

فصل ۱ - آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

درس ۱

گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

درس ۲

استدلال ریاضی

قُلْ هَاتُوا بُرْهَانَكُمْ إِنْ كُنْتُمْ صَادِقِينَ

(آیه ۱۱۱ بقره)

«بگو اگر راست می‌گویید دلیل خود را بیاورید»



«نَحْنُ أَبْنَاءُ الدَّلِيلِ، نَمِيلُ حَيْثُ يَمِيلُ» امام صادق (ع)

ما فرزندان دلیل و برهانیم و در قضاوت به‌سویی که دلایل هدایت‌مان کنند می‌رویم.

درس ۱

گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

منطق^۱ در لغت به معنای «آنچه به گفته درآمده» و عموماً آن را به معنای بررسی استدلال‌ها تعبیر می‌کنند. کاربرد منطق در تشخیص اعتبار استدلال‌هاست. امروزه منطق صرفاً به عنوان شاخه‌ای از فلسفه شمرده نشده و در ریاضیات و علوم مربوط به رایانه نیز به آن پرداخته می‌شود.

تعبیر دیگری از منطق، روش درست فکر کردن است. با تکیه بر این تعبیر می‌توان ادعا کرد که منطق دانان و افرادی که با منطق مأنوس‌ترند، بسیار کمتر از دیگران در استدلال‌ها اشتباه می‌کنند.

از میان انواع منطق و کاربردهای آن در این فصل قصد داریم شما را با منطق ریاضی^۲ که شاخه‌ای از ریاضیات است و به بیان ریاضی گونه منطق می‌پردازد، آشنا کنیم. اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، منطق ریاضی، دستور این زبان است.

در بین جملاتی که ما از آنها استفاده می‌کنیم، جملات خبری از اهمیت و جایگاه ویژه‌ای برخوردارند و به‌ویژه صدق و کذب یا درستی و نادرستی این خبرها برای ما و مخاطب ما اهمیت دارد. به عنوان مثال وقتی شما به دوست خود می‌گویید: «من امروز ساعت ۸ صبح در محل قرار حضور داشتم.» خبری را برای او بیان می‌کنید که صدق یا کذب این خبر برای شما و دوستان مهم است. در منطق ریاضی به هر جمله خبری که بتوانیم (در حال حاضر یا در آینده) دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) را به آن نسبت بدهیم، یک گزاره گفته می‌شود.

جمله‌های غیر خبری مانند «چه هوای خوبی» یا «شما اهل کجائید؟» و همچنین جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش آنها را تعیین کنیم، گزاره نیستند؛ مثلاً «درس فلسفه از درس عربی آسان‌تر است».

فعالیت

۱. کدام یک از جملات زیر گزاره است؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

(الف) شما چند سال دارید؟

(ب) عدد ۲ عددی اول است.

(پ) عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا است.

(ت) افلاطون شاگرد ارسطو است.

(ث) $2+3 \times 4 = 20$

(ج) عدد $(-1)^n$ عددی همواره مثبت است. ($n \in N$)

(چ) سیب قرمز از سیب زرد خوش‌مزه‌تر است.

(ح) لطفاً تخته را پاک کن.

^۱_ Logic

^۲_ Mathematical Logic

۲. دو گزاره درست و دو گزاره نادرست بیان کنید و همچنین دو جمله بنویسید که گزاره نباشند.

گاهی اوقات گزاره‌ای که بیان می‌کنیم، ترکیبی از دو یا چند گزاره است. در این صورت برای تشخیص درستی یا نادرستی این گزاره‌ها که به گزاره‌های ترکیبی معروف‌اند، باید بیشتر تأمل کنیم و آنها را دقیق‌تر بررسی کنیم. به عنوان مثال جمله «۳ عددی فرد است و $\sqrt{2}$ عددی گنگ است»، از ترکیب دو گزاره ساده «۳ عددی فرد است» و « $\sqrt{2}$ عددی گنگ است» توسط حرف ربط «و» ساخته شده است. واضح است که ارزش این گزاره ترکیبی به ارزش دو گزاره ساده مذکور بستگی دارد. اگر هر دو گزاره نادرست باشند، ارزش گزاره ترکیبی چیست؟ اگر هر دو درست باشند، چه ارزشی برای آن قائل هستید؟ اگر یکی از گزاره‌ها درست و دیگری نادرست باشد، چه پاسخی می‌دهید؟ در حالت کلی برای یک گزاره ترکیبی که از ترکیب دو گزاره به دست آمده، و نسبت به ارزش‌های این دو گزاره، چند حالت می‌توان در نظر گرفت؟ آیا حروف ربط دیگری برای ترکیب دو گزاره وجود دارد؟ برای پاسخ به سؤال‌های اخیر نیاز داریم تا از نمادها و قراردادهایی استفاده کنیم. به مجموعه این قراردادهای نمادگذاری‌ها جبر گزاره‌ها یا حساب گزاره‌ها گفته می‌شود.

در منطق ریاضی و در جبر گزاره‌ها هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند p یا q یا r ... نمایش می‌دهیم. در سه جدول زیر وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده است. شما جدولی را برای نمایش وضعیت ارزشی چهار گزاره تشکیل دهید.

p
د
ن

$$2^1 = 2$$

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

$$2^2 = 4 = \text{تعداد حالت‌های ارزشی دو گزاره}$$

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

$$2^3 = 8 = \text{تعداد حالت‌های ارزشی سه گزاره}$$

نقیض یک گزاره: نقیض گزاره p را با نماد $(\sim p)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت «نقیض p » یا «چنین نیست که p » می‌خوانیم. از آنجا که هر گزاره یک جمله خبری است و حتماً دارای فعل، برای بیان نقیض یک گزاره کافی است فعل جمله را نفی کنیم و واضح است که با این کار ارزش گزاره p اگر درست باشد، ارزش گزاره $(\sim p)$ نادرست و اگر p گزاره‌ای نادرست باشد، ارزش گزاره $(\sim p)$ درست خواهد بود.

به عنوان مثال، نقیض گزاره « a مثبت است»، به صورت « a مثبت نیست» بیان می‌شود. به جدول زیر توجه کنید:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

در هر یک از حالت‌های زیر نقیض گزاره را بیان کنید؛ سپس، ارزش هر یک را مشخص کنید.

(الف) عدد ۵ زوج است.

(ب) تساوی « $2 \times 2 = 4$ » برقرار است.

(پ) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر است.

(ت) ارسطو شاگرد افلاطون است.

(ث) ایران در منطقه غرب آسیا قرار دارد.

(ج) $(3 \times 7) > (5 \times 4)$

در مثال قبل اگر نقیض گزاره « a مثبت است»، را به صورت « a منفی است» تعبیر کنیم، این دو گزاره نقیض هم نیستند؛ زیرا

وقتی a مثبت نباشد، یا منفی است یا صفر است، در صورتی که « a منفی است» شامل صفر نمی‌شود.

ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی و در حساب گزاره‌ها، به صورت‌های متفاوتی می‌توان گزاره‌های ساده را با هم ترکیب و گزاره‌های مرکب تولید کرد. در این کتاب، ترکیب گزاره‌ها توسط ۴ رابط «و»، «یا»، «شرطی» و «دو شرطی» انجام می‌شود. هر گزاره مرکب که از ترکیب دو یا بیشتر از دو گزاره ساده تولید می‌شود، خودش یک گزاره است و باید بتوانیم ارزش آن را تعیین کنیم. به گزاره‌های ترکیبی زیر توجه کنید؛

(الف) «۵ عددی فرد است و ۴ عددی اول است».

(ب) «۱۲۱ مضرب ۱۲ است یا $\sqrt{3}$ مثبت است».

(پ) «اگر من مسلمان باشم، آنگاه نبوت حضرت رسول اکرم صلی الله علیه و آله را قبول دارم».

(ت) «اگر n عددی زوج باشد، آنگاه n^2 زوج است و اگر n^2 زوج باشد، آنگاه n زوج است».

هر یک از گزاره‌های ترکیبی فوق از ترکیب دو گزاره به دست آمده‌اند و اگر از شما بخواهیم ارزش هر یک از آنها را تعیین کنید، شاید کمی مشکل به نظر برسد، ولی آنچه که مسلم است این است که ارزش گزاره‌های ترکیبی فوق به ارزش (درستی یا نادرستی) گزاره‌های ساده تشکیل‌دهنده آنها و نوع رابط به کار رفته بین آنها بستگی دارد.

۱. ترکیب عطفی دو گزاره: گزاره «عدد ۳ فرد است و ۷ عددی اول است» را در نظر بگیرید. چه استنباطی نسبت به درستی یا نادرستی این گزاره دارید؟ نسبت به صدق و کذب گزاره «افلاطون شاگرد ارسطو است و عدد ۴ زوج است»، چه استنباطی دارید؟ کاملاً واضح است که صدق یک گزاره مرکب که از ترکیب دو گزاره ساده با لفظ «یا» تشکیل شده است، درستی هر دو گزاره را طلب می‌کند. به نظر شما گزاره دومی چه ارزشی دارد؟ توجه دارید که افلاطون شاگرد ارسطو نبوده است!

هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند p و q را با لفظ «و» ترکیب کنیم، از نماد « \wedge » بین دو گزاره استفاده می‌کنیم و آن را ترکیب عطفی دو گزاره می‌نامیم و می‌نویسیم « $p \wedge q$ »؛ و آن را به صورت « p و q » می‌خوانیم. ارزش ترکیب عطفی دو گزاره با توجه به جدول صفحه بعد تعیین می‌شود:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش درست است که هر دو گزاره ارزش درست داشته باشد و اگر حداقل یکی از دو گزاره نادرست باشند، « $p \wedge q$ » نادرست است.

فعالیت

در جدول زیر روبه‌روی گزاره‌های داده شده ارزش آنها را با علامت \checkmark مشخص کرده و نیز با توجه به ارزش داده شده با یک گزاره ساده، گزاره مرکب را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	هفته هفت روز دارد و ماه شهریور ۳۱ روز دارد		
۲	قرآن دارای ۳۰ جزء است و همه سوره‌های آن با بسم‌الله شروع می‌شود.		
۳ و ۸ زوج است.		\checkmark
۴	کتاب قرآن ۱۱۴ سوره دارد و	\checkmark	
۵	۵۷ عددی اول است و ۲ عددی اول نیست.		
۶	۲ > ۵ و		\checkmark

۲. ترکیب فصلی دو گزاره : اگر شخصی به شما بگوید؛ «آن حیوان، پرنده است یا مهره‌دار است»؛ صدق گفته او را در چه صورتی تأیید می‌کنید؟ اگر پس از بررسی معلوم شود که حیوان مورد نظر نه پرنده بوده است و نه از تیره مهره‌داران بوده است، آیا گزاره مذکور دارای ارزش درست بوده است؟ در واقع صدق یک گزاره مرکب که از ترکیب دو گزاره ساده با لفظ «یا» تشکیل شده است، در صورتی تأیید می‌شود که حداقل یکی از دو گزاره ساده، ارزش درست داشته باشند.

هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند p و q را با لفظ «یا» با هم ترکیب کنیم، از نماد « \vee » استفاده می‌کنیم و آن را ترکیب فصلی دو گزاره نامیده و می‌نویسیم « $p \vee q$ » و آن را به صورت « p یا q » می‌خوانیم. ارزش ترکیب فصلی دو گزاره با توجه به جدول زیر تعیین می‌شود :

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

همان طور که ملاحظه می کنید، ترکیب فصلی دو گزاره تنها وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره نادرست باشد و اگر حداقل یکی از دو گزاره، ارزش درست داشته باشد، در این صورت ارزش ترکیب فصلی آنها درست است.

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	عدد ۴ عددی فرد یا عددی اول است		
۲	حضرت مهدی <small>علیه السلام</small> امام دوازدهم شیعیان است یا	✓	
۳	۹۱ عددی مرکب است یا	✓	
۴ یا افلاطون نویسنده کتاب ارغنون است.	✓	
۵ یا	✓	

۳. ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه بخواهیم از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم، از نماد « \Rightarrow » استفاده می کنیم و می نویسیم: « $p \Rightarrow q$ » و آن را به صورت های زیر می خوانیم:

(اگر p آنگاه q) ، (p نتیجه می دهد q را) ، (q از p نتیجه می شود)

در گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ »، p را مقدم و q را تالی می نامیم.

ارزش گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » با توجه به جدول زیر تعیین می گردد:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

همان طور که ملاحظه می کنید، گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ فقط زمانی دارای ارزش نادرست است که مقدم؛ یعنی p درست بوده ولی تالی یعنی q دارای ارزش نادرست باشد (از یک گزاره درست نتیجه ای نادرست حاصل شود) و در بقیه موارد ارزش « $p \Rightarrow q$ » درست است.

به ویژه وقتی که ارزش مقدم گزاره شرطی یعنی p ، نادرست باشد، همواره « $p \Rightarrow q$ » دارای ارزش درست بوده و درست یا نادرست بودن q تأثیری در ارزش گزاره « $p \Rightarrow q$ » ندارد؛ بنابراین در هر یک از دو حالت مذکور، گزاره شرطی به انتفای مقدم دارای ارزش درست است.

◆ مثال:

۱. گزاره‌های «اگر $۳^۲=۶$ آنگاه، ۵ اول است» و «اگر ۸ فرد است، آنگاه $۲>۴$ » هر دو به انتفای مقدم درست هستند.
۲. گزاره «اگر ۱۷ اول است آنگاه ۱۸ اول است» نادرست است.
۳. گزاره «اگر $۲^۴=۴^۲$ آنگاه $۲^۳>۳^۲$ » درست است.

تذکر: در تعیین ارزش گزاره‌های شرطی، در صورتی که ارزش تالی درست باشد، نمی‌توانیم ایرادی از کل گزاره شرطی بگیریم؛ زیرا نتیجه شرط، درست است و اگر از مقدم ایراد بگیریم، گوینده به راحتی می‌تواند با کلمه «اگر» که روی مقدم بیان می‌شود، ایراد را رفع کند؛ و چنانچه ارزش تالی نادرست باشد و مقدم نیز دارای ارزش نادرست باشد، درست بودن گزاره $p \Rightarrow q$ فاقد ایراد است. (از بیان گزاره‌ای نادرست به نتیجه‌ای نادرست رسیدن، عجیب نیست!)

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید:

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۷ زوج است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۲	اگر ۹ مربع کامل است، آنگاه $\sqrt{۹}$ مربع کامل است.		
۳	اگر ۲۹ اول است، آنگاه ۲ زوج است.		
۴	اگر آنگاه	✓	
۵	اگر آنگاه		✓
۶	اگر ۷ فرد است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.		
۷	اگر آنگاه ۹۹ اول است.	✓	

کار در کلاس

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان، مشخص کنید:

- ۱) $(q \Rightarrow p) \wedge r$ (ارزش گزاره $(q \Rightarrow p)$ به انتفای مقدم درست بوده و لذا ارزش گزاره $r \wedge (q \Rightarrow p)$ به ارزش گزاره r بستگی دارد.)
- ۲) $(p \vee q) \vee r$
- ۳) $(p \Rightarrow q) \wedge r$
- ۴) $(r \Rightarrow p) \vee q$
- ۵) $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$
- ۶) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
- ۷) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

۴. ترکیب دو شرطی: هرگاه بخواهیم از گزاره p ، گزاره q را نتیجه بگیریم و نیز از گزاره q ، گزاره p را نتیجه بگیریم، از نماد « \Leftrightarrow » استفاده کرده و می نویسیم « $p \Leftrightarrow q$ » و آن را به صورت های « p نتیجه می دهد q را و q نتیجه می دهد p را»، «اگر p آنگاه q و اگر q آنگاه p »، «اگر p آنگاه q و برعکس»، « p شرط لازم و کافی است برای q » و « p اگر و تنها اگر q » می خوانیم. در واقع گزاره دو شرطی « $p \Leftrightarrow q$ » همان گزاره « $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ » است.

تذکر: هم ارزش بودن دو گزاره p و q را با نماد $p \equiv q$ نشان می دهیم؛ در این صورت:

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

بنابراین با توجه به ارزش گزاره های شرطی و عطفی ارزش گزاره های دو شرطی طبق جدول زیر به دست می آید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

همان طور که در ستون آخر مشاهده می کنید، اگر دو گزاره p و q هم ارزش باشند؛ یعنی $p \equiv q$ (هر دو درست یا هر دو نادرست) در این صورت ارزش گزاره دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ ، درست است.

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۲ فرد است، آنگاه ۸ عددی اول است و برعکس.		
۲	اگر دو عدد فرد باشند آنگاه مجموع آنها زوج است و برعکس.		
۳ اگر و تنها اگر ۱۱۹ عددی مرکب است.	✓	
۴	اگر آنگاه و برعکس		✓
۵	یک چهار ضلعی مربع است، اگر و تنها اگر آن چهار ضلعی لوزی باشد.		
۶	اگر واریانس داده ها برابر صفر باشد؛ آنگاه داده ها با یکدیگر برابرند و برعکس		

کار در کلاس

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید:

۱) $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$

۲) $(\sim p \Leftrightarrow q) \vee r$ چون $\sim p \equiv q$ پس $(\sim p \Leftrightarrow q) \equiv T$ و لذا ترکیب فصلی یک گزاره درست با هر گزاره‌ای، دارای ارزش درست است.

۳) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

۴) $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

۵) $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \vee q)$

۶) $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$

۷) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

♦ مثال: با استفاده از جدول ارزش‌ها درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

ب) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

پ) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

ت) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

ث) $(p \vee \sim p) \equiv T$ و $(p \wedge \sim p) \equiv F$

الف)

p	q	$\sim p$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \vee q$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د

ب)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	د	د

۱- T ابتدای کلمه True به معنی راست (درست) و F ابتدای کلمه False به معنی دروغ (نادرست) است.

تذکر: گزاره $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ را عکس نقیض گزاره $(p \Rightarrow q)$ می نامیم.

پ)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \vee q)$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن	...	ن	...
د	ن	ن	...	د
ن	د	د	...	د	...	ن
ن	ن	د	د	...

تذکر: این قانون با هم ارزی؛ یعنی $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ و مشابه آن؛ یعنی $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ به قوانین دمورگان معروف اند.

ث)

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن

ت)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
د	د	د	د
د	ن	ن	...
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	...

تذکر: گزاره های نظیر $(p \vee \sim p)$ را گزاره های همیشه درست و $(p \wedge \sim p)$ را همیشه نادرست می نامیم.

تمرین

۱. جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	بزرگ ترین معجزه پیامبر اسلام ﷺ قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است.		
۲	اگر آنگاه مربع هر عدد فرد عددی زوج است.	✓	
۳	اگر تهران پایتخت ایران است؛ آنگاه	✓	
۴	$4 \times 2 = 2^2 \Rightarrow 8^2 > 4^2$		
۵	اگر عدد ۳ اول و عدد ۷ زوج باشد، آنگاه ۱۸ مربع کامل است.		
۶	اگر ۲ عددی زوج یا منفی باشد، آنگاه عدد ۵ اول است.		
۷	اگر فارابی معلم ثانی است، آنگاه افلاطون معلم اول است.		
۸	امام خمینی رحمه الله در سال ۱۳۴۳ تبعید و در سال ۱۳۵۷ به ایران بازگشتند.		
۹	حضرت علی (علیه السلام) اولین مردی است که پس از پیامبر، اسلام آوردند و	✓	
۱۰	اگر آنگاه و برعکس	✓	

۲. اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هریک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید :

الف) $(p \vee r) \Rightarrow p$

ب) $(q \wedge r) \Rightarrow r$

پ) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge r)$

ت) $(\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

ث) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

ج) $(q \vee r) \Rightarrow (r \Rightarrow p)$

چ) $(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$

ح) $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r$

خ) $(r \Rightarrow p) \wedge p$

۳. درستی هریک از هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید :

الف) $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

ب) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

پ) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

ت) $(p \Rightarrow p) \equiv T$

ث) $(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

ج) $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$