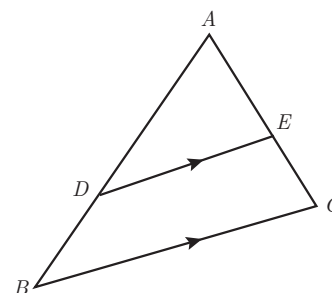
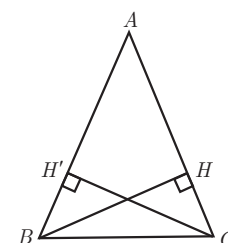
فرض: $AB=AC$

حکم: $BH=CH'$

عکس قضیه: اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH=CH'$

حکم: $AB=AC$



مثال ۳: در قضیه تالس فرض و حکم به صورت زیر است.

فرض: $DE \parallel BC$

حکم: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

با توجه به آنچه گفته شد، فرض و حکم عکس قضیه تالس را بنویسید.

فرض :

حکم :

به عبارت دیگر عکس قضیه تالس می‌گوید هرگاه پاره خط DE مانند شکل پاره خط‌های AB و AC را به گونه‌ای قطع کرده باشد که داشته باشیم $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ، در این صورت پاره خط DE موازی پاره خط BC است. به نظر شما عکس قضیه تالس درست است یا نه؟ کمی بعد به بررسی این مسئله خواهیم پرداخت.

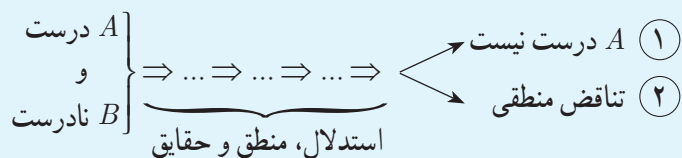
معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض با حکم جابه‌جا می‌شود و قسمت‌هایی از فرض ممکن است هم در قضیه و هم در عکس آن ثابت باشند؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC هم در خود قضیه و هم در عکس آن جزء مفروضات است.

برهان خلف

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی از آن استفاده می‌شود، برهان غیرمستقیم یا برهان خلف است. در برهان خلف به جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجه غیرممکن می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

مسئله: $A \Rightarrow B$ (حکم) A (فرض): مسئله

اثبات به روش برهان خلف :



پس نتیجه می‌گیریم حکم B درست است، زیرا در صورت نادرستی B طبق استدلال فوق به یکی از نتایج ۱ یا ۲ می‌رسیم که هیچ‌کدام نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

مثال : اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه n نیز عددی فرد است.

حل :

با استفاده از برهان خلف فرض کنیم مسئله نادرست باشد؛ یعنی n عددی فرد نباشد؛ بنابراین n عددی زوج خواهد بود و می‌توان

نوشت $n=2k$ به طوری که k یک عدد طبیعی باشد.

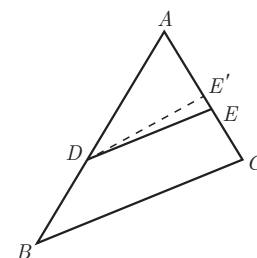
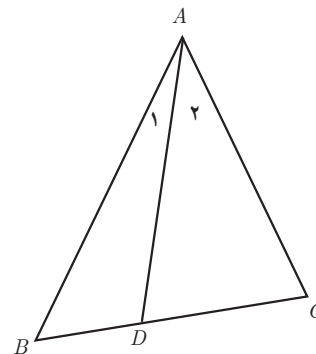
بنابراین $n^2=4k^2=2(2k^2)$ که عددی زوج است و با فرض مسئله در تناقض است؛ لذا از ابتدا n نمی توانست عددی زوج باشد.

مثال: فرض کنیم AD نیمساز زاویه A از مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq DC$ باشد، آن گاه $AB \neq AC$.

حل:

با استفاده از برهان خلف فرض می کنیم حکم نادرست باشد.

بنابراین داریم $AB = AC$ (فرض خلف) در این صورت خواهیم داشت $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (چرا؟). از این هم نهستی نتیجه خواهد شد $BD = DC$ است، که با فرض مسئله در تناقض است. لذا از ابتدا فرض $AB = AC$ نادرست بوده است، بنابراین $AB \neq AC$ است. حال می خواهیم با استفاده از برهان خلف درستی عکس قضیه تالس را ثابت کنیم.



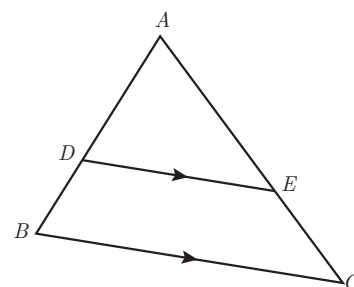
عکس قضیه تالس: مانند شکل مقابل در مثلث ABC ، اگر $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ ، آن گاه $DE \parallel BC$.

اثبات: با استفاده از برهان خلف فرض می کنیم حکم مسئله غلط باشد؛ یعنی $DE \not\parallel BC$. لذا از نقطه D خطی موازی BC رسم می کنیم تا AC را در نقطه ای مانند E' قطع کند. طبق قضیه تالس داریم $\frac{AE'}{E'C} = \frac{AD}{DB}$ و از مقایسه با فرض مسئله خواهیم داشت $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$. حال با ترکیب نسبت در مخرج داریم $\frac{AE}{AC} = \frac{AE'}{AC}$ و در نتیجه $AE = AE'$. این یعنی نقطه E بر E' منطبق است و لذا DE همان DE' است و این یک تناقض است، زیرا $DE' \parallel BC$ و $DE \not\parallel BC$ است. بنابراین از ابتدا فرض غلط بودن حکم نادرست بوده است و حکم نمی تواند غلط باشد، یعنی $DE \parallel BC$ است.

قضیه های دو شرطی

همان گونه که دیدیم، قضیه تالس و عکس آن هر دو درست اند؛ بنابراین برای مثلی مانند $\triangle ABC$ در شکل مقابل می توان هر دوی آنها را به صورت زیر بیان کرد:

اگر $DE \parallel BC$ ، آن گاه $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ و برعکس.



چنین قضیه هایی را قضیه های دو شرطی می نامیم. قضیه های دو شرطی را با نماد \Leftrightarrow

۱- این نماد نشان دهنده آن است که هر کدام از طرفین می توانند طرف دیگر را نتیجه دهند؛ لذا یا هر دو طرف درست اند و یا هر دو طرف نادرست اند.

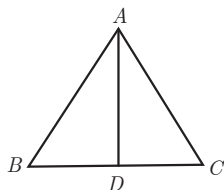
(که اگر و تنها اگر خوانده می‌شود) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیه فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

فرض کنیم ABC یک مثلث و نقاط D و E به ترتیب روی AB و AC باشند. در این صورت

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow DE \parallel BC$$

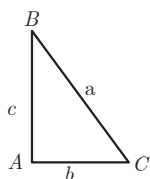
در ادامه مثال‌هایی از قضایای دو شرطی ملاحظه خواهید کرد.

مثال : در یک مثلث دو ضلع برابرند؛ اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌رو به آنها باهم برابر باشند.



مثال : در مثلث متساوی‌الاضلاع یک پاره‌خط نیمساز است؛ اگر و تنها اگر میانه باشد.

کار در کلاس



با توجه به قضیه فیثاغورس اگر زاویه A از مثلثی مانند ABC ، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.
الف) عکس این قضیه را بنویسید.

ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

۱- فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازه اضلاع آن برقرار است.

۲- پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به‌گونه‌ای در نظر بگیرید که $\hat{A}' = 90^\circ$ و $A'B' = AB$ و $A'C' = AC$ است.

۳- با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ ، اندازه پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

۴- توضیح دهید چرا $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به‌صورت یک قضیه دو شرطی بیان کنید.

مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که در پایه‌های قبل نیز تا حدودی با آن آشنا شده‌اید، استدلال با مثال نقض است. اگر فردی ادعا کند که «همه اعداد فرد، اول‌اند»، این یک حکم کلی درباره تمام اعداد فرد است و ارائه عدد ۹ به عنوان عددی که فرد و غیر اول است، برای رد این ادعا کافی است. به چنین مثالی که برای رد یک حکم کلی استفاده می‌شود، مثال نقض می‌گوییم. به عنوان مثالی دیگر؛ فرض کنیم فردی ادعا کند که «هیچ فرد ایرانی‌ای تا به حال مدال

فیلدز 'نگرفته است'. در این صورت شما برای رد ادعای او چه می‌توانید بگویید؟ اگر شما حتی یک فرد ایرانی را که مدال فیلدز گرفته است، برای او مثال بزنید، در این صورت ادعای او باطل شده است و در واقع شما با استفاده از یک مثال نقض، ادعای او را باطل کرده‌اید.

با دقت در ادعای مطرح شده خواهیم دید که کلمه «هیچ» در این حکم باعث می‌شود که این ادعا یک حکم کلی برای تمام اعضای یک مجموعه (که در اینجا مجموعه افراد ایرانی است) باشد. بنابراین در این مورد نیز آوردن یک مثال نقض کافی است تا آن حکم رد شود و به عبارتی غلط بودن آن حکم اثبات گردد.

در ادامه نمونه‌هایی از حکم‌های کلی آمده‌اند.

(الف) همه اعداد اول فردند. (حکم کلی درباره تمام اعداد اول)

(ب) «در هر مستطیل اندازه قطر‌ها باهم برابر است.» (حکم کلی درباره تمام مستطیل‌ها)

(پ) «به ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

درباره درستی یا نادرستی حکم «الف» چه حدسی می‌زنید؟ چگونه می‌توانید حدس خود را ثابت کنید؟ می‌دانیم که ۲ یک عدد اول و زوج است. بنابراین حکم کلی «الف» با ارائه همین مثال نقض رد می‌شود. درباره درستی یا نادرستی حکم‌های «ب» و «پ» چه حدس‌هایی می‌زنید؟ آیا می‌توانید برای آنها مثال نقض بیابید و آنها را باطل کنید؟ اگر برای یک حکم کلی بتوانیم مثال نقض ارائه کنیم، درباره درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در این حالت درستی حکم را باید پذیرفت؟

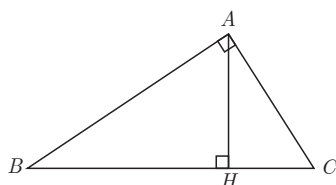
برای قسمت (ب) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش این حکم کافی نیست و باید توجه کرد که «برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید آن را اثبات کنیم».

درباره گزینه (پ) چه می‌توان گفت؟

اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی بر ما مشخص نباشد و برای رد آن، مثال نقض نیز نتوانیم ارائه دهیم، نمی‌توان درباره درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه‌ای گرفت.

تمرین

۱ در شکل مقابل مساحت مثلث قائم‌الزاویه ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت به دست آمده برای مساحت مثلث، یک تناسب به دست آورید.



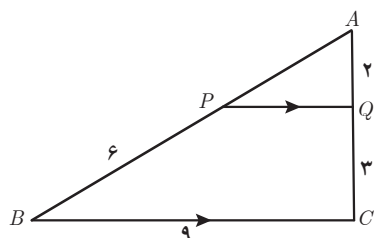
۱- مدال یا نشان فیلدز (Fields medal) جایزه‌ای است که به ابتکار ریاضی‌دان کانادایی جان چارلز فیلدز هر چهار سال یک‌بار به ریاضی‌دانان جوان (کمتر از چهل سال) که کار ارزنده‌ای در ریاضی انجام داده باشند تعلق می‌گیرد. از آنجا که در رشته ریاضی جایزه نوبل اهدا نمی‌شود، این جایزه را «نوبل ریاضیات» می‌خوانند. در سال ۲۰۱۴ نشان فیلدز به ریاضی‌دان ایرانی خانم مریم میرزاخانی تعلق گرفت. گفتنی است که میرزاخانی اولین زنی در دنیاست که موفق به گرفتن این نشان شده‌است. البته با تأسف تمام موقع تدوین کتاب خبر درگذشت ایشان، جهان علم و جامعه ایرانی را سخت متأثر ساخت، روایتش شاد

۲ در هر مورد، مقدار عددی نسبت $\frac{a}{b}$ را به دست آورید.

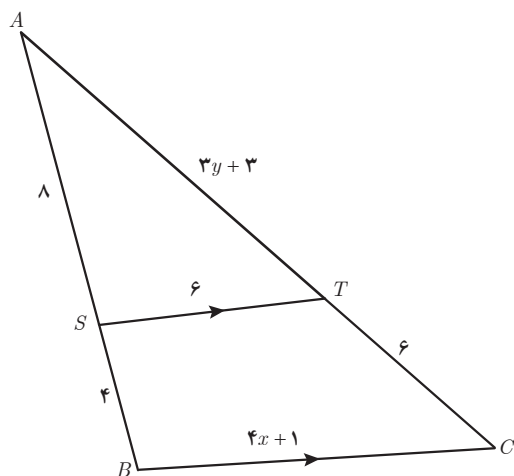
الف) $\frac{a}{10+a} = \frac{b}{8+b}$

ب) $\frac{3a+10}{10+2a} = \frac{3b+7}{7+2b}$

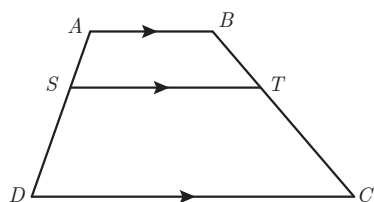
۳ ثابت کنید در هر مثلث، پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.



۴ در شکل مقابل $PQ \parallel BC$ است. طول پاره‌خط‌های AP و PQ را به دست آورید.



۵ در شکل مقابل $ST \parallel BC$ است. مقادیر x و y را به دست آورید.



۶ در دوزنقه مقابل $AB \parallel ST \parallel DC$ است. ثابت کنید: $\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$ (راهنمایی: یکی از قطر‌ها را رسم کنید.)

۷ در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آنچه را داده شده است، بنویسید.

الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

ب) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو موازی باشند، در این صورت زوایای مقابل با هم برابرند.

پ) اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در این صورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.

ت) در یک مثلث اگر دو ارتفاع ناهم‌راستا باشند، «ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ‌تر» کوچک‌تر است از «ضلع مقابل به ارتفاع کوچک‌تر».

(راهنمایی: شکل بکشید و به زبان ریاضی بنویسید)

۸ با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.

۹ هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) هیچ عدد اولی بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد. ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

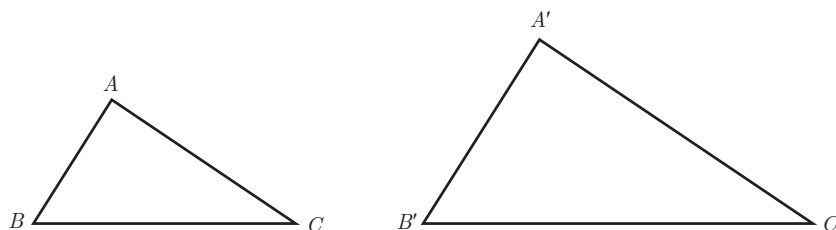
پ) در هر مثلث اندازه هر ضلع از اندازه هر ارتفاع بزرگ‌تر است. ت) در هر مثلث میانه و عمود منصف متناظر به هر ضلع بر هم منطبق‌اند.

درس سوم

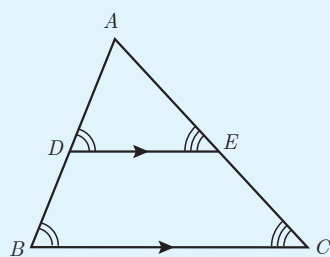
تشابه مثلث‌ها

در پایه نهم با مفهوم تشابه آشنا شدید. با توجه به مفهوم تشابه، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند؛ هرگاه زوایای متناظر باهم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد؛ یعنی:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \text{ و } \hat{B} = \hat{B}' \text{ و } \hat{C} = \hat{C}' \\ \text{و} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \end{cases}$$



در این صورت نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث را نسبت تشابه دو مثلث می‌نامیم. مثلاً اگر $\frac{AB}{A'B'} = \frac{2}{3}$ باشد، می‌گوییم مثلث ABC با مثلث $A'B'C'$ با نسبت تشابه $\frac{2}{3}$ ، متشابه است. در این صورت مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{3}{2}$ ، متشابه خواهد بود.



قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.

اثبات:

۱- داریم $\hat{E} = \hat{C}$ و $\hat{D} = \hat{B}$ (چرا؟)

بنابراین زاویه‌های دو مثلث نظیر به نظیر باهم برابرند.

۲- با توجه به قضیه تالس داریم:

۳- با توجه به (۱) و (۲) و تعریف تشابه داریم:

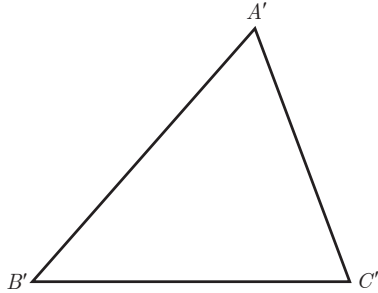
$$\frac{AD}{\dots} = \frac{DE}{\dots} = \frac{AC}{\dots}$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

با استفاده از قضیه‌ی اساسی تشابه مثلث‌ها می‌توان سه قضیه‌ی بعد را که **حالت‌های تشابه دو مثلث** را بیان می‌کنند، اثبات کرد. از آنجا که اثبات این قضیه‌ها مدنظر نیست، در ادامه تنها صورت آنها بیان شده است.

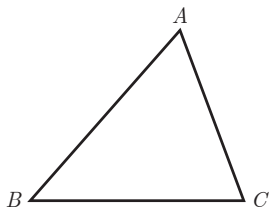
قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\hat{A} = \hat{A}' \text{ و } \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C')$$



قضیه ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

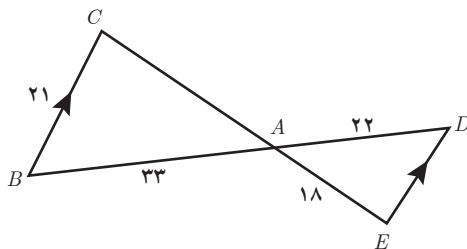
$$\left(\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \right)$$



قضیه ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

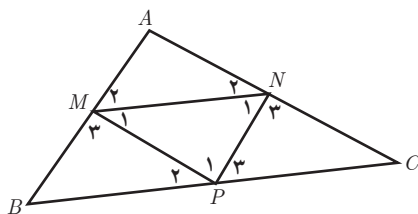
کار در کلاس



۱ در شکل مقابل $BC \parallel DE$.

اندازه پاره خط‌های CA و DE را به دست آورید.

۲ اگر نقاط P و N و M مطابق شکل وسط‌های اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید مثلث‌های ABC و MNP متشابه‌اند.



حل:

الف) $MN \parallel BC$ و $NP \parallel AB$ و $MP \parallel AC$ چرا؟

ب) بنابراین $\hat{M}_1 = \hat{P}_3 = \hat{B}$ و $\hat{N}_2 = \hat{P}_1 = \hat{C}$ (چرا؟)

از ب) درباره مثلث‌های مورد نظر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۳ اگر سه مثلث ABC و $A'B'C'$ و $A''B''C''$ به گونه‌ای باشند که $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ و $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ ، دربارهٔ دو مثلث ABC و $A''B''C''$ چه می‌توان گفت؟ چرا؟

برخی روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:

فعالیت

فرض کنید مثلث ABC مانند شکل یک مثلث قائم‌الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد.

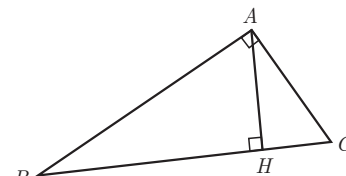
۱ نشان دهید دو زاویه از مثلث AHC با دو زاویه از مثلث ABC برابرند و نتیجه بگیرید:

$$\triangle ABC \sim \triangle AHC$$

۲ نشان دهید دو زاویهٔ مثلث AHB با دو زاویه از مثلث ABC برابر است و نتیجه بگیرید:

$$\triangle ABC \sim \triangle AHB$$

۳ از (۱) و (۲) دربارهٔ مثلث‌های AHC و AHB چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



نتیجه: در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آورد که این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

$$\triangle ABC \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AH}{\dots} = \frac{AC}{\dots} = \frac{HC}{\dots} \Rightarrow AC^2 = \dots \times \dots \quad ۴$$

$$\triangle ABC \sim \triangle AHB \Rightarrow \frac{AH}{\dots} = \frac{AB}{\dots} = \frac{HB}{\dots} \Rightarrow AB^2 = \dots \times \dots \quad ۵$$

$$\triangle AHB \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AH}{\dots} = \frac{AC}{\dots} = \frac{HC}{\dots} \Rightarrow AH^2 = \dots \times \dots \quad ۶$$

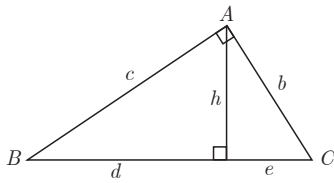
۷ با جمع طرفین روابط ۴ و ۵ رابطهٔ فیثاغورس را برای مثلث ABC نتیجه بگیرید.

$$BC^2 = \dots + \dots$$

۸ مساحت مثلث ABC را به دو طریق محاسبه و با توجه به آن تساوی زیر را کامل کنید.

$$AB \times \dots = AH \times \dots$$

در مثلث قائم الزاویه مقابل در هر مورد سعی کنید با ساده‌ترین روش مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



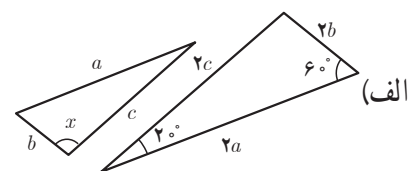
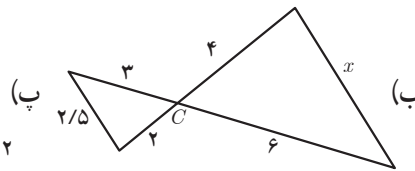
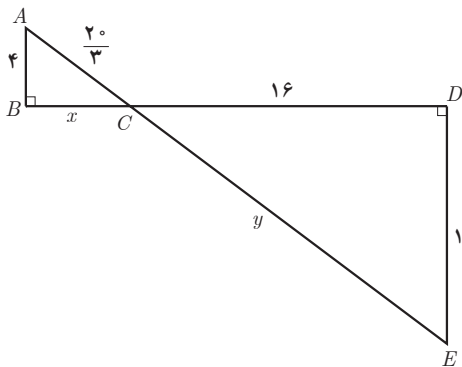
۱ $e=?$ $d=7$ $h=5$

۲ $c=?$ $b=?$ $e=3$ $d=5$

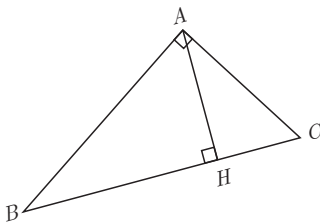
۳ $h=?$ $b=6$ $c=8$

تمرین

۱ در هر قسمت تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و مقادیر x و y را مشخص نمایید.



۲ در مثلث قائم الزاویه روبه‌رو در هر حالت، اندازه پاره خط خواسته شده را به دست آورید.

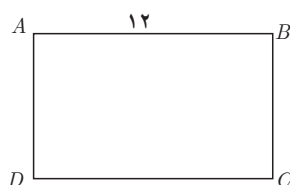


الف) $BC=10$ و $BH=9$ و $AH=?$ و $AB=?$ و $AC=?$

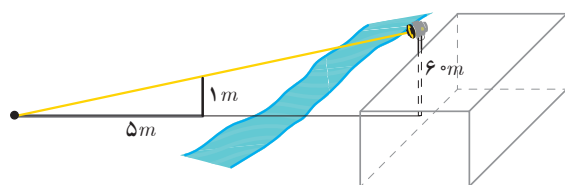
ب) $AC=5$ و $CH=2$ و $BC=?$ و $AH=?$ و $AB=?$

پ) $AB=8$ و $AC=6$ و $BC=?$ و $AH=?$

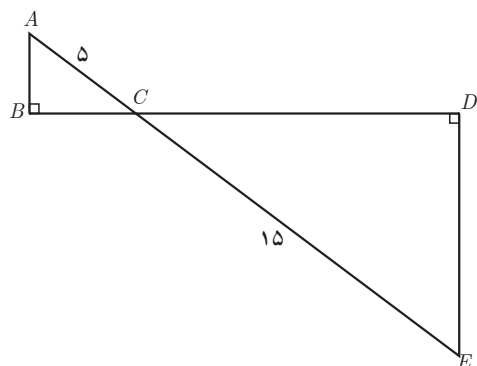
ت) $AB=12$ و $AH=6$ و $BH=?$ و $BC=?$ و $AC=?$



۳ شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطه A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم، طول BH برابر ۱۱ است. اندازه عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازه عرض مستطیل را محاسبه کنید.



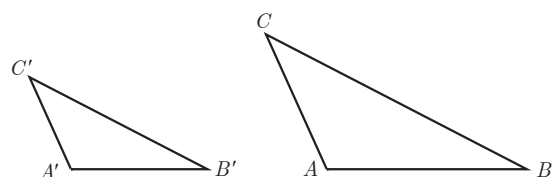
۴ بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می خواهد فاصله خود را تا پایه نورافکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول یک متر را روی زمین قرار می دهد و مشاهده می کند که طول سایه چوب برابر ۵ متر است. فاصله این مرد تا پای نورافکن چقدر است؟



۵ در شکل مقابل دو مثلث قائم الزاویه مشاهده می کنید. نسبت محیطها و مساحت های آنها را به دست آورید.

۶ دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ را با نسبت تشابه K در نظر بگیرید؛ به گونه ای که $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K$ باشد. حال ارتفاع های AH و $A'H'$ را در دو مثلث رسم کنید. الف) ثابت کنید مثلث های AHB و $A'H'B'$ متشابه اند.

ب) نسبت $\frac{AH}{A'H'}$ را به دست آورید.



پ) نسبت مساحت های $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}$ را محاسبه کنید.

ت) نسبت محیط های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را به دست آورید.